

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

У.Х. Хонқулов

**МАТЕМАТИКА ФАНИНИ ЎҚИТИШДА КОМБИНАТОРИКА
МАСАЛАЛАРИ**

(Академик лицей ва касб- ҳунар коллежлари учун ўқув-услубий қўлланма)

Гулистон-2008

Улугбек Хурсаналиевич Хонқулов

Математика фанини ўқитишда комбинаторика масалалари (академик лицей ва касб-хунар коллежлари учун ўқув-услубий қўлланма).

Ўқув қўлланма Гулистон давлат университети Ўқув-услубий кенгаши (5-февраль 2008 йил №4 баённома) томонидан ўқув-услубий қўлланма сифатида тасдиқланган.

Такризчилар:

Фармонов Ш.Қ Физика-математика фанлари доктори, академик.

Мирзаев Ч. Э Педагогика фанлари номзоди, доцент.

Зокиров А 1-тоифали математика ўқитувчиси.

Муҳаррир: Физика -математика фанлари

номзоди, доцент Г. Ғоймназаров.

Ўқув-қўлланмада комбинаторика элементларини чуқурроқ ўрганиш, улардан касб эгаллашда фойдаланиш, талабаларнинг математика фанига қизиқишларини орттириш мақсадида математик масалалар танланган ва уларни ечиш усуллари кўрсатилган.

Бу қўлланмадан олий ўқув юртларининг (жумладан бошланғич таълим, математика, амалий математика ва информатика, иқтисодиёт факультети ва бошқа) талабалари фойдаланишлари мумкин.

Сўз боши

Математика инсоният тарихида турли ҳаётий масалаларни ечишда азалдан қўлланиб келинган. Инсоннинг амалий эҳтиёжлари билан боғлиқ содда ҳисоблашлар ва ўлчашлар бажарилган. Объектларни танлаш ва уларни маълум тартибда жойлаштириш каби математик масалалар ҳар доим инсонни қизиқтирадиган соҳалардан ҳисобланган.

Математиканинг берилган объектлардан маълум шартларни қаноатлантирувчи комбинациялар тузишни ўргатувчи бўлимига комбинаторика деб аталади. Комбинаторика ёрдамида ўрганилаётган ҳодисаларнинг математик модели тузилади. Маълумки, ҳодиса эҳтимолини топиш математик формулалар билан ифодаланади. Бу эса бирор ўрганилаётган жараённинг (ҳодисанинг) математик моделидир. Ҳодиса эҳтимолини ўрганишда, аввало, комбинаторика тушунчасини киритиш зарурияти туғилади. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанини ўрганишда комбинаторика масалалари талабани бу фанларга қизиқтирадиган асосий мотивлардан ҳисобланади. Комбинаторика элементлари мактаб математика курсида авваллари (бунда комбинаторика элементлари фанига ўқувчини қизиқтириш учун йўналтирилган) ҳам ўқитилган. Бироқ ўқув дастурларида комбинаторика элементларини касб ўрганишда математик татбиқлар, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанлари учун асос сифатида қаралмаган. Шу боисдан кейинчалик комбинаторика элементлари мактабда ўқитилмаган.

Янгиланган таълим тизимимизда математиканинг янги мазмуни яратилиши ва уни ўрганиш учун замонавий усулларини қўлланилиши талаб қилинмоқда. Комбинаторика тарихига назар ташласак, бир неча минг йил аввал Хитойда сеҳрли квадратлар тузиш, қадимги Юнонистонда фигурали сонлар назариясини тузиш масаласини ўрганишган. Кейинчалик шашка, карта, шошқол, домино каби ўйинлар комбинаторик масалаларни вужудга келтирган. Комбинаторика масалалари Самарқанддаги Улуғбек мактабининг таниқли математики Ғиёсиддин Жамшид Коший, X асрда яшаб ижод этган Умар Ҳайём, кейинчалик Европа олимлари жумладан, Б. Паскаль, Ж. Кордано, Г.

Лейбниц, Я. Бернулли, П. Ферма, Л. Эйлер ва бошқа олимларнинг ишларида учрайди. XVII асрда комбинаторика эҳтимоллар назариясининг яратилиши билан боғлиқ ҳолда мустақил фан сифатида юзага келди.

Касб – ҳунарни эгаллаш ва ихтисосни тўғри танлаш мақсадида эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанлари дунёнинг ривожланган барча давлатларидаги лицей ва касб-ҳунар коллежларида ўрганилади.

Ҳозир республикамиз таълим тизимидаги академик лицей ва касб-ҳунар коллежларида ҳам комбинаторика элементлари ўрганилмоқда. Бироқ комбинаторика элементларини ўрганиш мазмуни ва унинг ўрганиш усуллари бугунги талабга тўла жавоб бермайди.

Мазкур ўқув-қўлланмада академик лицей ва касб-ҳунар коллежларида комбинаторика элементларини чуқурроқ ўрганиш, келажакда эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанини ўрганишда етарлича асос яратилиши билан боғлиқ муаммоларни ҳал қилишга қаратилган.

1-§. Бирлашмалар (комбинаторика) ҳақида умумий тушунча.

Комбинаторикада нима ырганилади? Комбинаторик ҳарактерга эга бўлган масалаларни мумкин бўлган барча вариантлар сонини ҳисоблашда «нечта?» ёки «неча хил усулда?» каби саволарга жавоб бериш талаб қилинади.

Таъриф: Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир-биридан шу нарсаларнинг тартиби ёки ўзи билан фарқ қилувчи тўпламлар (группалар) бирлашмалар (комбинаторика) дейилади. Бирлашмани ташкил этган нарсалар элементлар дейилади. Бирлашмалар (комбинаторика)да қуйидагилар ўрганилади: ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, группалашлар ва бином формуласи.

$A = \{6, 7, 9\}$ ва $B = \{a, b, c\}$ тыпламлар элементларидан шундай жуфтликлар тузайликки, улардаги биринчи ыриндаги A нинг тартиб билан олинган элементи, иккинчи ыринда B нинг тартиб билан олинган элементи ёзиладиган былсин. Шосил быладиган жуфтликлар тыплами $A \times B$ ор=али белгиласак,

$$A \times B = \{(6; a), (6; b), (6; c), (7; a), (7; b), (7; c), (9; a), (9; b), (9; c)\}$$

Агар биринчи ыринда B элементлари ыйиладиган былса, ёзилиши ва тартиби билан олдингисидан фармиладиган

$$B \times A = \{(a; 6), (a; 7), (a; 9), (b; 6), (b; 7), (b; 9), (c; 6), (c; 7), (c; 9)\}$$

тыплам щосил былади.

$(6, a), (6, b), \dots$ жуфтликлар (иккиликлар) таркибидаги элементлар шу жуфтликнинг компонентлари ёки координаталари дейилади (лотинча компонентис—ташкил этувчи).

Шу каби берилган A, B, C тыпламлар элементларидан тартибланган учталиклар, умуман, k та тыплам элементларидан тартибланган k таликлар тыплами тузилади. k та щар хил элементли тыплам узунлиги $n = k$ га тенг дейилади. Масалан, $(4; 12; 13)$ ва $(\sqrt{16}; \sqrt{144}; \sqrt{169})$ учликлар тенг ва бир хил узунликларда ($n = 3$), компонентлари: $4 = \sqrt{16}$, $12 = \sqrt{144}$, $13 = \sqrt{169}$. Лекин $(a; b; c)$ ва $(c; a; b)$ учликларнинг узунликлари ва координаталари бир хил былсада, лекин улар тенг эмас, чунки координаталари турли тартибда жойлашган.

Бирорта щам компонентга эга былмаган (яъни 0 узунликдаги) k талик быш k талик дейилади. Тыпламда элементларнинг тартиби рол ыйнамайди, k таликда координаталар такрорланиш мумкин.

A ва B тыпламлар элементлари сонини мос равищда $n(A)$, $n(B)$ ор=али, умумий жуфтликлар сонини эса $n(A \times B)$ ор=али белгилаймиз.

Теорема. A ва B чекли тыпламлар элементлардан тузилган жуфтликлар сони шу тыпламлар элементлари сонларининг кыпайтмасига тенг.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Бирлашмалар (комбинаторика)нинг ҳар бир тушунчасини қуйидаги асосий қоидалардан фойдаланиб, келтириб чиқариш мумкин.

Қўшиш қоидаси: Агар X ва Y ўзаро кесишмайдиган тўплам бўлса, бу тўпламларнинг бирлашмасига тегишли бўлган элементлар сони уларнинг ҳар

биридаги элементлар сонига тенг. Агар X объектни n та усулда танлаш, Y объектни эса m та усул билан танлаш мумкин бўлса ва бу усуллар бир-биридан фарқли бўлса ёки бир бирига боғлиқ бўлмаса, X ёки Y объектни танлашни $n + m$ та усул билан бажариш мумкин.

Кўпайтириш қондаси: X_1 элементни n_1 та усул билан, X_2 элементни n_2 усул билан ва ҳ.о, охири $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ танланишлардан кейин X_k элемент n_k та усулда танланса, у ҳолда $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ жуфтликни $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ та усулда танлаш мумкин.

1-мисол. Рақамлари ҳар хил бўлган нечта тўрт хонали сонлар тузиш мумкин.

Ечиш: Рақамлари a_1, a_2, a_3, a_4 бўлган сонга (a_1, a_2, a_3, a_4) жуфтликни мос келтирамиз, у ҳолда a_1 элементни 9 та усул билан (1,2,3,...,9 рақамлар орасидан), a_2 элементни эса танлаш учун 9 та усул (0,1,2,...,9 рақамларнинг a_1 дан фарқли бўлган ихтиёрий бири), a_1 ва a_2 элемент танлангандан сўнг a_3 ни танлаш учун 8 та имконият, a_4 элементни танлаш учун 7 та имконият мавжуд. Кўпайтириш қондасига кўра изланаётган сонлар сони $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ та бўлади.

2-масала. Гуруҳда 15 та ўғил бола ва 17 та қиз боладан иборат. Гуруҳ раҳбари улар ичидан бир талабани шахмат мусобақасига танлаб олиши керак. Бу танлашдан кейин 1 та ўғил ва 1 та қиз болани шашка мусобақасига танлайди. У бу ишни неча хил усул билан қилиши мумкин.

Ечиш: Қўшиш қондасига кўра биринчи танлашда $15 + 17 = 32$ та имконият мавжуд. Бу танланишдан кейин гуруҳ талабалар сони биттага камаяди. Агар бу танланма ўғил бола бўлса, кўпайтириш қондасига биноан $14 \cdot 17 = 238$ та, танланма қиз бола бўлса, $15 \cdot 16 = 240$ та усул билан бажариш мумкин.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. $A(0;1;3;9)$ ва $B(8;5;3)$ тўпламлар берилган бўлсин. У ҳолда $n(A \times B)$ умумий жуфтликлар сонини топинг.

Ж: $n = 12$ та.

2. Анвар 10 та дафтар ва 15 та қалам ичидан дафтар ёки қаламлардан бирини олди. Наргиза эса 1та қалам ва 1та дафтар олди. Анварнинг танлаш имконияти Наргизанинг имкониятидан катта бўлиши мумкинми?

Ж: Мумкин эмас. Анварда 25та, Наргизада 150 та имконият бор.

3. Саватларни бирида 10 дона олма, иккинчисида эса бир неча дона шафтоли бор. Азиз меваларни биридан олиши мумкин. У бу ишни 21 та усулда бажаради. Иккинчи саватда неча дона шафтоли бор.

Ж: 11 та.

4. $0,1 \dots 9$ рақамлари ва А,В,С. ҳарфлари ёрдамида нечта машинани номерлаш мумкин. (номер иккита ҳарф ва 4 та рақамдан иборат.)

Ж: $27 \cdot 10^4 = 270000$ дона.

5. «Математика» сўзидан олдин 2 та унли кейин 3 та ундош ҳарф келадиган қилиб нечта сўз ясаш мумкин (сўз деганда ихтиёрий ҳарфлар кетма кетлиги тушинилади).

Ж: 5^5

2-§. Ўринлаштиришлар.

$n = 3$ та элементли $X = \{3;4;5\}$ тўплам элементлардан икки хонали сонлар, яъни жуфтликлар тузайлик: 34,35,45,43,53,54. Бу сонлар тартибланган тўпламлардан иборат. Улар жамининг сонини A_3^2 та деб белгилаймиз (ўқилиши: “3 элементдан 2 тадан олиб, тузилган ўринлаштиришлар сони”). Бизда $A_3^2 = 6$ бўлмоқда. Ихтиёрий n учун бу сонни шисоблаш формуласини топайлик. Щар айси жуфтликнинг биринчи компонентасини ё 3, ё 4, ё 5, яъни уни $n = 3$ та ихтиёрий танлаш имкони бор. Агар биринчи компонента танланган бўлса, иккинчи компонентани танлаш учун $n - 1 = 2$ хил танлаш

имкони =олади. Демак, жами жуфтликлар сони $A_3^2 = 3 \cdot (3 - 1)$ та, яъни $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ та былади.

Таъриф: n та элементдан k ($k \leq n$) тадан олиб ўринлаштириш деб шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирида берилган n та элементдан k та элемент бўлиб, улар бир-биридан элементлари ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилади.

n та элементдан k тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар сони A_n^k символ билан белгиланади (А французча “arrangement” – ўринлаштиришнинг бош ҳарфи).

n та элементли X тўпلام элементларидан k тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар деб X тўпلامнинг k узунликдаги тартибланган қисм тўпламига айтилади.

Уларнинг сони: $A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1))$ га тенг. (1)

Уни $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин. Бу ерда ҳар бир жуфтликлар бир биридан таркиби ва тартиби жиҳатдан фарқ қилади. Шунинг учун, 1-компонента ихтиёрий тартибда n хил танланади. У шундан 2-компонента учун $n - 1$ хил танланиш ва шундан охириги n компонента учун $n - (n - 1)$ танланиш имкони =олади ва бунда шундан айси компонента такрор танланмайди. Барча k узунликдаги ўринлаштиришлар сони кўпайтмани шисоблаш =оидасига мувофиқ (1) формула бййича топилади.

1- мисол. Гуруҳда 8та фан ўқитилади ва ҳар куни 3 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс жадвали неча турли усул билан тақсимлаб қўйилиши мумкин?

Ечиш: Бу тақсимлаш усули 8 та элементдан 3 тадан олиб тузилган ўрин алмаштиришлар сонига тенг. Демак, $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ та усул билан дарсларни тақсимлаш мумкин.

2- мисол. $A = \{1, 2, 3\}$ тўпلامнинг қисм тўпламлари сонини топинг.

Ечиш: k та элементли тўпламнинг қисм тўплamlари сонини 2^k та бўлишини математик индукция методи бўйича исбот қилиш мумкин. Берилган тўпламнинг қисм тўплamlари сони $2^3 = 8$ та бўлади. Улар қуйидагилар: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ ва бўш тўплам.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Ҳар хил рақамли 4 рақами қатнашмаган беш хонали сонлар сони нечта.

$$\text{Ж: } 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

2. А,В,С,Д,Е,Ф элементлардан битта ҳарф такрорланмайдиган қилиб, нечта тўрт ҳарфли сўз тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

3. Ҳар бир ўқувчи камида битта китоб олиши мумкин бўлса, тўртта ўқувчи 12 та китобни неча хил усулда тақсимлаб олишади.

$$\text{Ж: } 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$$

4. $\{a, d, b, m\}$ тўпламнинг барча қисм тўплamlари сонини топинг.

$$\text{Ж: } 2^4 = 16 \text{ та.}$$

5. Бир гуруҳда 17 та талаба иккинчи гуруҳда 20 та талаба ўқийди. Биринчи гуруҳдан 4 та иккинчи гуруҳдан 5 та талаба бўлган кичик гуруҳлар сони нечта.

$$\text{Ж: } A_{17}^4 \cdot A_{20}^5$$

3-§. Такрорланувчи ўринлаштиришлар.

Ушбу мисолга арайлик. Лекин энди берилган $n = 3$ та элементи $X = \{3; 4; 5\}$ тўплам элементлардан компоненталари такрорланадиган жуфтликларини ҳам тузиш талаб қилинсин. Улар: 33, 44, 55, 34, 35, 45, 43, 53, 54 бўлиб, жами $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ та жуфтликлар. Умуман, n та элементли X тўплам элементларидан тузилган такрорланадиган

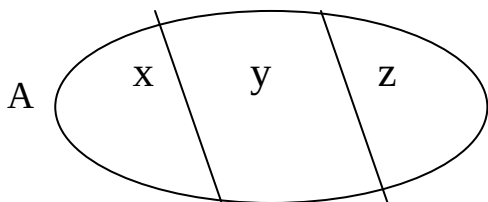
k та компоненти k та ликлар сони k та бир хил тўпلام элементларнинг сонига тенг. Бу сон k та $n(X)$ кыпайтувчи кыпайтмасидан иборат:

$$n(X) \cdot n(X) \cdot \dots \cdot n(X) = (n(X))^k = n^k$$

n та элементли X тўпلام элементларидан тузилган ва элементлари такрорланувчи k талик жуфтликлар k тадан олиб тузилган такрорланувчи ўринлаштиришлар дейилади.

Уларнинг сони: $\overline{A_n^k} = n^k$ (2) формула ёрдамида ҳисобланади. (A ҳарфи устидаги чизиқча элементлар такрорланиши мумкинлигини кўрсатади

1- мисол. Қуйидаги чизмада бир жойдан икки марта ўтмасдан A ва B нуқталарни туташтирувчи нечта эгри чизиқлар ўтказиш мумкин.



Ечиш: Кўндаланг чизиқлар A ва B нуқталардан ташкил топган шаклни учта қисмга ажратади. Уларни бир-биридан фарқлашимиз учун 1- йўл ва 2- йўл деб белгилаймиз. Демак, (x, y, z) жуфтликлар сонини топиш керак.

x элемент 1 ёки 2- йўл танлангани қабул қилиши мумкин, y, z элементлар ҳам худди шундай имкониятга эга. Бошқача қилиб айтганда, $\{1, 2\}$ тўпلامнинг элементларидан тузилган (x, y, z) жуфтликлар сонига тенг. Бу сон $2^3 = 8$ та.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. 3, 4, 5, 6, 7 сонларидан нечта 3 хонали сонлар тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } 5^3 = 125$$

2. 25 та ўқувчи 5 хил рангли буюқни неча хил усулда танлаш мумкин.

$$\text{Ж: } 25^5$$

3. $n(x) = 15$ ва $n(z) = 13$ бўлсин. x тўпламни z га акслантиришлар сонини топинг.

Ж: 15^{13}

4. $n(x) = 7$ ва $n(y) = 9$ тўпламлар берилган бўлсин. x тўпламни y тўпламга акслантириш y тўпламни x тўпламга акслантиришлар сонидан катта бўлиши мумкинми.

Ж: Мумкин.

5. 0,1,2,...,9. рақамларидан 3 таси бир хил ва 2 таси ҳар хил рақамли нечта беш хонали номер тузиш мумкин.

Ж: $A_{10}^3 \cdot A_9^2 = 10^3 \cdot 9 \cdot 8$

4-§. Ўрин алмаштириш.

Таъриф: Фақат элементларининг тартиби билангина фарқ қилувчи (яъни $n = k$) ўринлаштиришлар сони ўрин алмаштириш дейилади.

m та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони P_n билан белгиланади (P - французча permutation – ўрин алмаштириш сўзининг бош ҳарфи).

n та элементдан тузилган ўрин алмаштириш деб, шу элементлардан n тадан олиб тузилган ўрин алмаштиришларга айтилади. Агар n та элементдан k тадан олиб ўринлаштиришларда $n = k$ бўлса, ўрин алмаштириш ҳосил бўлиб, фақат элементлари тартиби билан фарқланади. Уларнинг сони

$$P_m = A_m^m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = m! , \quad P_n = n! \quad \text{га}$$

тенг.

(Изоҳ. $n!$ - бирдан n гача натурал сонлар кўпайтмаси бўлиб, “ n факториал” деб ўқилади).

1-мисол. Бешта 1,2,3,4,5 ўлчамли маҳсулотларни яшикларга жойлаштириш керак. Агар 2 нинг 3 дан кейин жойлаштириш мумкин бўлмаса, унда маҳсулотларни неча хил усул билан жойлаштириш мумкин?

Ечиш: Бешта яшикка 5 хил ўлчамли маҳсулотни жойлаштиришлар сони $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ та. Агар {2,3} жуфтликни олиб 1,(2,3),4,5 ўлчамлардан ўрин алмаштиришлар тузилса, $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ та. У ҳолда мисол шarti бўйича $120-24=96$ та.

2- мисол. Китоб тоқчасидаги 15 та китобдан 3 таси рус, инглиз, француз тилида. Бу китобларни ёнма-ён келадиган қилиб неча хил усулда жойлаштириш мумкин?

Ечиш: Бу учта китобдан битта жуфтлик тузамиз. Улар орасида $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ та ўрин алмаштиришлар мавжуд. Тоқчада жуфтлик тузилгандан кейин 13 та элемент қолади (учталиқ китоблар жуфтлиги билан). Ўзаро ўрин алмаштиришлар сони $P_{13} = 13!$ биргаликда ўрин алмаштиришлар сони эса $P_{13} \cdot P_3 = 13! \cdot 6$ та.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Йигирма нафар ўқувчидан иборат синфда ўзаро совға алмаштиришлар сони қанча.

$$\text{Ж: } P_{20} = 20 !$$

2. Меҳнат сўзидан 6 та ҳарфдан иборат нечта ҳар хил сўз тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } P_6 = 6 !$$

3. А,В,С,Д,Е ҳарфларидан А ҳарфи В ҳарфидан кейин жойлашадиган қилиб ўрин алмаштиришлар сони қанча?

$$\text{Ж: } P_4 = 4! = 24 .$$

4. А,В,С,Д,Е ҳарфларидан А ҳарфи В ҳарфидан кейин, С ҳарфи Е ҳарфидан кейин жойлашадиган қилиб ўрин алмаштиришлар сони қанча?

Ж: $P_3 = 6$ та.

5. Китоб тоқчасидаги 10 та математика ва 8 та физика китобларининг ўзаро ўрин алмаштиришлари сони қанча? (Математика ва физика китоблари ўзаро аралашиб кетиши мумкин эмас). Уларни ўзаро аралаштирмасдан нечта ўрин алмаштириш бажариш мумкин?

Ж: $P = P_{10} + P_8 = 10! + 8!$

5-§. Такрорли ўрин алмаштириш.

Такрорли ўрин алмаштириш деб, таркибида a_1 элемент k_1 марта a_2 элемент k_2 марта, ..., a_m элемент k_m марта қатнашувчи $k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ узунликдаги k таликка айтилади. Уларнинг сони

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \text{ га тенг, бу ерда } k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

Такрорсиз ўрин алмаштиришлар формуласининг $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, бўлган хусусий ҳоли.

1-мисол. Ўн олтига ўқувчини 8 та партага 2 тадан неча хил усулда жойлаштириш мумкин?

Ечиш: Масала шартига кўра $k = 16$ $k_1 = k_2 = \dots = k_8 = 2$

$$\frac{P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)}{8!} = \frac{16!}{(2!)^8 \cdot 8!} \text{ та усулда жойлаштириш мумкин. Чунки уларни}$$

алмаштириш ўқувчиларнинг жойлашиш усуллари сонига таъсир қилмайди. Жойлашиш усуллариининг сони $8!$ марта камаяди.

2-мисол. «Математика» сўзидан ҳарфларни алмаштириб неча хил усул билан сўз яшаш мумки?.

Ечиш: $k = 10$ «м» ҳарфи икки марта «а» ҳарфи уч марта, «т» ҳарфи икки марта қолган ҳарфлар бир марта иштирок этаяпти. Умумий усуллар сони

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Агар ҳарфлар бир марта қатнашса, масалан «а» ҳарфи алоҳида олинган элемент деб қабул қилинса, у ҳолда $P_{10} = 10!$ та усул мавжуд бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Ўттизта дафтарни 3 та сумкага 6 тадан, 4 та сумкага 3 тадан неча усулда жойлаштириш мумкин.

$$\text{Ж: } P(6,6,6,3,3,3) = \frac{30!}{(6!)^3 \cdot (3!)^4}$$

2. «Оромгоҳ» сўзидаги ҳарфларни неча усул билан ўрин алмаштириб, иккита «о» ҳарфи ёнма-ён турмайдиган қилиш мумкин?

$$\text{Ж: } 120 \text{ та.}$$

3. «Қалам» сўзидаги ҳарфларни неча усул билан алмаштириб иккита унли ҳарф орасида иккита ундош ҳарф келадиган қилиш мумкин.

$$\text{Ж: } 38.$$

4. «Математик» сўзи ҳарфларини неча усул билан алмаштириб иккита бир хил ҳарфлар ёнма-ён келмайдиган қилиш мумкин?

$$\text{Ж: } \frac{9!}{(2!)^3} - 6!! = 44640$$

5. Ҳаридор 10 кг олма, 15 кг узум ва 20 кг нокдан фақат биттасини неча усулда танлаб олиш мумкин.

$$\text{Ж: } P = \frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!}$$

6. Ўн та дафтар, 8 та қалам ва 3 та ручкани 31 та ўқувчи орасида неча хил усулда тақсимлаш мумкин.

$$\text{Ж: } P = \frac{23!}{10! \cdot 3! \cdot 8!}$$

7. $\{1,2,3\}$ тўпладан таркибида учта бир, иккита бир, тўртта уч рақами иштирок этган тўпламлар неча тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } P(2,3,4) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$$

6-§. Гуруҳлашлар.

Энди X тўпلام элементларидан k таликлар эмас, балки n исм тўпلامлар тузайлик. Улар ўз таркибидаги элементлари бир-биридан фарқ қилади. Масалан: $X = (a, b, d, e, f)$ тўпلام бўйича тузилган $k = 3$ та элементли $\{a, b, d, f\}, \{a, e, f\}, \{b, d, e\}$ учталиклар биз айтаётган n исм тўпلامлардир.

n та элементли X тўпلامнинг k та элементли n исм тўпلامлари шу элементлардан k тадан олиб тузилган такрорсиз гуруҳлар (комбинациялар) дейилади.

Таъриф: Гуруҳлашлар деб n та элементдан k тадан олиб тузилган ва бир-биридан энг камида битта элемент билан фарқ қиладиган ўринлаштиришларга айтилади.

n та элементдан тузилган гуруҳлашлар сони C_n^k билан белгиланади. (C - французча *combinasion* – гуруҳлаш сўзининг бош ҳарфи).

Агар P_k ўрин алмаштиришлар сонини C_n^k группалашлар сонига кўпайтирсак, A_n^k ўринлаштиришлар сонини ҳосил қиламиз.:

$$C_n^k \cdot P_k = C_n^k, \text{ бундан: } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \text{ келиб чиқади.}$$

Группалашларни қуйидагича ҳам тушунтириш мумкин:

n та элементли X тўпلامнинг k та элементли қисм тўпلامлари шу элементлардан k тадан олиб тузилган группалашлар дейилади.

Уларнинг сони

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \quad \text{ёки} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{га}$$

тенг, бунда ҳар бир жуфтликлар бир биридан фақат тартиби билан фарқ қилади.

1-мисол. Битта тўғри чизиқда ётмайдиган 6 та нуқта орқали нечта кесма ўтқизиш мумкин?

Ечиш: Нуқталар сони 6 та. Ҳар икки нуқта изланаётган кесмани беради. Бу эса 6 та элементдан 2 тадан олиб тузилган группалашлар сонига тенг. Улар $C_6^2 = 15$ та.

2- мисол. $2 \cdot C_{4x}^{3x+1} = 3 \cdot C_{4x+1}^{3x+1}$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенгламани соддалаштирамиз, $\frac{C_{4x}^{3x+1}}{C_{4x+1}^{3x+1}} = \frac{2}{9}$,

бу ерда тенгламанинг сурати: $C_{4x}^{3x+1} = \frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!}$,

махражи эса: $C_{4x+1}^{3x+1} = \frac{(4x+1)!}{(3x+1)! \cdot x!}$ келади,

уларнинг нисбатини топамиз,

$$\frac{C_{4x}^{3x+1}}{C_{4x+1}^{3x+1}} = \frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!} \cdot \frac{(3x+1)!}{(4x+1)!} = \frac{2}{9},$$

$$\frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!} \cdot \frac{(3x+1)!(x-1)! \cdot x}{(4x)!(4x+1)} = \frac{2}{9},$$

натижада ушбу тенглама ҳосил бўлади, $\frac{x}{4x+1} = \frac{2}{9}$,

$$x = 2$$

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Йигирма кишидан иборат гуруҳдан 3 кишини шахмат мусобақасига неча хил усулда танлаб олиш мумкин?

$$\text{Ж: } C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$$

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламлари сонини топинг.

$$\text{Ж: } C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32 \text{ та.}$$

3. n та элементдан 2 тадан олиб тузилган группалашлар сони $n + 1$ та элементдан 4тадан олиб тузилган группалашлар сонидан 3 марта кўп бўлса, n ни топинг.

$$\text{Ж: } n = 3$$

4. Бир айланада ётган 7 та нуқтадан нечта ватар ўтказиш мумкин.

$$\text{Ж: } C_7^2 = 21 \text{ та.}$$

5. $A_{x+1}^3 - C_x^1 = 2x$ тенгламани ечинг.

$$\text{Ж: } x = 2$$

6. $2 \cdot C_n^4 < C_{n+1}^5$ тенгсизликни ечинг.

$$\text{Ж: } (19 + \infty)$$

7. А гуруҳда 20 та талаба ва В гуруҳда 25 та талабалар 3 тадан кичик гуруҳларга бўлинади. Бу кичик гуруҳлардан А гуруҳга ва В гуруҳга тегишли битта талабани неча усулда танлаб олиш мумкин?

$$\text{Ж: } C_{20}^3 \cdot C_{25}^3$$

8. Дўконда 20 турдаги Ўзбекистонда ишлаб чиқарилган маҳсулот, 32 турдаги Россияда ишлаб чиқарилган, 15 турдаги Европада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар бор. Харидор 5 турдаги Ўзбекситонда ишлаб чиқарилган, 12 турдаги Европада ишлаб чиқарилган, 17 турдаги Россияда ишлаб чиқарилган маҳсулотларни сотиб олмоқчи. Унинг имкониятлари сони қанча?

$$\text{Ж: } C_{20}^5 \cdot C_{32}^{17} \cdot C_{15}^{12}$$

7-§. Такрорли группалашлар.

n та элементдан k тадан олиб тузилган такрорли группалашлар деб C_n^k сони орқали аниқланувчи ва элементлари такрорланувчи группалашларга айтилади.

Уларнинг сони

$$\overset{---}{C}_n^k = \overset{---}{C}_{n+k-1}^k \quad \text{формула орқали ҳисобланади.}$$

1-мисол. Томонлари 8,5, 9,6 бўла оладиган нечта учбурчаклар ясаш мумкин?

Ечиш: Изланаётган сон $\overset{---}{C}_4^3 = \overset{---}{C}_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ га тенг. Масала шартида берилган сонларни ихтиёрий иккитаси йиғиндиси учинчи сондан катта $a + b > c$, бу томонлари a, b, c бўлган ихтиёрий учбурчак учун ўринли.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Ҳаридор 6 хил маҳсулотдан 10 тасини неча усулда танлаб олади.

Ж: 561.

2. Томонлари 9,10,11,12,13 бўла оладиган учбурчакдан нечта ясаш мумкин?

Ж: 35та.

3. Тўртта қалам, бешта китоб, 3 та дискдан иборат тўпلامни ўрин алмаштиришлар сони ва x элементдан биттадан олиб тузилган такрорли группалашлар сони йиғиндиси 27730 га тенг. x ни топинг.

Ж: $x = 10$

4. x та элементдан $x + 1$ тадан олиб тузилган такрорли группалашлар сонини $x + 3$ та элементдан $x - 1$ тадан олиб тузилган такрорли группалашлар сонига нисбати $\frac{2}{3}$ га тенг, x ни топинг.

Ж: $x = 4$

5. $\overset{---}{C}_{6-k}^k < \overset{---}{C}_{4-k}^{k+2}$ тенгсизликни ечинг.

Ж: $\left(0, \frac{3}{2}\right) \quad \{1\}$

8-§. Бином формуласи.

Ихтиёрий йиғиндининг ихтиёрий натурал даражасини бином формуласи орқали ҳисоблаш мумкин.

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k$$

Агар $x = a$ бўлса,

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad \text{келиб чиқади.}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{лигини} \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n - (n-k))!} = C_n^{n-k} \quad \text{дан}$$

исботлаш мумкин.

Бином формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин.

$$(x + a)^n = P(n, 0) x^n + P(n-1, 1) x^{n-1} a + \dots + P(n, 0) a^n = \sum_{k=0}^n P(n-k, k) x^{n-k} a^k$$

$$\text{Бу ерда } P(n-k, k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_n^k$$

Умумий ҳолда формулани

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_i)^k = \sum P(k_1, k_2, \dots, k_i) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_i} \quad \text{ёзиш мумкин.}$$

Бу ерда k ва i - ихтиёрий сонлар, $k_1 + k_2 + \dots + k_i = k$ номанфий бутун сонлар йиғиндиси.

Бином формуласининг хоссалари:

1. x нинг даража кўрсаткичи камайиб боради, a нинг даража ўрсаткичи эса ортиб боради. Уларнинг даража кўрсаткичлари йиғиндиси n га тенг.

2. Ёйилма $n+1$ та ҳаддан иборат.

3. Биномиал коэффицентлар йиғиндиси 2^n га тенг.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

4. Ёйилманинг исталган хади $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$ дан иборат.

5. Ёйилманинг четларидан тенг узоқликда турган ҳадларининг коэффицентлари ўзаро тенг.

6. Тоқ ўринларда турган биномиал коэффициентлар йиғиндиси жуфт ўринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндисига тенг.

1- мисол. $(a + b + c + d)^5$ ифодани Нюьтон биноми формуласи ёрдамида ёйинг.

Ечиш: $(a + b + c + d)^5 = \sum P(k_1, k_2, k_3, k_4) a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}$ бунда (k_1, k_2, k_3, k_4) тўртталиikka нисбатан $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 5$ йиғинди тузилади.

Тўртталиклар $(5,0,0,0)$ $..(2,1,1,1)$ $..(2,2,1,0)$

Уларнинг такрорланишлари сони:

$$P(5,0,0,0) = \dots\dots\dots = \frac{5!}{5!} = 1$$

$$P(4,1,0,0) = \dots\dots\dots = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$P(3,1,1,0) = \dots\dots\dots = \frac{5!}{3!} = 20$$

$$P(2,1,1,1) = \dots\dots\dots = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$P(2,2,1,0) = \dots\dots\dots = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

га тенг. Натижада ифода ушбу кўринишга эга.

$$(a + b + c + d)^5 = (a^5 + b^5 + c^5 + d^5) + 5(a^4b + \dots\dots\dots + cd^4) + 20(a^3bc + \dots\dots\dots + bcd^3) + 60(a^2bcd + \dots\dots\dots abcd^2) + 30(a^2b^2c + \dots\dots\dots + bc^2d^2)$$

2- мисол. $\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{18}$ бином ёйилманинг ўрта ҳадини топинг.

Ечиш: $\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{18} = C_{18}^0 \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{18} + C_{18}^1 \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{17} x^{\frac{2}{3}} + \dots\dots\dots + C_{18}^{18} (x^{\frac{2}{3}})^{18}$

ёйилмада 19 та ҳад бор.

Ўрта ҳад $C_{18}^{10} \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^8 (x^{\frac{2}{3}})^{10} = 5^8 \cdot 43785 \cdot x^{\frac{8}{3}}$

3- мисол. $\left(\sqrt[4]{5} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x$ бином ёйилманинг бошидан тўққизинчи ҳадини шу

ёйилманинг охиридан тўққизинчи ҳадига нисбати $\frac{1}{15}$ га тенг. x топинг.

Ечиш: Берилган ифодани Ньютон биноми формуласи ёрдамида ёзамиз.

$$\left(\sqrt[4]{5} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x = C_x^0 (\sqrt[4]{5})^x + C_x^1 (\sqrt[4]{5})^{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \dots + C_x^8 (\sqrt[4]{5})^{x-8} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8 +$$

$$+ \dots + C_x^{x-8} (\sqrt[4]{5})^8 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8} + \dots + C_x^x \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x$$

ёйилмани бошидан тўққизинчи ҳади $C_x^8 (\sqrt[4]{5})^{x-8} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8$ га,

охиридан тўққизинчи ҳади эса $C_x^{x-8} (\sqrt[4]{5})^8 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8}$ га тенг.

$C_n^k = C_n^{n-k}$ тенглик ўринли бўлгани учун $C_x^8 = C_x^{x-8}$ тенглик келиб чиқади.

Шартга кўра $\frac{C_x^8 (5^{\frac{1}{4}})^{x-8} (3^{-\frac{1}{4}})^8}{C_x^{x-8} (5^{\frac{1}{4}})^8 (3^{-\frac{1}{4}})^{x-8}} = \frac{1}{15}$ га тенг.

У ҳолда $\frac{C_x^8 (5^{\frac{1}{4}})^{x-8} (3^{-\frac{1}{4}})^8}{C_x^{x-8} (5^{\frac{1}{4}})^8 (3^{-\frac{1}{4}})^{x-8}} = \frac{1}{15}$, бу ифодани соддалаштириб

ушбу $(5^{\frac{1}{4}})^{x-8-8} \cdot (3^{-\frac{1}{4}})^{8-(x-8)} = \frac{1}{15}$ тенгламани ечамиз.

$$(5^{\frac{1}{4}})^{x-16} \cdot (3^{-\frac{1}{4}})^{8-(x-8)} = \frac{1}{15},$$

$$(5^{\frac{1}{4}})^{x-16} \cdot (3^{-\frac{1}{4}})^{16-x} = \frac{1}{15},$$

$$5^{\frac{x-16}{4}} \cdot 3^{\frac{x-16}{4}} = \frac{1}{15},$$

$$15^{\frac{x-16}{4}} = 15^{-1},$$

$$\frac{x-16}{4} = -1,$$

$$x = 12$$

4-мисол. $\left(\sqrt{3^{x-1}} + 2^{\frac{x}{2}} \right)^m$ бином ёйилмаси бешинчи ҳадининг

биномиал коэффиценти икки асосга кўра логарифмини уч марта орттирилгани билан учинчи ҳади биномиал коэффиценти икки асосга кўра логарифми орасидаги айирма $\log_2 3 - 1$ га тенглиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматида учинчи ҳадни $\sqrt{2}$ марта орттирилгани билан тўртинчи ҳади нисбати 1 га тенг бўлади.

Ечиш: Масала шартига кўра $\log_2 (3C_m^4) - \log_2 C_m^2 = -2$ бўлгани учун

$$\log_2 (3C_m^4) - \log_2 C_m^2 = \log_2 3 - 1, \text{ у ҳолда}$$

$$\log_2 \frac{3C_m^4}{C_m^2} = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$\frac{3C_m^4}{C_m^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3m!}{4!(m-4)!} \cdot \frac{2!(m-2)!}{m!} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3m!}{4!(m-4)!} \cdot \frac{2!(m-2)(m-3)(m-4)!}{m!} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{(m-3)(m-2)}{4} = \frac{3}{2}$$

$$m^2 - 5m = 0 \quad \text{тенгламани ечамиз,}$$

$$m = 0, \quad m = 5$$

Бином кўрсаткич $m = 5$ бўлса

$$\frac{\sqrt{2} C_5^2 (\sqrt{3^{x-1}})^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 2}}{C_5^3 (\sqrt{3^{x-1}})^2 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 3}} = 1 \quad \text{тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани ечамиз.}$$

$$\frac{\sqrt{2} C_5^2 (\sqrt{3^{x-1}})^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 2}}{C_5^3 (\sqrt{3^{x-1}})^2 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 3}} = 1,$$

тенгламанинг сурати $\sqrt{2} C_5^2 (\sqrt{3^{x-1}})^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 2} = 10 \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{(x-1) \cdot 3}{2}} \cdot 2^x$,

махражи эса $C_5^3 (\sqrt{3^{x-1}})^2 \cdot 2^{\frac{3x}{2}} = 10 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{3x}{2}}$, кўринишга эга. Уларнинг нисбатини

ҳисоблаймиз, натижада ушбу $\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{3(x-1)}{2} - (x-1)} \cdot 2^{x - \frac{3x}{2}} = 1$ тенглик ҳосил бўлади,

$$\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{3(x-1)}{2} - (x-1)} \cdot 2^{x - \frac{3x}{2}} = 1 \quad \text{бу тенгламани ечамиз,}$$

$$\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{x-1}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} = 1$$

$$\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{-1}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$x = 1, \quad \text{Жавоб: } x = 1$$

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб ёйинг.

$$\text{Ж: } x^5 + \frac{5\sqrt{3}}{3} x^4 + \frac{10}{3} x^3 + \frac{10\sqrt{3}}{9} x^2 + \frac{5}{9} x + \frac{\sqrt{3}}{27}$$

2. $(a + b + c + d + e)^5$ ёйилмасидан энг катта коэффицентни топинг.

$$\text{Ж: } 5!$$

3. $\left(x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^9$ бином ёйилмасининг ўрта ҳадини топинг.

$$\text{Ж: } C_9^5 x^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5 \quad \text{ва} \quad C_9^4 x^5 \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4$$

4. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\sqrt{x}\right)^7$ бином ёйилмасининг x^5 катнашган ҳадинининг

номерини топинг.

Ж: 5.

5. $\left(\sqrt[5]{\frac{\sqrt{x}}{y}} + \sqrt{\frac{\sqrt[3]{y}}{x}}\right)^{10}$ бином ёйилмасида x ва y нинг бир хил

даражалари катнашган ҳадининг номерини топинг.

Ж: Ўн биринчи ҳад.

6. $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)^5$ Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб ёйинг.

$$\begin{aligned} \text{Ж: } \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)^5 &= (x^{\frac{1}{2}})^5 + (-1) \cdot C_5^1 (\sqrt{x})^4 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{x} + (-1)^2 \cdot C_5^2 (\sqrt{x})^3 \cdot (2 \cdot \sqrt[3]{x})^2 + \dots + \\ &+ (-1)^5 \cdot C_5^5 (2\sqrt[3]{x})^5 = x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{7}{3}} + 40x^{\frac{13}{6}} - 80x^2 + 80x^{\frac{11}{6}} - 32\sqrt[3]{x^5} \end{aligned}$$

7. $\left(\frac{\sqrt[6]{a^2 x} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})} + 2\sqrt{a}\right)^8$ ифода соддалаштирилсин ва ёйилманинг а

катнашмаган ҳади топилсин.

$$\text{Ж: бешинчи ҳад, } 1120\sqrt[3]{x^2}$$

8. Бир биномнинг даража кўрсатгичи иккинчи биномнинг даража кўрсатгичидан 6 та кам, ҳар иккала ёйилма бином коэффицентларининг йиғиндисини ўнли логарифмларини қўшсак натижа 0 га тенг. Шу кўрсатгични топинг.

$$\text{Ж: } m = 3$$

9. $\left(\sqrt{x} - \frac{7}{x}\right)^n$ бином ёйилмаси учинчи ҳадининг коэффиценти 36 га тенг

бўлса, шу ёйилманинг тўққизинчи ҳадини топинг.

$$\text{Ж: } \frac{9 \cdot 7^8}{\sqrt{x^{15}}}$$

10. $\left(\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^n$ бином ёйилмасининг олтинчи ҳади унинг саккизинчи

ҳадидан 21 марта катта. Ёйилманинг x қатнашмаган ҳадини топинг.

Кўрсатма: $C_n^5 = 21 \cdot C_n^7$ дан фойдаланинг. $n = 4$, $n = 7$

Ж: $n = 4$ да учинчи ҳад, $6 \cdot y^2$

11. $\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + 4\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^n$ бином ёйилмасининг барча биномиал коэффициентлари

йиғиндиси 256 га тенг. Шу бином ёйилмасининг x^2 бўлган ҳадини топинг.

Ж: Изланаётган (учинчи) ҳад $396 x^2$

12. Махражи $\left(\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ га, биринчи ҳади 2 га тенг бўлган геометрик

прогрессиянинг олтинчи ҳадини топинг.

Ж:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 = 6 \cdot \sqrt[3]{9} + \frac{30 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} + 30 + \frac{10 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt[3]{9} + 15\sqrt[6]{72} + 30 +$$

$$+ 5\sqrt[6]{648} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

13. $(a + b + c)^{10}$ Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб ёйинг, ёйилмада нечта ҳад қатнашган?

Ж:

$$(a + b + c)^{10} = a^{10} + b^{10} + c^{10} + 10(a^9b + ab^9 + a^9c + ac^9 + bc^9 + b^9c) + 90(a^8bc + b^8ac + c^8ab) +$$

$$+ 360(a^7b^2c + a^7bc^2 + b^7a^2c + b^7ac^2 + c^7a^2b + c^7ab^2) + 1260(a^6b^2c^2 + a^2b^6c^2 + a^2b^2c^6) +$$

$$+ 840(a^6b^3c + a^6bc^3 + b^6a^3c + b^6ac^3 + c^6a^3b + c^6ab^3) + 210(a^6b^4 + a^6c^4 + b^6a^4 + b^6c^4 +$$

$$+ c^6a^4 + c^6b^4) + 1260(a^5b^4c + a^5bc^4 + b^5a^4c + b^5ac^4 + c^5a^4b + c^5ab^4) + 2520(a^5b^3c^2 + a^5b^2c^3 +$$

$$+ b^5a^3c^2 + b^5a^2c^3 + c^5a^3c^2 + b^5a^2c^3) + 3150(a^4b^4c^2 + a^4c^4b^2 + c^4a^2b^4) + 252(a^5b^5 +$$

$$+ a^5c^5 + b^5c^5) + 175(a^4b^3c^3 + a^3b^4c^3 + a^3b^3c^4) + 120(a^3b^7 + a^3c^7 + b^3a^7 + b^3c^7 + c^3a^7 + c^3b^7)$$

14. $\left(2x^2 + \frac{y}{2x}\right)^m$ бином ёйилманинг кўрсаткичи m нинг қандай

қийматида иккинчи, учинчи ва тўртинчи ҳадларининг
коэффициентлари арифметик прогрессияни ташкил этади.

Кўрсатма: $C_m^1 + C_m^3 = 2 \cdot C_m^2$ дан фойдаланинг.

Ж: $m = 7, \quad m = 2$

15. $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{4} \right)^6$ бином ёйилманинг тўртинчи ҳади 640 га тенг. Бу

ифодадаги x ни топинг.

Ж: $x = 3 \pm \sqrt{6}$

16. x нинг қандай қийматида $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[4]{x} \right)^8$ бином ёйилмасининг бир

ҳадидаги x нинг даражасини шу ҳаддан кейинги ҳаддаги x нинг даража
кўрсаткичига нисбати $-\frac{4}{3}$ бўлганда бу ҳадни $x^{\frac{5}{6}}$ га кўпайтирсак, кейинги
ҳаддан 126 та кўп бўлади.

Ж: $x = \sqrt[4]{1,8}$

17. Бином ёйилмасининг учинчи ҳадининг коэффициенти тўртинчи
ҳадининг биномиал коэффициентига нисбати $\frac{3}{4}$ га тенг бўлса, x

нинг қандай қийматида $\left(\sqrt[5]{2^x} + \frac{1}{\sqrt[4]{2^{x-1}}} \right)^m$ бином ёйилмасининг

олтинчи ҳади бином кўрсаткичидан 16 марта катта бўлади.

Ж: $m = 6$ да $x = -\frac{55}{21}$

18. Агар биномнинг m кўрсаткичи ёйилма учинчи ҳадининг
биномиал коэффициентидан 14 та кўп эканлиги маълум бўлса, x

нинг қандай қиматида $\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2^x}}}{32} + \frac{16}{\sqrt[3]{2^x}} \right)^m$ бином ёйилмасининг

бешинчи ҳадини олтинчи ҳадига нисбати $\frac{20}{3}$ га тенг бўлади.

Ж: $m = 7$ да $x = 12$

19. Агар бином ёйилмасининг охирги учта ҳадини биномиал коэффициентлари йиғиндиси 37 га тенг эканлиги маълум бўлса,

тўртинчи ва еттинчи ҳадлари йиғиндиси $196 \cdot 3^{\frac{7-7x}{3}}$ га тенг x нинг қандай қийматида $\left(3^{\frac{x-1}{3}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^m$ бином ёйилмасида бўлади.

Кўрсатма: Бином ёйилмасининг бошидан ва охиридан баробар

Узоқликда турган ҳадларининг биномиал коэффициентлари

тенглигидан фойдаланинг. $1 + m + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} = 37$

Ж: $m = 8$ да $x = 1\frac{2}{5}$

20 . Агар $\left(\sqrt[3]{3^{\lg(5-2^x)}} + \sqrt[4]{3^{(x-1) \cdot \lg 2}}\right)^m$ бином ёйилмасининг иккинчи,

учинчи ва тўртинчи ҳадларининг биномиал коэффициентлари мос

равишда арифметик прогрессияни иккинчи, олтинчи ва унинчи

ҳадларидан иборат эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай

қийматида шу бином ёйилмасининг бешинчи ҳади 315 га тенг

бўлади.

Кўрсатма: $2 \cdot a_6 = a_2 + a_{10}$ арифметик прогрессия хоссасидан

фойдаланинг.

Ж: $m = 7$ да $x = 2$ $x = 0$

9-§. Такрорлашга доир мисоллар.

1 мисол. 4,5,6,7,8,9 рақамларидан 4 га бўлинмайдиган нечта уч хонали сонлар тузиш мумкин.

Ечиш: Натурал сон 4 га бўлиниши учун u жуфт сон, унинг охирги иккита рақамидан ташкил топган сон 4 га бўлиниши кераклигидан фойдаланиб,

4,5,6,7,8,9 рақамларидан тузилган ва 4 га бўлинадиган 3 хонали сонларнинг охирги рақамидан ташкил топган сонларнинг кўриниши

44, 48

56, 76, 96

68, 88

бўлади. Улар $(a44), (a48), (a56), (a76), (a96), (a68), (a88)$ жуфтликларнинг охирги иккита рақами. (Бу ерда $a = 4,5,6,7,8,9$ сонларининг ихтиёрий бири). Демак ҳар бир жуфтликда 6 та уч хонали сонлар жами $6 \cdot 7 = 42$ та. Лекин 4,5,6,7,8,9

рақамларидан тузилган уч хонали сонлар $A_6^3 = 6^3 = 216$ та.

Изланаётган сонлар сони $216 - 42 = 174$ та.

2- мисол. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 рақамларидан бир хил рақам иштирок этмайдиган қилиб мумкин бўлган олти хонали барча сонлар тузилган. Бир вақтда 4,5,7 рақамлар иштирок этган сонларни сонини топинг.

Ечиш: Изланаётган сонлар $(4,5,7, a, b, c)$ кўринишда бўлсин. a, b сонларни танлашлар сони $C_6^3 = 20$ га тенг. Танлаб олинган ҳар бир гурпуада $6!$ та ўрин ўрин алмаштиришлар, жами $20 \cdot 6!$ та ўрин алмаштиришлар мавжуд. Изланаётган сонлар сони $20 \cdot 6!$ та бўлади.

3- мисол. x нинг қандай қийматида $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^7$ бином ёйилмасининг еттинчи ҳадини тўртинчи ҳадига нисбати $-\frac{1}{40}$ га тенг бўлади.

Ечиш: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^7$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳади

$(-1)^4 \cdot C_7^3 \cdot (\sqrt{x})^4 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^3$ га, еттинчи ҳади эса $(-1)^7 \cdot C_7^6 \cdot (\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^6$ га тенг.

Бу ерда $(-1)^4 \cdot C_7^3 \cdot (\sqrt{x})^4 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{8 \cdot \sqrt[5]{x^3}} = \frac{35 \cdot x^2}{8 \cdot \sqrt[5]{x^3}},$

$$(-1)^7 \cdot C_7^6 \cdot (\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^6 = \frac{7 \cdot \sqrt{x}}{64 \cdot \sqrt[5]{x^6}}.$$

Масала шартига кўра

$$\frac{(-1)^7 \cdot C_7^6 \cdot (\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^6}{(-1)^4 \cdot C_7^3 \cdot (\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{x}} \right)^3} = -\frac{1}{40} \quad \text{бўлади.}$$

$$\text{У ҳолда} \quad -\frac{1}{40 \cdot \sqrt[10]{x^{21}}} = -\frac{1}{40},$$

$$\sqrt[10]{x^{21}} = 1, \quad x = 1$$

4-мисол. Агар $\left(\sqrt[4]{5^{\log_2(4-3^x)}} + \sqrt[3]{5^{\log_2(3^x-4)}} \right)^n$ бином ёйилмасининг

иккинчи, учинчи ва тўртинчи ҳадининг биномиал коэффициенти мос равишда арифметик прогрессиянинг тўртинчи, еттинчи ва ўнинчи ҳадларидан иборат эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматларида шу бином ёйилманинг тўртинчи ҳади 35 га тенг бўлади.

Ечиш: Арифметик прогрессиянинг $2 \cdot a_7 = a_4 + a_{10}$ шартига кўра, бином ёйилманинг C_m^1, C_n^2, C_n^3 коэффицентлари учун $2 \cdot C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$ ўринли бўлади.

$$\text{У ҳолда} \quad 2 \cdot C_n^2 = C_n^1 + C_n^3,$$

$$2 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!},$$

$$\frac{n!}{(n-2) \cdot (n-3)!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot (n-1) \cdot (n-2)} + \frac{n!}{6 \cdot (n-3)!},$$

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1)} + \frac{1}{6},$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0.$$

Ушбу $n^2 - 9n + 14 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари $n = 7$, $n = 2$

га тенг. Лекин масала шартини $n = 7$ қаноатлантиради.

$$\left(\sqrt[4]{5^{\log_2(4-3^x)}} + \sqrt[3]{5^{\log_2(3^x-4)}} \right)^n \quad \text{бином ёйилманинг тўртинчи ҳади}$$

$$C_7^3 \cdot 5^{\log_2(4-3^x)} \cdot 5^{\frac{4}{3} \cdot \log_2 3^x} \quad \text{га тенг.}$$

Масала шартига кўра , $C_7^3 \cdot 5^{\log_2(4-3^x)} \cdot 5^{\frac{4}{3} \cdot \log_2 3^x} = 35$ бўлгани учун

$$C_7^3 \cdot 5^{\log_2(4-3^x)} \cdot 5^{\frac{4}{3} \cdot \log_2 3^x} = 35 , \quad \text{натижада}$$

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 5^{\log_2(4-3^x)} \cdot 5^{\frac{4}{3} \cdot \log_2(3^x-4)} = 35 \quad \text{ҳосил бўлади.}$$

Ушбу $\log_2(4-3^x) + \frac{4}{3} \log_2(3^x-4) = 1$ тенгламани ечамиз.

$$\log_2 \left[- (3^x - 4) \cdot (3^x - 4)^{\frac{4}{3}} \right] = 1 ,$$

$$(3^x - 4)^{\frac{7}{3}} = -2 ,$$

$$3^x - 4 = -2^{\frac{3}{7}} = -8^{\frac{1}{7}} ,$$

$$3^x = 4 - 8^{\frac{1}{7}} , \quad x = \log_3(4 - \sqrt[7]{8}) . \quad \text{Жавоб: } x = \log_3(4 - \sqrt[7]{8})$$

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Гуруҳ ўн етти талаба, гуруҳ бошлиғи ва унинг ёрдамчисидан иборат. Гуруҳ талабалари ўз вазифаларини неча усулда тақсимлашлари мумкин?

$$\text{Ж: } A_{19}^2 = 342$$

2. Гурух гурух бошлиғи, унинг ёрдамчиси ва 20 та талабадан иборат. Баъзан битта талаба барча вазифаларни бажариш учун етарли бўлса, гурух талабалари ўз вазифаларини неча усулда тақсимлашлари мумкин.

$$\text{Ж: } A_{22}^{\dots} = 22^2 = 484$$

3. Мусобақада етти кишилик гурухдан ташқари 15 киши қатнишяпти. Бу гурух аъзолари эгаллаган ўринларини неча усулда алмаштиришлари мумкин.

$$\text{Ж: } A_{22}^7 = \frac{22}{15!}$$

4. 32 киши таркибида 8 та, 10 та, 5 та, 3 та, 6 та лик гурухларга бўлинган. Бу гурухларни ҳар хил состави неча бўлиши мумкин.

$$\text{Ж: } P = \frac{32!}{8! \cdot 10! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6!}$$

5. Агар ҳар бир сонда бир хил рақамлар иштирок этмаслиги лозим бўлса, 0,4,5,7,8,9 рақамларидан 2 га бўлинадиган неча беш хонали сон тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) = 312$$

6. Токчада 25 та китобдан иккитаси чет тилида. Бу икки китобни ёнма -ён келмайдиган қилиб неча хил усулда жойлаштириш мумкин.

$$\text{Ж: } 27! - 2 \cdot 26!$$

7. Ўнта олмани иккита бола учтадан, битта бола тўрттадан, олиб неча усулда бўлиб олишлари мумкин.

$$\text{Ж: } 4200$$

8. 0,3,4,5,6,7 рақамларидан тузилган уч хонали сонлардан нечасида 7 рақами иштирок этади. (сонларда рақамлар такрорланмайди)

$$\text{Ж: } 20 \text{ та.}$$

9. 0,1,2,3,4,5 рақамларидан 3 га бўлинувчи неча ҳар хил рақамли уч хонали сон тузиш мумкин.

$$\text{Ж: } 40 \text{ та.}$$

10. 25 та талаба ўқийдиган гуруҳдан 6 та талабани мусобақага жўнатиш керак. Агар гуруҳ бошлиғи ва 2 та ёрдамчи бир пайтда жўнамаслиги лозим бўлса, бундай жўнатишлар сони қанча бўлади.

$$\text{Ж: } C_{25}^6 - C_{22}^3 = 175560$$

11. «Математика» сўзида 3 та «а» ҳарфи ёнма ён келмайдиган қилиб нечта сўз яшаш мумкин. (Сўз деганда ҳарфлар кетма кетлиги тушунилади).

$$\text{Ж: } \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} - 8!$$

12. 24 та талаба ўқийдиган гуруҳдан гуруҳ бошлиғи ва 5 та талабани неча хил усул билан ажратиб олиш мумкин.

$$\text{Ж: } 24 \cdot C_{23}^5 = 24 \cdot \frac{23!}{5! \cdot 18!}$$

13. 20 та талаба ўқийдиган гуруҳдан гуруҳ бошлиғи битта ёрдамчи ва 3 та талабани неча усулда ажратиб олиш мумкин.

$$\text{Ж: } 20 \cdot 19 \cdot C_{18}^3$$

14. Уста 4 кун давомида 5 та хонани таъмирлаш керак. Агар уста бир кунда энг камида битта хонани таъмирлаган бўлса, у бу ишни кунлар бўйича неча хил усулда тақсимлаш мумкин.

Кўрсатма: (a, b, c, d) жуфтликларда 3 таси камида 2, биттаси 2 бўлиши мумкин. Таркибида 3 та 1, 1 та 2 рақами бўлган $P(3,1)$ такрорли ўрин алмаштиришлар сонидан фойдаланинг.

$$\text{Ж: } P(3,1) = \frac{4!}{3!} = 4$$

15. Гуруҳда 24 та талабадан 12 таси аъло баҳога, 12 таси яхши баҳога ўқишади. Уларни ёнма ён ўтирганларини бири аълога иккинчиси яхши баҳога ва кетма кет бирининг орқасига иккинчисининг баҳоси бир хил бўладиган қилиб иккита қаторга неча хил усул билан ўтказиш мумкин.

$$\text{Ж: } 2 \cdot (12!)^2$$

16. Агар $(1+x)^7 + (3+x)^9 + (4+x)^{11}$ ифоданинг ҳамма қавсларини очиб ихчамласак, бирор кўпхад ҳосил бўлади. Бу кўпхаднинг

қавсларини очмасдан x^7 нинг олдидаги коэффициентларини аниқланг.

Ж: 84805

17. $\left(5x + \frac{2}{x^3}\right)^m$ ёйилманинг бешинчи ҳадида x қатнашмайди, x нинг

қандай қийматида шу ҳад $(5 + 2 \cdot x^2)^{20}$ ёйилманинг тўққизинчи ҳадига тенг бўлади.

$$\text{Ж: } x^{16} = \frac{11}{32 \cdot 26 \cdot 17 \cdot 19}$$

18. $\left(\frac{2}{n} + 3n\right)^n$ ёйилманинг бошидан учинчи ҳадини охиридан учинчи ҳадига кўпайтмаси 6^{n+4} га тенг. бўлса, ёйилманинг энг катта биномиал коэффициентини топинг.

Ж: 126.

19. $C_{x-1}^y : C_x^y : C_{x+1}^{y+1} = 2 : 3 : 4$ бўлса, x ва y ларни топинг.

$$\text{Ж: } x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$$

20. $P_{x+2} = 126 \cdot A_x^3 \cdot P_{x-2}$ тенгламани ечинг.

$$\text{Ж: } x_1 = 15, x_2 = 3$$

21. Ёйилманинг бешинчи ҳадини олтинчи ҳадига нисбати $\frac{2\sqrt{15}}{9}$

га тенг бўлиши учун $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)^m$ биномда m нинг қандай қийматида натурал даражага кўтариш керак.

$$\text{Ж: } m = 7$$

22. Агар $\left(\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + 3 \cdot \sqrt[5]{x}\right)^m$ ёйилманинг ўн биринчи ҳади x га боғлиқ бўлмаса, A_m^3

ни ҳисобланг.

Ж: 4896.

23. $\left(5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}\right)^m$ ёйилманинг иккинчи ва учинчи ҳади биномиал коэффициентлари йиғиндиси 36 га тенг, x ни ўз ичига олмаган ҳадини ёзинг.

Ж: Бундай ҳад мавжуд эмас.

24. $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$ тенгламани ечинг.

Ж: 7

25. Агар ҳар бир сонда бир хил рақамлар иштирок этиши мумкин бўлса 7, 5, 3, 4, 6 рақамларидан 2 га бўлинадиган нечта 4 хонали сонлар тузиш мумкин.

Ж: 250.

26. Гуруҳ 30 талаба, Хасан ва Хусанлардан иборат. Хасан ва Хусанни ёнма - ён ўтирмайдиган қилиб талабаларни неча усулда жойлаштириш мумкин.

Ж: $32! - 2 \cdot 31!$

27. $C_{12}^6 + C_{12}^5 = C_{11}^6$ тенгликни текшириб кўринг.

Ж: Тенглик нотўғри.

28. Қирқ кишидан иборат жамоадан 5 кишидан иборат кичик гуруҳ ва барча кичик гуруҳларга етарли бўлган иккита етакчини неча усулда танлаб олиш мумкин.

Ж: $C_{40}^2 \cdot C_{38}^5$

29. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \frac{A_x^{n-3}}{A_x^{n-2}} = \frac{1}{8} \\ \frac{C_x^{n-3}}{C_x^{n-2}} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Ж: $x = 12$, $n = 7$

30. Агар $(9 - x)^5 + (10 + x)^7 + (11 - x)^9$ ифодани ҳамма кавсларини очиб

ўхшаш ҳадларни ихчамласак бирор кўпхад ҳосил бўлади. x^5
нинг олдидаги коэффициентини аниқланг. Ж: – 11542

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

1. Алимов Ш.О., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра, 8-синф учун дарслик, Т. Ўқитувчи, 1996 й. 300 бет.
2. В.Е. Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма .Т. Ўқитувчи , 1980 й. 365 бет.
3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.Наука, 1980 г. 496 стр.
4. Меликулов А., Қурбонов П., Исмоилов П. Математика 1-қисм, Касб-хунар коллежлари учун ўқув қўлланма, Т. Ўқитувчи, 2003 й. 319 бет.

5. Меликулов А., Қурбонов П., Исмоилов П. Математика 2-қисм, Касб-хунар коллежлари учун ўқув қўлланма, Т. Ўқитувчи, 2003 й. 343 бет.
6. Абдухамидов А. У., Насимов Ҳ. А., Носиров У. М., Хусанов Ж. Ҳ. Алгебра ва математик анализ асослари 2- қисм, Академик лицейлар учун дарслик, Т. Ўқитувчи, 2003 й.
7. Adler, Irving/ Mathematics Doubleday, 1990.
8. Kline, Morris. Mathematics and the Search for knowledre. Oxford, 1985.
9. [www. College.ru](http://www.College.ru).
10. [www. metod- narod.ru](http://www.metod- narod.ru).
11. Р.Ҳ. Вафоев, Ж.Ҳ. Хусанов, К.Ҳ. Файзиев, Ю. Й. Ҳамроев Алгебра ва анализ асослари 2- наشري Академик лицей ва касб –хунар коллежлари учун дарслик, Т. Ўқитувчи, 2003 й.
12. Г. Гаймназаров. Комбинаторика и бином Ньютона. Методическая разработка для студентов младших курсов, Ленинабад, 1990 г.
13. О. Гаймназаров. Математика ўқитишда амалий масалаларни ечиш намуналари. Академик лицей ва касб-хунар коллежлари учун ўқув-услубий қўлланма, Тошкент, “Фан” нашриёти, 2006 й.
13. Хонқулов У. Х. Академик лицей ўқувчиларида статистик тасаввур ва кўникмаларини ривожлантириш йўллари // ГулДу қошидаги Янгиер академик лицейида Янгиер шахрининг 50 йиллигига бағишланган Устозлар ва ижодкор ўқувчилар илмий – услубий анжуман.

МУНДАРИЖА

СЎЗ БОШИ.....	3
1§.Бирлашмалар (комбинаторика) ҳақида умумий тушунча.....	5
2§.Ўринлаштиришлар.....	9
3§.Такрорланувчи ўринлаштиришлар.....	11
4§.Ўрин алмаштириш.....	13
5§.Такрорли ўрин алмаштириш.	15
6§.Гуруҳлашлар.....	17
7§.Такрорли гуруҳлашлар.....	21
8§.Бином формуласи.....	22
9§.Такрорлашга доир мисоллар.....	31
Адабиётлар.....	40

Улуғбек Хурсаналиевич Хонкулов

Математика фанини ўқитишда комбинаторика масалалари

(Академик лицей ва касб- ҳунар коллежлари учун ўқув- қўлланма)

Теришга 5.05.08 йил берилди. Босишга 20.11.08 йилда рухсат қилинди. Қоғоз
бичими 60 x 84, 1/16

Буюртма № 54. Ҳажми 44 б.

Нусхаси 500 дона. Баҳоси келишилган нархда. ГулДУ босмахонада чоп
этилди. Гулистон, 4-мавзе.