АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи

УДК 517.925/.925.4/.938/.938.5

Бойтиллаев Дилмурод Ахматалиевич

СТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ГЕССЕ

(01.01.02 – дифференциальные уравнения)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2011

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Абдулла Азамович Азамов**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, **Гуламжан Мадаминович Муминов**

кандидат физико-математических наук, **Абдували Абдулхайович Абдуганиев**

Ведущая организация: **Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________ 2011 года в ____ часов на заседании Специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___» _______________ 2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д 015.17.01
кандидат физико-математических наук А.А.Заитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Реальные процессы в окружающей нас природе более адекватно описываются в существенном нелинейными моделями, главным образом, нелинейными системами дифференциальных уравнений. При этом большинство задач можно исследовать посредством динамических систем, теория которых основана А.Пуанкаре. Важную роль в ее становлении сыграли работы Дж.Биркгофа, А.М.Ляпунова, Г.Дюлака, А.Данжуа, И.Бендиксона и др.

Поскольку нелинейные системы, как правило, не интегрируются в явном виде, то приобретают важную роль методы численного вычисления и качественного изучения поведения траекторий.

С точки зрения качественной теории динамических систем наиболее полное исследование сводится к построению фазового портрета, изображающего существенные черты поведения траекторий в целом. С этой точки зрения достаточно подробно изучены динамические системы на плоскости А.А.Андроновым и представителями его научной школы, результаты которых отражены в двух фундаментальных монографиях[1,2]. Следует отметить, что исследования в этом направлении остаются актуальными до сир пор, так как многие вопросы еще ждут своего ответа (в числе которых 16-проблема Гильберта).

Что касается построения фазового портрета динамических систем в многомерных пространствах, то здесь основные результаты относятся к линейным системам[3] главным образом локальному поведению в окрестности особых точек (теорема Гробмана–Хартмана), периодических траекторий или изучению строения фазового пространства отдельных систем.

Задача выяснения качественного строения фазовой картины динамической системы на плоскости разработана практически в полном объеме, благодаря тому, что траектории локально разделяют плоскость (теорема Жордана). Что касается многомерных систем, то, за исключением линейных систем, примеры построения фазовой картины отсутствуют. Даже если рассмотреть конкретные примеры нелинейных систем, начиная с 3-порядка, построить фазовую картину траекторий в целом практически удается только в отдельных случаях. Это замечание относятся и к классу динамических систем с квадратичной нелинейностью. Хотя, на первый взгляд, такие системы составляют узкие класс нелинейных динамических

---

[1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. –568 с.

[2] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. –487 с.

[3] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Част 1, – Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004. –416 с. Част 2, – Москва-Ижевск, ИКИ, 2009, –548 с

систем, математические модели многих процессов в экономике, геофизике, химии и биологии, механике твердого тела и др. приводят именно к системам дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью. Таковы, например, система Лотки-Вольтерра, модель боя Ланкастера, геофизическая модель Рёсслера, системы Э.Лоренца, Г.Чена, Ж.Лу, Т.Рикитаки и др. Поэтому изучение квадратичных систем остается в центре внимания многих известных математиков (С.Смейл, Ю.С.Ильяшенко, Ш.Сонглинг, Л.А.Черкас, F.Dumortier, J.W.Reyn, J.C.Artes, J.Llibre, N.Vulpe, D.A.Boularas, D.Schlomiuk, R.E.Koij и др.)

Поэтому изучение квадратичных систем является актуальной проблемой в качественной теории динамических систем и имеет многочисленные приложения. Вместе с тем класс систем с квадратичной нелинейностью также достаточно широк, а поведение решений столь разнообразно, что получить результаты, относящиеся ко всему классу, сложно. По этой причине большинство результатов относятся либо к конкретным квадратичным системам, либо к специальным подклассам класса таких систем.

При качественном исследовании динамических систем важную роль играет теория бифуркаций, являющаяся одним из важных инструментов (А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордона и А.Г.Майер, В.И.Арнольд и др., Л.П.Шильников, А.Л.Шильников, Д.В.Тураев и Л.Чуа, J.E.Marsden и M.McCracken, B.D.Hassard, N.D.Kazarinoff и Y.H.Wan, J.Guchenheimer и Ph.Holmes, Yu.A.Kuznetsov и др.)

Степень изученности проблемы. Качественному исследованию квадратичных систем, а также систем, зависящих от нескольких числовых параметров, к которым относятся упомянутые выше примеры, посвящено много работ (по нескольку статей практически в каждом номере "Реферативного журнала" и "Mathematical Reviews"). Из работ последних лет отметим исследования М.Менсинжера квадратичной системы в трехмерном пространстве, содержащей целую плоскость критических точек. В работе А.Ю.Погромского, Г.Сантабони и Х.Нижмейжера изучена устойчивость нулевого решения системы, близкой к системе Лоренца. М.В.Логинов и М.Д.Михайлов применили методы качественной теории дифференциальных уравнений к квадратичной системе, описывающей модель "хищник-жертва". J.W.Reyn построил фазовые портреты двумерных систем, правые части которых являются квадратичными полиномами. В работе J.W.Reyn'а и R.E.Kooij'а показано существование 226 различных фазовых портретов невырожденных квадратичных систем с конечной кратностью два, и дана их классификация в пространстве коэффициентов $\boldsymbol{R}^{12}$. D.Schlomiuk и N.Vulpe дали полную глобальную топологическую классификацию двумерных квадратичных систем Лотки-Вольтерра. В случае трехмерных конкурентоспособных систем Лотки-Вольтерра M.L.Zeeman выделял 33 устойчивых эквивалентных класса. А.А.Азамовым и А.М.Тилавовым показано, что даже в двумерной системе с одним квадратичным членом может произойти три вида классических бифуркаций: бифуркация седло-узла, Пуанкаре-Андронова-Хопфа и гомоклинической петли седла. Н.Ю.Сатимовым и А.Т.Сарымсаковым было получено критерий положительности решений квадратичных систем вида $\dot{x}_k = \sum_i a_{ik} x_i x_k$ с неотрицательными коэффициентами. Ими найдены также условия, при выполнении которых модуль решения системы за конечное время уйдет в бесконечность.

В виду отмеченной выше особенности, нелинейные системы представляет особый теоретический интерес выделение конкретных классов, допускающих более подробное изучение. К ним относится так называемая система Гессе $\dot{x} = Ax + (a \cdot x)x$, изучение которой было начато А.А.Азамовым и Ю.М.Раадом. Они нашли необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения системы Гессе. А.А.Азамовым и Б.А.Абдурахмоновым получены необходимые и достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы типа Гессе $\dot{x} = Ax + \varphi(x)x$.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению строения фазового пространства динамической системы с квадратичной нелинейностью Гессе $\dot{x} = Ax + (a \cdot x)x$, и в некотором смысле завершает качественную теорию таких систем.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы Бойтиллаева Дилмурода Ахматалиевича на тему «Строение фазового пространства динамической системы с нелинейностью Гессе» была утверждена на Ученом совете Института математики и информационных технологий АН РУз 24 февраля 2010 года (протокол № 3) и исследование по ней проводилось в рамках гранта ФА-Ф1-Ф006 «Разработка новых качественных и количественных методов исследования управляемых и нелинейных динамических систем и их приложения к изучению математических моделей естествознания».

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертационной работы являются выяснение строения фазового пространства динамической системы с квадратичной нелинейностью Гессе $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

– изучение типов интервала существования траекторий динамической системы $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$;

– выяснение строения фазового пространства динамической системы $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$.

Объект и предмет исследования. Динамическая система с квадратичной нелинейностью, фазовый портрет динамической системы Гессе, бифуркация седло-узла.

Методы исследований. Качественная теория динамических систем, теория бифуркаций, линейная алгебра, компьютерная графика.

Основные положения, выносимые на защиту:

– изучено инвариантное разбиение фазового пространства системы Гессе с точки зрения продолжаемости решений;

– найдены все инвариантные многообразия системы;

– построена фазовая картина системы в целом;

– показана эффективность метода бифуркаций седло-узла.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации, на которые опираются существенные положения диссертации, перечисленные выше и выносимые на защиту, являются новыми.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в исследованиях многомерных нелинейных динамических систем и при проведении специальных курсов для бакалавров и магистров, а также в приложениях математической модели Лотки-Вольтерра в биологии и химии.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» (Институт математики АН РУз, руководитель – академик М.С.Салахитдинов), «Математические модели управляемых процессов» (Институт математики АН РУз, руководитель – профессор А.Азамов), на международной научной конференции “Управление и оптимизация динамических систем” (CODS-2009, Ташкент, 2009) и на республиканской конференции «Актуальные проблемы математики и информатики» (Самарканд, 2008).

Опубликованность результатов. Список публикаций приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ». Постановка задач и применение теоремы Х.Уитни для исследования первичного разбиения, а также идея использования метода бифуркаций к исследованию системы Гессе принадлежат научному руководителю А.А.Азамову, реализация этих идей, а также многократное применение бифуркаций выполнено диссертантом самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на 9 параграфов, заключения и 97 наименований использованной литературы. Диссертация изложена на 92 страницах машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и изложена цель диссертационной работы.

Первая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе приведены необходимые определения основных используемых в диссертации понятий и постановка задач. Во втором параграфе приведен обзор новейших исследований по теме диссертации. В третьем параграфе изложены основные научные результаты, полученные в диссертации.

Вторая глава диссертации состоит из трех параграфов. Во **второй главе** изучается инвариантное разбиение фазового пространства системы с квадратичной нелинейностью Гессе

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R^n}, \tag{1}$$

где $A=(a_{ij})-(n\times n)$-матрица, $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ – скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$. Инвариантное разбиение фазового пространства системы (1) изучается с точки зрения продолжаемости решений.

В первую очередь отметим, что заменой Гессе $\boldsymbol{x}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{\tau}$, где $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R^n}$, τ – скалярная функция, можно разделить линейную и нелинейную части системы (1). А именно, задача Коши $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ для системы (1) равносильна следующей системе порядка $n+1$:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0,\\ &\dot{\tau} = -(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}), \quad \tau(0)=1. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, может быть выражено в явном виде

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{e^{At}\boldsymbol{x}_0}{1-\int\limits_0^t (e^{sA^*}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0)ds}, \tag{3}$$

где A^* – транспонированная матрица.

Семейство систем (1) инвариантно относительно линейных преобразований: если $\boldsymbol{x}=L\boldsymbol{z}$, то $\dot{\boldsymbol{z}}=L^{-1}AL\boldsymbol{z}+(L^*\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}$, где L – невырожденная матрица. Это позволяет свести общий случай к случаю, когда матрица A имеет жорданову форму. В связи с этим будем предполагать, что такое приведение уже осуществлено в исходной системе (1).

Первый параграф является подготовительным – в нем вводятся понятия и обозначения, связанные с вопросом о продолжаемости решений нелинейных автономных систем.

Пусть дана система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, функция $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ локально–липщицева. Максимальный интервал существования траектории $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, обозначается $J(\boldsymbol{x}_0)$. Поскольку $J(\boldsymbol{x}_0)$ является открытым промежутком, то он может иметь один из четырех видов $(-\infty, \infty)$, $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$, (α, β), где α и β – действительные числа, $\alpha < 0 < \beta$. Совокупность точек x_0, для которых $J(\boldsymbol{x}_0)$ имеет соответствующий вид, обозначим Z_b, Z_r, Z_l, Z_n. Все эти множества инвариантны: если $\boldsymbol{x}(t_*) \in Z_i$ при некотором t_*, то $x(t) \in Z_i$ при всех t, $(i \in \{b, r, l, n\})$.

Параграф 2.2 посвящен изучению разбиения фазового пространства на инвариантные подмножества Z_b, Z_r, Z_l, Z_n.

В этом параграфе предполагается, что все собственные числа матрицы A действительны, попарно различны и отличны от нуля, а также – все компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ отличны от нуля.

Основным результатом этой главы является следующий результат.

Теорема 2.2.2. В системе (1) все множества Z_b, Z_r, Z_l, Z_n могут быть непустыми.

Третий параграф второй главы посвящен изучению свойств областей Z_b, Z_r, Z_l, Z_n, связанных свойствами открытости и замкнутости.

Третья глава диссертации, состоящая из трех параграфов, посвящена изучению строения фазового пространства системы (1).

В дальнейшем предполагается, что выполнены следующие *условия*:

G1. Все собственные числа матрицы A попарно различны и имеют отличную от 0 действительную часть.

G2. Все компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ отличны от нуля. (Если какая-то компонента $\boldsymbol{a}$ равна 0, то, в предположении G1, порядок системы (1) можно понижать.)

В первом параграфе третьей главы описано строение фазового пространства системы (1) в случае, когда все собственные числа матрицы A действительны.

В этом случае в силу предположения о жордановости, можно привести к следующему виду

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + x_i \sum_j a_j x_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

Без потери общности можно считать $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$. Помимо начала координат, которое обозначим $\boldsymbol{b}^0 = (0, 0, \ldots, 0)$, положениями равновесия являются точки $\boldsymbol{b}^i = (0, 0, \ldots, -\lambda_i / a_i, \ldots, 0)$, у которых все координаты, за исключением i-ой, равны 0, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3.1.2. Для каждого i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ одно из положений равновесия является седлом типа $(i, n-i)$, у которого ровно i собственных чисел положительны, а $n-i$ собственных чисел отрицательны.

Положения равновесия образуют симплекс, у которого одна из вершин – точка $\boldsymbol{b}^0$, остальные по одной лежат на осях координат. Этот симплекс обозначим Σ.

Теорема 3.1.3. Аффинные плоскости, натянутые на грани всех размерностей симплекса Σ, являются инвариантными.

На систему (4) посмотрим как на векторное поле. Оно порождает векторные поля на каждой инвариантной плоскости. Оказывается, что имеет место следующий ***принцип индукции.***

Теорема 3.1.4. Сужение системы (4) на инвариантную плоскость размерности k снова принадлежит классу систем вида и удовлетворяет условиям G1 и G2.

Согласно теореме 3.1.4, для построения фазового портрета достаточно выявить поведение траекторий, не лежащих на инвариантных гиперплоскостях.

Рассмотрим произвольную траекторию $\boldsymbol{x}(t)$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in Int\Sigma$.

Теорема 3.1.5. Если $\lambda_1 > 0$ $(\lambda_1 < 0)$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}^1$ $(\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}^0)$.

Теорема 3.1.6. В случае $\lambda_1 > 0$ (соответственно $\lambda_1 < 0$) вершина $\boldsymbol{b}^1$ (вершина $\boldsymbol{b}^0$) симплекса Σ является ω-предельным множеством, а вершина $\boldsymbol{b}^0$ (вершина $\boldsymbol{b}^1$) – α-предельным множеством для всех траекторий, лежащих внутри симплекса Σ.

Инвариантные гиперплоскости делят пространство $\boldsymbol{R}^n$ на $2^{n+1} - 2$ неограниченных многогранных областей. Произвольную из этих областей обозначим Δ и рассмотрим траекторию $\boldsymbol{x}(t)$, проходящую через точку $\boldsymbol{x}_0 \in \Delta$. Ясно, что $\boldsymbol{x}(t)$ не покидает Δ.

Таким образом, для траекторий, лежащих в Δ, возможны следующие типы поведения:

Тип I. Траектория приходит из бесконечности и уходит в бесконечность;

Тип II. Траектория приходит из бесконечности и стремится к одному из положений равновесия $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{b}^1$ (в зависимости от выполнения условия $\lambda_1 < 0$, $\lambda_1 > 0$ соответственно).

Тип III. Траектория выходит из одного из положений равновесия $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{b}^n$ (в зависимости от выполнения условия $\lambda_n > 0$, $\lambda_n < 0$соответственно) и уходит в бесконечность.

Тип IV. Траектория выходит из особой точки и стремятся к другой.

Чтобы конкретизировать последний тип поведения ситуацию $\boldsymbol{b}^\alpha = \lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{b}^\varpi = \lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t)$обозначим символически как $\boldsymbol{b}^\alpha \to \boldsymbol{b}^\varpi$. Тогда для любой траектории

IV^{a}. $\boldsymbol{b}^0 \to \boldsymbol{b}^1$ при $\lambda_n > 0$; IV^{b}. $\boldsymbol{b}^n \to \boldsymbol{b}^0$ при $\lambda_1 < 0$;

IV^{c}. $\boldsymbol{b}^n \to \boldsymbol{b}^1$ при $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_n < 0$.

Теперь из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальной точки вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1.7. Каждая траектория, лежащая в одной из областей Δ и определенные на оси $(-\infty, \infty)$ принадлежит только одному из типов IV^{a}-IV^{c}.

Что касается траекторий, не обязательно определенные на $(-\infty, \infty)$, здесь типы траекторий могут быть смешаны.

В параграфе 3.2 изучается случай, когда матрица Aимеет одну пару комплексных собственных чисел $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$.

В этом случае систему (1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})x_1, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 + \alpha x_2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})x_2, \\ \dot{y} &= Cy + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})y, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{n-2}$, $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$. (По-прежнему предполагается, что условия G1, G2 выполнены). C – диагональная матрица, составленная из $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$.

С целью выяснения строения фазового пространства применим метод бифуркаций. Для этого систему (5) соединим (своего рода гомотопией) с системой, у которой все собственные числа действительны. Простейший способ – это включить систему (5) в однопараметрическое семейство систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(\mu)x_1 + a_{12}(\mu)x_2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})x_1, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(\mu)x_1 + a_{22}(\mu)x_2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})x_2, \\ \dot{y}_j &= \lambda_j y_j + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})y_j, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a_{11}(\mu)=\lambda_1+(\alpha-\lambda_1)\mu,\ a_{12}(\mu)=-\mu\beta,$ $a_{21}(\mu)=\mu\beta,$ $a_{22}(\mu)=\lambda_2+(\alpha-\lambda_2)\mu$, $j=3,...,n$, λ_1,λ_2 – произвольно действительные числа, не равные нулю и выбранные так, чтобы $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>\cdots>\lambda_n$, μ – действительный параметр, служащий бифуркационным, $\mu\in[0,\ 1]$, $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$.

При $\mu=0$ матрица $A(0)$ диагональная и удовлетворяет условию G1. Следовательно, в этом случае фазовый портрет известен как в параграфе 3.1.

Теперь изучим характер фазовой картины при увеличении параметра μ от значения 0 до значения 1. Пусть

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.2.1. При любом $\mu\in[0,\ 1]$ гиперплоскость

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}x_1+\frac{\Delta_2}{\Delta}x_2+\sum_{i=3}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}x_i+1=0 \tag{7}$$

инвариантна.

Значение $\mu^*=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2+2\beta}$, которое лежит строго между 0 и 1 является бифуркационным значением параметра μ.

При $0<\mu<\mu^*$ система (6) по-прежнему будет иметь $n+1$ особую точку. Две из них зависят от μ:

$$\boldsymbol{b}^i(\mu)=(b_1^i(\mu),\ b_2^i(\mu),\ 0,\ ...,\ 0),\ i=1,2,$$

где

$$b_1^i(\mu)=-\frac{(\lambda_1+\mu(\alpha-\lambda_1))t^i-\mu\beta}{a_1t^i+a_2},\ b_2^i(\mu)=\frac{b_1^i(\mu)}{t^i},\ i=1,2,$$

$$t^{1,2}(\mu)=\frac{(\mu-1)(\lambda_2-\lambda_1)\pm\sqrt{D}}{2\mu\beta}.$$

Остальные особые точки не зависят от μ:

$$\boldsymbol{b}^j=(0,0,\ ...-\lambda_j/a_j,0,...,0),\ j=3,...,n,\ \boldsymbol{b}^0=(0,\ 0,\ ...\ ,0)$$

Соответственно, система будет иметь n инвариантных гиперплоскостей:

$$b_2^i(\mu)x_1 - b_1^i(\mu)x_2 = 0,\ i = 1,2,$$
$$x_j = 0,\ \ j = 3,...,n,$$
а также наклонная инвариантная гиперплоскость вида (8).

В целом для $\mu \in (0, \mu^*)$ фазовый портрет системы по характеру совпадает со случаем $\mu = 0$.

При $\mu \to \mu^* - 0$ имеют место свойства:

1) особые точки $\boldsymbol{b}^1(\mu)$ и $\boldsymbol{b}^2(\mu)$, сближаясь, стремятся к общему пределу $\boldsymbol{b}^*(\mu^*)$, являющимся особой точкой типа седло-узла: $\boldsymbol{b}^*(\mu^*) = (b_1^*, b_2^*, 0, ..., 0)$, $b_1^* = b_2^* = -\dfrac{\lambda_1 + \mu^*(\alpha - \lambda_1 - \beta)}{a_1 + a_2}$ (остальные особые точки не меняются);

2) инвариантные гиперплоскости $b_2^i(\mu)x_1 - b_1^i(\mu)x_2 = 0,\ i = 1,2$ также стремятся к общему пределу – к инвариантной гиперплоскости $x_1 - x_2 = 0$. (инвариантные гиперплоскости $x_j = 0,\ j = 3,...,n$, очевидно, остаются без изменения.)

Таким образом, при $\mu = \mu^*$ происходит бифуркация типа «седло-узел». Числа особых точек и инвариантных гиперплоскостей уменьшаются в точности на единицу. Система (6) имеет n особых точек:

$$\boldsymbol{b}^*(\mu^*) = (b_1^*, b_2^*, 0, ..., 0),$$
$$\boldsymbol{b}^j = (0, 0, ... -\lambda_j / a_j, 0, ..., 0),\ j = 3,...,n,\ \boldsymbol{b}^0 = (0, 0, ...\ , 0),$$

и n инвариантных гиперплоскостей:

$$x_j = 0,\ \ j = 3,...,n;\quad x_1 - x_2 = 0,$$

включая гиперплоскость (7) с $\mu = \mu^*$.

При $\mu^* < \mu < 1$ особая точка «седло-узел» исчезает – произойдет бифуркация, называемая «срывом равновесия седло-узла» В результате остаются $n-1$ особая точка:

$$\boldsymbol{b}^j = (0, 0, ... -\lambda_j / a_j, 0, ..., 0),\ j = 3,...,n,\ \boldsymbol{b}^0 = (0, 0, ...\ , 0).$$

Число инвариантных гиперплоскостей также уменьшаются до $n-1$, так как исчезает инвариантная гиперплоскость $x_1 - x_2 = 0$. Инвариантные гиперплоскости $x_j = 0,\ j = 3,...,n$ не меняются. Важная особенность системы (6) состоит в том, что несмотря на исчезновение двух особых точек, инвариантная гиперплоскость, проходящая через них до бифуркационного значения μ, сохраняет свой след и при $\mu^* < \mu < 1$ в виде (7).

И наконец, при $\mu = 1$ структура фазового портрета системы топологически эквивалентна к построению фазового портрета в случае $\mu^* < \mu < 1$. Система имеет $n-1$ особых точек:

$$\boldsymbol{b}^j = (0,0, \ldots - \lambda_j / a_j, 0, \ldots, 0),\ j = 3, \ldots, n,\ \boldsymbol{b}^0 = (0,\ 0, \ldots\ , 0).$$

Инвариантные гиперплоскости $x_j = 0,\ \ j = 3, \ldots, n$ не меняются.

Теперь, так же как в §3.1, устанавливается, что любая траектория принадлежит к одному из типов I–IV, что завершает построение фазового портрета.

В параграфе 3.3 рассматривается общий случай, т.е. когда матрица A имеет m пар комплексных собственных чисел $\alpha_i \pm i\beta_i,\ \beta_i > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, m.$

В этом случае в силу предположения о жордановости, система (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2i-1} &= \alpha_i x_{2i-1} - \beta_i x_{2i} + (\boldsymbol{a} \cdot x) x_{2i-1}, \\ \dot{x}_{2i} &= \beta_i x_{2i-1} + \alpha_i x_{2i} + (\boldsymbol{a} \cdot x) x_{2i}, \\ \dot{y} &= Cy + (\boldsymbol{a} \cdot x) y, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, y),\ \ x \in \boldsymbol{R}^n,\ \ x_1,\ x_2, \ldots, x_{2m} \in \boldsymbol{R},\ \ y \in \boldsymbol{R}^{n-2m}$ $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$. (По-прежнему предполагается, что условия G1, G2 выполнены). C – диагональная матрица, составленная из $\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \ldots, \lambda_n$.

Систему (8) включим в однопараметрическое семейство систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2i-1} &= a_{2i-1,2i-1}(\mu) x_{2i-1} - a_{2i-1,2i}(\mu) x_{2i} + (\boldsymbol{a} \cdot x) x_{2i-1}, \\ \dot{x}_{2i} &= a_{2i,2i-1}(\mu) x_{2i-1} + a_{2i,2i}(\mu) x_{2i} + (\boldsymbol{a} \cdot x) x_{2i}, \\ \dot{y}_j &= \lambda_j y_j + (\boldsymbol{a} \cdot x) y_j, \end{aligned} \tag{9}$$

где $a_{2i-1,2i-1}(\mu) = \lambda_{2i-1} + (\alpha_i - \lambda_{2i-1})\mu$, $a_{2i-1,2i}(\mu) = -\mu\beta_i$, $a_{2i,2i-1}(\mu) = \mu\beta_i$, $a_{2i,2i}(\mu) = \lambda_{2i} + (\alpha_i - \lambda_{2i})\mu$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 2m+1, \ldots, n$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$– произвольно выбранные, попарно-различные действительные числа, отличные от $\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \ldots, \lambda_n$, и кроме того такие, что отношения

$$\frac{\lambda_{2i-1} - \lambda_{2i}}{\beta_i},\ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

также попарно-различны (μ – бифуркационный параметр) $\mu \in [0,\ 1]$).

При $\mu = 0$ матрица $A(0)$ диагональная и для системы (9) верны построения в §3.1.

При увеличении параметра μ от значения 0 до значения 1 произойдет последовательно m бифуркаций типа седло-узла на соответствующих плоскостях.

Заметим, что при всех значениях параметра μ сохраняется инвариантная гиперплоскость вида

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\Delta_i^1}{\Delta_i}x_{2i-1}+\frac{\Delta_i^2}{\Delta_i}x_{2i}\right)+\sum_{j=2m+1}^{n}\frac{a_j}{\lambda_j}x_j+1=0,$$

где

$$\Delta_i^1=\begin{vmatrix} a_{2i-1} & a_{2i} \\ a_{2i,2i-1}(\mu) & a_{2i,2i}(\mu)\end{vmatrix},\quad \Delta_i^2=\begin{vmatrix} a_{2i-1,2i-1}(\mu) & a_{2i-1,2i}(\mu) \\ a_{2i-1} & a_{2i}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{2i-1,2i-1}(\mu) & a_{2i-1,2i}(\mu) \\ a_{2i,2i-1}(\mu) & a_{2i,2i}(\mu)\end{vmatrix},\ i=1,2,\ldots,m.$$

Из условия о том, что отношения (10) попарно-различны, вытекает такое же свойство для μ_i^*, $i=1,2,\ldots,m$, каждое из $\mu_i^*=\dfrac{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}}{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}+2\beta_i}$,, $\mu_i^*\in(0,1)$, $i=1,2,\ldots,m$ будет бифуркационным значением μ. Их упорядочим по возрастанию, а именно, наименьшее из бифуркационных значений $\mu_i^*=\dfrac{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}}{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}+2\beta_i}$, $i=1,2,\ldots,m$, обозначим $\mu_{j_1}^*$, $j_1\in 1,2,\ldots,m$, наименьшее из оставшихся – $\mu_{j_2}^*$. Точно также определяются бифуркационные значения $\mu_{j_3}^*$, $\mu_{j_4}^*$, … , $\mu_{j_{m-1}}^*$, $\mu_{j_m}^*$.

При росте μ от значения до $\mu_{j_1}^*$ и переходе через $\mu_{j_1}^*$ поведение системы совпадает со случаем, рассмотренным в §3.2.

Аналогичные бифуркации происходят и при прохождении μ проходит через значения $\mu_{j_l}^*$, $l=2,3,\ldots,m$. А именно, при $\mu\to\mu_{j_l}^*-0$ две из оставшихся после предыдущих бифуркаций, сближаясь друг к другу, стремятся к общему пределу, являющимся особой точкой типа седло-узла (остальные особые точки не меняются). Точно также две из оставшихся инвариантных гиперплоскостей стремятся, как сгибаемый лист бумаги, общему пределу (остальные сохраняются).

Таким образом, при $\mu=\mu_{j_l}^*$ система будет иметь $n+2-2l$ особых точек и $n+2-2l$ инвариантных гиперплоскостей.

Затем**,** при $\mu^*_{j_{l-1}} < \mu < \mu^*_{j_l}$, $l = 2, 3, \ldots, m,$ пара собственных чисел превратится в пару сопряженных комплексных собственных чисел. При этом особая точка «седло-узел $\boldsymbol{b}^*(\mu^*_{j_l})$ исчезает и остаются $n+1-2l$ особых точек, и столько же инвариантных гиперплоскостей.

Траектории по-прежнему будут принадлежать одному из типов I–IV . эти свойства сохраняются, естественно, и при $\mu = 1$, т.е. для исходной системы (8).

В частности, если порядок системы четный и все собственные числа комплексные, то система имеет единственную особую точку $\boldsymbol{b}^0 = (0,\, 0,\, \ldots\, ,0)$ и единственную инвариантную плоскость

$$\sum_{i=1}^{n/2}\left(\frac{a_{2i-1}\alpha_i - a_{2i}\beta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}\,x_{2i-1} + \frac{a_{2i}\alpha_i - a_{2i-1}\beta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}\,x_{2i}\right) + 1 = 0\,,$$

а для траекторий системы останутся три возможности – только типы I, II и III.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе выявлено инвариантное разбиение фазового пространства динамической системы с квадратичной нелинейностью Гессе с точки зрения продолжаемости решений. Показано, что фазовое пространство системы разбивается на четыре инвариантных подмножества, каждое из которых может быть непустым.

В системе с квадратичной нелинейностью Гессе найдены инвариантные многообразия и построена фазовая картина системы, а также изучена многократная бифуркация седло-узла и с их посредством выяснено строение фазового пространства системы.

Результаты, полученные в диссертации, а также методы, развитые в ней могут быть использованы в исследованиях других многомерных динамических систем и приложениях.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Азамов А.А., Бойтиллаев Д. Об одном классе нелинейных систем, допускающих построение фазового портрета в целом // «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий»: Тез. докл. Межд. науч. конф. 20-22 сентября. 2006. –Алматы, 2006. – С.14-15.
2. Бойтиллаев Д.А., Тилавов А.М., К вопросу о продолжимости решений нелинейных систем // «Актуальные проблемы математики и информатики»: Материалы научно – практической конференции. 27-28 июня 2008. – Самарканд, 2008. – С.18-20.
3. Азамов А.А., Бойтиллаев Д.А. О первичном инвариантном разбиении фазового пространства нелинейных автономных систем // Доклады АН РУз. – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 3-5.
4. Бойтиллаев Д. А. О бифуркации седло-узла в системе Гессе // «Управление и оптимизация динамических систем – CODS-2009»: Тез. докл. Меж. науч. конф. 28-30 сентября 2009. – Ташкент, 2009. – С. 31-32.
5. Бойтиллаев Д.А. О бифуркации седло-узла в системе Гессе // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. – № 1. – С. 41-45.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Бойтиллаев Дилмурод Ахматалиевич**нинг 01.01.02–дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича **«Гессе ночизиқлилигига эга бўлган динамик система ҳолатлар фазосининг тузилиши»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: квадратик ночизиқлилик, фазовий портрет, махсус нуқта, эгар-тугун бифуркацияси, инвариант текислик, инвариант бўлиниш.

Тадқиқот объектлари: квадратик ночизиқлиликка эга динамик система, Гессе динамик системасининг фазовий портрети.

Ишнинг мақсади: Гессе ночизиқлилигига эга бўлган динамик система ҳолатлар фазосининг тузилишини ўрганиш.

Тадқиқот методлари: Диссертацияда динамик системаларнинг сифат назарияси, чизиқли алгебра, бифуркациялар назарияси методлари компьютер графикасидан фойдаланилган.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Диссертацияда қуйидаги янги натижалар олинган:

– ечимларни давом эттириш нуқтаи-назаридан Гессе системаси ҳолатлар фазосининг инвариант бўлиниши текширилган;

– системанинг барча инвариант кўпхилликлари аниқланган;

– Гессе системасининг фазовий портрети қурилган;

– Гессе системасини тадқиқ этишда такрорий эгар-тугун бифуркациялари ишлаб чиқилган.

Амалий аҳамияти: диссертацияда олинган натижалар назарий аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: диссертацияда олинган натижалар университетларнинг бакалавриат ва магистратурасида махсус курслар ўқишда, динамик системалар назарияси ва унинг татбиқлари бўйича илмий тадқиқотлар олиб боришда фойдаланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертацияда олинган асосий натижалар ва методлар бошқа кўч ўлчовли квадратик динамик системаларни тадқиқ қилишда восита бўлиб хизмат қила олади.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Бойтиллаева Дилмурода Ахматалиевича** на тему: **«Строение фазового пространства динамической системы с нелинейностью Гессе»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: квадратичная нелинейность, фазовый портрет, особая точка, бифуркация седло-узла, инвариантная плоскость, инвариантное разбиение.

Объекты исследования: Динамическая система с квадратичной нелинейностью, фазовый портрет динамической системы Гессе.

Цель работы: Выяснение строения фазового пространства динамической системы с квадратичной нелинейностью Гессе.

Методы исследования: Качественная теория динамических систем, теория бифуркаций, линейная алгебра, компьютерная графика.

Полученные результаты и их новизна: В качестве основных результатов отмечаются:

– исследовано инвариантное разбиение фазового пространства системы Гессе с точки зрения продолжаемости решений;

– найдены все инвариантные многообразия системы;

– построена фазовая картина системы Гессе;

– разработана многократная бифуркация седло-узла с целью исследования системы.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при проведении специальных курсов для бакалавров и магистров университетов, в научных исследованиях по теории динамических систем и по ее приложениям.

Область применения: результаты и методы, представленные в диссертации, могут послужить средством при исследовании многомерных динамических систем.

RESUME

Thesis of **Bottillaev Dilmurod Akhmatalievich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 01.01.02 – differential equations, subject: **"The structure of the phase space of dynamical system with nonlinearity of Hesse"**

Key words: Quadratic nonlinearity, phase portrait, critical point, invariant plane, saddle-node bifurcation.

Subjects of research: Dynamical system with quadratic nonlinearity, phase portrait of dynamical system of Hesse.

Purpose of work: Clarifying of the structure of phase space of the dynamical system with quadratic nonlinearity of Hesse.

Methods of research: Qualitative theory of dynamical systems, bifurcation theory, linear algebra, computer graphics.

The results obtained and their novelty: The main new results of the work are the following:

– it is investigated invariant partition of the phase space of system of Hesse from of point of view of continuability of solutions;

– all invariant manifolds of system of Hesse are found;

– it is constructed the phase portrait of system of Hesse;

–it is worked out multiple saddle node-bifurcations in order to investigate systems of Hesse.

Practical value: The results of the dissertation have theoretical character.

Degree of embed and economic effectiveness: The received results can be used for teaching special courses for bachelors and masters, for scientific researches on the theory of dynamical systems and on its applications.

Field of application: The results and methods presented in the dissertation can be served as means in researches of high order dynamical systems.

Соискатель: