МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.98-519.21

БОТИРОВ ГОЛИБЖОН ИСРОИЛОВИЧ

МЕРЫ ГИББСА И ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

(01.01.01 – математический анализ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Т а ш к е н т – 2010

Работа выполнена в Институте Математики и Информационных Технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук
Розиков Уткир Абдуллоевич

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук
Рахимов Абдугофир Абдумажидович

Кандидат физико-математических наук
Хатамов Носиржон Муйидинович

Ведущая организация – Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «__» __________ 2010 года в ___часов на заседании объединенного специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 100174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. _____.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «__» ____________ 2010г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д 067.02.03
кандидат физико-математических наук Ю.Х. Эшкабилов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Предельная мера Гиббса введена в работах Р.Л.Добрушина, О.Лэнфорда и Д.Рюэлля. Гауссовская мера, с точки зрения теории предельной меры Гиббса, обсуждалась в работах Ю.А.Розанова, Ф.Спитцера, Р.Л.Добрушина и С.Б. Шолсмана.

Единственность предельного распределения Гиббсса для гамильтониана βH при малых β доказана в книге Д.Рюэлля и в статьях Р.Л. Добрушина.

Мера Гиббса и моделирование Монте Карло – очень важные темы, представляющие интерес в физике, обработке образа и оптимизации. Есть довольно много причин изучать меры Гиббса, они естественно обобщают цепи Маркова на множестве вещественных чисел в произвольные дискретные множества индексов.

В ходе решения задач, связанных с мерами Гиббса, необходимо изучить плоский граф с вершинами в указанных точках.

Из всего вышесказанного следуют практическая ценность теории графов, в частности, теории деревьев, и важность изучения свойств систем, заданных на деревьях.

В данной работе изучаются q–компонентные модели и модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

На дереве Кэли обычно применяется метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории. Этот метод неприменим для моделей с большим радиусом взаимодействия. Поэтому естественным стало развитие контурного метода на графах типа дерева Кэли.

В диссертации изучаются основные состояния и меры Гиббса для многокомпонентных моделей. При этом используются контурный метод и методы анализа, теории мер и теории вероятностей.

Изложенное выше позволяет заключить, что тема исследования диссертационной работы является актуальной.

Степень изученности проблемы. Известно, что каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. При существовании более чем одной меры Гиббса говорят, что существуют фазовые переходы. Теория фазовых переходов содержится в работах С.А.Пирогова и Я.Г.Синая. Современная теория гиббсовских мер и теория фазовых переходов изложены в книгах «B.M. McCoy, Advanced Statistical Mechanics– Oxford University press. 2010», «M.Baus, C.F.Nejero, Equilibrium Statistical Physics – Springer. 2008», «C.Benik, Ising type Antiferromagnets – Springer. 2003», «G. Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, A spects of Ergodic, Qualitative and Statistical Theory of Motion – Springer. 2004.», «Jean Zinn-Justin, Phase Transitions and Renormalization Group– Oxford University press. 2007», « J.Palmer, Planar Ising Correlations–Prog. Math. Phys. Birkhduser. 2007», «P.Bremaud, Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues –Springer. 1999».

Модели на дереве Кэли изучены в работах П.М.Блехера, Н.Н.Ганиходжаева, К.Престона, У.А.Розикова, Ф.Спицера, Ю.Сухова и других.

В этих работах, используя метод, основанный на теории марковских случайных полей и реккурентных уравнениях этой теории, изучены предельные меры Гиббса некоторых моделей на дереве Кэли (Изинга, Поттса, SOS, Hard–Core, $\lambda-$моделей и т.п.), которые совпадают с трансляционно–инвариантными или периодическими мерами. Также в них исследованы некоторые классы непериодических гиббсовских мер.

Существование фазовых переходов для модели Изинга на дереве Кэли доказано независимо друг от друга Катсуром, Такизавом (1974) и Престоном (1974). В частности, Престон показал, что множество гиббсовских мер модели Изинга содержит не более трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Захари (1983) показал, что множество гиббсовских мер модели Изинга может состоять из единственной точкий или может быть бесконечным множеством. В 1985 году Захари обобщил этот результат для многих ферромагнитных и антиферромагнитных систем. Зависимость меры Гиббса от граничных условий для модели Изинга на дереве Кэли изучена в работах Хигучи (1977), Муре и Снелла (1979). Антиферромагнитная модель Изинга изучена в работе Спицера (1975) и Захари (1983). Модель Изинга на дереве Кэли обобщена в различных направлениях. С одной стороны, существует модель Поттса, которая обобщает модель Изинга увеличением множества значений спина. Модель Поттса на дереве Кэли изучена в работах Миямато (1982), Захари (1983), Перугги (1987). С другой строны, рассмотрены модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли в работах Мариза и др.(1985), У.А. Розикова (2006), Н.Н.Ганиходжаева, Х.Акина (2008).

Теория $p-$адических мер Гиббса на дереве Кэли развита в работах Ф.М. Мухаммедова, У.А. Розикова. При этом, в основном, доказано, что для $p-$адических моделей Изинга, Поттса, $\lambda-$моделей и некоторых обобщений этих моделей не существуют фазовые переходы (для $p-$адических мер Гиббса единственно). Также в этих работах были выделены те значения параметров, для которых существуют фазовые переходы. Так, например, для $p-$адических моделей Поттса с множеством спинов $\{1,2,\ldots,q\}$ существуют фазовые переходы тогда и только тогда, когда q кратно p.

Во многих выше указанных работах на дереве Кэли применяется метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории. Но в случае, когда радиус взаимодействия физической системы большой или число значений спина большое (многокомпонентная модель), метод, основанный на теории марковских случайных полей, не применим для описания предельных мер Гиббса. Поэтому естественным было развитие контурного метода на графах типа дерева Кэли. Контурный метод (теория Пирогова–Синая) на дереве Кэли развит в работах У.А.Розикова. Этим методом доказано существование различных мер Гиббса для достаточно широкого класса гамильтонианов на дереве Кэли. Также им изучено множество основных состояний этих моделей на дереве Кэли.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследования проводились по гранту №8-07 «Операторные и не ассоциативные алгебры, меры Гиббса, их алгоритмизация и приложения».

Цель исследования. Целью диссертационной работы является изучение основных состояний и мер Гиббса q–компонентных моделей и модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Задача исследования. В диссертационной работе рассматриваются задачи:

– построения контуров и основных состояний для q–компонентных моделей и для модели Поттса на дереве Кэли;

– существования мер Гиббса для q–компонентных моделей и для модели Поттса;

– определения достаточных условий существования периодических конфигураций, являющихся основными состояниями некоторой модели, обобщающей рассматриваемые модели.

Объект и предмет исследования. Меры Гиббса для q–компонентных моделей и модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями.

Методы исследования. В работе используются контурный метод, основанный на теории марковских случайных полей, методы теории Пирогова-Синая, теории меры и сжимающих отображений.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Для q–компонентных моделей на дереве Кэли построены контуры и основные состояния.
2. Для q–компонентных моделей контурным методом на дереве Кэли доказано существование, по крайней мере, q различных мер Гиббса при достаточно низких температурах.
3. Для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями построено множество периодических основных состояний. Показано, что для гамильтониана этой модели выполняется условие Пайерлса.
4. При достаточно низких температурах, для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и с тремя значениями спина доказано существование, по крайней мере, трех мер Гиббса.
5. Найдены достаточные условия на параметры одной модели с радиусом взаимодействия два, при которых существуют периодические конфигурации, являющиеся основными состояниями этой модели.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В качестве основных результатов можно отметить следующие:

- Построение основных состояний для q–компонентных моделей и модели Поттса на дереве Кэли.
- Доказательство контурным методом существования q мер Гиббса для q–компонентных моделей и модели Поттса на дереве Кэли при достаточно низких температурах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Основные научные результаты и методы, представленные в диссертации, могут найти свое применение при исследованиях в области теории мер, теории фазовых переходов, теории вероятностей, в теоретической и математической физике.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях гиббсовских мер на других моделях на дереве Кэли и при чтении специальных курсов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика АН РУз Ш.А. Аюпова в Институте математики и информационных технологий АН РУз (2008-2010гг.), на городском семинаре механико-математического факультета НУУз под руководством профессора В.И.Чилина (2010г.), на семинаре по специальности 01.01.01 – «Математический анализ» объединенного специализированного совета Д067.02.03 при НУУз им. М.Улугбека под руководством академика АН РУз А. Садуллаева (2010г.), на конференции «Ёш математикларнинг Янги теоремалари-2006» (Наманган, 2006г., 15-16-ноября), на конференциях «Ёш олимлар ва иқтидорли талабалар илмий–амалий анжумани» (Ташкент, 2005–2007гг.) на «School on stochastic geometry, the stochastic Loewner evolution and non-equilibrium growth processes» (7 – 18 июля 2008г., ICTP, Италия), на семинаре Department of Mathematics and Statistics, University of Hyderabad (2009г., Индия).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10], список которых приведен в конце автореферата. В работах [2], [5], [6] постановка задачи и некоторые идеи доказательств принадлежат У.А.Розикову.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 12 параграфов, заключения и списка использованной литературы, содержащего 107 наименований. Диссертация изложена на 86 страницах компьютерного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дано описание моделей на дереве Кэли, построены контуры и основные состояния для основных результатов работы и их связи с другими известными результатами.

В **первой главе** дан краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, а также изложены постановка задачи и проблемы, которые решены в диссертации.

Во **второй главе** для q–компонентных моделей контурным методом на дереве Кэли доказано существование, по крайней мере, q различных мер Гиббса при достаточно низких температурах.

Пусть $\Im^k=(V,L,i)$ – дерево Кэли, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно k+1 ребер, где V – множество вершин $\Im^k$, L – множество ребер, i- функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l\in L$ его концевые точки $x,y\in V$. Если $i(l)=\{x,y\}$, то вершины x и y называются ближайшими соседями и мы пишем в этом случае $l=<x,y>$.

Гамильтониан q–компонентной модели имеет вид

$$H(\sigma)=\sum_{<x,y>\in L}\lambda(\sigma(x),\sigma(y))+\sum_{x\in V}h(\sigma(x)), \tag{1}$$

где $\lambda(v_i,v_j)=\lambda_{ij}$, i,j=1,2, …, q – элементы некоторой симметрической матрицы порядка $q\times q$, $h(v_j)\equiv h_j\in R,\ j=1,2,\ldots,q$ и $\sigma\in\Omega=\{v_1,\ldots,v_q\}^V$.

Пусть $\Lambda\subset V$ – конечное множество, $\Lambda'=V\setminus\Lambda$ и $\omega_\Lambda=\{\omega(x),x\in\Lambda'\}$, $\sigma_\Lambda=\{\sigma(x),x\in V\}$ – данные конфигурации. Энергия конфигурации σ_Λ имеет вид

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda\,|\,\omega_{\Lambda'})=\sum_{\substack{<x,y>:\\ x,y\in\Lambda}}\lambda(\sigma(x),\sigma(y))+\sum_{\substack{<x,y>:\\ x\in\Lambda,y\in\Lambda'}}\lambda(\sigma(x),\omega(y))+\sum_{x\in\Lambda}h(\sigma(x)). \tag{2}$$

Пусть $\omega_{\Lambda'}^{(i)}\equiv i,\ i=1,\ldots,q,$ – постоянные конфигурации вне Λ. Для каждой конфигурации σ_Λ внутри Λ доопределим конфигурацию по всему дереву i-той постоянной конфигурацией, обозначим эту конфигурацию $\sigma_\Lambda^{(i)}$, и пусть $\Omega_\Lambda^{(i)}=\{\sigma_\Lambda^{(i)}\}$. Теперь мы опишем границу конфигурации $\sigma_\Lambda^{(i)}$.

Расстояние $d(x,y)=\min\{d:\exists x=x_0,x_1,\ldots,x_{d-1},x_d=y\in V$ такое, что $<x_0,x_1>,\ldots,<x_{d-1},x_d>\}$. Для фиксированного $x^0\in V$ обозначим

$$W_n=\{x\in V:d(x,x^0)=n\},\qquad V_n=\{x\in V:d(x,x^0)\le n\},$$
$$L_n=\{l=<x,y>\in L:x,y\in V_n\}.$$

Рассмотрим V_n и для данной конфигурации $\sigma_\Lambda^{(i)}\in\Omega_\Lambda^{(i)}$, $\Lambda\subset V_n$ обозначим $V_n^{(j)}\equiv V_n^{(j)}(\sigma_\Lambda^{(i)})=\{t\in V_n:\sigma_\Lambda^{(i)}(t)=v_j\},\ j=1,\ldots,q.$

Пусть $G^{n,j}=(V_n^{(j)},L_n^{(j)})$ – граф такой, что

$$L_n^{(j)}=\{l=<x,y>\in L:x,y\in V_n^{(j)}\},\ \ j=1,\ldots,q.$$

Очевидно, что для фиксированного n граф $G^{n,j}$ содержит конечное число $(=m)$ максимальных связанных подграфов $G_r^{n,j}$, т.е.

$$G^{n,j}=\{G_1^{n,j},\ldots,G_m^{n,j}\},\ G_r^{n,j}=(V_{n,r}^{(j)},L_{n,r}^{(j)}),\ r=1,\ldots,m.$$

Здесь $V_{n,r}^{(j)}$ – множество вершин и $L_{n,r}^{(j)}$ – множество ребер $G_r^{n,j}$.

Число элементов множества A обозначим $|A|$.

Два ребра $l_1, l_2 \in L$ $(l_1 \neq l_2)$ называются *ближайшими соседними* ребрами, если $|i(l_1) \cap i(l_2)| = 1$, в этом случае будем писать $< l_1, l_2 >_1$.

Для любой связанной компоненты $K \subset \Im^k$ обозначим через $E(K)$ множество ребер K и пусть

$$b(K) = \{l \in L \setminus E(K) : \exists l_1 \in E(K) \text{ } \textit{такое, что} \text{ } < l, l_1 >_1\}.$$

Определение 2.2.1. Ребро $l = < x, y > \in L_{n+1}$ называется *граничным ребром* конфигурации $\sigma_{V_n}^{(i)}$, если $\sigma_{V_n}^{(i)}(x) \neq \sigma_{V_n}^{(i)}(y)$. Множество граничных ребер конфигурации называется *реберной границей* $\Gamma(\sigma_{V_n}^{(i)}) \equiv \Gamma$ этой конфигурации.

Граница Γ состоит из $\frac{q(q-1)}{2}$ частей

$$\Gamma_\varepsilon(\sigma_{V_n}^{(i)}) \equiv \Gamma_\varepsilon, \ \varepsilon \in \{ij : i < j; i, j = 1, \ldots, q\} \equiv Q_q,$$

где, например, Γ_{12} – множество ребер $l = < x, y >$ с $\sigma(x) = v_1$ и $\sigma(y) = v_2$.

Конечные множества $b(G_r^{n,j}), j = 1,\ldots,q, r = 1,\ldots,m$ (для каждого ребра этого набора вместе с информацией отом, какую часть границы $\Gamma_\varepsilon, \varepsilon \in Q_q$ содержит это ребро) называются *подконтуром* границы Γ.

Множества $V_{n,r}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, q, j \neq i; r = 1, \ldots, m$ называются *интерьером* $\operatorname{Int} b(G_r^{n,j})$ подконтура $b(G_r^{n,j})$.

Набор ребер подконтура γ обозначим через $\operatorname{supp}\gamma$. Конфигурация $\sigma_{V_n}^{(i)}$ принимает одно и то же значение $v_j, j = 1,\ldots,q$ на всех вершинах связанного графа $G_r^{n,j}$. Это значение $v = v(G_r^{n,j})$ называется меткой подконтура и обозначается $v(\gamma)$, где $\gamma = b(G_r^{n,j})$. Подконтуры $\gamma_1, \gamma_2 \in \tau$ называются *смежными*, если $|\operatorname{supp}\gamma_1 \cap \operatorname{supp}\gamma_2| = 1$.

Определение 2.2.2. Совокупность подконтуров $A \subset \tau$ называется *связанной*, если для любых двух подконтуров $\gamma_1, \gamma_2 \in A$ существуют подконтуры $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_l = \gamma_2$ в множестве A такие, что для каждого $i = 1, \ldots, l-1$ подконтуры $\tilde{\gamma}_i$ и $\tilde{\gamma}_{i+1}$ являются смежными.

Определение 2.2.3. Любой максимальный связанный набор (компонент) подконтуров называется *контуром границы* Γ.

Определение 2.3.2. Периодическая конфигурация φ называется основным состоянием (для относительного гамильтониана H), если $H(\varphi) \leq H(\sigma)$ для любой конфигурации σ, которая совпадает с φ почти всюду.

Лемма 2.3.1. Для любой нормальной подгруппы F_k с индексом r, $r \le q$ группы G_k существуют, по крайней мере, $\frac{q!}{(q-r)!}$ F_k – периодических конфигураций.

В параграфе 2.4 мы предполагаем, что все основания состояний модели будут постоянными конфигурациями $\sigma^{(m)} = \{\sigma^{(m)}(x) = v_m, x \in V\}$, $m = 1,\ldots,q$.

Следующая лемма играет важную роль в параграфе 2.4.

Лемма 2.4.2. Пусть γ – фиксированный контур и

$$p_i(\gamma) = \frac{\sum\limits_{\sigma_n:\gamma\subset\Gamma} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n)\}}{\sum\limits_{\tilde{\sigma}_n} \exp\{-\beta H_n(\tilde{\sigma}_n)\}},$$

тогда $p_i(\gamma) \le \exp\{-\beta\lambda_0 \,|\, \gamma\,|\}$, где $\lambda_0 > 0$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – температура.

Основным результатом второй главы является следующая

Теорема 2.4.1. Для достаточно большого β есть, по крайней мере, q мер Гиббса для модели (1) на дереве Кэли порядка $k \ge 2$.

В **третьей главе** изучен класс периодических основных состояний модели Поттса с тремя значениями спина и с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два.

Гамильтониан модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{4}$$

где $J_1, J_2 \in R$, $\sigma(x) \in \{1,\ldots,q\}$.

В главе 3 мы строим множество основных состояний и контурным методом доказываем неединственность меры Гиббса для моделей (4).

Мы рассматриваем случай $k = 2$ и $q = 3$. Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in b:\\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{5}$$

где $J = (J_1, J_2) \in R^2$.

Легко видеть, что $U(\sigma_b) \in \{U_1, \ldots, U_6\}$ для любого σ_b, где

$$U_1 = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, \qquad U_2 = J_1 + J_2, \qquad U_3 = 3J_2,$$

$$U_4 = \frac{1}{2}J_1, \qquad U_5 = J_2, \qquad U_6 = \frac{1}{2}J_1 + J_2.$$

Определение 3.2.1. Конфигурация φ называется *основным состоянием* относительного гамильтониана H, если $U(\varphi_b) = min\{U_1, U_2, \ldots, U_6\}$ для любого $b \in M$.

Обозначим

$C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ и $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$, если $\sigma_b \in C_i, i = 1,2,\ldots,6$.

Основными результатами параграфа 3.2 являются следующие:

Теорема 3.2.1. 1) Для любого класса C_i, $i = 1,2,3,4$, и любой ограниченной конфигурации $\sigma_b \in C_i$ существует периодическая конфигурация φ (на дереве Кэли) с периодом не больше 6, такая, что $\varphi_{b'} \in C_i$ для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

2) Для любого $\sigma_b \in C_5$ существует конфигурация φ (вообще говоря, не являющаяся периодической) на дереве Кэли такая, что $\varphi_{b'} \in C_5$ для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

Обозначим $B = A_1 \cap A_3$, $B_0 = A_1 \cap A_2$, $B_1 = A_2 \cap A_4$, $B_2 = A_4 \cap A_5$, $B_3 = A_5 \cap A_3$, $\tilde{A}_1 = A_1 \setminus (B \cup B_0)$, $\tilde{A}_2 = A_2 \setminus (B_0 \cup B_1)$, $\tilde{A}_3 = A_3 \setminus (B \cup B_2)$, $\tilde{A}_4 = A_4 \setminus (B_1 \cup B_2)$, $\tilde{A}_5 = A_5 \setminus (B_2 \cup B_3)$.

Далее, обозначим через $GS(H)$ множество всех основных состояний и через $GS_p(H)$ – множество всех периодических основных состояний.

Теорема 3.2.2. i) Если $J = (0,0)$, то $GS(H) = \Omega$.

ii) 1) Если $J \in \tilde{A}_1$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)} : i = 1,2,3\}$.

2) Если $J \in \tilde{A}_2$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(ij)} : i, j = 1,2,3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

3) Если $J \in \tilde{A}_3$, то $GS_p(H) = \{\psi^{(ij)} : i, j = 1,2,3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

4) Если $J \in \tilde{A}_4$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(ijp)} : i, j, p = 1,2,3, \ i \neq j \neq p\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

5) Если $J \in \tilde{A}_5$, то $GS(H) \supset \{\psi^{(ijp)} : i, j, p = 1,2,3, i \neq j \neq p\}$, где конфигурации $\varphi^{(i)}$, $\varphi^{(ij)}$, $\psi^{(ij)}$, $\varphi^{(ijp)}$, $\psi^{(ijp)}$ определены для каждого случая в доказательстве Теоремы 3.2.1.

iii) 1) Если $J \in B_i \setminus \{(0,0)\}$, $i = 0,1,2,3$, то $|GS_p(H)| = 6$.

2) Если $J \in B \setminus \{(0,0)\}$, то $|GS_p(H)| = 6$.

Кроме того, если $J \in R^2 \setminus B$, то есть, по крайней мере, счетное множество непериодических основных состояний.

Замечание. Аналогичные результаты для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на Z^2 получены Кашаповым и Добрушиным, а на дереве Кэли – У.А.Розиковым.

Определение 3.2.3. Относительный гамильтониан H с множеством основных состояний $GS(H)$ удовлетворяет условию Пайерлса, если для любого $\varphi \in GS(H)$ и для всех конфигураций σ, совпадающих почти всюду с φ, имеет место

$$H(\sigma,\varphi) \geq \lambda |\partial(\sigma)|,$$

где λ является положительной постоянной, которая не зависит от σ, а $|\partial(\sigma)|$ – число единичных шаров в $\partial(\sigma)$.

Теорема 3.2.3. Если $J \neq (0,0)$, то условие Пайерлса выполняется.

Основным результатом третьей главы является следующая:

Теорема 3.3.1. Для всех достаточно больших β существует, по крайней мере, три меры Гиббса для модели Поттса при $q=3$ с конкурирющими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

Замечание. Аналогичный результат на Z^d получен Пироговым и Синаем, а в случае $J_2=0$ на дереве Кэли другим методом – Н.Н. Ганиходжаевым.

В работе У. Розикова введен обобщенный символ Кронекера как функция:

$$U(\sigma_A): \Omega_A \to \{|A|-1, |A|-2, \ldots, |A|-\min\{|A|, |\Phi|\}\},$$

определенная следующим образом: $U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|$, здесь $A \subset V$, и $|\sigma_A \cap \Phi|$– число различных значений $\sigma_A(x)$, $x \in A$. Например, если σ_A является постоянной конфигурацией, то $|\sigma_A \cap \Phi|=1$.

Отметим, что если |A|=2, скажем A={x,y}, то $U(\{\sigma(x),\sigma(y)\}) = \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$, где δ – символ Кронекера. Пусть $r \in N$ и $r' = \left[\frac{r+1}{2}\right]$, где $[a]$–целая часть a. Обозначим через M_r множество всех шаров $b_r(x) = \{y \in V : d(x,y) \leq r'\}$ с радиусом r', т.е. $M_r = \{b_r(x) : x \in V\}$.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M_r} U(\sigma_b), \tag{6}$$

где $J \in R$.

В параграфе 3.4 мы строим множество основных состояний для модели (6).

Теорема 3.4.1. а) Если $J>0$, то для любых $r \geq 1$ и $k \geq 2$ множество $GS(H)$ имеет вид $\{\sigma^{(i)}, i=1,2,\ldots,s\}$, где $\sigma^{(i)} \equiv i$, $\forall x \in V$.

б) Пусть $r=2$, $J<0$, $q \geq 2^m$ и $k \in \{2^{m-1}-1, \ldots, q-2\}$, $m=3,4,\ldots$. Тогда существует нормальный делитель F индекса 2^m, такой, что любая F–

периодическая конфигурация σ будет основным состоянием для гамильтониана H, т.е. $\sigma \in GS_p(H)$.

Теорема 3.4.2. Пусть $r=2$, тогда

$$|GS_p(H)| = \begin{cases} q, & если \quad J > 0, \\ C_q^{k+2}(k+2)!, & если \quad J < 0. \end{cases}$$

Замечание. Обобщенный символ Кронекра и модель (10) введены в работах Розикова и им при некоторых условиях контурным методом доказана неединственность мер Гиббса.

Диссертант выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.–м.н, профессору У.А. Розикову за постановку задач и полезные обсуждения при проведении настоящих исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На дереве Кэли применяется метод, основанный на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории. Но в случае, когда радиус взаимодействия физической системы большой или число значений спина большое (многокомпонентная модель), метод, основанный на теории марковских случайных полей, не применим для описания предельных мер Гиббса. Поэтому естественно развитие контурного метода на графах типа дерева Кэли. Нами контурным методом получены следующие результаты:

- Для q–компонентных моделей на дереве Кэли построены контуры и основные состояния.
- Для q–компонентных моделей контурным методом на дереве Кэли доказано существование, по крайней мере, q различных мер Гиббса при достаточно низких температурах.
- Для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями построено множество периодических основных состояний.
- Показано, что для гамильтониана модели Поттса выполняется условие Пайерлса.
- При достаточно низких температурах для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и с тремя значениями спина доказано существование, по крайней мере, трех мер Гиббса.
- Найдены достаточные условия на параметры одной модели с радиусом взаимодействия два, при которых существуют периодические конфигурации, являющиеся основными состояниями этой модели.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Ботиров Г.И., Гармонические функции на дереве Кэли // Ёш олимлар ва ик. тал. илмий ишлар туплами, 2–4 март 2005–Ташкент. – С. 121–125.
2. Botirov G.I., Rozikov U.A., On q–component models on Cayley tree: the general case // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – Trieste, 2006. P10006, 8 p.
3. Ботиров Г.И., Контуры на дереве Кэли // Ёш математикларнинг янги теоремалари, 15–16 ноябрь 2006–Наманган. Том I. – С. 12–14.
4. Ботиров Г.И., Неединственность меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Ик.талабалар Респ. Илмий–амалий анжумани тезислар туплами, 1–3 март 2007–Ташкент. Том I. – С. 11–14.
5. Ботиров Г.И., Розиков У.А., Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2007. – Т.153. – №1. – С. 86–97.
6. Botirov G.I., Rozikov U.A., Ground states of three state Potts model on Cayley tree of order two // Док.АН РУз. – Ташкент, 2008. – №1. – С. 8–13.
7. Ботиров Г.И., Основные состояния для модели с конечным радиусом взаимодействия // «Табиий фанларнинг долзарб муаммолари» Респ. Илмий–амалий анжумани тезислар туплами,15–16 сентябрь 2008–Самарканд. – С. 35–36.
8. Botirov G.I., Ground states of a model on Cayley tree // Abstracts of the third Congress of the world mathematical society of Turkic countries, June 30–July 4 2009 –Almaty. – V1. – p. 98.
9. Ботиров Г.И., Основные состояния для одной модели с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли // Док.АН РУз. –Ташкент, 2009. – № 3/4. – С. 11–14.
10. Ботиров Г.И., Периодические основные состояния одного Гамильтониана на дереве Кэли // Математические заметки. –Москва, 2010. – Т.87. – №4. – С. 624–627.

Физика-математика фанлари номзоди даражасига талабгор Ботиров Ғолибжон Исроиловичнинг 01.01.01-математик анализ ихтисослиги бўйича «Кэли дарахтидаги кўп компонентли моделлар учун асосий ҳолатлар ва Гиббс ўлчовлари» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: Кэли дарахти, Поттс модели, q компонентли модел, Гиббс ўлчови, даврий асосий ҳолат.

Тадқиқот объектлари: Кэли дарахтида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели ва q компонентли моделлар учун Гиббс ўлчовлари.

Ишнинг мақсади: Кэли дарахтида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Поттс модели ва q компонентли моделлар учун Гиббс ўлчовлари ва даврий асосий ҳолатлар ўрганиш.

Тадқиқот усуллари: диссертацияда Кэли дарахтида контурлар методи, ўлчовлар назарияси ва қисқартириб акслантириш, Пирогов-Синай назарияларидаги методлар.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

- Кэли дарахтида q–компонентли модель учун контурлар ва асосий ҳолатлар қурилган.
- Кэли дарахтида q–компонентли модел учун контур методи ёрдамида етарлича паст температурада q та турли Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган.
- Рақобатлашучи таъсирли Поттс модели учун даврий асосий ҳолатлар қурилган.
- Поттс моделининг гамильтониани учун Паейрлса шарти ўринли эканлиги кўрсатилган.
- Ўзаро рақобатлашучи спин қиймати 3 га тенг бўлган Поттса модели учун, ҳамда етарлича паст температура учун камида 3 та Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.
- Таъсир радиуси 2 га тенг бўлган моделнинг даврий асосий ҳолатлари мавжуд бўлиши учун, модел параметрларига етарли шартлар топилган.

Амалий аҳамияти: Олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга. Уларни статистик физикада қўллаш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: Ўлчовлар назарияси, фазовий ўтишлар назарияси, эҳтимоллар назарияси, назарий ва математик физика соҳаларида олиб борилаётган илмий изланишларда қўлланилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Ботирова Ғолибжона Исроиловича на тему «Меры Гиббса и основные состояния для многокомпонентных моделей на дереве Кэли» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01-математический анализ.

Ключевые слова: дерево Кэли, контур, модель Поттса, модель, q-компонента, основные состояния, мера Гиббса.

Объекты исследования: мера Гиббса для q-компонентной модели и модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Цель работы: в настоящей работе изучаются меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса и q-компонентной модели с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

Метод исследования: в диссертации использованы контурный метод на дереве Кэли, методы теории Пирогова-Синая, теории меры и сжимающих отображений.

Полученные результаты и их новизна: все полученные результаты являются новыми. Они состоят в следующем;

- Для q–компонентных моделей на дереве Кэли построены основные состояния.
- Для q–компонентных моделей контурным методом на дереве Кэли доказано существование, по крайней мере, q различных мер Гиббса при достаточно низких температурах.
- Для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями построено множество периодических основных состояний.
- Показано, что для гамильтониана модели Поттса выполняется условие Пайерлса.
- При достаточно низких температурах для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями и с тремя значениями спина доказано существование, по крайней мере, трех мер Гиббса.
- Найдены достаточные условия на параметры одной модели с радиусом взаимодействия два, при которых существуют периодические конфигурации, являющиеся основными состояниями этой модели.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют научно-теоретический характер. Они могут быть применены в статистической физике.

Область применения: Теория меры, теория фазовых переходов, теория вероятностей, теоретическая и математическая физика.

RESUME

Thesis of **Botirov Golibjon Isroilovich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics, specialty 01.01.01-mathematical analysis.

Key words: Cayley tree, contour, Potts model, Gibbs measure, periodic ground states.

Subject of inquiry: Gibbs measures for q-component model and Potts model with competing interactions on a Cayley tree.

Aim of the inquiry: We study Gibbs measures and periodic ground states of the Potts and q-component models with competing interactions on a Cayley tree.

Methods of the inquiry: Methods of contours on a Cayley tree, methods of Pirogov-Sinay theory, measure theory and contractive maps.

The results achieved and their novelty: The obtained results are new. They consist of the following:

- For q-component models on a Cayley tree contours and ground states are constructed.
- For q-component models, at sufficiently low temperatures, by a contour method on a Cayley tree existence of at least q different Gibbs measures is proved.
- For a Potts model with competing interactions on a Cayley tree the set of periodic ground states is constructed.
- It is shown that the Peierls's condition is satisfied for the Hamiltonian of the Potts model.
- At sufficiently low temperatures, for the Potts model with competing interactions and three spins existence of at least three Gibbs measures is proved.
- On parameters of a model with the interaction radius two a sufficient conditions are found under which the periodic configurations are the ground states of this model.

Practical value: the results of the dissertation work have theoretical character. They can be applied in problems of statistical physics.

Sphere of usage: results of the work can be used in measure theory, theory of phase transitions, theory of probability, theoretical and mathematical physcs.