МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра «Теоретической механики и сопротивления материалов»

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть 1 - **Сопротивление материалов**

(Методическое пособие)

(Направление бакалавриата
540600, 5140900, 520800, 5522300,
5540400, 5540600)

Ташкент – 2010

Аннотация

При изучении курса «**Прикладная механика»** наряду с прослушиванием лекций, практических и лабораторных занятий студенты выполняют домашние задания в виде расчетно-проектировочных работ.

Настоящее методическое пособие по курсу «Прикладная механика включает в себя раздел «Сопротивление материалов».

В настоящей работе приведены примеры и решения задач, варианты заданий по трем расчетно-графическим работам:

1. Расчеты на растяжение-сжатие;

2. Расчеты на кручение;

3. Расчеты балок на изгиб;

а также их решение с применением *Mathcad,* которое значительно облегчает решение поставленных задач и выводит результаты вычисления в виде изящных графиков и таблиц.

Составители: ст. пр. **Н.В. Дрёмова**

Рецензенты: проф. Мухамедсаидов Б.К. (ТГПУ)
доц. **М. Эшонов** (ТИТЛП)

Утверждено научно-методическим советом ТИТЛП
(протокол № __5_ от «_28__»__мая__________)

Размножено в типографии ТИТЛП в «__25_ » экземпляров.

Общие методические указания

Перед тем как приступать к выполнению задания рекомендуется соблюдать следующие указания:

1. Проработать соответствующий теоретический раздел курса сопротивление материалов (Темы: «Растяжение – сжатие, Кручение и изгиб») по учебникам и лекционному материалу. Подробный теоретический материал по данному вопросу имеется в учебнике С.М. Степин «Сопротивление материалов». М.: Высшая школа, 1998, §§7-22, 35-44,58-67 , а также в других учебниках и учебных пособиях (1) (2),(3), (4), (5).

2. Ознакомится с пакетом математической программы *Mathcad.* Сведения по применению *Mathcad* имеется в книге Макарова Е.Г. «Инженерные расчеты в *Mathcad»,* С.-П.: Питер, 2003, а также в других литературных источниках (6),(7).

3. Выбрать данные для расчета согласно своему личному шифру или порядковому номеру по журналу.

4. Расчетно-проектировочная работа должна быть выполнена самостоятельно, оформлена с соблюдением всех требований, завершена и защищена в срок установленный кафедрой.

I - ***<u>РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ</u>***

<u>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИТЯ О ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ</u>

В задание № 1 входят 4 задачи. Две задачи статически определимые и две статически неопределимые системы.

<u>Растяжением-сжатием называется</u> деформация, которая происходит под действием двух равных и противоположно направленных вдоль оси стержня сил . При работе бруса на растяжение (сжатие) в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор - **<u>продольная сила *N*,</u>** представляющая собой равнодействующую внутренних, нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса.

Продольная сила определяется методом сечения (метод Розу).

Продольная сила в произвольном сечении бруса численно равно алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Растягивающая продольная сила считается положительной, сжимающая – **<u>отрицательной .</u>**

Закон изменения продольной силы по длине бруса обычно изображают в виде графика – эпюры продольных сил.

В поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, определяемые по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

где N - продольная сила;

A - площадь поперечного сечения.

Абсолютная деформация бруса длиной l, имеющего постоянное поперечное сечение, при условии, что продольная сила во всех сечениях одинакова, определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

где E – модуль продольной упругости – физическая константа, характеризующая жесткость материала при линейной деформации. Для стали $E = 2 \cdot 10^4 \ кН/см^2$.

Произведение $E{\cdot}A$ называет жесткостью сечения бруса при растяжении (сжатии).

1. СТАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Задача № 1. Для стального стержня определить во всех поперечных сечениях продольную силу N , напряжение σ, и вертикальные перемещения δ всех поперечных сечений стержня**.** Результаты изобразить графически, построив эпюры N , σ, δ.

Данные берутся в таблице № 1.

Пример № 1

Дано: d_1=1,5 *см == 10 мм*, d_2=2 *см = 20 мм*, l_1= 100 *см*, l_2=150 *см*, l_3= 250 *см*
P_1=10 *кН*, P_2=-20 *кН*, P_3=30 *кН*.

Определить: Продольную силу **- *N***, нормальное напряжение - σ перемещение сечений **-** δ и построить их эпюры **-?**

Для определения ***N*** мысленно рассекаем брус по сечению I-I, 2-2 и 3-3 (рис.1.)

Из условия равновесия части стержня сечения I-I получим:

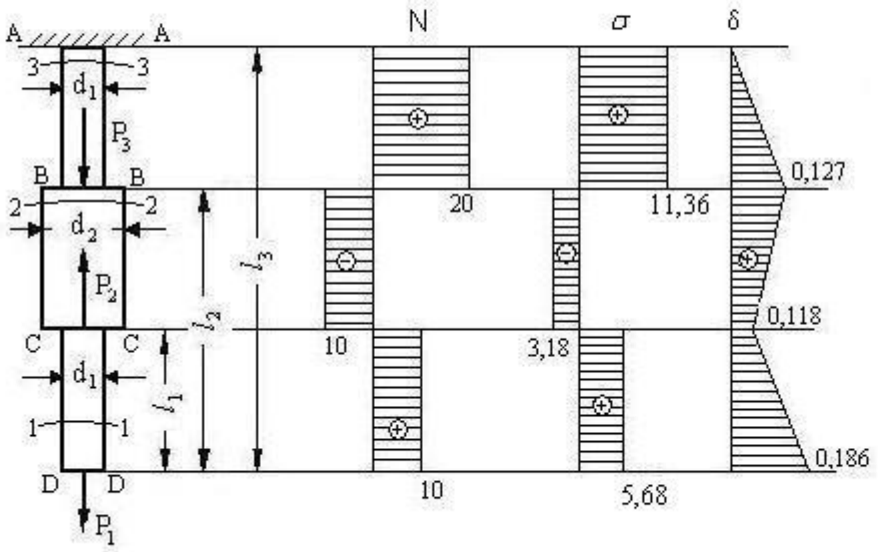
$$\sum x = 0\,,\ N_1 - P_1 = 0,\ \mathrm{N}_1 = \mathrm{P}_1 = 10\ кН \quad \text{(растяжение)}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 2-2 получим:

$$\sum x = 0\,,\quad \mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1 = 0\,,\ \text{откуда}\ \ \mathrm{N}_2 = -10\ кН,\ \text{(сжатие).}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 3-3 получим:

$$\sum x = 0\,,\quad \mathrm{N}_3 + \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1 - P_3 = 0\,,\ \text{откуда}\ \ \mathrm{N}_3 = 20\ кН,\ \text{(растяжение).}$$



Сечение I-I   Сечение 2-2   Сечение 3-3

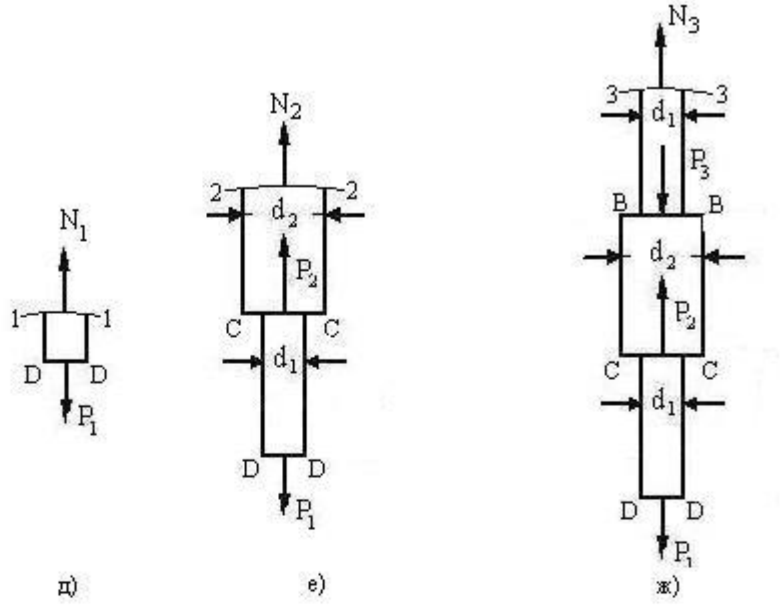


Рис. 1

Выбрав масштаб, строим эпюры продольных сил, (рис. 1 б). Определим площадь поперечного сечения A_1 и A_2:

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2}{4} = 1{,}76\,см^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} = 3{,}14\,см^2$$

Напряжения равны :

в сечении нижней части :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10}{1{,}76} = 5{,}68\ кН/см^2 \qquad \text{(растяжение),}$$

в сечении средней части стержня:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10}{3{,}14} = -3{,}18\ кН/см^2 \quad \text{(сжатие).}$$

в сечении верхней части стержня:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{20}{1{,}76} = 11{,}36\ \ кН / см^2$$ (растяжение).

В определенном масштабе строим эпюру напряжений (рис.1в)

Для построения эпюры $\boldsymbol{\delta}$ определяем перемещения характерных сечений В-В, С-С и D-D (перемещение сечения А-А равно нулю($\delta_A = 0$)). Сечение В-В будет перемешаться вниз, поскольку верхняя часть стержня растягивается:

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_3 = 0 + \frac{N_3 \cdot (l_3 - l_2)}{E \cdot A_3} = 0 + \frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}785} = 0{,}127\ \ см$$

Перемещение сечения С-С является алгебраической суммой, перемещения сечения В-В (δ_B) и абсолютной деформации второго участка:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = 0{,}127 + \frac{N_2 \cdot (l_2 - l_1)}{E \cdot A_2} = 0{,}127 + \frac{-10 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 3{,}14} = 0{,}118\ \ см\ ,$$

Перемещение сечения D-D является алгебраической суммой, перемещения сечения С-С (δ_C) и абсолютной деформации первого участка:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = 0{,}118 + \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = 0{,}118 + \frac{10 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}785} = 0{,}186\ \ см\,.$$

В определенном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C , δ_B, δ_D, соединяем полученные точки прямыми линиями, и получаем эпюру перемещений.

Эту же задачу можно решить с применением математической программы «Mathcad».

<u>Пример № 2.</u>

Дано: Для стержня показанного на рисунке 2 необходимо. Определить: Продольную силу - ***N***, нормальное напряжение - σ перемещение сечений - $\boldsymbol{\delta}$ и построить их эпюры, если $d_1=1$ *см* , $d_2=2$ *см* , $l_1= 100$ *см*, $l_2=150$ *см*, $l_3= 250$ *см* , $P_1=10$ *кН*, $P_2=-20$ *кН*, $P_3=30$ *кН*.

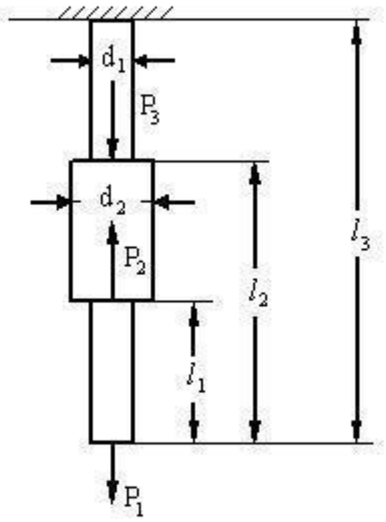


Рис. 2

Решение:

$$м := m \quad см := 0.01 \cdot m \quad кН := 1000 \cdot N \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$$

$$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа \quad d1 := 1.0 \cdot см \quad d2 := 2.0 \cdot см$$

$$F := \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot кН \quad L_F := \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \cdot см \quad L := \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} \cdot см$$

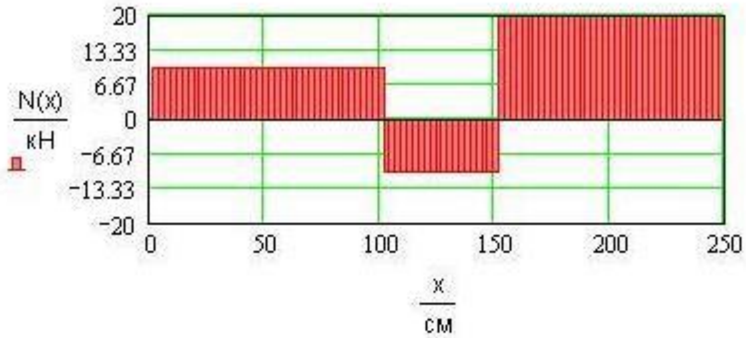
$$n := 3 \qquad N(x) := \left[\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \left(x > L_{F_i} \right) \right]$$

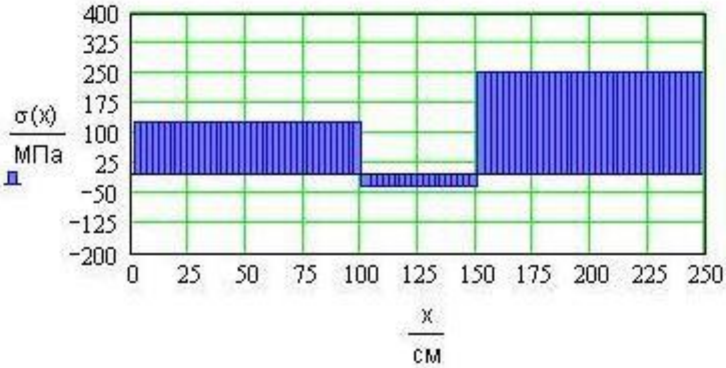
$$A(x) := \left| \begin{array}{ll} \left(\pi \cdot \frac{d1^2}{4} \right) & \text{if } 0 \le x < L_1 \\ \left(\pi \cdot \frac{d2^2}{4} \right) & \text{if } L_1 < x < L_2 \\ \left(\pi \cdot \frac{d1^2}{4} \right) & \text{if } L_2 < x \le L_3 \end{array} \right.$$

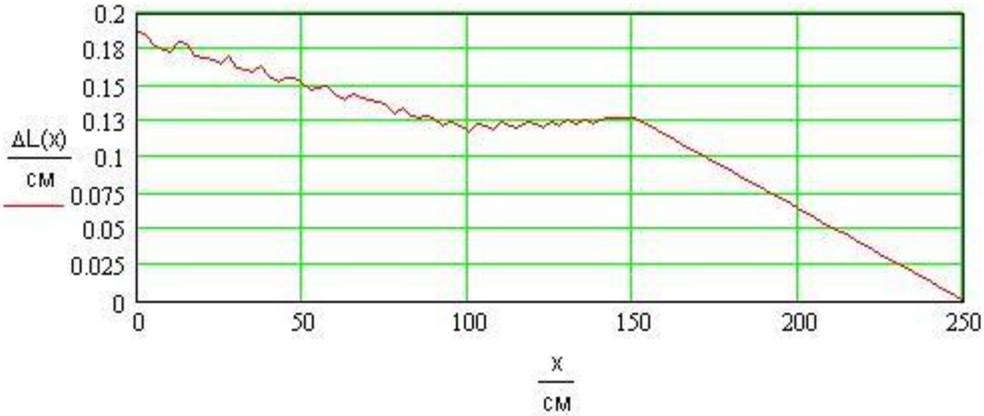
$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\Delta L(x) := \int_{x}^{L_3} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \, dx$$

$$x := 0 \cdot см, \frac{L_3}{100} .. L_3$$







$x := 0.01\,\text{см}, \frac{L_3}{10} .. L_3$

x =	N(x) = кН	σ(x) = МПа	ΔL(x) = см
$1 \cdot 10^{-4}$ m	10	127.324	0.186
0.25	10	127.324	0.165
0.5	10	127.324	0.154
0.75	10	127.324	0.136
1	10	127.324	0.118
1.25	-10	-31.831	0.124
1.5	-10	-31.831	0.127
1.749	20	254.648	0.096
1.999	20	254.648	0.064
2.249	20	254.648	0.032
2.499	20	254.648	$1.146 \cdot 10^{-4}$

<u>Задача № 2.</u> Жесткий брус АВ, деформацией которого можно пренебречь, горизонтально подвешен на тяге СД (или же опирается одним концом на стальной стержень СД) и опирается в точке на неподвижную шарнирную опору (рис 2.). Найти продольную силу N нормальное, напряжение в стержне σ, перемещения бруса δ в точке В и подобрать диаметр (d). Данные взять в таблице 2.

Пример № 3.

Дано: *а = 1 м, в = 3 м, Q = 150 кН*, $[\sigma] = 16 kH/см^2$

Определить: продольную силу **- *N***, подобрать сечение – диаметр ***d***, перемещение сечений **-** $\boldsymbol{\delta}$

Решение:

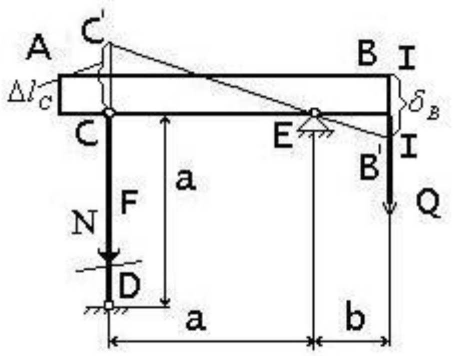


Рис. 3

Для определения продольной силы составим условие равновесия статики:

$$\sum M_E = -N \cdot a + Q \cdot b = 0,$$

откуда : $$N = \frac{Q \cdot b}{a} = \frac{150 \cdot 3}{1} = 450 \ кН$$

Для подбора сечения используем условие прочности при растяжении сжатии: $$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

откуда $\rightarrow$ $$d = \sqrt{\frac{N \cdot 4}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{450 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 16}} = 5{,}9 см$$

Принимаем $d = 6 см = 60 мм$

Определяем нормальное напряжение (проверочный расчет) σ:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{450}{28} = 16{,}07\ \ кН/см^2$$

Теперь определим абсолютное удлинение стержня СД

$$\Delta l_c = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{450 \cdot 3 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 28} = 0{,}24\ \ см$$

Для определения перемещения точки В (δ_B) рассмотрим деформацию системы (рис 3)

Перемещение сечения (δ_B) определяется из подобия треугольников

$\Delta ECC' \ \infty\ \Delta EBB'$ где $EB = b,\ EC = a,\ CC' = \Delta l_C,\ \ BB' = \delta_B$

$$\frac{\delta_B}{b} = \frac{\Delta l_C}{a} \Rightarrow \quad \delta_B = \frac{b}{a} \cdot \Delta l_C = \frac{100}{300} \cdot 0{,}24 = 0{,}08\ \ см$$

2. СТАТИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Конструкции, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия, называются статически неопределимыми системами. Статически неопределимые задачи решаются добавлением к уравнениям статики абсолютно твердого тела недостающего числа уравнений, получаемых из рассмотрения упругих деформаций.

Чтобы составить уравнение совместимости деформаций, необходимо представить систему в деформированном виде и непосредственно из чертежа (геометрически) установить зависимость между деформациями различных стержней (частей) системы.

ПЛАН РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

1. Выявляем неизвестные величины и устанавливаем степень статически неопределимости.
2. Выбираем основную систему.
3. Составляем уравнения равновесия (уравнения статики) .
4. Составляем уравнения деформаций.

5. Совместным решением уравнений статики и деформации определяют неизвестные величины.

Дальнейший ход решения статически неопределимой системы такой же, как статически определимой.

ЗАДАЧА № 3

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирную неподвижную опору и присоединен к двум стальным стержням при помощи шарниров (рис 4). Требуется найти усилия N и напряжения σ в стержнях.

Пример № 4.

РЕШЕНИЕ: Выбираем данные и схему:

$Q = 120\,кН$, $F = 6{,}0\ \ см^2$, $a = 2{,}0\ \ м$, $b = 3{,}0\ \ м$, $c = 1{,}0\ \ м$

1.Обозначим неизвестные усилия в стержнях АЕ и СД соответственно N_1 и N_2 и укажем их направление на чертеже.

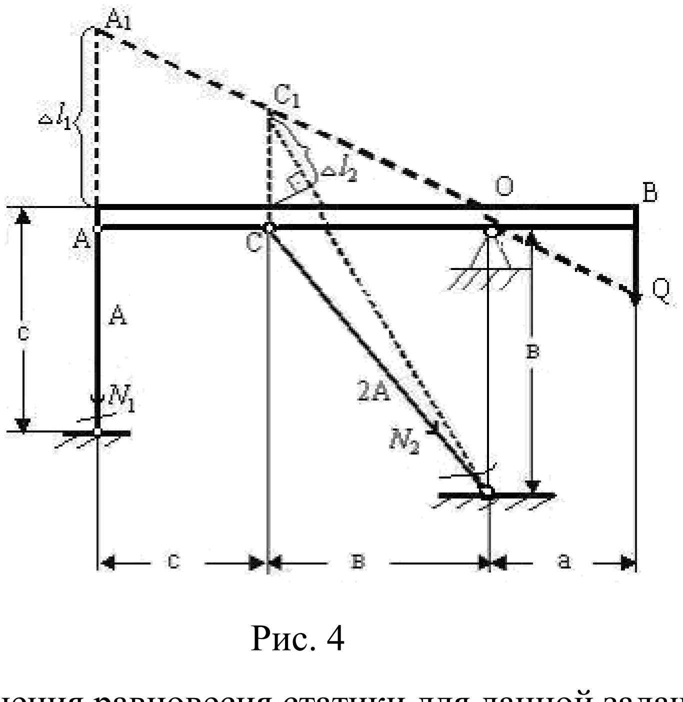


Рис. 4

2.Составим уравнения равновесия статики для данной задачи

$$\sum M_o(P_i) = 0 \qquad -N_1 \cdot (b + c) - N_2 \cdot b \cdot \sin 45^0 + Q \cdot a = 0 \qquad\qquad (1)$$

3.Составим геометрическую зависимость между деформациями отдельных элементов конструкций.

Вследствие деформаций стержней, жесткий брус АВ занимает новое положение A_1 и B_1. При этом перемещение точки А и С, как отметили выше, происходит по направлением перпендикулярным к старому положению жесткого бруса АВ. Жесткий брус АВ вращается вокруг неподвижной опорной точки «О». Следовательно, из подобия треугольников A_1AO и C_1CO можно составить следующие зависимости:

$$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{в + с}{в} \qquad (2)$$

4.Выразим уравнение деформации 2 при помощи закона Гука через неизвестные усилия:

$$\Delta l_{AE} = AA_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A}$$

$$CC_1 = \frac{CK}{\sin 45^0} = \frac{\Delta l_{CD}}{\sin 45^0} = \frac{N_2 \cdot \sqrt{b^2 + b^2}}{E \cdot 2A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{N_2 \cdot \sqrt{2} \cdot b}{\sqrt{2} \cdot E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A}$$

Полученные значения для AA_1 поставим в (2)

$$\frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A} : \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A} = \frac{b + c}{b}$$

откуда

$$\frac{N_1 \cdot a}{N_2 \cdot b} = \frac{4}{3} \qquad \text{или} \qquad \frac{N_1}{N_2} = 2 \qquad (3)$$

5.Решаем совместно полученные уравнения. Из уравнения (3) получаем:

$$N_1 = 2N_2$$

Полученное значение подставим в уравнение (1):

$$-2N_2(b + c) - N_2 \cdot b \cdot \sin 45^0 + Q \cdot a = 0$$

откуда $N_2 = 24 \ \ кН$

Из уравнения (3) находим $N_1 = 48 \ \ кН$

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{48}{6} = 8 \ \ кН/см^2; \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{24}{2 \cdot 6} = 2кН/см^2$$

Задачу такого типа можно решить с применением математической программы «Mathcad» (рис.5).

Пример № 5. Дана шарнирно-стержневая система (рис.5).
Требуется: Определить усилия и перемещения в стержнях.

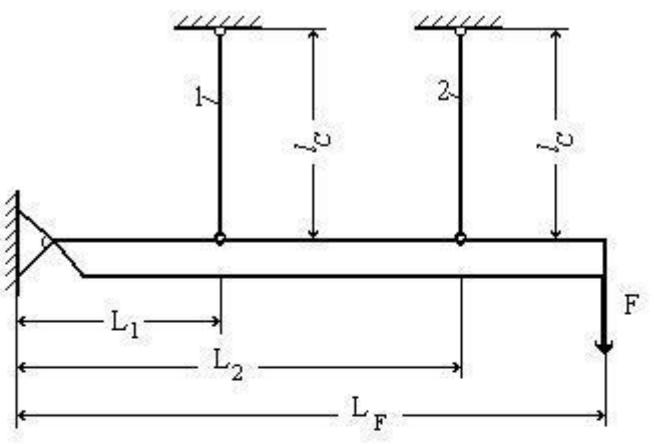


Рис. 5

Исходные данные к расчету:

$град := deg \quad мм := 0.001 \cdot m \quad см := 0.01 \cdot m \quad кН := 1000 \cdot N \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа \qquad \sigma_{доп} := 160 \cdot МПа$

$F := 10 \cdot кН \qquad L_F := 100 \cdot см$

Решение:

$$L := \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} см \qquad \phi := \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \end{pmatrix} \cdot град \qquad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot см^2 \qquad L_{ст} := \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot см \qquad k := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta L(N,i) := \frac{N \cdot L_{ст_i}}{E \cdot A_i} \qquad \Delta(N,i) := \frac{\Delta L(N,i)}{\sin(\phi_i)} \qquad m := rows(A) \qquad i := 1..m$$

$$N := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot кН \qquad Given \quad F \cdot L_F - \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot N_i \cdot L_i \cdot \sin(\phi_i) = 0 \qquad \frac{\Delta(N_1,1) \cdot k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2,2) \cdot k_2}{L_2}$$

$$N := Find(N_1, N_2) \qquad N = \begin{pmatrix} 3.659 \times 10^3 \\ 9.756 \times 10^3 \end{pmatrix} N \qquad \sigma := \overrightarrow{\frac{N}{A}} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 3.659 \times 10^7 \\ 4.878 \times 10^7 \end{pmatrix} Pa$$

$$\Delta L(N_i, i) = \begin{pmatrix} 0.055 \\ 0.073 \end{pmatrix} мм$$

Пример № 6.

Дана шарнирно-стержневая система (рис.6).

Требуется: Определить усилия и перемещения в стержнях

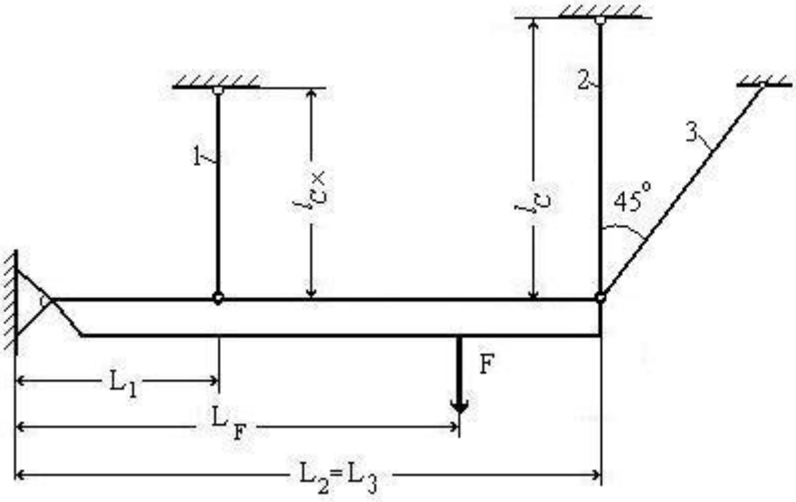


Рис. 6

Исходные данные к расчету:

$$\text{град} := \text{deg} \quad \text{мм} := 0.001\cdot m \quad \text{см} := 0.01\cdot m \quad \text{кН} := 1000\cdot N \quad \text{МПа} := 10^6\cdot\frac{N}{m^2}$$

$$E := 2\cdot 10^5\cdot\text{МПа} \qquad \sigma_{\text{доп}} := 160\cdot\text{МПа}$$

$$F := 20\cdot\text{кН} \qquad L_F := 100\cdot\text{см}$$

Решение:

$$L := \begin{pmatrix}50\\150\\150\end{pmatrix}\cdot\text{см} \quad \phi := \begin{pmatrix}90\\90\\45\end{pmatrix}\cdot\text{град} \quad A := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\text{см}^2 \quad L_{\text{ст}} := \begin{pmatrix}40\\60\\\dfrac{40}{\sin(\phi_3)}\end{pmatrix}\cdot\text{см} \quad k := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Delta L(N,i) := \frac{N\cdot L_{\text{ст}_i}}{E\cdot A_i} \qquad \Delta(N,i) := \frac{\Delta L(N,i)}{\sin(\phi_i)} \qquad m := \text{rows}(A) \qquad i := 1..m$$

$$N := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\text{кН} \qquad \text{Given} \quad F\cdot L_F - \sum_{i=1}^{m} k_i\cdot N_i\cdot L_i\cdot\sin(\phi_i) = 0 \quad \frac{\Delta(N_1,1)\cdot k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2,2)\cdot k_2}{L_2}$$

$$\frac{\Delta(N_2,2)\cdot k_2}{L_2} = \frac{\Delta(N_3,3)\cdot k_3}{L_3}$$

$$N := \text{Find}(N_1, N_2, N_3) \qquad N = \begin{pmatrix}3.929\times 10^3\\7.857\times 10^3\\5.893\times 10^3\end{pmatrix}N \qquad \sigma := \overrightarrow{\frac{N}{A}} \qquad \sigma = \begin{pmatrix}3.929\times 10^7\\7.857\times 10^7\\5.893\times 10^7\end{pmatrix}Pa$$

$$\Delta L(N_i,i) = \begin{pmatrix}0.079\\0.236\\0.167\end{pmatrix}\text{мм}$$

<u>Задача № 4</u>.

Брус АВ жестко закреплен обоими концами (рис. 7). Определить усилия во всех частях бруса и построить эпюры N , σ и δ.

Пример № 7.

Решение: Дано: *A=13 см², a=1,2 м, в=0,7 м, c=0,6 м, P=260 кН.*

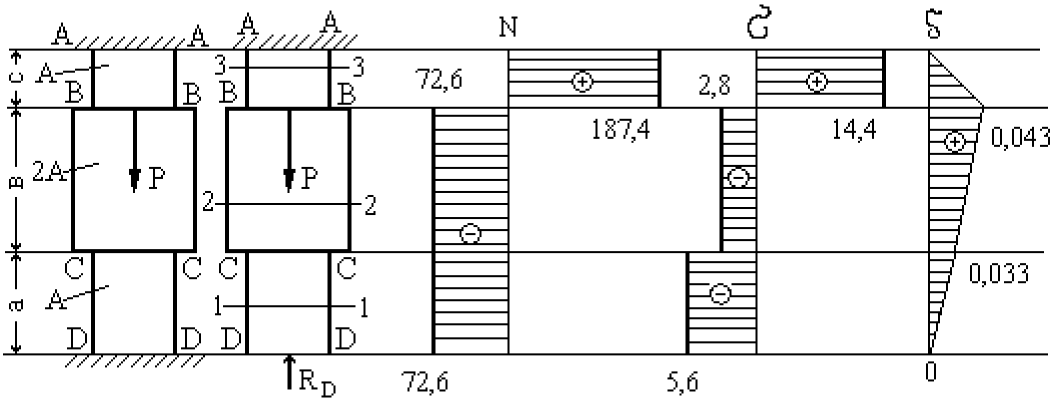


Рис. 7

Нагрузка P воспринимается частично верхним и частично нижним закреплением концов стрежня. Две реакции, возникающие в заделках, нельзя определить из единственного уравнения равновесия: равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось. Для составления уравнения деформаций поступим следующим образом: отбросим одну заделку, например нижнюю, заменив, ее действие на стержень неизвестной реакцией D. В полученной, таким образом, системе (обычно ее называют основной системой) приравниваем нулю перемещения нижнего сечения, т.к. в заданной системе это сечение заделка и перемещаться не будет.

Для определения продольной силы N применим метод сечения и составим уравнения равновесия:

сечение 1-1 $N_1 + R_D = 0$;

$$N_1 = -R_D \qquad (1)$$

сечение 2-2 $N_2 + R_D = 0$;

$$N_2 = -R_D \qquad (2)$$

сечение 3-3 $N_3 + R_D - P = 0$;

$$N_3 = P - R_D \qquad (3)$$

Дополнительное уравнение:

$$\delta_D = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \qquad (4)$$

Для определения деформации используем закон Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A}, \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A}, \qquad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A} \qquad (5)$$

Подставляет в уравнение (4) уравнения (5), получаем

$$\frac{N_1 a}{EA} + \frac{N_2 b}{E2A} + \frac{N_3 c}{EA} = 0$$, приведем к общему знаменателю

и получим: $$2N_1 a + N_2 b + 2N_3 c = 0 \qquad (6)$$

В уравнение (6) подставляем (1,2,3), получаем

$$-2{,}4R_D - 0{,}7R_D + 312 - 1{,}2R_D = 0$$

$$312 = 4{,}3R_D$$

$$R_D = 72{,}6\,kH$$

Следовательно $N_1 = -72{,}6\,kH,\ N_2 - 72{,}6\ kH,\ N_3 = 187{,}4\,kH$.

Определяем напряжение: $$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-72{,}6}{13} = -5{,}6\,kH/см^2$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{-72{,}6}{13 \cdot 2} = -2{,}8\,kH/см^2$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{187{,}4}{13} = 14{,}4\,kH/см^2$$

Строим эпюры продольной силы N и нормального напряжения σ.

Для построения эпюры $\boldsymbol{\delta}$ определяем перемещения характерных сечений B-B, C-C и D-D (перемещение сечения A-A равно нулю($\delta_A = 0$)). Сечение B-B будет перемешаться вниз, поскольку верхняя часть стержня растягивается:

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_3 = 0 + \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_3} = 0 + \frac{187{,}4 \cdot 60}{2 \cdot 10^4 \cdot 13} = 0{,}043\ см,$$

Перемещение сечения вниз считаем положительным, вверх - отрицательным. Перемещение сечения C-C является алгебраической суммой, перемещения сечения B-B (δ_B) и укорочение стержня:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = 0{,}043 + \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A_2} = 0{,}043 - \frac{72{,}6 \cdot 70}{2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 13} = 0{,}033\ см,$$

Перемещение сечения D-D является алгебраической суммой, перемещения сечения C-C (δ_C) и удлинения стержня:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = 0{,}033 + \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = 0{,}033 - \frac{72{,}6 \cdot 120}{2 \cdot 10^4 \cdot 13} = 0$$

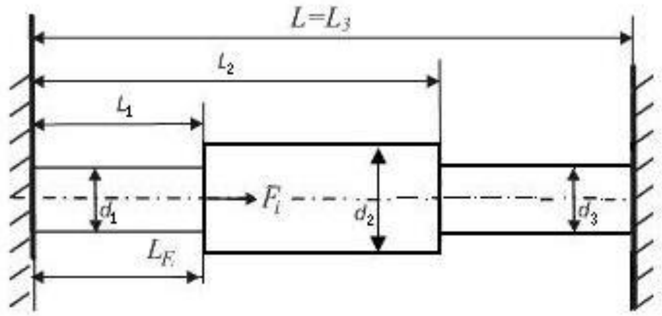
В определенном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C , δ_B , δ_D и соединяем полученные точки прямыми линиями, т.к. перемещения линейные и зависят от абсцисс сечений перемещений.

Эту же задачу можно решить с применением математической программы «Mathcad».

Пример № 8.

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad м := m \quad см := 0.01 \cdot m \quad кН := 1000 \cdot N \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

Условная схема нагружения стержня



Исходные данные к расчету

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot МПа \quad d1 := 4 \cdot см \quad d2 := 6 \cdot см \quad LL := 13600 \cdot см$

$F := \begin{pmatrix} 0 \\ -260 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot кН L_F := \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot см \quad L := \begin{pmatrix} 60 \\ 130 \\ 250 \end{pmatrix} \cdot см \quad A(x) := \left| \begin{array}{ll} \left(\pi \cdot \frac{d1^2}{4}\right) & \text{if } 0 \le x < L_1 \\ \left(\pi \cdot \frac{d2^2}{4}\right) & \text{if } L_1 \le x < L_2 \\ \left(\pi \cdot \frac{d1^2}{4}\right) & \text{if } L_2 \le x \le L_3 \end{array} \right.$

Продольные усилия в стержне

$n := \mathrm{rows}(F)$

$N(x,R) := R + \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \left(x > L_{F_i}\right)$

Напряжения **Удлинение стержня**

$\boxed{\sigma(x,R) := \frac{N(x,R)}{A(x)}} \quad \boxed{\Delta L(x,R) := \int_0^x \frac{N(x,R)}{E \cdot A(x)}\,dx} \quad x := 0 \cdot см, \frac{L_3}{100} .. L_3$

решение уравнения неразрывности деформаций $\Delta(L,R) = 0$

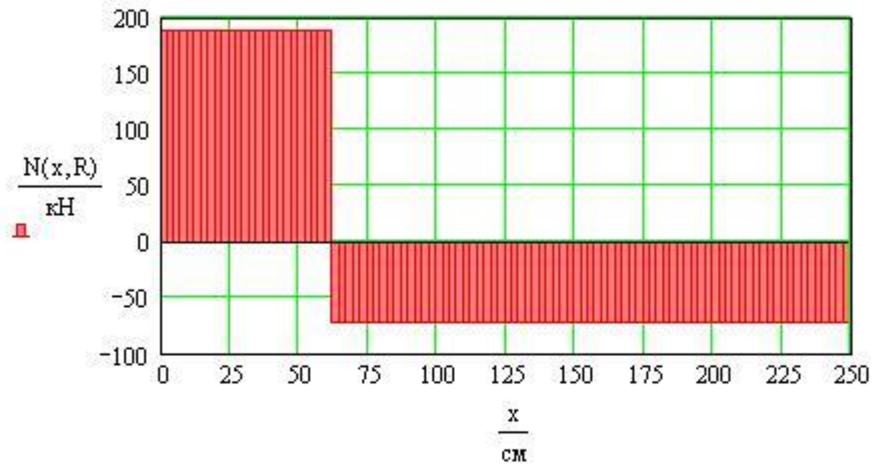
$R := 10 \cdot кН \qquad \boxed{R := \mathrm{root}\left(\Delta L\left(L_3, R\right), R\right)}$

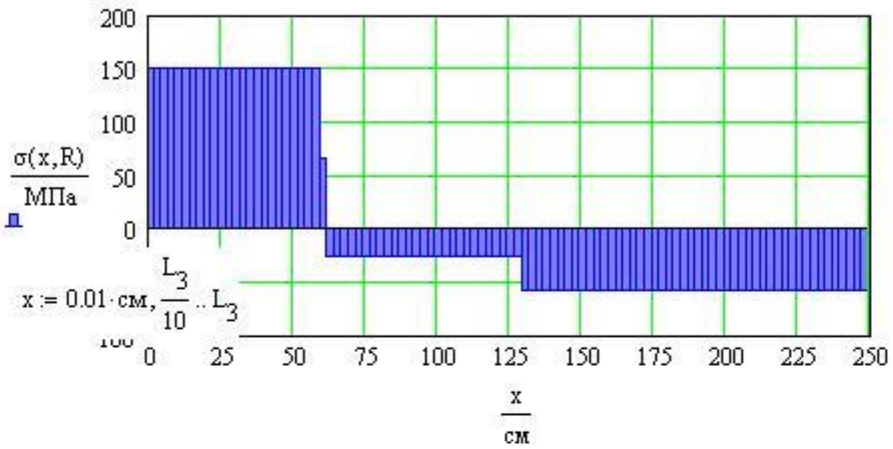
$R = 188.143\,кН$

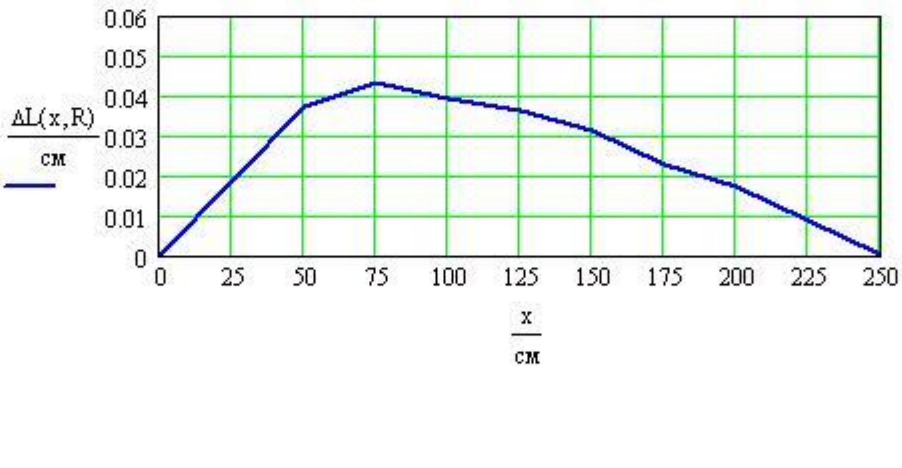
x=0 и x=LL

$\Delta L\left(L_3, R\right) = 0 см \qquad \Delta L(0 \cdot см, R) = 0 см$

Результаты расчета







$$x := 0.01 \cdot см, \frac{L_3}{10} .. L_3$$

x =		N(x,R) =		σ(x,R) =		ΔL(x,R) =	
0.01	см	188.1	кН	150	МПа	0	см
25		188.1		150		0.02	
49.99		188.1		150		0.04	
74.98		-71.9		-25		0.04	
99.97		-71.9		-25		0.04	
124.96		-71.9		-25		0.04	
149.95		-71.9		-57		0.03	
174.94		-71.9		-57		0.02	
199.93		-71.9		-57		0.02	
224.92		-71.9		-57		0.01	
249.91		-71.9		-57		0	

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

1. Растяжение
2. Сжатие
3. Деформация
4. Удлинение
5. Укорочение
6. Абсолютная деформация
7. Относительная деформация
8. Напряжение
9. Условие прочности при растяжении-сжатии
10. Эпюра
11. Жесткость
12. Сечение
13. Закон Гука

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ (РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ)

1. В чем сущность метода сечений?
2. Как формулируется закон Гука?
3. Что называется модулем упругости?
4. Какие системы называются статически неопределимыми?
5. Каков общий порядок решения статически неопределимых систем?
6. Какие параметры отличают статически неопределимую конструкцию от статически определимой конструкции?
7. Какой случай деформации стержня называется растяжением или сжатием?

Основные обозначения

N	- продольная сила
l	- длина
x	- дискретная переменная
P, F	- сила
σ	- нормальное напряжение
ΔL	- удлинение стержня

ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (табл. 1,2,3,4)

Таблица № 1

№ строки	Схема	***A*** **(см^2)**	***l*₁** **(в *м*)**	***l*₂** **(в *м*)**	***P*₁** **(в *кН*)**	***P*₂** **(в *кН*)**
1	**I**	**10**	**2,0**	**1,0**	**10**	**30**
2	**II**	**11**	**2,1**	**1,1**	**11**	**31**
3	**III**	**12**	**2,2**	**1,2**	**12**	**32**
4	**IV**	**13**	**2,3**	**1,3**	**13**	**33**
5	**V**	**14**	**2,4**	**1,4**	**14**	**34**
6	**VI**	**15**	**2,5**	**1,5**	**15**	**35**
7	**VII**	**16**	**2,6**	**1,6**	**16**	**36**
8	**VIII**	**17**	**2,7**	**1,7**	**17**	**37**
9	**IX**	**18**	**2,8**	**1,8**	**18**	**38**
10	**X**	**19**	**2,9**	**1,9**	**19**	**40**

Таблица № 2

№ строки	Схема	**а** **(в *м*)**	**в** **(в *м*)**	**с** **(в *м*)**	**Q** **(в *кН*)**
1	**1**	**2,1**	**0,5**	**0,6**	**110**
2	**2**	**2,2**	**0,6**	**0,7**	**120**
3	**3**	**2,3**	**0,7**	**0,8**	**130**
4	**4**	**2,4**	**0,8**	**0,9**	**140**
5	**5**	**2,5**	**0,9**	**0,5**	**150**
6	**6**	**2,6**	**0,6**	**0,6**	**160**
7	**7**	**2,7**	**0,7**	**0,7**	**170**
8	**8**	**2,8**	**0,8**	**0,8**	**180**
9	**9**	**2,9**	**0,9**	**0,9**	**190**
10	**10**	**3,0**	**1,0**	**2,0**	**200**

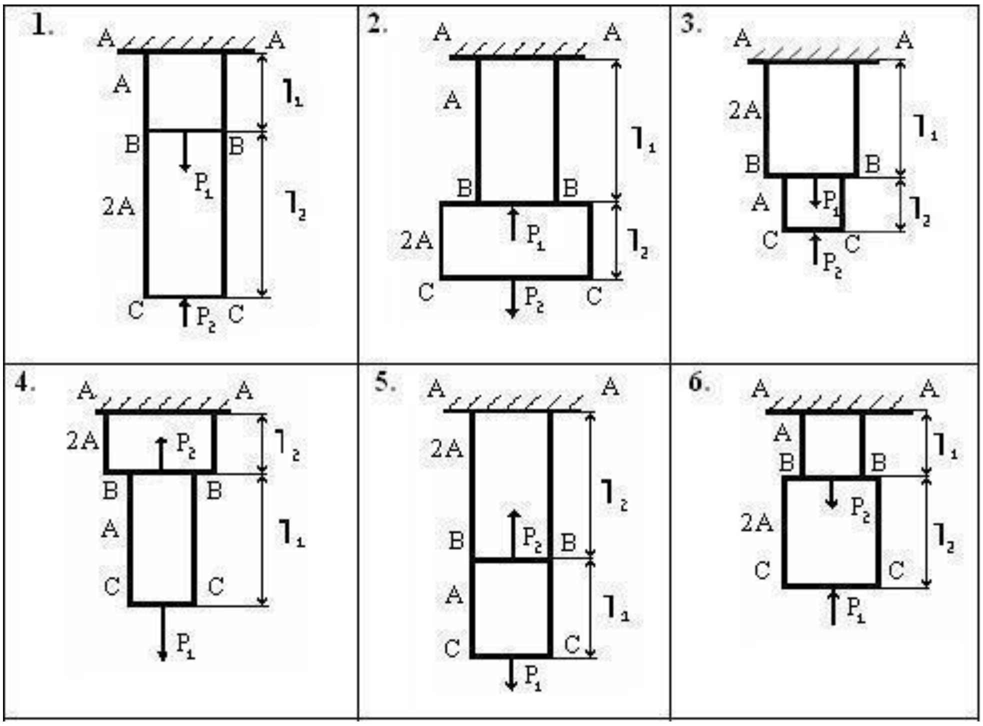
Таблица 3

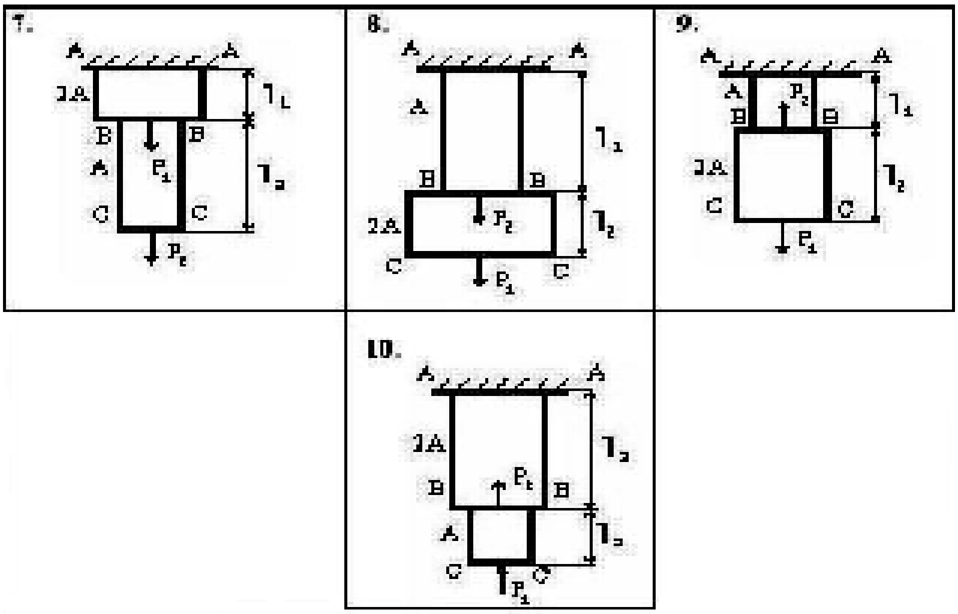
№ строки	Схема	***A*** **(см^2)**	**а (в *м*)**	**в (в *м*)**	**с (в *м*)**	**Q (в *кН*)**
1	I	5	2,1	2,1	1,1	110
2	II	6	2,2	2,2	1,2	120
3	III	7	2,3	2,3	1,3	130
4	IV	8	2,4	2,4	1,4	140
5	V	9	2,5	2,5	1,5	150
6	VI	10	2,6	2,6	1,6	160
7	VII	11	2,7	2,7	1,7	170
8	VIII	12	2,8	2,8	1,8	180
9	IX	13	2,9	2,9	1,9	190
0	X	14	3,0	3,0	2,0	200

Таблица 4

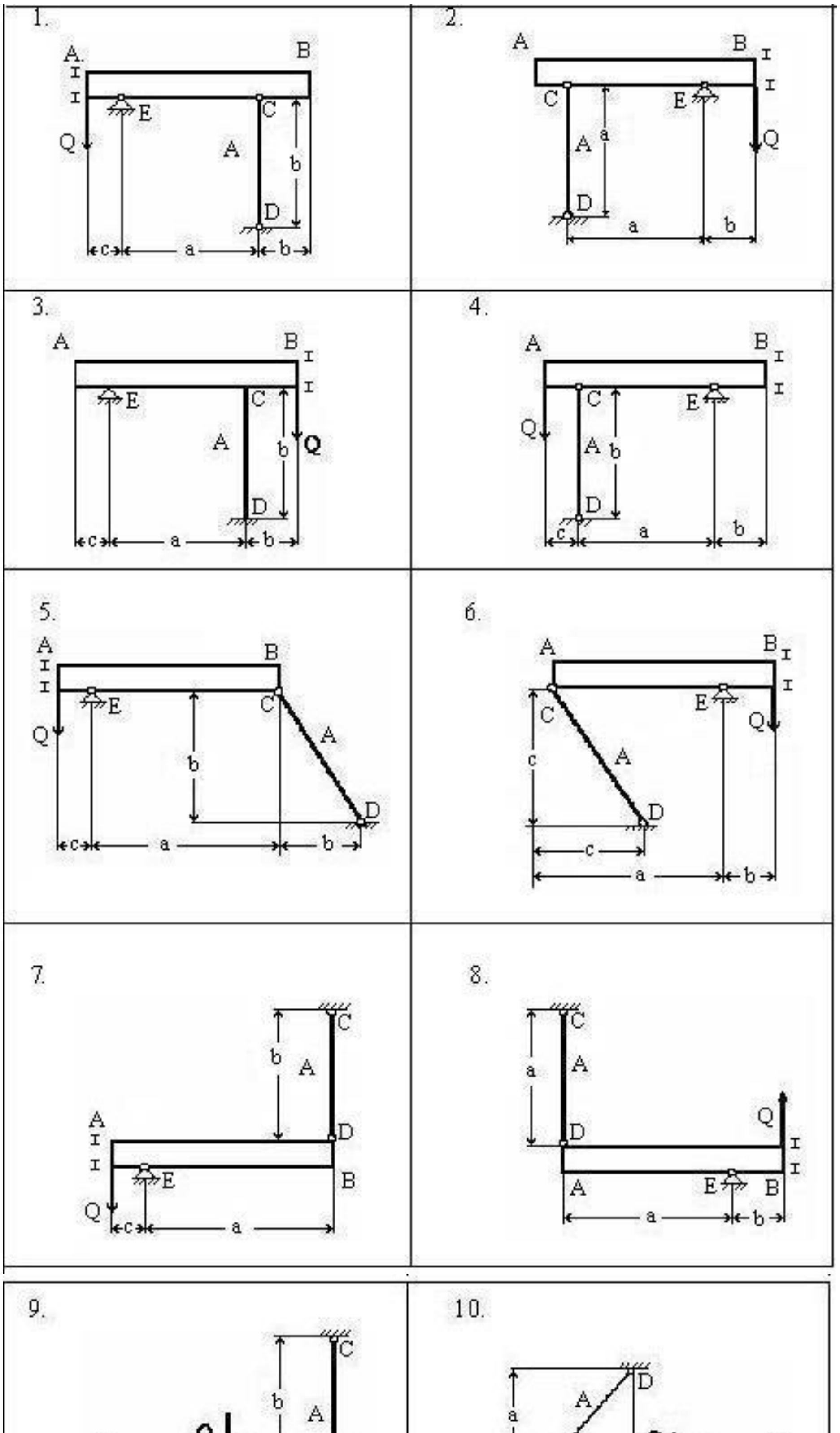
№ строки	Схема	***A*** **(см^2)**	**а (в *м*)**	**в (в *м*)**	**с (в *м*)**	Р (кН)
1	I	11	1,0	0,5	0,4	220
2	II	12	1,1	0,6	0,5	240
3	III	13	1,2	0,7	0,6	260
4	IV	14	1,3	0,8	0,8	280
5	V	15	1,4	0,9	1,0	300
6	VI	16	1,5	1,0	1,2	320
7	VII	17	1,6	1,2	1,4	340
8	VIII	18	1,7	1,3	1,6	360
9	IX	19	1,8	1,4	1,8	380
0	X	20	2,0	1,6	2,0	400

Схемы к задаче № 1



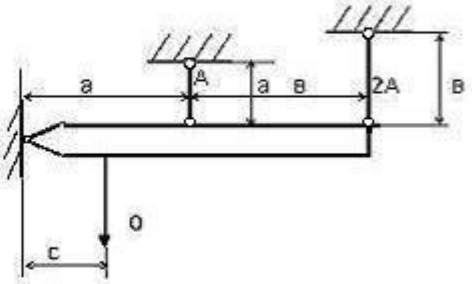


Схемы к задаче 2

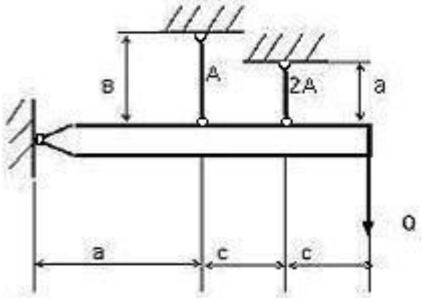


Схемы к задаче 3

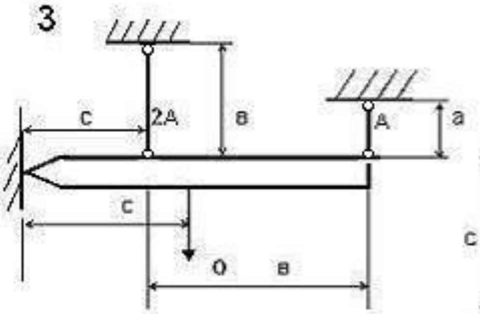
1



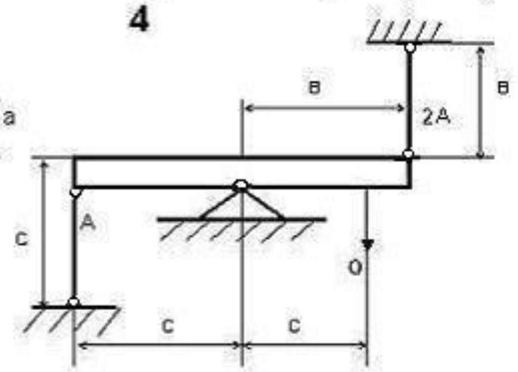
2



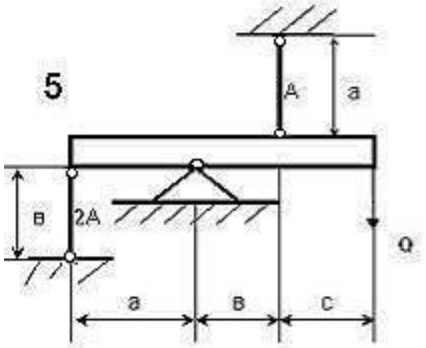
3



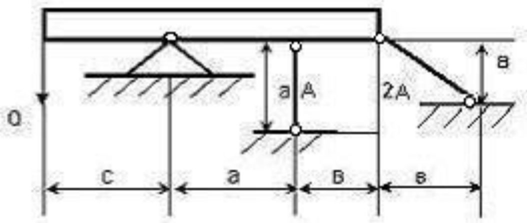
4



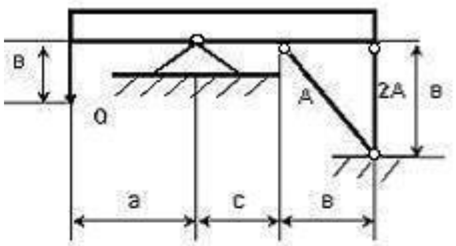
5



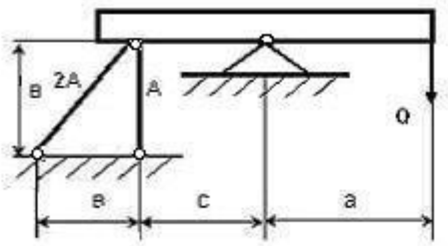
6



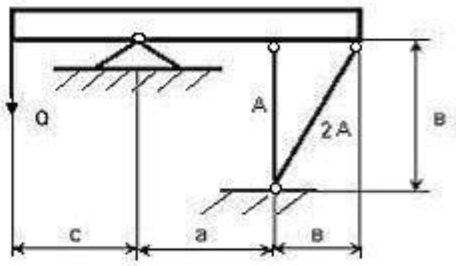
7



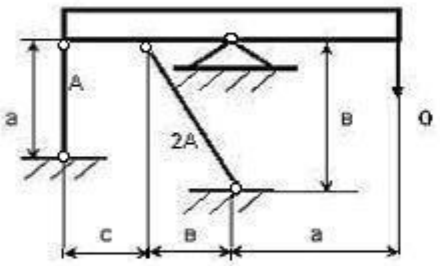
8



9

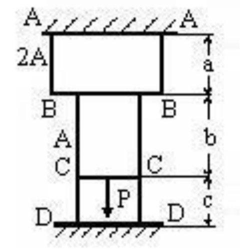


10

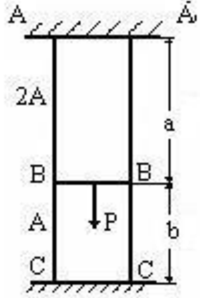


Схемы к задаче 4

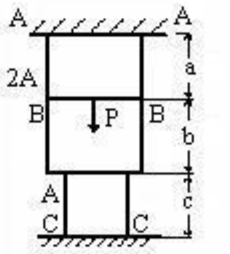
1.



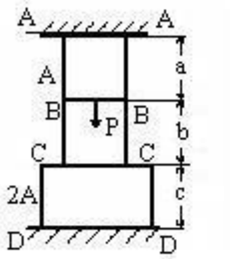
2.



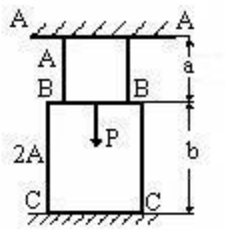
3.



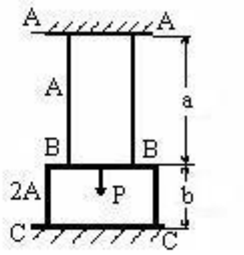
4.



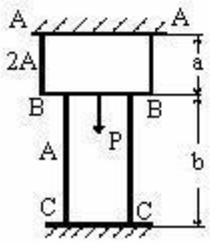
5.



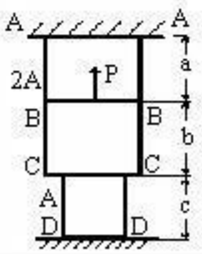
6.



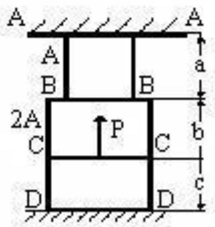
7.



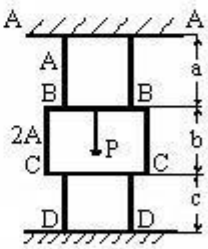
8.



9.



10.



II - <u>КРУЧЕНИЕ</u>

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Кручением называется деформация бруса, к концам которого в плоскостях перпендикулярных к его оси, приложены пары сил равные по величине и обратные по направлению. На кручение работаю валы, винтовые пружины и т.д.

Кручение - это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент, обозначаемый $M_к$

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При расчетах на прочность и жесткость знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эпюр $M_к$ примем следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки. Рис.8.

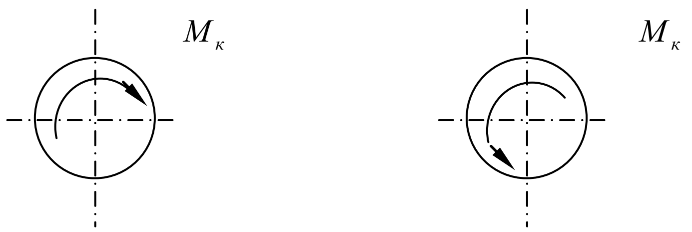


Рис.8 Знаки крутящего момента

Теория кручения бруса круглого поперечного сечения наиболее часто используются при расчете различных валов

Как видно из рис.9, характер деформации при кручении существенно зависит от формы поперечного сечения бруса. Методами сопротивления материалов задача о напряжениях и перемещениях при кручении может быть решена только для бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения. На рис. 9 показан так называемый вал трансмиссионный вал с насаженными на него шкивами ременных передач.

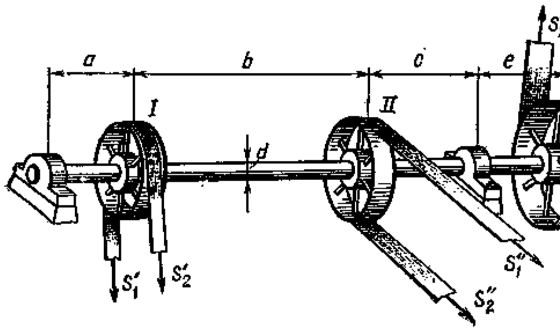


Рис. 9

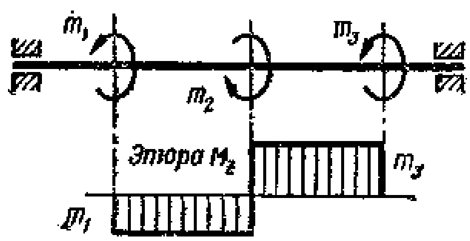


Рис. 10

Под действием натяжений ремней вал, помимо кручения, испытывает и изгиб. Если пренебречь влиянием изгиба(так поступают при предварительном, ориентировочном расчете валов), расчетная схема будет иметь вид, как на рис.10.

Наибольшее касательное напряжение при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho},$$

Где M_K - крутящий момент, размерность $[кH \cdot м]$

W_ρ - полярный момент сопротивления $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, размерность $[см^3]$

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \le [\tau]$$

Деформация бруса при кручении:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_\rho}$$, размерность $[рад]$

Условие жесткости вала при кручении:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} \le [\varphi]$$

Где: $l = 100 \quad см$ - длина вала

G - модуль упругости при сдвиге , $\left[G = 8 \cdot 10^3 кH / см^2\right]$

J_ρ - полярный момент инерции, $J_\rho = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$, $[см^4]$,

Произведение $G \cdot J_\rho$ называется жесткостью бруса при кручении,

Допускаемый угол закручивания имеет среднее значение $[\varphi] = 0{,}5^0$ на 1 метр длины вала (100 см).

Задание.

К стальному валу приложены три известных момента M_1, M_2, M_3. Требуется определить:

1. Определить крутящие моменты и по участкам построить их эпюры;
2. При заданном $[\tau]$ определить диаметр d вала из расчета на прочность и округлить до ближайшего стандарта (30,35,40,45,50,60,70,80,100,110,120 мм);
3. Построить эпюру углов закручивания;
4. Проверить вал на жесткость, если $[\varphi] = 0{,}5^0$ φ на $l = 1\ м$.

Пример № 9:

Дано: $M_1 = 1{,}4\ кН \cdot м,\ \ M_2 = 0{,}8\ кН \cdot м,\ \ M_3 = 1{,}6\ кН \cdot м$, $[\tau] = 8\ кН/см^2$, $a = 1{,}6\ м$, $в = 1 м,\ \ c = 1{,}4 м$

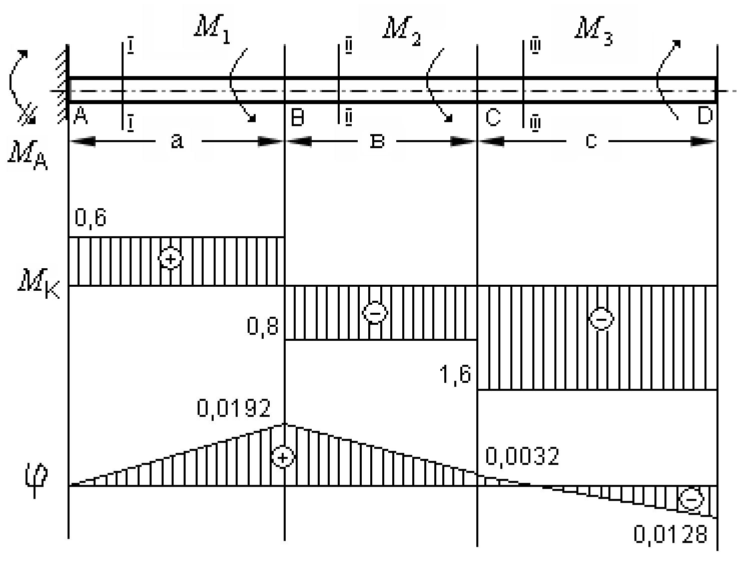


Рис. 11\

Решение:

1. Составляем уравнение статики и определяем M_A

$$\sum M_A = 0$$

$$M_1 + M_2 - M_3 + M_A = 0 \quad \Rightarrow \qquad M_A = 1{,}6 - 1{,}4 - 0{,}8 = -0{,}6 \ кН \cdot м$$

2. Построение эпюр крутящих моментов:

Для определения крутящих моментов, применим метод сечения:

1 сечение $M_{K1} = M_A = 0{,}6 \ кН \cdot м$

2 сечение $M_{K2} = M_A - M_1 = 0{,}6 - 1{,}4 = -0{,}8 \ \ кН \cdot м$

3 сечение $M_{K3} = M_A - M_1 - M_2 = 0{,}6 - 1{,}4 - 0{,}8 = -1{,}6 \ \ кН \cdot м$

Из условия прочности вала при кручении определяем диаметр $d - ?$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \le [\tau] \quad и \quad W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot \{\tau\}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}6 \cdot 100}{3.14 \cdot 8}} = 4{,}8 \ см$$, принимаем диаметр $d = 50 \ мм$

Определяем момент инерции $J_\rho = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32} = \dfrac{3{,}14 \cdot 5^4}{32} = 62{,}5 \ см^4$

3. Построение эпюры углов закручивания $\varphi = \dfrac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot J_\rho}$

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M^1_{KP} \cdot a}{G \cdot J_\rho} = 0 + \frac{0{,}6 \cdot 160 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 62{,}5} = 0{,}0192 \ рад$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = 0 + \frac{M^2_{KP} \cdot в}{G \cdot J_\rho} = 0{,}0192 - \frac{0{,}8 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 62{,}5} = 0{,}0032 \ рад$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = 0 + \frac{M^3_{KP} \cdot c}{G \cdot J_\rho} = 0{,}0032 - \frac{0{,}8 \cdot 140 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 62{,}5} = -0{,}0128 \ рад$$

Строим эпюру углов закручивания рис. 11.

4. Определяем наибольший угол закручивания и проверяем условия жесткости вала:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot 100}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} \le [\varphi]$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot 100}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 62{,}5} = 1{,}8^0$$

Условие жесткости вала не соблюдается, так как допускаемый угол закручивания $[\varphi]=0{,}5^0$ на 1 метр. Подбираем диаметр вала и принимаем равный $d=70\,мм$, соответственно, полярный момент инерции

$$J_\rho=\frac{\pi\cdot d^4}{32}=\frac{3{,}14\cdot 7^4}{32}=236\ см^4$$

$$\varphi_{\max}=\frac{M_K\cdot l}{G\cdot J_\rho}\cdot\frac{180}{\pi}=\frac{180}{3{,}14}\cdot\frac{1{,}6\cdot 100\cdot 100}{8\cdot 10^3\cdot 236}=0{,}48^0$$

Условие жесткости вала выполняется.

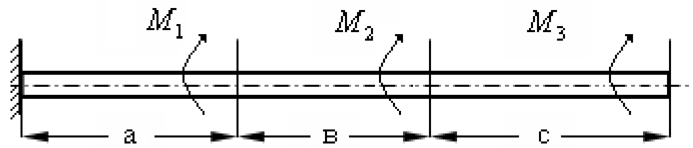
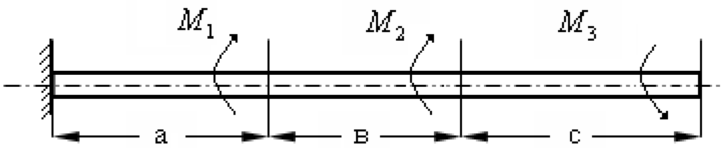
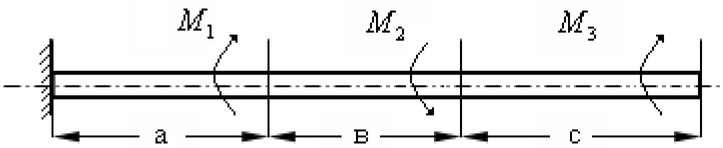
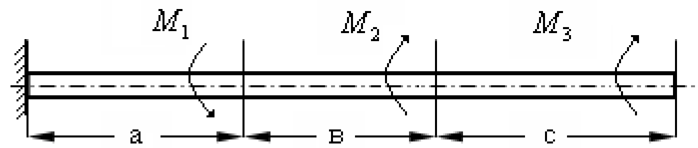
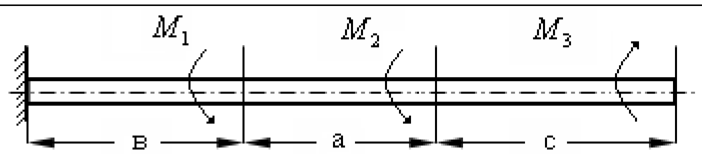
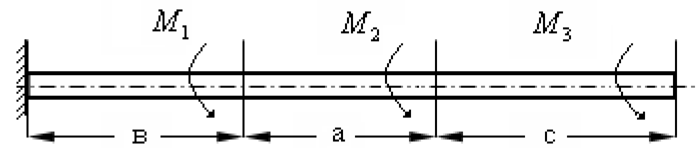
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

1. Кручение
2. Чистый сдвиг
3. Вал
4. Деформация
5. Уравнение статики
6. Винтовые пружины
7. Напряжение
8. Допускаемое касательное напряжение
9. Условие прочности при кручении
10. Эпюра
11. Жесткость
12. Сечение
13. Момент сопротивления
14. Момент инерции
15. Полярный момент инерции
16. Полярный момент сопротивления
17. Угол закручивания
18. Максимальное касательное напряжение

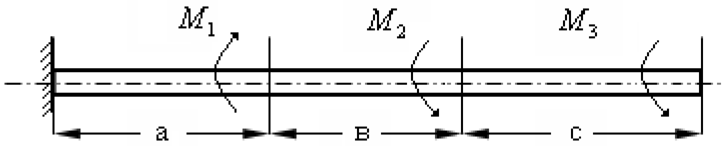
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении?
2. Как находят их величину в произвольной точке поперечного сечения?
3. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?
4. Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
5. Что называется полярным моментом сопротивления при кручении?
6. Как вычисляют момент, передаваемый шкивом, по мощности и числу оборотов?
7. Как находят угол закручивания?
8. Как производят расчет вала на прочность? На жесткость?

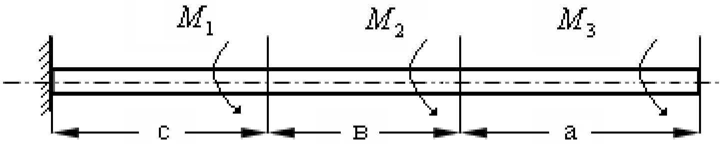
Таблица 1

1	
2	
3	
4	
5	
6	

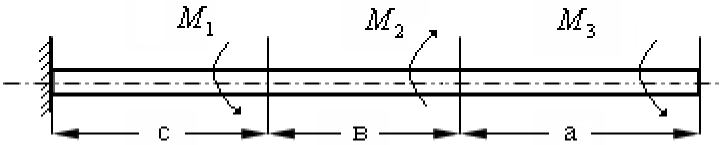
7



8



9



10

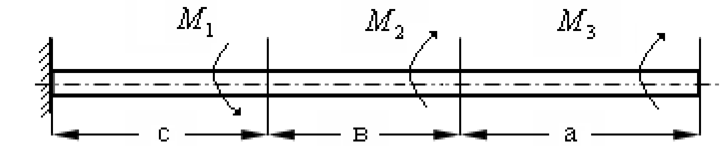


Таблица (Кручение)

№ строки	№ схемы	Расстояние, *м*			Моменты, $H \cdot м$			$[\tau]$, *МПа*
		а	*в*	*с*	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,1	1,2	1,3	1100	1000	1200	80
2	II	1,2	1,3	1,4	1200	1100	1300	75
3	III	1,3	1,4	1,5	1300	1200	1400	70
4	IV	1,4	1,5	1,6	1400	1400	1500	65
5	V	1,5	1,6	1,7	1500	1500	1600	60
6	VI	1,6	1,7	1,8	1600	600	1000	60
7	VII	1,7	1,8	1,9	1700	700	1100	65
8	VIII	1,8	1,9	2,0	1800	800	1200	70
9	IX	1,9	2,0	1,1	1900	900	1300	75
10	X	2,0	1,1	1,2	2000	1000	1100	80
	в	***г***	***д***	***е***	***г***	***д***	***е***	***в***

III - ИЗГИБ

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Изгиб это такой вид деформации, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. В большинстве случаев одновременно с изгибающими моментами возникают и поперечные силы; такой изгиб называют ***поперечным***; если поперечные силы не возникают, ***изгиб называют чистым***. Стержни работающие на изгиб называют балками. Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных осей поперечного сечения стержня, изгиб называют простым или плоским (применяется также название : прямой изгиб).

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

1. ***Шарнирно-подвижная опора*** (рис. 12 а). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникать только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка. Схематическое изображение подвижной шарнирной опоры дано на рис. 12 б.

2. ***Шарнирно-неподвижная опора*** (рис. 12 в). Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие – горизонтальную и вертикальную.

3. ***Жесткая заделка , или защемление*** (рис.12 г). Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникать реакция, которую обычно раскладывают на две составляющие (вертикальную и горизонтальную) и момент защемления (реактивный момент).

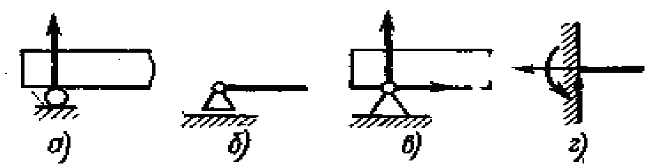


Рис. 13

Балка с одним заделанным (защемленным) концом называется консольной или просто консолью (рис.13 а), друхопорная балка без консолей (рис. 13 б) , двухопорная балка с одной консолью (рис 13 в), двухопорная балка с двумя консолями (рис 13 г).

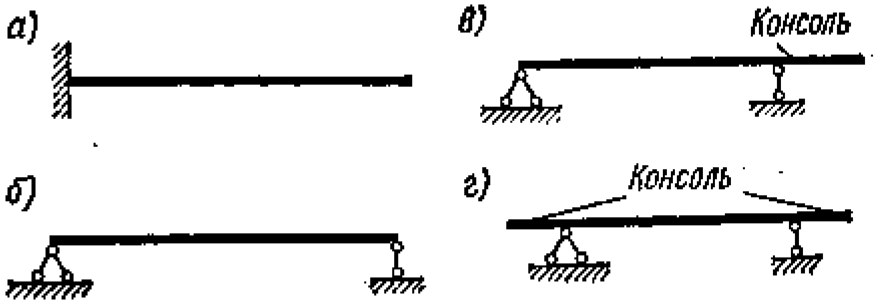
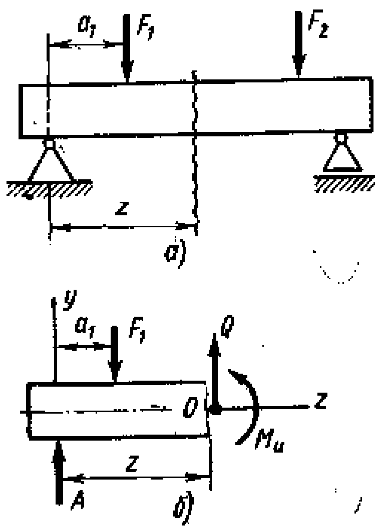


Рис.13



При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия (внутренних силовых факторов) – изгибающий момент $M_и$ и поперечная сила Q. Для их определения применим метод сечений (метод Розу). Мысленно проводим в любом месте балки сечение, например на расстоянии z от левой опоры. Отбрасываем правую часть балки.

Рис. 14

Взаимодействие частей балки заменяем внутренними усилиями: изгибающим моментом $M_и$ и поперечной силой Q (Рис . 14). Для определения величины $M_и$ и Q используем два уравнения равновесия:

1. $\sum Y = 0$; $A - F_1 + Q = 0$; $Q = F_1 - A$, $Q = \sum (F_i)_y$

2. $\sum M_0 = 0$; $A \cdot z - F_1 \cdot (z - a_1) - M_и = 0$; $M_и = A \cdot z - F_1 (z - a_1)$; $M_и = \sum m_0(F_i)$

Таким образом,

1. *поперечная сила* Q *в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения*;
2. *изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.*

Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

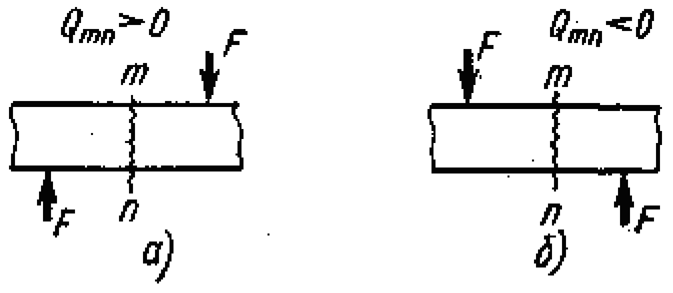


Рис .15

Поперечная сила в сечении балки *mn* (рис.15) считается ***положительной***, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз, и ***отрицательной*** - в противоположном случае.

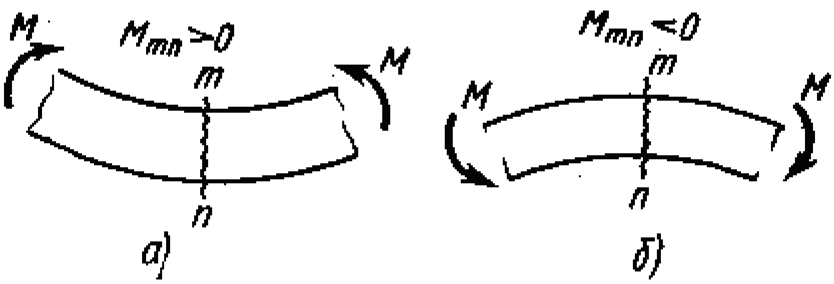
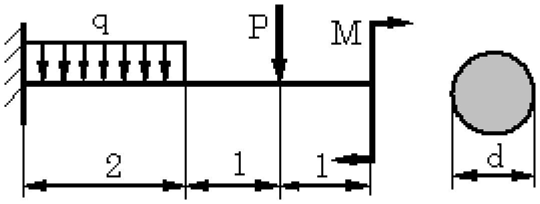


Рис. 16

Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз, и отрицательны – выпуклостью вверх (рис. 16).

Пример № 10

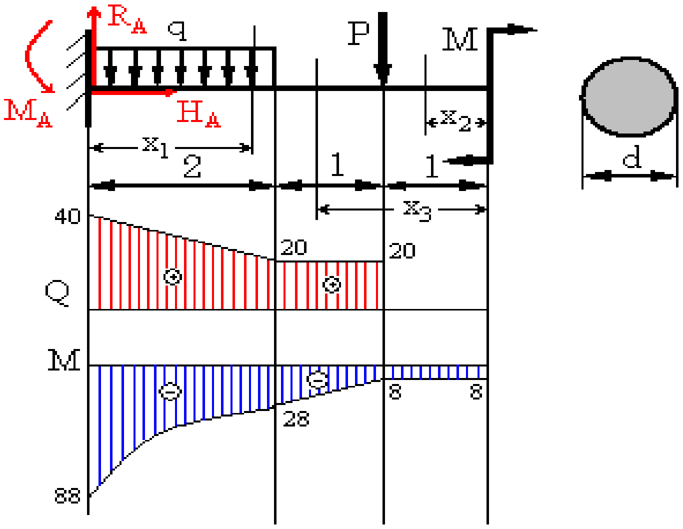


Дано:

$P = 20\,кН,\ q = 10\,kH/м,\quad M = 8\,кН\cdot м$

Требуется определить: продольную силу Q, изгибаюўий момент $M_и$ и построить их эпюры и подобрать сечение .

Решение: 1. Определение опорных реакций:



составляем уравнение равновесия: $\sum Y = 0$;

$R_A - q\cdot 2 - P = 0$

$R_A = q\cdot 2 + P = 10\cdot 2 + 20 = 40\ kH$

$\sum Z = 0$; $\quad H_A = 0$

$\sum M_A = 0$;

$-M_A + q\cdot 21 + P\cdot 3 + M = 0$;

$M_A = 10\cdot 2\cdot 1 + 20\cdot 3 + 8 = 88\ kH\cdot м$

Построение эпюр:

2. Определение Q и $M_и$ по участкам:

1 участок $0 \le x_1 \le 2$

$$Q_1 = R_A - q\cdot x_1$$

$$M_1 = R_A\cdot x_1 - q\cdot\frac{x_1^2}{2} - M_A$$

при $x_1 = 0 \quad Q_1 = 40\ kH \qquad M_1 = -88\,kH\cdot м$

$x_1 = 2 \quad Q_1 = 20\,kH \qquad M_1 = -28\,кН\cdot м$

2 участок $0 \le x_2 \le 1$

$$Q_2 = 0 \qquad M_2 = -M = -8\ кН\cdot м$$

3 участок $1 \le x_3 \le 2$

$$Q_3 = P = 20\,kH$$

$$M_3 = -M - P\cdot(x_3 - 1)$$

При $x_3 = 1$ $\qquad M_3 = -8\ кН \cdot м$

$x_3 = 2$ $\qquad M_3 = -28\ кН \cdot м$

По полученным данным строим эпюры Q и $M_и$.

3.Подбор сечения:

Условия прочности при изгибе : $\sigma_{max} = \dfrac{M_{и\ max}}{W_y} \le [\sigma]$

Момент сопротивления для круглого сечения : $W_y = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$

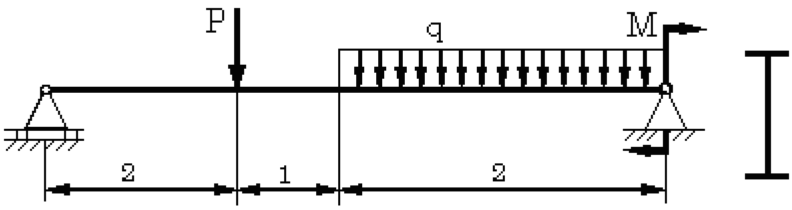
$$W_y = \frac{M_{и\ max}}{[\sigma]} = \frac{88 \cdot 100}{1} = 8800\ см^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_y \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8800 \cdot 32}{3{,}14}} = 45\ см$$

Пример № 11

Дано: $P = 40 кН, \quad M = 20\ \ кН \cdot м\ , \quad q = 10 kН / м$

Требуется определить: продольную силу Q , изгибаюўий момент $M_и$ и построить их эпюры и подобрать двутавровое сечение.



1. Определение опорных реакций:

Составляем уравнение равновесия:

$\sum M_A = 0; \qquad P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M - R_B \cdot 5 = 0$

$$R_B = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{80 + 80 + 20}{5} = 36\ \ kН$$

$\sum M_B = 0; \qquad -P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + M + R_A \cdot 5 = 0$

$$R_A = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - M}{5} = \frac{120 + 20 - 20}{5} = 24\ \ kН$$

Проверка: $\sum Y = 0$; $\qquad R_A + R_B - P - q \cdot 2 = 0$

$$24 + 36 - 40 - 20 = 0$$

$$60-60=0$$

2. Определение Q и M_u по участкам:

1 участок $0 \le x_1 \le 2$

$$Q_1 = R_A = 24\ kH$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1$$

$x_1 = 0;$ $\quad M_1 = 0$

$x_1 = 2\,м;$ $\quad M_1 = 48\ kH \cdot м$

2 участок $2 \le x_2 \le 3$

$$Q_2 = R_A - P = -16\ \ kH$$

$$M_2 = R_A \cdot x_2 - P \cdot (x_2 - 2)$$

$x_2 = 2\,м;$ $\quad M_2 = 48\ kH \cdot м$

$x_2 = 3\,м;$ $\quad M_2 = 32\ kH \cdot м$

3 участок $0 \le x_3 \le 2$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot x_3$$

$$M_3 = R_B \cdot x_3 - q\frac{x_3^2}{2} - M$$

$x_3 = 0;$ $\quad Q_3 = -36\ \ kH;$ $\quad M_3 = -20\ kH \cdot м$

$x_3 = 2;$ $\quad Q_3 = -16\ \ kH;$ $\quad M_3 = 32\ \ kH \cdot м$

По полученным данным строим эпюры Q и M_u.

3. Подбор друтаврового сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \le [\sigma]$$

Где: $M_{\max}$ – Максимальный изгибающий момент, берется из эпюры моментов;

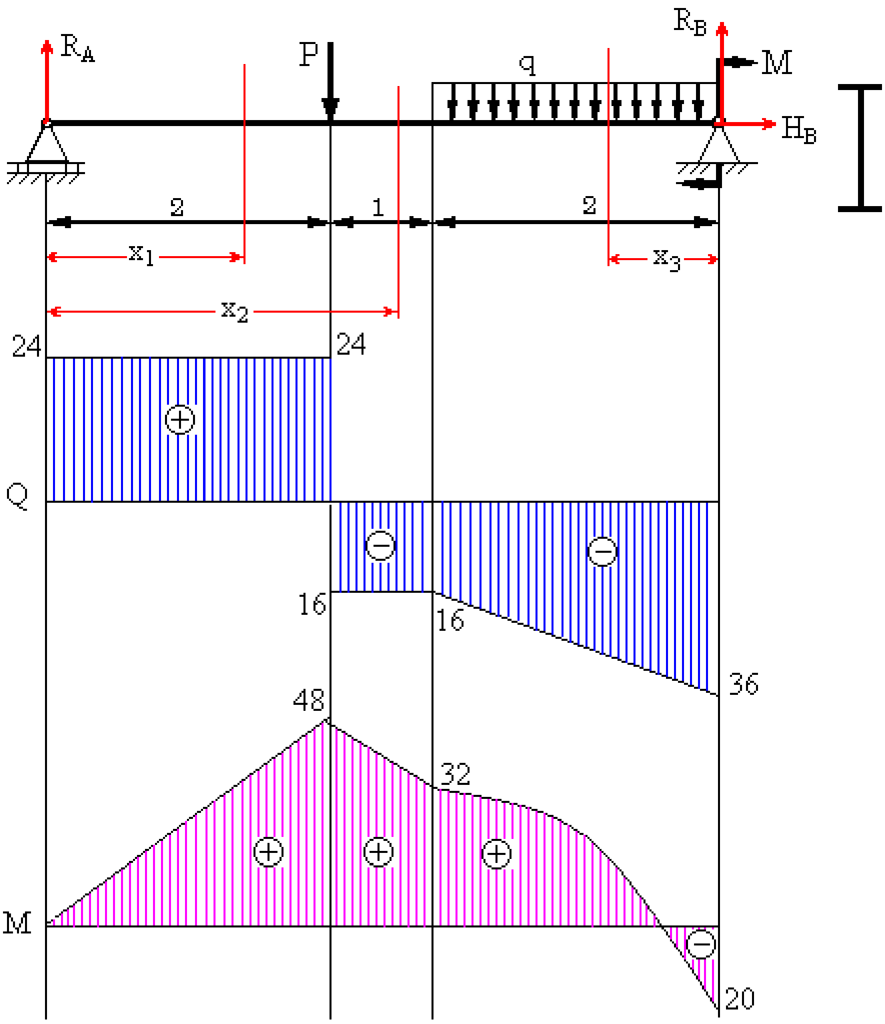
W_y – осевой момент сопротивления;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{48 \cdot 100}{16} = 300\ см^3$$

Из таблицы сортамента подбираем номер двутавра

№ двутавра 24а при $W_y = 317\ см^3$

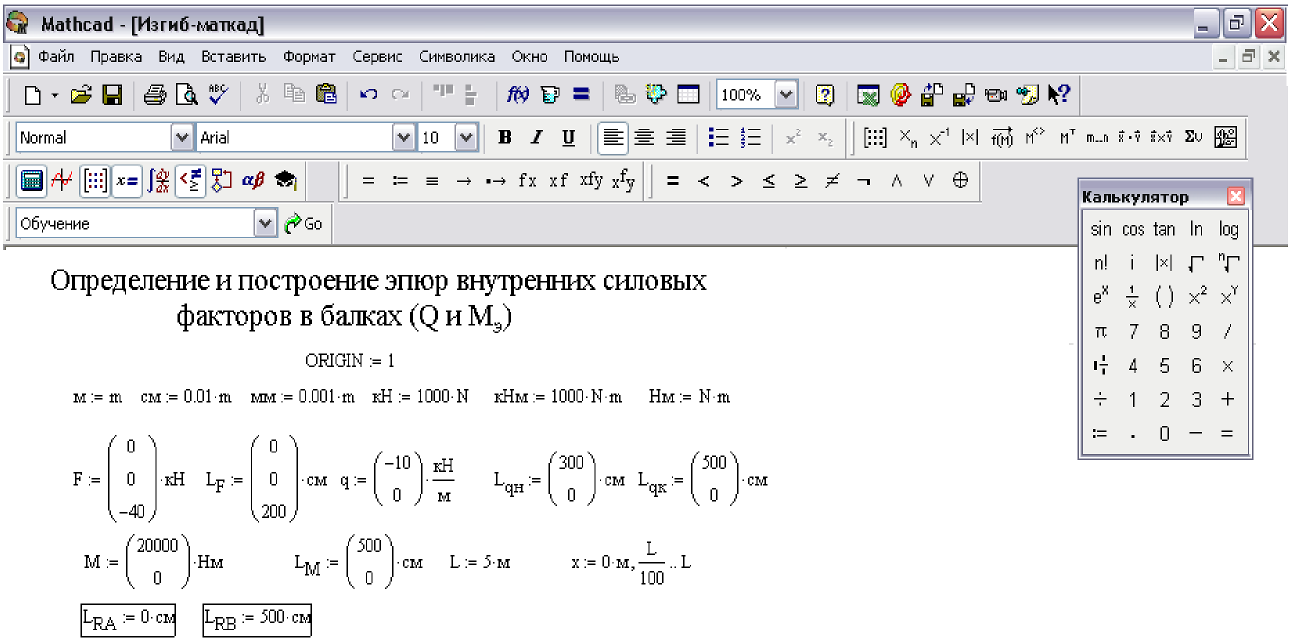


Пример № 12

Этот же пример решим с применением математической программы «Mathcad»

Дано: $P = 40\,кН,\quad M = 20\ \ кН \cdot м\,,\quad q = 10\,kH/м$

Вводим данные задачи :



Получаем готовые эпюры Q и M :

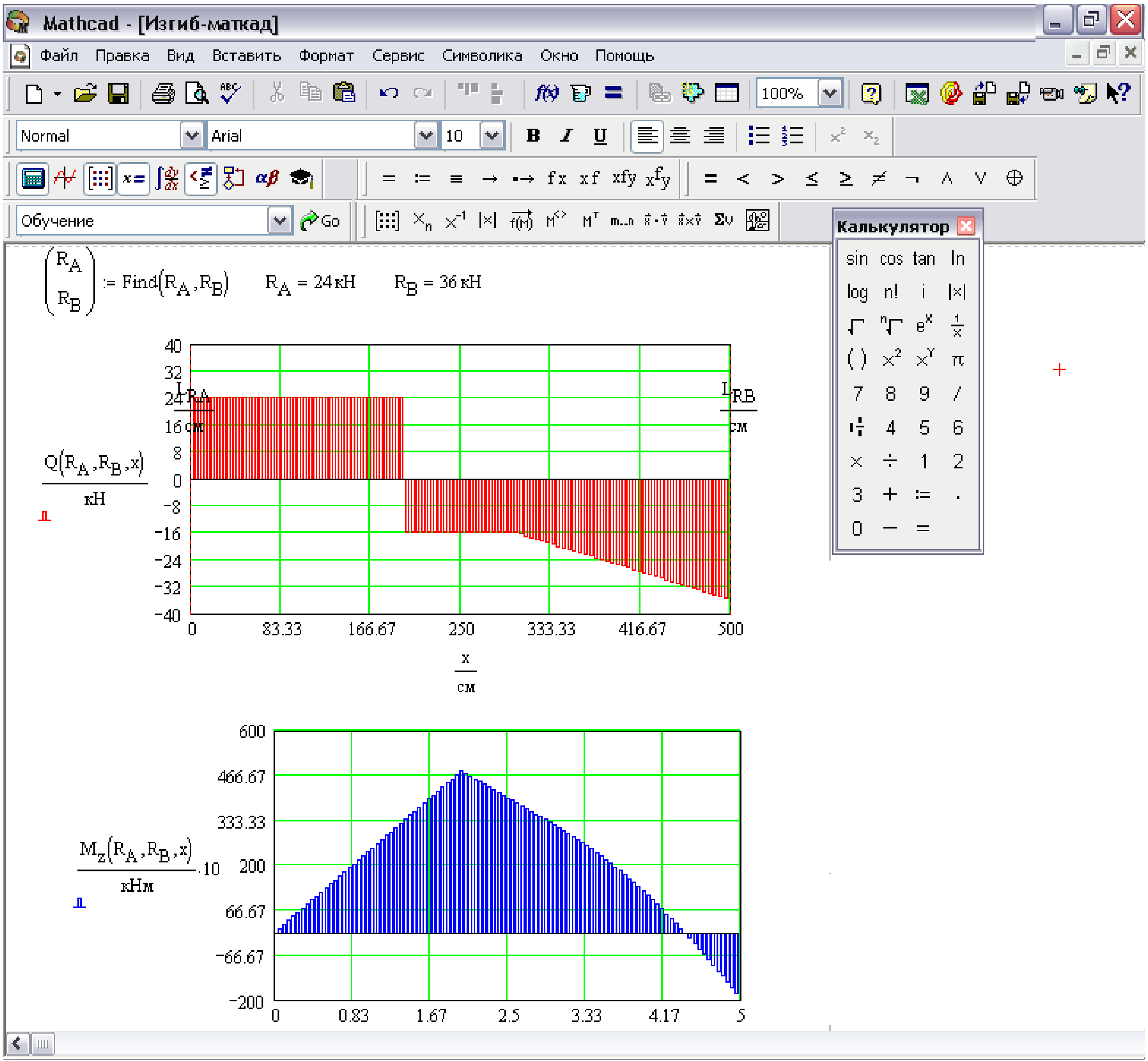
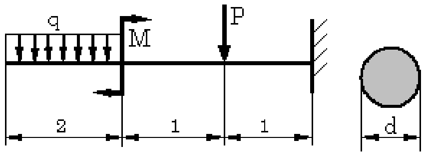


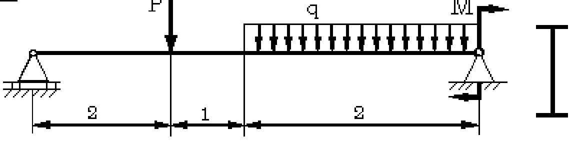
Таблица №   - Схемы - изгиб

1

1

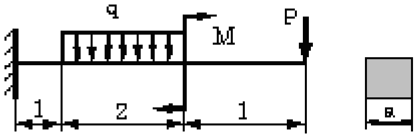


2

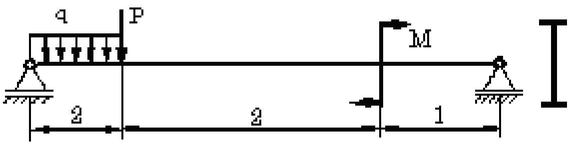


2

1

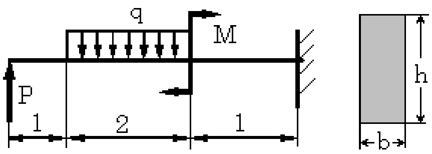


2

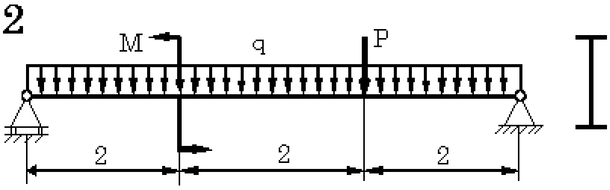


3

1

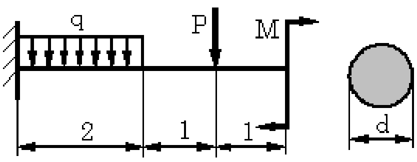


2

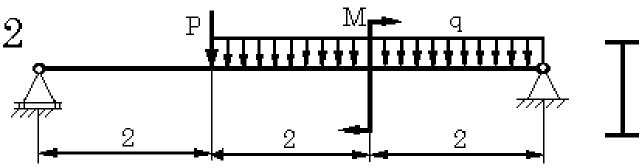


4

1

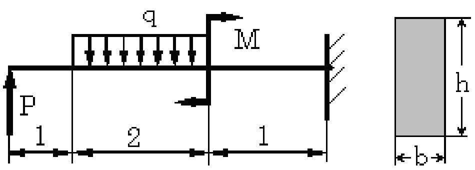


2

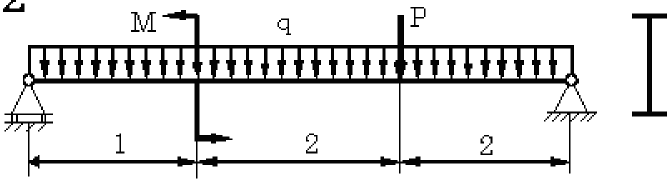


5

1

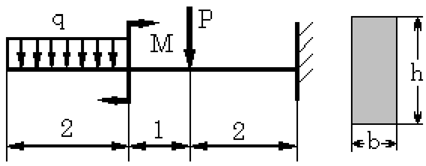


2

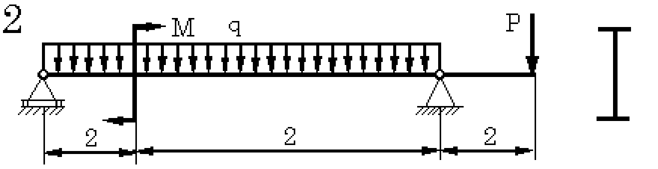


6

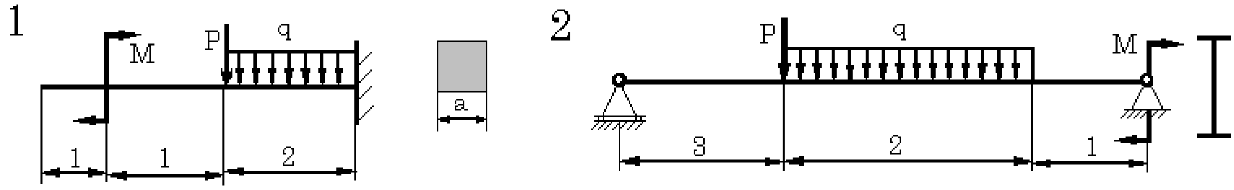
1



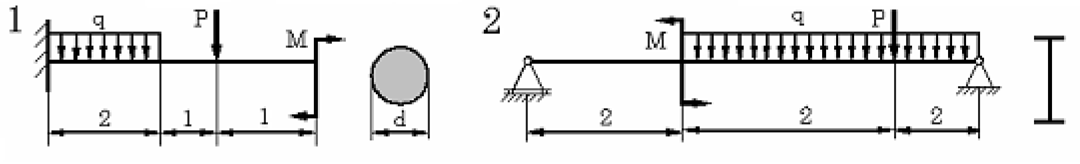
2



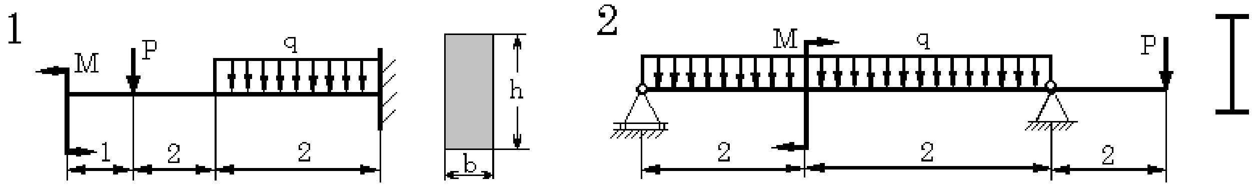
7



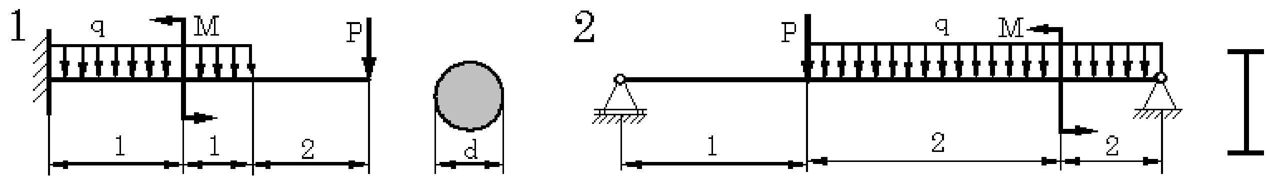
8



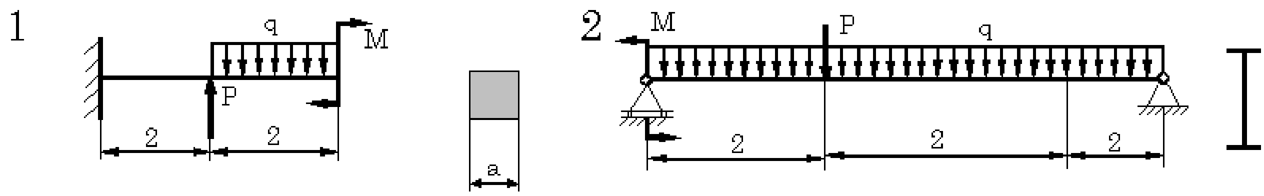
9

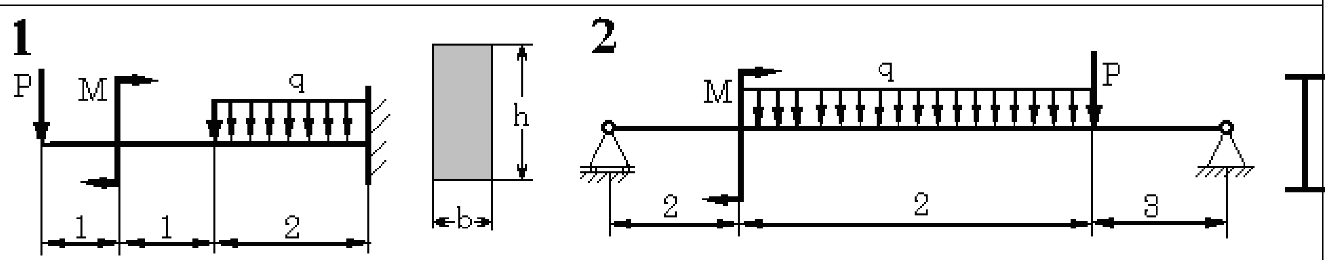


10



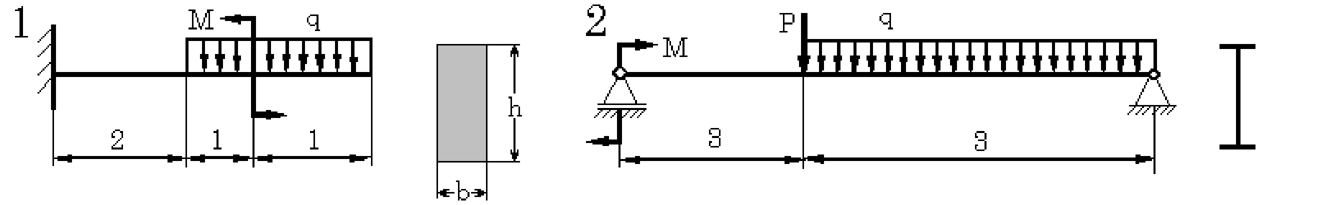
11



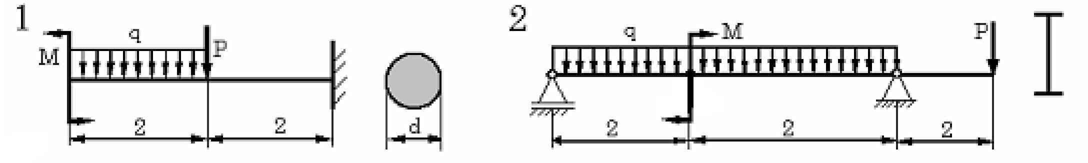


12

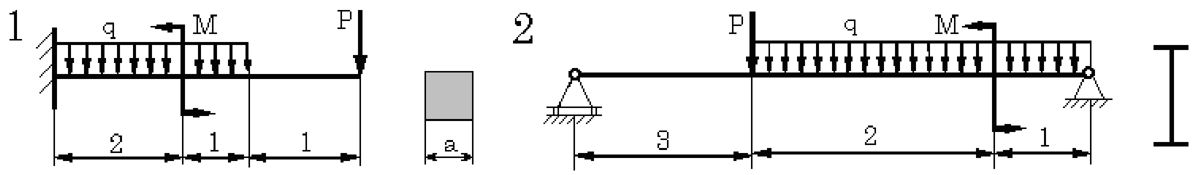
13



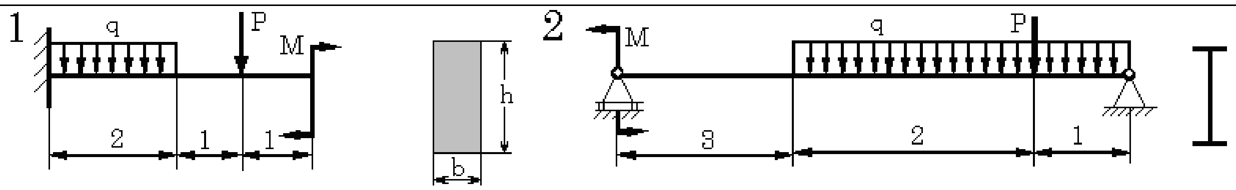
14



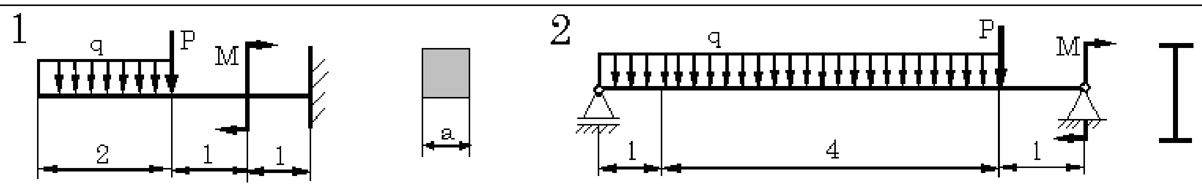
15



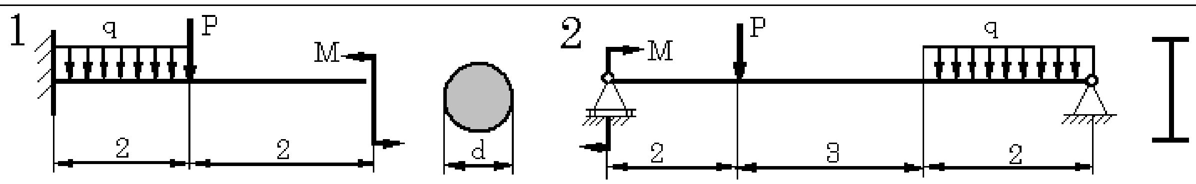
16



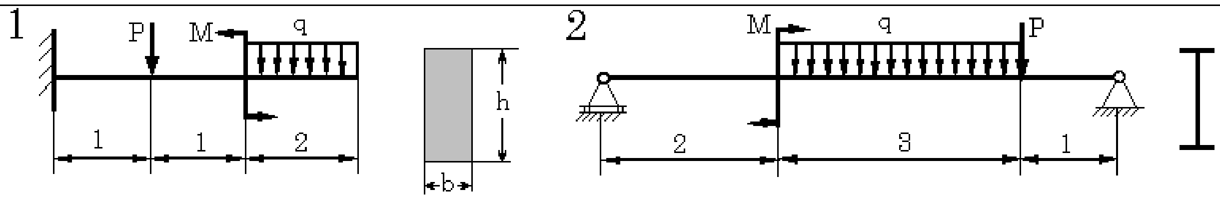
17



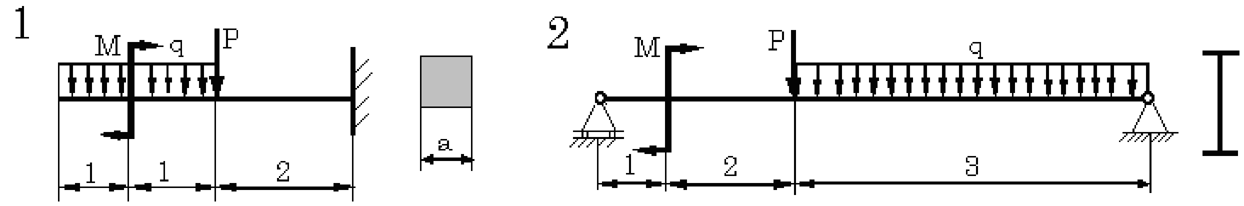
18



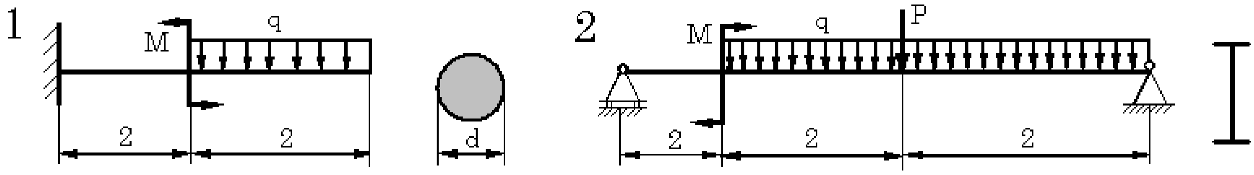
19

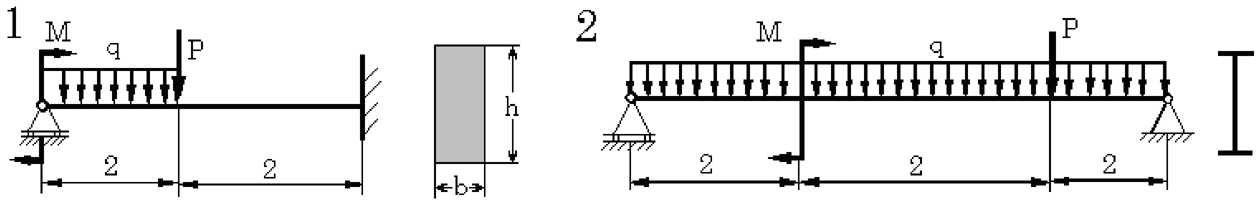


20

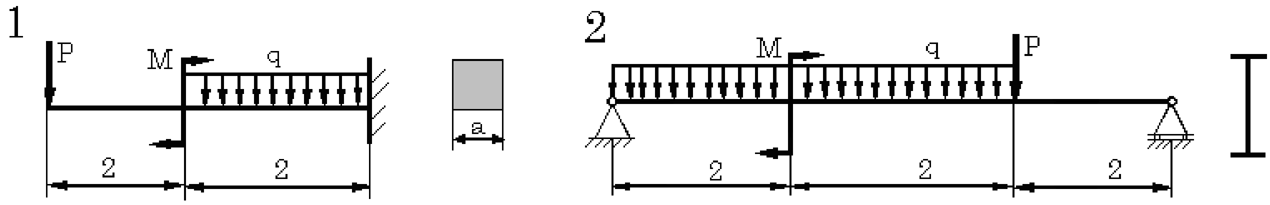

1
M
q
P
1
1
2
a
2
M
P
q
1
2
3

21

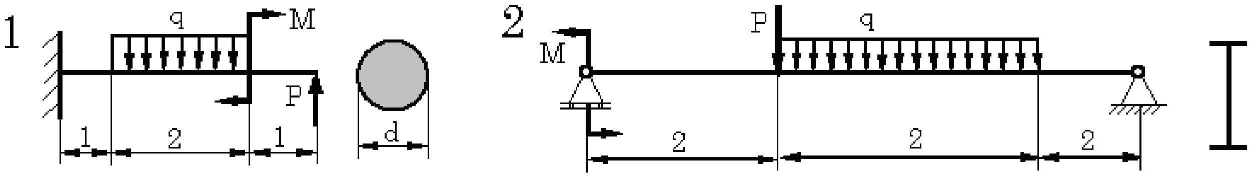

1
M
q
2
2
d
2
M
q
P
2
2
2


1
M
q
P
2
2
h
b
2
M
q
P
2
2
2

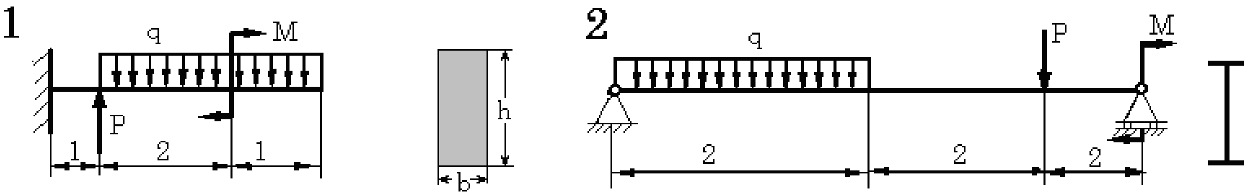
22


1
P
M
q
2
2
a
2
M
q
P
2
2
2

23


1
q
M
P
1
2
1
d
2
M
P
q
2
2
2

24


1
q
M
P
1
2
1
h
b
2
q
P
M
2
2
2

25

Таблица данных по изгибу

№ Вари-анта	Нагрузка					
	1 задача			2 задача		
	$P,\ кН$	$q,\ кН/м$	$M,\ \ кН\cdot м$	$P,\ кН$	$q,\ кН/м$	$M,\ \ кН\cdot м$
1	10	5	10	50	20	10
2	15	10	15	40	10	20
3	20	15	10	30	20	30
4	20	20	10	20	10	30
5	15	5	20	10	20	20
6	10	10	10	50	10	10
7	10	15	10	40	20	20
8	15	20	5	30	10	30
9	20	10	10	20	20	30
10	20	10	20	10	10	20
11	15	5	10	50	20	10
12	10	10	15	40	10	20
13	10	15	10	30	20	20
14	20	20	10	20	10	30
15	15	5	20	10	20	30
16	10	5	10	50	20	10
17	10	10	15	40	10	20
18	15	15	10	30	20	30
19	20	20	10	20	10	30
20	20	5	20	10	20	20
21	15	10	10	50	10	10
22	10	15	10	40	20	20
23	10	20	5	30	10	30
24	20	10	10	20	20	30
25	15	10	20	10	10	20

Ключевые слова:

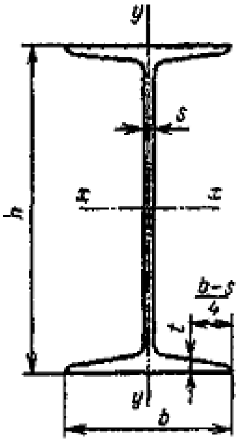
1. Изгиб
2. Чистый изгиб
3. Поперечный изгиб
4. Косой изгиб
5. Типы балок
6. Двухопорная балка
7. Консольная балка
8. Эпюра
9. Поперечная сила
10. Изгибающий момент
11. Нормальное напряжение
12. Допускаемое нормальное напряжение
13. Условие прочности при изгибе
14. Момент сопротивления
15. Подбор сечения
16. Двутавр

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется прямым и косым изгибом?
2. Что называется чистым изгибом?
3. Что называется поперечным изгибом?
4. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?
5. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
6. Какие бывают типы опор?
7. Какие уравнения используются для определения значений опорных реакций?
8. Как проверить правильность определения опорных реакций?
9. Как определяется экстремальное значение изгибающего момента?
10. Как изменяется изгибающий момент в сечении, в котором к балке приложен сосредоточенный внешний момент?
11. Как меняется поперечная сила в сечении, в котором к балке приложена сосредоточенная внешняя сила, перпендикулярная к оси балки?
12. Для чего строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
13. Чему равны нормальные напряжения при изгибе?
14. Как пишутся условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям?

Приложение 1

Таблица сортамента Двутавры стальные горячепрокатные (ГОСТ 8239-89)



h — высота двутавра;
b — ширина полки;
d — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
A — площадь поперечного сечения;
J_x, J_y — моменты инерции;
W_x, W_y — моменты сопротивления;
S_x — статический момент полусечения;
i_x, i_y — радиусы инерции.

№ Дву-тавра	Масса 1м, кг	Размеры, мм				A, $см^2$	J_x, $см^4$	W_x, $см^3$	i_x, $см$	S_x, $см^3$	J_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, $см$
		h	b	d	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	48	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	8,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1340	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	125
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,80
30	36,5	300	135	65	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03

№ Дву-тавра	Масса 1м, кг	Размеры, мм				A, $см^2$	J_x, $см^4$	W_x, $см^3$	i_x, $см$	S_x, $см^3$	J_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, $см$
		h	b	d	t								
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ОБРАЗЦЫ ТЕСТОВ:

РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАНИЕ:

1. Какова связь между поперечной и относительной продольной деформацией?

1. $\varepsilon = \mu \cdot \varepsilon^1$ 2. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 3. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ 4. $\varepsilon = \frac{E}{\sigma}$ 5. $\varepsilon^{-1} = -\mu \cdot \varepsilon$

2. Как выглядит условие прочности при растяжении/сжатии?

1. $\sigma = \frac{N}{A} \le [\tau]$ 2. $\sigma = \frac{Q}{A}$ 3. $\sigma = \frac{N}{A}$ 4. $\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]$ 5. $\sigma = \frac{M_u}{J_y} \le [\sigma]$

3. Чему равна жесткость при растяжении/сжатии?

1. EG **2.** FG **3.** EI_y **4.** GI_P **5.** EF

4. Укажите правильный вид Закона Гука

1. $\tau = \frac{N}{A}$ 2. $\varepsilon = \frac{\sigma}{l}$ 3. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ 4. $\varepsilon = \frac{E}{\sigma}$ 5. $\varepsilon^{-1} = -\mu \cdot \varepsilon$

5. Какова размерность относительной деформации?

1. *кг* 2. *см* 3. *безразмерная* 4. $кг/см^2$ 5. $т/м$

КРУЧЕНИЕ:

1. Что такое жесткость сечения при кручение?

l. Произведение $E \cdot Iy$ 2. $E \cdot I_P$ 3. $G \cdot I_p$ 4. $G \cdot W_P$ 5. $E \cdot F$

2. По какой формуле определяется ***угол закручивания*** при кручении?

1. $\varphi = \dfrac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P}$**;** **2.** $\varphi = \dfrac{M_u \cdot l}{E \cdot I_P}$**;** **3.** $\varphi = \dfrac{M_K \cdot l}{G \cdot I_y}$**;** **4.** $\varphi = \dfrac{M_K \cdot l}{E \cdot I_y}$**;** **5.** $\varphi = \dfrac{M_u \cdot l}{G \cdot I_P}$

3. Как пишется условие прочности при кручении?

1. $\tau = \dfrac{M_K}{I_p} \cdot \rho$; 2. $\tau_{max} = \dfrac{M_к}{W_y} \le [\tau]$; 3. $\tau_{max} = \dfrac{M_K}{I_p} \le [\tau]$;

4. $\tau_{max} = \dfrac{M_K}{W_P} \le [\tau]$ 5. $\tau_{max} = \dfrac{M_K}{I_p} \cdot \rho \le [\tau]$

4. Чему равны главные напряжения при кручении?

1. $\sigma_{max} = \tau_{max} = \dfrac{M_K}{I_p}$; 2. $\sigma_{max} = \tau_{max} = \dfrac{M_K}{I_y}$;

3. $\sigma_{max} = \tau_{max} = \dfrac{M_u}{W_p}$; 4. $\sigma_{max} = \tau_{max} = \dfrac{M_K}{I_y} \cdot \rho$;

5. $\sigma_{max} = \tau_{max} = \dfrac{M_K}{W_p}$

5. По какой формуле производится расчет бруса на жесткость при кручении?

1. $\tau_{max} = \dfrac{M_K \cdot l}{G \cdot W_p} \le [\varphi]$; 2. $\varphi_{max} = \dfrac{M_u \cdot l}{G \cdot I_y} \le [\varphi]$; 3. $\varphi_{max} = \dfrac{M_K \cdot l}{E \cdot I_p} \le [\varphi]$;

4. $\varphi_{max} = \dfrac{M_K \cdot l}{E \cdot I_y} \le [\varphi]$; 5. $\varphi_{max} = \dfrac{M_K \cdot l}{G \cdot I_p} \le [\varphi]$

ИЗГИБ:

1. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса при *поперечном изгибе*?

1. только $M_и$ 2. Q, $M_и$ 3. N, $M_и$

4. только Q 5. Q, N

2. Какая существует дифференциальная зависимость между изгибающимся моментом и поперечной силой?

1. $q = \dfrac{d^2M}{dx^2}$ 2. $Q = \dfrac{dM_u}{dx}$ 3. $q = \dfrac{dQ}{dx}$ 4. $q = \dfrac{dN}{qx}$ 5. $Q = \dfrac{d^2M_u}{dx}$

3. Какая существует дифференциальная зависимость между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки?

1. $q = \dfrac{d^2M}{dx^2}$ 2. $Q = \dfrac{dM_u}{dx}$ 3. $q = \dfrac{dQ}{dx}$ 4. $q = \dfrac{dN}{qx}$ 5. $Q = \dfrac{d^2M_u}{dx}$

4. Чему равны касательные напряжения при изгибе?

1. $\tau = \dfrac{Q \cdot S_y}{J_y \cdot b}$ 2. $\tau = \dfrac{Q \cdot S_y}{J_y \cdot E}$ 3. $\sigma = \dfrac{M_u S_y}{E \cdot b}$ 4. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_u}{J_y} z$ 5. $\tau = \dfrac{Q_{\max} S_y}{J_y}$

5. По какой формуле определяют нормальные напряжения при изгибе?

1. $\sigma = \dfrac{Q_{\max}}{J_y} z$ 2. $\sigma = \dfrac{M_u}{W_y} z$ 3. $\sigma = \dfrac{M_u}{J_y} z$ 4. $\sigma = \dfrac{M_u}{J_\rho} \rho$ 5. $\sigma = \dfrac{Q_{\max}}{J_\rho} z$

Список литературы

1. А.В.Дарков. Г.С. Шпиро. **Сопротивление материалов**. Изд. «Высшая школа». Москва. 1989.

2. М.С.Степин . **Сопротивление материалов**. Изд. Высшая школа. М. 1988.

3. В.И.Феодосьев. **Сопротивление материалов**. Изд. «МГТУ им Н.Э.Баумана» Москва. 1999.

4. Г.М.Ицкович. **Сопротивление материалов**. Изд. «Высшая школа» Москва.1986.

2. Макаров Е.Г. **Сопротивление материалов на базе** *Mathcad*. СПб: БХВ-Петербург, 2004. стр. 294-322

3. М.Херхагер, Х. Партолль. ***Mathcad* 2000**, Изд.Ирина. BHV. Киев.2000.

4. http://mysopromat.ru

5. http://mysopromat.ru/uchebnye_kursy/sopromat/

Оглавление