АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.956

ХАЙДАРОВ ИБРОХИМЖОН УСМОНАЛИЕВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ташкент – 2011

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Уринов Ахмаджон Кушакович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Мирсабуров Мирахмат**

кандидат физико-математических наук **Кадиркулов Бахтиёр Жалилович**

Ведущая организация: Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека

Защита диссертации состоится «___»________________2011 г. в _____ часов на заседании Специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125. г.Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___»_______________2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д 015.17.01,
кандидат физико-математических наук А.А.Заитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Возникший в первой четверти прошлого века интерес к теории уравнений смешанного типа в настоящее время не утихает, а наоборот, интенсивно развивается в различных направлениях как относительно уравнений, так и круга рассматриваемых задач для них, а также относительно области рассмотрения. Если в начале рассматривались задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, то с 1960-х годов начато исследование уравнений смешанного эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов.

Впервые на необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое, было указано в 1959 г. И.М. Гельфандом. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его - уравнением диффузии. Я.С. Уфлянд в 1964 году описывает задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке $0<x<l$ полубесконечной линии потерями пренебрегается, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки. В результате он приходит к задаче для системы уравнений относительно тока и напряжения, после исключения тока в которой следует смешанная задача в первой четверти для уравнения

$$0=\begin{cases} a_1^2 u_{xx}-u_{yy}, & 0<x<l, \\ a_2^2 u_{xx}-u_{y}, & l<x<+\infty. \end{cases}$$

Дальнейшие исследования также показали, что многие математические модели тепло – и массообмена в капиллярно – пористых средах, распространения электромагнитного поля в неоднородной среде, формирования температурного поля, движения вязкоупругой и вязкой жидкостей сводятся к краевым задачам для уравнений параболо–гиперболического типа.

Первыми из работ, посвященных изучению краевых и начально-граничных задач для параболо – гиперболических уравнений, являются работы Г.М.Стручиной, И.С.Гайдука, С.И.Гайдука и А.Иванова, О.А. Ладыженской и Л. Ступялиса, причем О.А. Ладыженская и Л. Ступялис рассматривали начально-граничные задачи на сопряжение для параболо-гиперболических уравнений в многомерном пространстве. Л.А. Золина исследовала аналог задачи Трикоми и его обобщения (задача *M*) для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_{y}, & y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0 \end{cases}$$

в области, ограниченной прямыми $x=0$, $x=1$, $y=h$, $x+y=0$, $x-y=1$.

Вслед за этим за прошедшие годы появилось множество работ, где изучаются как основные краевые задачи, т.е. задачи Трикоми, Геллерстедта и их обобщения, так и новые локальные и нелокальные краевые задачи для различных параболо-гиперболических уравнений второго и третьего порядков как на плоскости, так и в трехмерном пространстве. Тем не менее, в последнее время исследователи всё больше и больше уделяют внимание постановке и изучению нелокальных краевых задач с условиями типа условий Франкля и Бицадзе-Самарского, с условиями со смещением и интегральным условием. Актуальность исследования таких задач можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения классических краевых задач для уравнений с частными производными, так и прикладными значениями. Тем более, естественность постановки задач, когда краевые условия представляют собой соотношение между значениями неизвестной функции, вычисленной в различных точках границы, отмечалась ещё в 1896 году В.А.Стекловым. Подобные граничные условия возникают и при математическом моделировании задач газовой динамики, теории плазмы, излучения лазера и процессов размножения клеток.

Достаточно полная библиография по теории краевых задач для параболо-гиперболических уравнений содержится в монографиях Т.Д.Джураева, А. Сопуева и М. Мамажанова, Т.Д.Джураева и в докторских диссертациях Д.Базарова, А.С.Бердышева, В.А.Елеева. Следует также отметить работы, М.С.Салахитдинова, Х.Г.Бжихатлова, В.Н.Врагова, А.М.Нахушева, Н.Ю.Капустина, А.А.Керефова, Б.Исломова, О.А.Репина, А.М.Нагорного, А.В.Псху, К.Б.Сабитова, Ж.О.Тахирова и др., в которых были поставлены и исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для различных параболо - гиперболических уравнений.

Отдельно следует отметить работы А.С.Бердышева, Э.Т.Каримова, К.Б. Сабитова, Э.М.Сафина, Л.Х.Рахмоновой, A.Boumenir, Vu Kim Tuan и др., где исследованы спектральные вопросы прямых и обратных задач для параболических и параболо – гиперболических уравнений.

Степень изученности проблемы. Теория краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с гладкой линией изменения типа хорошо разработана. Изучению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа посвящены работы М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова, Т.Д.Джураева и А.С.Абдуллаева, В.А. Елеева и В.Н.Лесева, У.Эгамбердиева и др.

В этих работах уравнения рассмотрены в традиционных областях, т.е. в областях, состоящих из прямоугольника и характеристических треугольников, опирающихся на его стороны, причем как в параболической, так и в гиперболической частях области рассмотрения коэффициенты уравнения непрерывны. Но до настоящего времени неисследованными остались краевые задачи (тем более, задачи на спектр) для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа в нетрадиционных областях, например, в областях, состоящих из прямоугольника и четырех (или шести) характеристических треугольников, два из которых опираются, а остальные – нет, на стороны прямоугольника, а также когда коэффициенты рассматриваемого уравнения в гиперболической части области терпят разрыв.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы «Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа» утверждена на Ученом совете Института математики и информационных технологий АН РУз. 22 сентября 2010 года (протокол №8) и входит в тематику НИР, проводимых в Институте математики и информационных технологий АН РУз и в Ферганском государственном университете.

Цель исследования. Основной целью диссертационной работы являются постановка и исследование краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром в нетрадиционных областях.

Задачи исследования. Основными задачами исследования являются:

- нахождение постановок краевых задач для параболо-гиперболических уравнений без краевых условий на частях границы области рассмотрения, являющихся характеристиками уравнения;
- постановки краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с краевыми условиями как на характеристической, так и на нехарактеристической частях границы области рассмотрения;
- исследование однозначной разрешимости поставленных задач, выявление условия на параметры и функции, заданные в постановках исследуемых задач, при которых обеспечивается существование и единственность решения;
- определение множества значений параметра уравнения, где нет собственных значений изучаемых задач.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются параболо-гиперболические уравнения с негладкой линией изменения типа и с параметром, а предметом исследования – краевые задачи для таких уравнений.

Методы исследования. При доказательстве единственности решения поставленных задач использованы методы интегралов энергии и принципа экстремума, а при доказательстве существования решения – теория интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными научными результатами диссертационной работы являются следующие:

- поставлены задачи без краевых условий на частях границы области рассмотрения, являющихся характеристиками, для одного параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа и с параметром;

– сформулированы нелокальные задачи с краевыми условиями как на характеристической, так и на нехарактеристической частях границы области рассмотрения, для ряда параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром;
– доказаны существование и единственность решения поставленных задач;
– найдены множества значений параметра уравнения, в которых отсутствуют собственные значения изучаемых задач.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми. Сформулированы новые краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром. Выявлены достаточные условия на параметры и функции, заданные в постановке исследованных задач, при которых обеспечиваются существование и единственность их решения. Определены множества значений параметра уравнений, где нет собственных значений поставленных задач.

Научная и практическая значимость результатов исследований. Научные результаты диссертации представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть использованы в дальнейшем развитии теории уравнений с частными производными и при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям, а также при чтении спецкурсов в вузах.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертации докладывались на семинарах «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» (Институт математики и информационных технологий, руководитель – академик М.С.Салахитдинов), «Дифференциальные уравнения и спектральный анализ» (НУУз, руководители – академик М.С.Салахитдинов и доктор физико - математических наук, профессор Р.Р.Ашуров) и на научном семинаре Специализированного совета Д015.17.01 (председатель – академик М.С.Салахитдинов). Результаты диссертации, по мере их получения, также докладывались на семинаре «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и родственных разделов математики» (ФерГУ, руководитель – доктор физико - математических наук, профессор А.К.Уринов), а отдельные части – на Республиканской научной конференции, посвященной 90-летнему юбилею Национального университета Узбекистана «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» (Ташкент, 8 мая 2008 года).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-9] в виде статей и тезисов докладов конференций. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ по теме диссертации». В работах [1-3], [5-7] постановка задач принадлежит А.К. Уринову. Доказательства всех основных результатов принадлежат автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы, а параграфы – на пункты. Объем диссертации 120 страниц. Нумерация формул двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер формулы в ней. В списке литературы 70 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор работ, относящихся к теме диссертации, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены предварительные сведения, относящиеся к теме диссертации, которые будут использованы в диссертационной работе. Во втором параграфе даны постановки изучаемых задач и приведены основные научные результаты диссертации.

Во второй главе в конечной односвязной области Ω плоскости xOy, ограниченной при $x \geq 0,\ \ y \geq 0$ прямыми $x=1,\ \ y=1$, при $x \geq 0,\ \ y \leq 0$ прямыми $x=0,\ \ x-y=1$ и при $x \leq 0,\ \ y \geq 0$ прямыми $y=0,\ \ x-y=-1$, рассмотрено уравнение

$$\mathcal{L}_1 u(x,y)=0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}-\lambda_1^2, & (x,y)\in\Omega_0, \\ (\operatorname{sign} y)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+(\operatorname{sign} x)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\lambda_2^2\left[\operatorname{sign}(x+y)\right], & (x,y)\in\bigcup\limits_{j=1}^{4}\Omega_j, \end{cases}$$

λ_1 и λ_2 – заданные, вообще говоря, комплексные числа, а

$$\Omega_0=\Omega\cap\{(x,y): 0<x<1, 0<y\leq 1\},$$

$$\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y): y<0,\ x+y>0\},\quad \Omega_2=\Omega\cap\{(x,y): y<0, x+y<0\},$$

$$\Omega_3=\Omega\cap\{(x,y): x<0, x+y>0\},\quad \Omega_4=\Omega\cap\{(x,y): x<0, x+y<0\}.$$

В этой главе под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1\left(\left(\Omega\cup OA_2\cup OB_2\right)\setminus\left(OE\cup OD\right)\right)$, которая в области Ω_0 имеет непрерывную производную $u_{xx}(x,y)$, а в областях Ω_j, $j=\overline{1,4}$ – непрерывные производные $u_{xx}(x,y)$, $u_{yy}(x,y)$ и такую, что в этих областях она удовлетворяет уравнению (1), а функции $u_x(\pm t,0)$, $u_x(0,\pm t)$, $u_y(0,\pm t)$, $u_y(\pm t,0)$ ограничены при $t\to 0$ и $t\to 1$, где OA_2, OB_2, OE (OD)– отрезки прямых $y=0$, $x=0$, $x=-y$ соответственно, а $O(0,0)$, $A_2(-1,0)$, $B_2(0,-1)$, $E(1/2,-1/2)$, $D(-1/2,1/2)$.

В §2.1 исследована следующая

Задача $\mathscr{F}^{(1)}$. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{gathered}
u(1,y)=\varphi(y), \qquad (1,y)\in\overline{A_1A_0}\,; \\
u(0,y)=f_1(y), \qquad (0,y)\in\overline{B_2O}\,; \\
u_x(0,y)=k\cdot u_x(0,-y)+f_2(y), \quad (0,y)\in B_2O\,; \\
u(x,0)=g_1(x), \qquad (x,0)\in\overline{A_2O}\,; \\
u_y(x,0)=k\cdot u_y(-x,0)+g_2(x), \quad (x,0)\in A_2O\,,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi(y)$, $f_j(y)$, $g_j(x)$ $(j=\overline{1,2})$ – заданные функции, причем $\varphi(y)\in C^1[0,1]$; $f_1(t),g_1(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$ и $f_1(0)=g_1(0)$; $f_2(t),g_2(t)\in C^1(-1,0)$ и $f_1'(t)$, $g_1'(t)$, $f_2(t)$, $g_2(t)$ – ограничены при $t\to 0$, $t\to -1$; $k=-1$ или $k=1$; $A_1A_0=\{(x,y): x=1, 0<y<1\}$, $A_1(1,0)$, $A_0(1,1)$.

Методом интегралов энергии доказано, что справедлива

Теорема 2.1. Если выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_1^2\ge(\operatorname{Im}\lambda_2)^2+1/2$, то задача $\mathscr{F}^{(1)}$ не может иметь более одного решения.

Существование решения задачи $\mathscr{F}^{(1)}$, при выполнении условия теоремы 2.1, доказано методом интегральных уравнений.

§2.2 посвящен изучению следующей задачи.

Задача $\mathscr{F}^{(2)}$. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$\begin{gathered}
u_x(0,y)=f_3(y), \quad (0,y)\in B_2O\,; \\
u(0,y)=-u(0,-y)+f_4(y), \quad (0,y)\in\overline{B_2O}\,; \\
u_y(x,0)=g_3(x), \quad (x,0)\in A_2O\,; \\
u(x,0)=-u(-x,0)+g_4(x), \quad (x,0)\in\overline{A_2O}\,,
\end{gathered}$$

где $\varphi(y)$, $f_j(y)$, $g_j(x)$ $(j=\overline{3,4})$ – заданные функции, причем, $\varphi(y)\in C^1[0,1]$; $f_4(t)$, $g_4(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$ и $f_4(0)=g_4(0)$; $f_3(t),g_3(t)\in C^1(-1,0)$ и $f_3(t)$, $g_3(t)$, $f_4'(t)$, $g_4'(t)$ – ограничены при $t\to 0$ и $t\to(-1)$.

Методом интегралов энергии установлено, что при выполнении условия $\operatorname{Re}\lambda_1^2\ge(\operatorname{Im}\lambda_2)^2+1/2$ задача $\mathscr{F}^{(2)}$ не может иметь более одного решения (**теорема 2.2**). Считая выполненным это условие, существование решения задачи $\mathscr{F}^{(2)}$ доказано эквивалентным сведением задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Из теоремы 2.1 (2.2) при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{C}$ вытекает

Следствие 1. Задача $\mathcal{F}^{(1)}$ $\left(\mathcal{F}^{(2)}\right)$ не имеет собственных значений на и внутри гиперболы

$$\left[(\mathrm{Re}\lambda)\Big/\left(\sqrt{2}/2\right)\right]^2-\left[(\mathrm{Im}\lambda)/(1/2)\right]^2=1. \tag{3}$$

В §2.3 исследована однозначная разрешимость следующей задачи:

Задача $\mathcal{BS}$. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
&u(1,y)=\alpha(y)u(r,y)+\beta(y), && (1,y)\in\overline{A_1A_0};\\
&u(0,y)=f_5(y), && (0,y)\in\overline{B_2O};\\
&u_x(0,y)=k\cdot u_x(0,-y)+f_6(y), && (0,y)\in B_2O;\\
&u(x,0)=g_5(x), && (x,0)\in\overline{A_2O};\\
&u_y(x,0)=k\cdot u_y(-x,0)+g_6(x), && (x,0)\in A_2O,
\end{aligned}$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $f_j(y)$, $g_j(x)$ $(j=\overline{5,6})$ – заданные функции, причем $\alpha(y)$, $\beta(y)\in C^1[0,1]$; $f_5(t)$, $g_5(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$ и $f_5(0)=g_5(0)$; $f_6(t)$, $g_6(t)\in C^1(-1,0)$ и $f_5'(t)$, $g_5'(t)$, $f_6(t)$, $g_6(t)$ – ограничены при $t\to 0$ и $t\to(-1)$; $0<r=const<1$, $k=-1$ или $k=1$.

Теорема 2.3. Пусть выполнены следующие условия

$$|\alpha(y)|\le 1,\ 0\le y\le 1;\ \lambda_1\ne 0,\ |\lambda_1|\ge|\lambda_2|. \tag{4}$$

Тогда задача $\mathcal{BS}$ не может иметь более одного решения.

Единственность решения задачи $\mathcal{BS}$ доказана методом принципа экстремума, а существование решения [при наличии условий (4)] – методом интегральных уравнений.

Из следствия 1 и теоремы 2.3 при $\alpha(y)\equiv 0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ вытекает

Следствие 2. Задача $\mathcal{F}^{(1)}$ не имеет собственных значений на и внутри гиперболы (3) и на отрезках $\left(-\sqrt{2}/2,0\right)$, $\left(0,\sqrt{2}/2\right)$ плоскости комплексной переменной λ.

Отметим, что во всех задачах, изученных в этой главе, на частях границы области рассмотрения, являющихся характеристиками уравнения, краевые условия не заданы.

В конце главы даны выводы по второй главе.

В третьей главе для некоторых параболо-гиперболических уравнений рассмотрены задачи с краевыми условиями как на характеристической, так и на нехарактеристической частях границы области рассмотрения.

В §3.1 исследована следующая задача для уравнения (1) в области Ω, причем здесь предположено, что λ_1 и λ_2 – заданные действительные числа.

Задача $\mathcal{F}^{(3)}$**.** Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$u(x,y)=f_1(y),\quad (x,y)\in\overline{B_2E};$$

$$u(0,y)=k\cdot u(0,-y)+g_1(y),\quad (0,y)\in\overline{B_2O};$$

$$u(x,y)=f_2(x),\quad (x,y)\in\overline{A_2D};$$

$$u(x,0)=k\cdot u(-x,0)+g_2(x),\quad (x,0)\in\overline{A_2O},$$

где $\varphi(y)$, $f_j(t)$, $g_j(t)$ – заданные функции, причем, $\varphi(y)\in C^1[0,1]$, $g_j(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$, $f_j(t)\in C[-1,-1/2]\cap C^2(-1,-1/2)$ и $f_j'(t)$ $[g_j'(t)]$ – ограничены при $t\to 0$ и $t\to(-1)$ $[t\to(-1/2)]$ $(j=\overline{1,2})$; $k=const\neq 1$ – заданное действительное число; $f_2(-1)=k\varphi(0)+g_2(-1)$, $g_1(0)=g_2(0)$; $B_2E=\{(x,y):x-y=1,(-1)<y<(-1/2)\}$, $A_2D=\{(x,y):(-1)<x<(-1/2),y-x=1\}$.

Методом интегралов энергии доказана

Теорема 3.1. Если выполнено неравенство $|\lambda_1|\geq\left(\sqrt{2}/2\right)$, то задача $\mathcal{F}^{(3)}$ не может иметь более одного решения.

Существование решения задачи $\mathcal{F}^{(3)}$ (опираясь на теорему 3.1) доказано эквивалентным сведением задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Из теоремы 3.1 при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}$ вытекает

Следствие 3. Если $\lambda\in\left(-\infty,-\sqrt{2}/2\right]\cup\left[\sqrt{2}/2,+\infty\right)$, то задача $\mathcal{F}^{(3)}$ не имеет собственных значений.

В §3.2 изучена следующая

Задача $\mathcal{F}^{(4)}$**.** Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$A_{(-1)y}^{1,\lambda_2}\left\{\frac{d}{dy}u\left(\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right)\right\}=u_x(0,y)+f_3(y),\qquad (0,y)\in B_2O; \tag{5}$$

$$u(0,y)=k_1\cdot u(0,-y)+g_3(y),\ (0,y)\in\overline{B_2O};$$

$$A_{(-1)x}^{1,\lambda_2}\left\{\frac{d}{dx}u\left(\frac{x-1}{2},\frac{x+1}{2}\right)\right\}=u_y(x,0)+f_4(x),\qquad (x,y)\in A_2O; \tag{6}$$

$$u(x,0)=k_2\cdot u(-x,0)+g_4(x),\ (x,0)\in\overline{A_2O},$$

где k_1,k_2–заданные числа, а $f_j(t),g_j(t)$ $(j=\overline{3,4})$–заданные функции, причем, $f_j(t)\in C^1(-1,0)$, $g_j(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$ и $f_j(t)$, $g_j'(t)$ ограничены при

$t \to 0$ и $t \to (-1)$ $(j=\overline{3,4})$; если $k_1 = 1$ $[k_2 = 1]$, то $g_3(0)=0$ $[g_4(0)=0]$, а если $k_1 \neq 1,\ k_2 \neq 1$, то $(1-k_1)g_3(0)=(1-k_2)g_4(0)$.

Отметим, что если $(0,y)\in B_2O$, то $\left(\dfrac{y+1}{2},\dfrac{y-1}{2}\right)\in B_2E$, а если $(x,0)\in A_2O$, то $\left(\dfrac{x-1}{2},\dfrac{x+1}{2}\right)\in A_2D$. Поэтому условия (5) и (6) соответственно связывают значения производных искомой функции в точках, лежащих на отрезках B_2O, B_2E и A_2O, A_2D.

Используя метод интегралов энергии доказано, что справедлива

Теорема 3.2. Если $k_1+k_2=0$ или $k_1+k_2=\pm 1$ и выполнено неравенство $|\lambda_1| \geq \left(\sqrt{2}/2\right)$, то задача $\mathscr{F}^{(4)}$ не имеет более одного решения.

Существование решения задачи $\mathscr{F}^{(4)}$ (при выполнении условия теоремы 3.2) установлено с помощью метода интегральных уравнений.

Из теоремы 3.2 при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ следует, что если $k_1+k_2=0$ или $k_1+k_2=\pm 1$, то задача $\mathscr{F}^{(4)}$ не имеет собственных значений, когда $\lambda\in\left(-\infty,-\sqrt{2}/2\right]\cup\left[\sqrt{2}/2,+\infty\right)$.

В §3.3 в области $\Delta=\Omega\cup OB_2\cup OA_2\cup\Omega_5\cup OP\cup\Omega_6$ рассмотрено уравнение

$$\mathscr{L}_2 u(x,y)=0, \tag{7}$$

где

$$\mathscr{L}_2 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}-\lambda_1^2, & (x,y)\in\Omega_0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\lambda_2^2\left[\operatorname{sign}\left(y^2-x^2\right)\right], & (x,y)\in \bigcup\limits_{j=1}^{6}\Omega_j, \end{cases}$$

$\Omega_5=\{(x,y): x<0, y<0, x-y>0\}$, $\Omega_6=\{(x,y): x<0,\ y<0, x-y<0\}$, OP – отрезок прямой $x-y=0$, $P(-1/2,-1/2)$, причем здесь предположено, что λ_1 и λ_2 – заданные, вообще говоря, комплексные числа.

Под регулярным в области Δ решением уравнения (7) будем понимать функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Delta})\cap C^1\left(\Delta\setminus\left(OE\cup OD\cup OP\right)\right)$, которая в области Ω_0 имеет непрерывную производную $u_{xx}(x,y)$, а в областях Ω_j, $j=\overline{1,6}$ – непрерывные производные $u_{xx}(x,y)$, $u_{yy}(x,y)$ и такую, что в этих областях она удовлетворяет уравнению (7), а функции $u_x(0,\pm t)$, $u_y(0,\pm t)$, $u_y(\pm t,0)$ ограничены при $t\to 0$ и $t\to 1$.

Задача Г**.** Найти регулярное в области Δ решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям (2) и

$$p\cdot\left[u\left(-\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right)-u\left(\frac{y-1}{2},-\frac{y+1}{2}\right)\right]+$$

$$+q\cdot\left[u\left(\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right)-u\left(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2}\right)\right]=f_1(y),\quad -1\le y\le 0; \qquad (8)$$

$$u(x,0)-u(-x,0)=g_5(x),\qquad -1\le x\le 0;$$
$$u(0,y)+u(0,-y)=g_6(y),\qquad -1\le y\le 0,$$

где p,q – заданные числа, а $f_1(y)$, $g_j(t)$ $(j=\overline{5,6})$ – заданные функции, причем, $p^2+q^2\neq 0$; $f_1(y)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$; $g_j(t)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0)$ $(j=\overline{5,6})$; $f_1'(t)$, $g_5'(t)$, $g_6'(t)$ – ограничены при $t\to 0$ и $t\to -1$; $g_5(0)=0$; если $q=0$, то $f_1(0)=0$, а если $p=-q$, то $f_1(-1)=0$.

Отметим, что если $y\in[-1,0]$, то точки

$$\left(-\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right),\ \left(\frac{y-1}{2},-\frac{y+1}{2}\right),\ \left(\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right),\ \left(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2}\right)$$

соответственно лежат на отрезках $\overline{B_2P}$, $\overline{A_2P}$, $\overline{B_2E}$, $\overline{A_2D}$ прямых $x+y=-1$, $x+y=-1$, $x-y=1$, $y-x=1$. Поэтому выражения в условии (8), стоящие в квадратных скобках, дают разность между значениями искомой функции в точках, лежащих на $\overline{B_2P}$, $\overline{A_2P}$ и $\overline{B_2E}$, $\overline{A_2D}$.

Установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.3. Пусть выполнена одна из следующих групп условий:

I. $q(p^2-q^2)=0$; λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda_1^2\ge(\operatorname{Im}\lambda_2)^2+1/2$;

II. $pq(p^2-q^2)\neq 0$; $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq 0$, $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|$, $|\lambda_2|<2|p|(p^2+q^2)^{-1/2}$.

Тогда, если существует решение задачи Γ, то оно единственно.

При доказательстве теоремы 3.3, в случае I использован метод интегралов энергии, а в случае II – метод принципа экстремума.

Существование задачи Γ, опираясь на теорему 3.3, доказано эквивалентным сведением задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Из теоремы 3.3 при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ следует

Следствие 4. Задача Γ не имеет собственных значений, если 1) $q(p^2-q^2)=0$, а $\lambda\in\mathbb{C}$ и находится на и внутри гиперболы (3); 2) $pq(p^2-q^2)\neq 0$, а $\lambda\in\mathbb{R}$ и находится в промежутке $(-a_2,0)\cup(0,a_2)$, где $a_2=2|p|(p^2+q^2)^{-1/2}$.

В §3.4 следующее уравнение

$$\mathcal{L}_3u(x,y)=0 \qquad (9)$$

рассмотрено в области $\Xi=\Omega_0\cup OA_1\cup\Omega_1\cup OE\cup\Omega_2\cup OB_2\cup\Omega_7$, здесь

$$\mathscr{L}_3\equiv\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{1-\operatorname{sign}y}{2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{1+\operatorname{sign}y}{2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}-\lambda^2(\operatorname{sign}y), & \Omega_0\cup\Omega_1,\\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{1+\operatorname{sign}x}{2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{1-\operatorname{sign}x}{2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda^2(\operatorname{sign}x), & \Omega_2\cup\Omega_7,\end{cases}$$

$\Omega_7=\{(x,y):-1\le x<0,-1<y<0\}$, $OA_1=\{(x,y):0<x<1,y=0\}$, причем предположено, что $\lambda=\lambda_1$ в областях Ω_0, Ω_7 и $\lambda=\lambda_2$ в областях Ω_1, Ω_2, а λ_1 и λ_2 – заданные, вообще говоря, комплексные числа.

Под регулярным в области Ξ решением уравнения (9) будем понимать функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Xi})\cap C^1(\Xi\setminus OE)$, которая в областях Ω_0 и Ω_7 имеет непрерывные производные $u_{xx}(x,y)$ и $u_{yy}(x,y)$ соответственно, а в областях Ω_1, Ω_2 – непрерывные производные $u_{xx}(x,y)$, $u_{yy}(x,y)$, и такую, что в этих областях она удовлетворяет уравнению (9), а функции $u_x(\pm t,0)$, $u_x(0,\pm t)$, $u_y(0,\pm t)$, $u_y(\pm t,0)$ ограничены при $t\to 0$ и $t\to 1$.

Задача $\mathscr{A}^{(1)}$**.** Найти регулярное в области Ξ решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям

$$u(1,y)=\alpha(y)u(r,y)+\beta_1(y),\quad (1,y)\in\overline{A_1A_0}; \tag{10}$$

$$u(x,-1)=\alpha(x)u(x,-r)+\beta_2(x),\quad (x,-1)\in\overline{B_0B_2};$$

$$u(0,y)+u(0,-y)=g_7(y),\qquad (0,y)\in\overline{OB_1};$$

$$u_x(0,y)+u_x(0,-y)=g_8(y),\quad (0,y)\in OB_1;$$

$$u_y(x,0)+u_y(-x,0)=g_9(x),\quad (x,0)\in A_2O;$$

$$u\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)-u\left(\frac{1-x}{2},-\frac{1+x}{2}\right)=f_2(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{11}$$

где $\alpha(t)$, $\beta_j(t)$ ($j=\overline{1,2}$), $g_j(t)$ ($j=\overline{7,9}$) и $f_2(x)$ – заданные функции, причем $\alpha(t),\beta_1(t),\beta_2(-t)\in C^1[0,1]$; $g_7(t)$, $f_2(t)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$; $g_8(t),g_9(-t)\in C^1(0,1)$; $g_7(0)=f_2(0)=0$; $f_2(1)=\alpha(0)f_1(r)+\beta_1(0)-\beta_2(0)$; $0\le r=const<1$, а $g_7'(t)$, $f_2'(t),g_8(t),g_9(-t)$–ограничены при $t\to 0$ и $t\to 1$; $OB_1=\{(x,y):x=0,0<y<1\}$, $B_0B_2=\{(x,y):y=-1,-1<x<0\}$.

Отметим, что в этой задаче вся граница области Ξ занята краевыми условиями, причем условие (11) дает разность между значениями искомой функции в точках, лежащих на отрезках $\overline{A_1E}$, $\overline{B_2E}$ прямой $x-y=1$.

Основным результатом этого параграфа является доказательство однозначной разрешимости задачи $\mathcal{A}^{(1)}$. Здесь, в частности, доказана

Теорема 3.4. Пусть выполнена одна из следующих групп условий:

I. $|\alpha(y)|\le 1,\ 0\le y\le 1;\ \lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}$;

II. $\alpha(y)\equiv 0,\ 0\le y\le 1;\ \lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}\lambda_1^2\ge(1/2)$.

Тогда, если существует решение задачи $\mathcal{A}^{(1)}$, то оно единственно.

Из этой теоремы при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ следует

Следствие 5. Задачи $\mathcal{A}^{(1)}$ не имеет собственных значений, если 1) $|\alpha(y)|\le 1,\ 0\le y\le 1$, а $\lambda\in\mathbb{R}$; 2) $\alpha(y)\equiv 0,\ 0\le y\le 1$, а $\lambda\in\mathbb{C}$ и находится на и внутри гиперболы $\left[(\mathrm{Re}\lambda)\Big/\left(\sqrt{2}/2\right)\right]^2-\left[(\mathrm{Im}\lambda)\Big/\left(\sqrt{2}/2\right)\right]^2=1$.

В §2.3 исследована однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача $\mathcal{A}^{(2)}$**.** Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (10), (11) и

$$u(0,y)+u(0,-y)=g_{11}(y),\qquad (0,y)\in\overline{OB_2};$$

$$u_y(x,0)+u_y(-x,0)=g_{12}(x),\quad (x,0)\in A_2O;$$

$$u\left(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2}\right)-u\left(-\frac{y+1}{2},-\frac{y-1}{2}\right)=f_3(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{12}$$

где $\alpha(t)$, $\beta_1(t)$, $g_{j+9}(t)$ и $f_j(x)$ $(j=\overline{2,3})$ – заданные функции, причем $\alpha(t),\beta_1(t)\in C^1[0,1]$; $g_{11}(-t),f_j(t)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ $(j=\overline{2,3})$; $g_{12}(-t)\in C^1(0,1)$; $f_2(0)=f_3(0)=0$; $0\le r=const<1$, а $f_2'(t)$, $f_3'(t)$, $g_{11}'(-t)$, $g_{12}(-t)$ – ограничены при $t\to 0$ и $t\to 1$.

Отметим, что в этой задаче вся граница области Ω занята краевыми условиями, причем условие (12) дает разность между значениями искомой функции в точках, лежащих на отрезках $\overline{A_2D}$, $\overline{B_1D}$ прямой $y-x=1$.

Установлено, что при выполнении условий теоремы 3.4 задача $\mathcal{A}^{(2)}$ имеет единственное решение и утверждения следствия 5 справедливы и относительно задачи $\mathcal{A}^{(2)}$.

В конце третьей главы даны выводы по главе и заключение по диссертации.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Ахмаджону Кушаковичу Уринову за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание при выполнении настоящей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа, состоящая из введения, трех глав, заключения и списка литературы, посвящена постановке и исследованию краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром в нетрадиционных областях.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, изложены основные характеристики и краткое содержание диссертации.

В первой главе приведены вспомогательные сведения, используемые в диссертации, изложены постановки изучаемых задач и основные научные результаты диссертации.

Во второй главе в нетрадиционной области, состоящей из прямоугольника и четырех характеристических треугольников, исследованы три нелокальные задачи для одного уравнения без краевых условий на частях границы области рассмотрения, являющихся характеристиками уравнения.

В третьей главе для трех уравнений в нетрадиционных областях (для каждого уравнения – своя область), состоящих из прямоугольников и характеристических треугольников, исследованы пять нелокальных краевых задач с краевыми условиями как на характеристической, так и на нехарактеристической частях границы области рассмотрения. Причем в двух из этих краевых задач вся граница области рассмотрения занята краевыми условиями, а в трех–некоторые части граничных характеристик освобождены от краевых условий.

Используя метод интегралов энергии и принцип экстремума, выявлены условия на параметры задач и уравнения, которые достаточны для единственности решения изученных задач. При наличии этих условий с помощью методов интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма доказано и существование исследуемых задач. Для каждой задачи указано множество значений параметра уравнения, где нет собственных значений.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Urinov A. K. and Khaydarov I.U. On a problem for parabolic-hyperbolic type equation with non-smooth line of type change // Abstracts of the 6th International ISAAC congress. Turkey, 2007. p. 105.
2. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Внутренне-краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа // Естественные и технические науки. –М., 2007. –№7. –С. 23-28.
3. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Тез. докл. респ. науч. конф. 8-мая 2008. –Ташкент. 2008. –С. 289-292.
4. Хайдаров И.У. Задача типа Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Международный Российско-Азербайджанский симпозиум. –Нальчик, 2008. –С.163-164.
5. Urinov A. K. and Khaydarov I.U. On a problem for parabolic-hyperbolic type equation with non-smooth line of type changing // Proceedings of 6th ISAAC 2007 Congress, World Scientific, 2008. –Pp. 824-831.
6. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Об одной задаче с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. – Нальчик, 2010. Т.10. –№2. – С. 80-87.
7. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Краевая задача с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. – № 3. –С.144-153.
8. Хайдаров И.У. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения // Доклады АН РУз. – Ташкент, 2011. – № 2. –С. 11-15.
9. Хайдаров И.У. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2011. –№4. –С.194-202.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор
Хайдаров Иброхимжон Усмоналиевичнинг
01.01.02 – дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича
«Тип ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалалар» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: чегаравий масала, нолокал масала, ечимнинг ягоналиги, ечимнинг мавжудлиги, экстремум принципи, энергия интеграллари усули, интеграл тенглама, параболо-гиперболик тенглама.

Тадқиқот объектлари: тадқиқот объекти – тип ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган ва параметрга эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар.

Ишнинг мақсади: тип ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган ва параметрга эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун ноанъанавий соҳаларда чегаравий масалалар қўйиш ва тадқиқ қилиш.

Тадқиқот методлари: экстремум принципи, энергия интеграллари ва интеграл тенгламалар усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги:

- тип ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган ва параметрга эга бўлган бир параболо-гиперболик тенглама учун қаралаётган соҳа чегарасининг характеристика бўлган қисмларида чегаравий шартлар берилмаган чегаравий масалалар қўйилган;
- тип ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган ва параметрга эга бўлган бир неча параболо-гиперболик тенгламалар учун қаралаётган соҳа чегарасининг характеристика бўлган қисмида ҳам ва характеристика бўлмаган қисмида ҳам чегаравий шартлар берилган нолокал чегаравий масалалар баён қилинган;
- қўйилган масалалар ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;
- тенгламада иштирок этаётган параметрнинг ўрганилган масалаларнинг хос сонлари мавжуд бўлмаган қийматлари тўплами топилган.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий аҳамиятга эга.

Фойдаланиш соҳаси: диссертациянинг илмий натижалари ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг кейинги ривожида ва бундай тенгламаларга келтириладиган амалий масалаларни ечишда ҳамда олий ўқув юртларида махсус курслар ўқишда фойдаланилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Хайдарова Иброхимжона Усмоналиевича** на тему: **«Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная задача, единственность решения, существование решения, принцип экстремума, метод интегралов энергии, интегральное уравнение, параболо-гиперболическое уравнение.

Объекты исследования: объектом исследования являются параболо-гиперболические уравнения с негладкой линией изменения типа и с параметром, а предметом исследования–краевые задачи для таких уравнений.

Цель работы: постановка и исследование краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром в нетрадиционных областях.

Методы исследования: применяются методы принципа экстремума, интегралов энергии и интегральных уравнений.

Полученные результаты и их новизна:

- поставлены задачи без краевых условий на частях границы области рассмотрения, являющихся характеристиками, для одного параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа и с параметром;
- сформулированы нелокальные задачи с краевыми условиями как на характеристической, так и на нехарактеристической частях границы области рассмотрения, для ряда параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа и с параметром;
- доказаны существование и единственность решения поставленных задач;
- найдены множества значений параметра уравнения, в которых отсутствуют собственные значения изучаемых задач.

Практическая значимость: результаты диссертации носят теоретический характер.

Область применения: научные результаты диссертации могут быть использованы при дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными и при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям, а также при чтении спецкурсов в вузах.

RESUME

Thesis of **Khaydarov Ibrokhim Usmonalievich**
on the scientific degree competition of the doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 – Differential equations,
subject:
«Boundary-value problems for parabolic-hyperbolic equation with non-smooth line of type changing »

Key words: boundary problem, nonlocal problem, uniqueness of solution, existence of solution, extremume principle, method of integral equation, energy integrals, parabolic-hyperbolic equation.

Subjects of research: objects of the research are parabolic-hyperbolic equation with non-smooth line of type changing and with parameter, and subjects is investigation of boundary problems for these kinds of equations.

Purpose of work: formulation and investigation of boundary-value problems for parabolic-hyperbolic equation with non-smooth line of type changing and with parameter in non-traditional domains.

Methods of research: methods of integral equations, extremume principles and energy integrals are used.

The results obtained and their novelty:

- Problems without boundary condition on some parts of boundary of considered domain, which are characteristics of the parabolic-hyperbolic equation with non-smooth line of type changing and with parameter, are formulated;
- Non-local problems with boundary conditions both on characteristics and non-characteristic parts of considered domain are formulated for parabolic-hyperbolic equation with non-smooth line of type changing and with parameter;
- The uniqueness and the existence of solutions of formulated problems are proved;
- Sets of parameter of the equation, where no exist eigenvalues of studied problems are found.

Practical value: the results of the dissertation work have a theoretical character.

Degree of embed and economic effectiveness: on the base of achieved results, the special course for the master- students can be taught and may be used in the subsequent theoretical development of the theory of partial differential equations.

Field of application: results of the dissertation work can be used at future development of the theory of partial differential equations and at studying practical problems, connected with such equations, and also in teaching programs of special courses of the universities.

Соискатель: