

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ал-Хоразмий номли Урганч Давлат университети



Қўлёзма ҳукукида

Жуманиязов Низомжон Бахтиёрович

**“Чексиз зонали потенциалларни чекли зонали
потенциаллар билан яқинлаштириш”**

Мутахассислик: 5А 460102 – «Дифференциал тенгламалар»

ДИССЕРТАЦИЯ

"Математика магистри" академик даражасини олиш учун

Иш кўриб чиқилди ва ҳимояга рухсат берилди

«Математик физика ва амалий математика»

кафедраси мудири:

_____ ф.-м.ф.н., доц. Аллаберганов О.У.

«__» _____ 2009 й.

Илмий раҳбар:

_____ ф.-м.ф.н., доц. Бабажанов Б.А

Илмий консультант:

_____ ф.-м.ф.н., доц. Яхшимуратов А.Б.

Урганч – 2009

М У Н Д А Р И Ж А

Кириш	3
I-БОБ. Чекли зонали потенциаллар.	
1-§. Бутун ўқда берилган Штрум Лиувилл масаласи хакида баъзи маълумотлар.....	8
2-§. Бутун ўқда берилган Штрум Лиувилл тескари масаласи ечилиши учун етарли шартлар.....	12
3-§. Чекли зонали потенциаллар ҳақида айрим маълумотлар.....	15
II-БОБ. Чексиз зонали потенциаллар.	
1-§. Чексиз зонали потенциалли Штрум-Лиувилл тескари масаласи.....	23
2-§.Чексиз зонали потенциалларни чекли зонали потециаллар билан якинлаштириш.....	29
3-§. Чексиз зонали потенциалнинг аналитиклиги	35
Фойдаланилган адабиётлар.....	37

Кириш

Штурм-Лиувилл оператори деб аталадиган қуйидаги

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in R^1$$

оператор математикада ҳам, физикада ҳам кенг қўламда қўлланилади. Одатда $q(x)$ функцияга Штурм-Лиувилл операторининг потенциали дейилади.

Берилган потенциал буйича Штурм-Лиувилл операторининг спектрал характеристикаларини топиш масаласига спектрал анализнинг тугри масаласи дейилади, аксинча, спектрал характеристикалар буйича Штурм-Лиувилл операторини тиклаш масаласига спектрал анализнинг тескари масаласи дейилади. Турли хил чегаравий шартлардаги спектрлар, спектрал функция, сочилиш назариясининг берилганлари ва шунга ухшаш характеристикалар спектрал характеристикалар бўла олиши мумкин.

Тескари спектрал масалаларни ўрганиш XX аср бошларида бошланган бўлиб, бу йўналишнинг ривожига муҳим туртки бўлган илк натижа 1929 йилда В.А. Амбарцумян[1] томонидан олинган: Амбарцумяннинг бу натижаси муҳим эканлигига биринчи бўлиб швед математиги Г.Борг эътибор берди. Умуман олганда Штурм-Лиувилл операторини битта спектр ягона равишда аниқлай олмаслигини ва Амбарцумян натижаси умумий қоидадан истисно эканини кўрсатди. У 1945 йилда иккита чегаравий шартга мос келадиган спектрлар Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исботлади. Борг[13] ушбу ишида тенгламани иккита спектр ёрдамида қуриш алгоритмини ҳам берди, аммо λ_n ва μ_n сонлар спектр бўладиган Штурм-Лиувилл оператори мавжуд бўлсин деб фараз қилди. Боргнинг бу ишидан кейин тескари масалалар соҳасида муҳим изланишлар Левинсон[15] томонидан олиб борилди ва бир қанча натижалар қўлга киритилди.

Тескари масалалар назариясида яна бир муҳим қадам 1950 йилда

В.А.Марченко томонидан қўйилди. У биринчи бўлиб алмаштириш операторини тескари спектрал масалаларни ўрганишга тадбиқ қилди ва спектрал функция Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исбот қилишга мувоффақ бўлди.

В.А.Марченко ягоналик теоремаси эълон қилингандан кейин спектрал функция бўйича Штурм-Лиувилл операторини тиклаш масаласи долзарб бўлди. Бу масала 1951 йилда И.М.Гельфанд ва Б.М. Левитан [4] томонидан ечилди. Сўнгра Б.М. Левитан ва М.Г. Гасымов [19] томонидан мукаммаллаштирилди.

Бу соҳанинг кейинги ривожига Л.А. Чудов [27] , В.А.Марченко [5], М.Г.Крейн [25], Ю.М. Березанский [22], И.М. Гельфанд, Б.М.Левитан, Л.Д.Фаддеев [20] ва бошқа олимлар ўзларининг улкан ҳиссаларини қўшдилар.

Чекли зонали потенциаллар биринчи марта хусусий ҳолда Н. И. Ахиезер [2] томонидан, умумий ҳолда А. Р. Итс, В. Б. Матвеев[6], С. П. Новиков[9] ва Б. А. Дубровинлар[8] томонидан ўрганилган.

Чексиз зонали потенциаллар эса 1982 йилда биринчи мартаба Б. М. Левитан[17] ишларида ўрганилган.

Ҳозирги кунда, бу соҳанинг квант физикасига, чизикли ва ночизикли хусусий ҳосилали тенгламалар назариясига, кристаллографияга, геолого-разведка масалаларига муҳим тадбиқлари топилганлиги боис бу мавзунинг долзарблиги янада ортди.

Диссертацияда олинган натижаларнинг қисқача баёни:

Ушбу магистрлик иши чексиз зонали потенциаллар учун қўйилган тескари масалаларни ечишга бағишланган бўлиб, 2 та бобдан иборат. I - бобда чекли зонали потенциаллар ҳақида зарур маълумотлар келтирилган. II - бобда асосий натижалар олинган. Қуйида олинган натижаларнинг қисқача баёнини келтирамиз:

Бутун ўқда $2N+1$ та нуқта берилган бўлсин:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \infty.$$

Спектри

$$E = \mathbb{R}^1 / \left\{ (-\infty; 0) \cup \bigcup_{k=1}^N (\lambda_k, \mu_k) \right\}$$

тўплам билан устма- уст тушадиган Штрум- Лиувилл операторини тузамиз ва натижада ҳосил бўлган Штрум- Лиувилл операторига чекли зонали потенциалли Штрум- Лиувилл оператори дейилади. Энди чексиз зонали Штрум- Лиувилл операторини курамиз:

Қуйидаги $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \dots$ кетма-кетлик ушбу

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = a_1 < \infty \quad (0.1)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\mu_n - \lambda_n) = a_2 < \infty \quad (0.2)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty, \quad \lambda_n = \underline{\underline{O(n^2)}}, n \rightarrow \infty \quad (0.3)$$

шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги бўлсин.

Ихтиёрий $\tilde{\xi}_n \in [\lambda_n, \mu_n], n=1,2,\dots$ сонлар ва $\tilde{\sigma}_n = \pm 1, n=1,2,\dots$ ишораларни оламиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$f_N(z) = z \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \frac{\mu_k - z}{\lambda_k},$$

$$g_N(z) = \prod_{k=1}^N \frac{\tilde{\xi}_k - z}{\lambda_k},$$

$$K_N(z) = q_N(z) \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{\sigma}_k \sqrt{-f_N(\tilde{\xi}_k)}}{q'_N(\tilde{\xi}_k)(z - \tilde{\xi}_k)},$$

$$h_N(z) = \frac{f_N(z) + K_N^2(z)}{g_N(z)}, \quad N=1, 2, \dots$$

(0.1), (0.2) ва (0.3) шартлар бажарилса,

$$\{f_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{g_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{K_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{h_N(z)\}_{N=1}^{\infty},$$

функциялар кетма – кетлиги комплекс текисликнинг ихтиёрий чегараланган соҳасида текис яқинлашувчи бўлади. Бу функциялар кетма-кетлигининг лимитларини мос равишда $f(z)$, $g(z)$, $k(z)$, $h(z)$ равишда белгилаймиз. Бу функциялар бутун аналитик функциялар бўлиб, ушбу

$$g(z)h(z) - k^2(z) = f(z)$$

айниятни қаноатлантиради. Бундан ташқари ушбу ёйилмалар ўринли:

$$f(z) = z \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \frac{\mu_k - z}{\lambda_k},$$

$$g(z) = \prod_{k=1}^N \frac{\tilde{\xi}_k - z}{\lambda_k},$$

$$h(z) = (z - \tilde{\tau}_0) \prod_{k=1}^N \frac{\tilde{\tau}_k - z}{\lambda_k},$$

бу ерда $\tilde{\tau}_0 \in [-\infty, 0]$, $\tilde{\tau}_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k=1, 2, \dots$

Ушбу (λ_n, μ_n) , $\tilde{\xi}_n \in [\lambda_n, \mu_n]$, $\tilde{\sigma}_n = \pm 1$, $n=1, 2, \dots, N$ спектрал берилганлар бўйича тескари масалани ечиб Штрум – Лиувилл

$$H_N y \equiv -y'' + q_N(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

операторининг чекли зонали потенциални $q_N(x)$ ни бир қийматли аниқлаймиз.

(0.1) шарт бажарилганда $\{q_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ функциялар кетма – кетлиги ҳақиқий ўқнинг ҳар бир чегараланган соҳасида қандайдир $q(x)$ - чегараланган функцияга текис яқинлашади. Шу йўл билин қурилган $q(x)$ - функцияга

Штрум – Лиувилл операторининг чексиз зонали потенциали дейилади.

Теорема (2.2.1.) $x(t)$ оркали чексиз зонали Штурм-Лиувилл операторига мос Дубровин тенгламалар системанинг, $x^{(N)}(t)$ оркали чекли зонали Штурм-Лиувилл операторига мос Дубровин тенгламалар системанинг ечимини белгилаймиз.. Ихтиёрий чекли (a, b) интервал учун шундай $C = C(a, b)$ мавжудки, бунда

$$\max_{t \in [a, b]} \|x(t) - x^{(N)}(t)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j).$$

ўринли.

Теорема (2.2.2). Ихтиёрий чекли (a, b) интервал учун шундай C мавжудки, бунда

$$\max_{t \in [a, b]} \|q(t) - q_N(t)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j).$$

$$\max_{t \in [a, b]} \|q'(t) - q'_N(t)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} (\mu_j - \lambda_j).$$

$$\max_{t \in [a, b]} \|q''(t) - q''_N(t)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (\mu_j - \lambda_j).$$

баҳолашлар ўринли.

Теорема (2.2.3). Агар $q(x)$ - чексиз зонали потенциалли Штрум – Лиувилл операторининг коэффиценти бўлиб, лакуналарининг узунлиги экспоненциал равишда камайса, яъни $\exists a > 0, b > 0$ ўзгармас сонлар топилиб, $\mu_n - \lambda_n < a \cdot e^{-bn}$, $n = \overline{1, \infty}$ бўлса, у ҳолда $q(x)$ - функция бутун уқда ҳақиқий аналитик функция бўлади.

I-боб. Чекли зонали потенциаллар.

1-§. Бутун ўқда берилган Штрум-Лиувилл масаласи хақида баъзи маълумотлар.

Қуйидаги Штрум-Лиувилл масаласини куриб чикамиз:

$$-y'' + q(x)y = zy \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1.1)$$

$\varphi(x, z)$ ва $\theta(x, z)$ функциялар оркали қуйидаги

$$\varphi'(0, z) = \theta(0, z) = 1$$

$$\varphi(0, z) = \theta'(0, z) = 0$$

бошланғич шартларни каноатлантирувчи (1.1) тенгламанинг ечимларини белгилаймиз. $\psi_1(x, z)$ ва $\psi_2(x, z)$ функциялар оркали (1.1) тенгламанинг Вейл ечимларини белгилаймиз. Одатда ушбу

$$\psi_1(x, z) = \theta(x, z) + m_1(z)\varphi(x, z) \in L^2(-\infty; 0)$$

$$\psi_2(x, z) = \theta(x, z) + m_2(z)\varphi(x, z) \in L^2(0; \infty)$$

шартни каноатлантирувчи $\psi_1(x, z)$ ва $\psi_2(x, z)$ функциялар (1.1.1) тенгламанинг Вейл ечимлари дейилади. Уларга мос $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функциялар Вейл-Титчмарш функциялари дейилади.

Лемма 1.11. $z \rightarrow i\infty$ да

$$m_1(z) = i\sqrt{z} + O(\sqrt{|z|})$$

$$m_2(z) = -i\sqrt{z} + O(\sqrt{|z|}) \quad (1.1.2)$$

бўлади.

Исбот. Исботни $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ ларнинг биттаси $m_2(z)$ учун кўрсатамиз. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$\chi_2(z) = \frac{1}{m_2(z)} \psi_2(z) = \varphi(x, z) + \eta_2(x, z)\theta(x, z)$$

$$\eta_2(z) = \frac{1}{m_2(z)}$$

$$\eta_2(z) = \frac{i}{\sqrt{z}} + o(1) \quad (1.1.2')$$

$\eta_2(z) = \frac{i}{\sqrt{z}} + o(1)$ ни (1.1.2) га эквивалент эканини кўрсатамиз. Қуйидаги

$$\int_0^{\infty} |\chi_2(x, z)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{|z - \lambda^2|} \quad \eta_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{z - \lambda} \quad (1.1.3)$$

тенгликлар бизга маълум. Бунда $\rho(\lambda)$ спектрал функция

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y \quad (0 \leq x < \infty \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

масаланинг спектрал функцияси. Шунингдек ...

$$\int_{-\infty}^0 d\rho(\lambda) < C_1 < \infty \quad (1.1.4)$$

баҳолаш ўринли ва $\lambda \rightarrow \infty$ да

$$\rho(\lambda) < C_2 \sqrt{\lambda} \quad (1.1.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда $C_1 = C_2 = \text{const}$. $z = iy$ бўлсин. (1.4) дан

$$\int_{-\infty}^0 \frac{d\rho(\lambda)}{|z - \lambda|} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\rho(\lambda)}{|z - \lambda|^2} = O\left(\frac{1}{y}\right) \quad (1.1.6)$$

ўринли бўлиши келб чиқади. (1.1.5) тенгсизликдан ва бўлаклар интеграллаш ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{|z - \lambda|} = \int_0^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} = -\frac{\rho(\lambda)}{y} + \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\rho(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + y^2)^3}} \leq -\frac{\rho(0)}{y} + C_2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sqrt{\lambda} d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + y^2)^3}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \quad (1.1.7)$$

(1.1.3), (1.1.6) ва (1.1.7) лардан $z \rightarrow i\infty$ да

$$\eta_2(z) = o(\sqrt{|z|}) \quad (1.1.8)$$

келиб чиқади. (1.1.3) тенгликнинг 2- дан фойдаланиб $z \rightarrow i\infty$ да

$$\sqrt{|z|^3} \int_0^{\infty} |\chi_2(x, z)|^2 dx = O(1) \quad (1.1.9)$$

ўринли бўлишини исботлаш мумкин.

Энди бизга маълум қуйидаги асимптотик формулалардан фойдаланамиз ($\text{Im } z > 0$, ε , $\arctg z < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, чекли ораликда ўзгаради):

$$\theta(x, z) = \frac{1}{2} e^{-i\sqrt{z}x} + O\left(\frac{e^{-i\sqrt{z}x}}{\sqrt{z}}\right)$$

$$\varphi(x, z) = -\frac{e^{-i\sqrt{z}x}}{2i\sqrt{z}} + O\left(\frac{e^{-i\sqrt{z}x}}{\sqrt{z}}\right)$$

Бу формулалардан ва (1.1.8) тенгликдан

$$z^{\frac{3}{4}} \chi_2(x, z) = \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} e^{-i\sqrt{z}x} \left(-\frac{i}{\sqrt{z}} + \eta_2(z) + O\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

тенглик келиб чиқади. Шунинг учун (1.1.9) тенглик ўринли бўлиши учун $z \rightarrow i\infty$ да

$$-\frac{i}{\sqrt{z}} + \eta_2(z) = o(1)$$

Асимптотик тенглик бажарилиши керак. Бундан эса (1.1.2') тенглик келиб чиқади.

Бизга қуйидаги Вейл теоремаси керак бўлади.[18, 26]

(1.1.1) кўринишдаги ҳар бир тенглама учун камида битта камаймайдиган

$$\begin{pmatrix} \xi(\lambda) & \eta(\lambda) \\ \eta(\lambda) & \zeta(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

матрица-функция мавжуд бўлиб ихтиёрий силлик финит $f(x)$ функция учун қуйидаги Фурье ёйилмаси ўринли:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda)\theta(x, \lambda)d\xi(\lambda) + [F(\lambda)\varphi(x, \lambda) + G(\lambda)\theta(x, \lambda)]d\eta(\lambda) + G(\lambda)\varphi(x, \lambda)\zeta(\lambda)\}$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta(x, \lambda)dx, \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x, \lambda)dx \quad (1.1.11)$$

Спектрал матрица функция элементлари Вейл-Титчмарш функциялари оркали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\xi(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} -\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{m_1(x+iy) - m_2(x+iy)} \right\} dx$$

$$\eta(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} -\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \frac{m_1(x+iy) + m_2(x+iy)}{m_1(x+iy) - m_2(x+iy)} \right\} dx$$

$$\zeta(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} -\operatorname{Im} \left\{ \frac{m_1(x+iy)m_2(x+iy)}{m_1(x+iy) - m_2(x+iy)} \right\} dx \quad (1.1.12)$$

(1.1.12) формулалар ва Стильтес алмаштиришидан қуйидагилар келиб

чилади:

$$M_{11}(z) \stackrel{\text{н.д.}}{=} \frac{1}{m_1(z) - m_2(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta(\lambda)}{z - \lambda}$$

$$M_{12}(z) \stackrel{\text{н.д.}}{=} \frac{1}{2} \frac{m_1(z) + m_2(z)}{m_1(z) - m_2(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta(\lambda)}{z - \lambda}$$

$$M_{22}(z) \stackrel{\text{н.д.}}{=} \frac{m_1(z)m_2(z)}{m_1(z) - m_2(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\zeta(\lambda) + a$$

бу ерда a сони қуйидаги асимптотик формуладан аникланади:

$$M_{22}(z) = -\frac{1}{2}i\sqrt{z} + o(\sqrt{|z|})$$

аникланган $M_{11}(z)$, $M_{12}(z)$, $M_{22}(z)$ лар қуйидаги айниятни қаноатлантиради:

$$M_{11}(z)M_{22}(z) - M_{12}^2(z) = -\frac{1}{4} \quad (1.1.14)$$

(1.14) айниятни спектрал матрица функция элементлари учун зарурий шарт сифатида олиш мумкин. Кейинчалик (1.1.14) айният бутун ўқда берилган Штрум-Лиувилл тескари масаласини спектрал матрица функция ёрдамида ечишда етарли шарт бўлишини кўрсатамиз. (1.1.13) тенгламани $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функцияларга нисбатан ечиб

$$m_1(z) = -\frac{M_{22}(z)}{\frac{1}{2} - M_{12}(z)} = \frac{\frac{1}{2} + M_{12}(z)}{M_{11}(z)} \quad (1.1.15)$$

$$m_2(z) = \frac{M_{22}(z)}{\frac{1}{2} + M_{12}(z)} = \frac{-\frac{1}{2} + M_{12}(z)}{M_{11}(z)} \quad (1.1.16)$$

тенликларга эга бўламиз. (1.1.14) ва (1.1.15), (1.1.16) тенгликлар тескари масалаларни ечишда муҳим аҳамият касб этади.

2-§. Бутун ўқда берилган Штрум-Лиувилл тескари масаласи ечилиши учун старли шартлар.

Бутун ўқда берилган Штрум-Лиувилл тескари масаласини 1- марта спектрал матрица функция ёрдамида А.Ш. Блох [12] ўрганган. У тескари масаланинг асосий тенгламаларини келтириб чиқарган. Аммо унинг ишларида муҳим камчилик бўлиб, у Ф.С.Рофе-Бекетов [23] томонидан тузатилган. Бутун ўқда берилган тескари масалани спектрал матрица-функция ёрдамида ечиш қуйидаги формулаларга таянади:

$$\theta(x, z) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_{-x}^x K(x, z) \cos \sqrt{\lambda} y dy \quad (1.2.1)$$

$$\varphi(x, z) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x K(x, z) \frac{\sin \sqrt{\lambda} y}{\sqrt{\lambda}} dy \quad (1.2.2)$$

бу ерда $K(x, y)$ функция

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds, \quad K(x, -x) = 0. \quad (1.2.3)$$

масаланинг ечими эканлигини осонликча кўрсатиш мумкин. Шу билан биргаликда $K(x, y)$ функция ушбу

$$\text{sign} K(x, y) + F(x, y) + \int_{-x}^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad (0 \leq |y| \leq |x|) \quad (1.2.4)$$

интеграл тенгламани ҳам каноатлантиради. Бу ерда

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_3(x, y) \quad (1.2.5)$$

$$F_1(x, y) = \int_{-\infty}^0 \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} y d\xi(\lambda) + \int_0^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} y d\lambda \left\{ \xi(\lambda) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda} \right\} \quad (1.2.6)$$

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x+y)}{\sqrt{\lambda}} d\eta(\lambda)$$

$$F_3(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} y}{\lambda} d\lambda \left\{ \zeta(\lambda) - \frac{1}{3\pi} \lambda^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Фараз киламиз бизга ўсмайдиган (1.1.9) матрица- функция берилган бўлсин. (1.2.1) ва (1.2.2) формулалардан $F(x, y)$ функцияни аниқлаймиз ва (1.2.4) интеграл тенгламани куриб чиқамиз. А.Ш. Блох қуйидаги тасдиқларни исботлаган: $F(x, y)$ функция 2 марта дифференциалланувчи ва λ ўқнинг бирор чекли интервалида спектрал матрица функция чексиз сондаги усиш нуқталарига эга бўлсин. У холда (1.2.4) тенглама ягона ечимга эга бўлади. Ярим ўқда берилган тескари масаладан фаркли, бу тасдиқдан бутун ўқдаги тескари масала ечими келиб чикмайди. Чунки бутун ўқда берилган тескари масалада Блох назардан кочирган (1.2.3) шарт мавжуд. Айнан шу унинг ишининг хатоси эди. Бутун ўқда берилган тескари масаланинг спектрал матрица функция ёрдамидаги тулик ечимини Рофе-Бекетов топди. Рофе-Бекетов теоремасини соддарок бироқ, келгуси ишларимиз учун қўлай курунишда исботлаймиз.

Теорема: 1.2.1 Ўсмайдиган хакикий

$$\Re(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi(\lambda) & \eta(\lambda) \\ \eta(\lambda) & \zeta(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1.2.6)$$

матрица функция

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

тенгламанинг матрица функцияси бўлиб, $q(x)$ - хакикий функция, $(-\infty, 0]$ да r -тартибли ва $[0, \infty)$ да s -тартибли хосилаларга эга бўлиши учун қуйидаги шартларни каноатлантириши зарур ва етарли:

1) (1.1.3) формулалар билан аниқланган $M_{11}(z)$, $M_{12}(z)$, $M_{22}(z)$ функциялар $\text{Im}(z) > 0$ да (1.1.14) тенгликни каноатлантиради.

2) (1.1.15) ва (1.1.16) формулалар билан аниқланган $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функциялар учун

$$m_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\rho_1(\lambda) + a_1$$

$$m_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\rho_2(\lambda) + a_2$$

тенгликлар ўринли, бунда $m_1(z)$ a_1 ва a_2 лар (1.2) асимптотика билан

аникланади: $\rho_1(\lambda)$ функция $(-\infty, 0]$ да $y(-0)=0$ чегаравий шартни каноатлантирувчи ва $(-\infty, 0]$ да r - тартибли хосилага эга $q(x)$ потенциалли Штрум-Лиувилл масаласининг спектрал функцияси. $\rho_2(\lambda)$ функция - $y(0)=0$ чегаравий шартни ва $[0, \infty)$ да s - тартибли хосилаларга эга $q(x)$ потенциалли $[0, \infty)$ ярим ўқдаги Штрум-Лиувилл масаласининг спектрал функцияси.

Исбот. 1) ва 2) шартларнинг зарурийлигининг исботлари олдинги параграфдан келиб чиқади. Фараз килайлик А) ва В) шартлар бажарилсин. (1.1.15) ва (1.1.16) формулалардан $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ ларни аниклаймиз. $q(x)$ функцияни $m_1(z)$ оркали $(-\infty, 0]$ да, $m_2(z)$ оркали $[0, \infty)$ да аниклаймиз. Шу усул ёрдамида бутун ўқда аникланган $q(x)$ билан (1.1.1) тенгламани караймиз. Бу тенглама учун тузилишидан $m_1(z)$ $(-\infty, 0]$ даги Вейл-Титчмарш функцияси, $m_2(z)$ эса $[0, \infty)$ даги Вейл-Титчмарш функцияси. (1.1.14) тенгликка кўра $M_{11}(z), M_{12}(z), M_{22}(z)$ функциялар (1.1.13) формуларга асосан $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функциялар оркали ифодаланади. Шунинг учун (1.1.1) тенгламанинг спектрал-матрица функцияси юкоридаги спектрал матрица- функция билан устма-уст тушади.

3-§. Чекли зонали потенциаллар ҳақида айрим маълумотлар.

Ушбу параграфда чексиз зонали потенциалларни киритишда зарур бўладиган чекли зонали потенциаллар билан танишиб чиқамиз.

Бутун ўқда $2N+1$ та нукта берилган бўлсин:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \infty \quad (1.3.1)$$

Спектри

$$E = \mathbb{R}^1 \setminus \left\{ (-\infty; 0) \cup \bigcup_{k=1}^N (\lambda_k, \mu_k) \right\} \quad (1.3.2)$$

тўплам билан устма- уст тушадиган Штрум- Лиувилл операторини тузиш билан шуғулланамиз. Шу йўл билан қурилган Штрум- Лиувилл операторига чекли зонали потенциалли Штрум- Лиувилл оператори дейилади.

Қуйидаги кўпхадларни кўриб чиқамиз:

$$R(\lambda) = \lambda(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1) \dots (\lambda - \lambda_n)(\lambda - \mu_n) \quad (1.3.3)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) \dots (\lambda - \xi_n) \quad (1.3.4)$$

$$Q(\lambda) = P(\lambda) \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k \sqrt{-R(\xi_k)}}{(\lambda - \xi_k) P'(\xi_k)} \quad (1.3.5)$$

бу ерда $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ ихтиёрий сонлар ва $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, N}$ ихтиёрий ишоралар.

Лемма 1.3.1. Ихтиёрий сонлар $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ ва ихтиёрий ишоралар $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, N}$ учун

$$S(\lambda) = \frac{R(\lambda) + Q^2(\lambda)}{P(\lambda)} \quad (1.3.6)$$

рационал функция бош коэффициенти 1 га тенг бўлган $N+1$ чи даражали кўпхад бўлиб, ҳар бир $[\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ кесмада $S(\lambda)$ биттадан нолга эга.

Исбот. $R(\lambda) + Q^2(\lambda)$ кўпхад $P(\lambda)$ кўпхадга бўлинишини исботлаймиз. Бунинг учун

$$R(\xi_j) + Q^2(\xi_j) = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тенгликлар бажаралишини кўрсатиш етарли.

$$Q(\xi_j) = P(\lambda) \frac{\alpha_j \sqrt{-R(\xi_j)}}{(\lambda - \xi_j) P'(\xi_j)} \Big|_{\lambda=\xi_j} + P(0) \sum_{l \neq j}^N \frac{\alpha_l \sqrt{-R(\xi_l)}}{(\xi_j - \xi_k) P'(\xi_k)} = \alpha_j \sqrt{-R(\xi_j)} + 0 = \alpha_j \sqrt{-R(\xi_j)}.$$

Демак ҳақиқатан ҳам

$$R(\xi_j) + Q^2(\xi_j) = 0, \quad j = \overline{1, N}$$

Тенглик бажарилади. $S(\lambda)$ кўпхад эканлиги исълтланди.

$R(\lambda) + Q^2(\lambda)$ ва $P(\lambda)$ кўпхадларнинг бош ҳадлари λ^{2N+1} ва λ^N бўлгани учун $S(\lambda)$ нинг бош ҳади λ^{N+1} га тенг бўлади.

$\lambda \in E$ бўлса, $S(\lambda)P(\lambda) = R(\lambda) + Q^2(\lambda) > 0$ бўлиши равшан.

Спектрнинг ҳар бир бўлагида $P(\lambda)$ нинг ишораси ўзгармас бўлиб, кейинги бўлакка ўтганда бу ишора қарама – қарши ишорага ўзгаради.

$S(\lambda)P(\lambda) > 0$ эканлигидан ушбу хосса $S(\lambda)$ учун ҳам ўринли бўлади. Бундан $S(\lambda)$ кўпхад ҳар бир ёпиқ лакунада камида битта нолга эга эканлиги келиб чиқади. Лакуналар сони $N+1$ та бўлгани ва $S(\lambda)$ нинг даражаси ҳам $N+1$ бўлгани учун ҳар бир лакунада биттадан илдиз бўлади.

Лемма 1.3.1 исботланди.

$R(\lambda)$, $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $S(\lambda)$ кўпхадлар бўйича

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi(\lambda) & \eta(\lambda) \\ \eta(\lambda) & \zeta(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \quad (1.3.7)$$

матрица- функция тузиб оламиз, бу ерда

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{P(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases} \\ \frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda} &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{Q(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases} \\ \frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{S(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Теорема 1.3.1. $R(\lambda)$ матрица-функция бирор Штрум-Лиувилл операторининг матрица-функцияси бўлади.

Ушбу теоремани исботлаш учун Рофе-Бекетов теоремасининг шартлари бажаралишини кўрсатиш етарли. Бунинг учун аввало қуйидаги леммаларни исботлаймиз.

Лемма 1.3.2. $R(\lambda)$ матрица-функция учун Рофе-Бекетов теоремасидаги $M_{11}(z)$, $M_{12}(z)$, $M_{22}(z)$ функциялар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$M_{11}(z) = -\frac{1}{2} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}, \quad M_{12}(z) = -\frac{1}{2} \frac{Q(z)}{\sqrt{R(z)}}, \quad M_{22}(z) = -\frac{1}{2} \frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}}, \quad (3.10)$$

Исбот. $M_{11}(z)$, $M_{12}(z)$, $M_{22}(z)$ функциялар таърифига кўра

$$M_{11}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi(\lambda)}{z - \lambda}, \quad M_{12}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta(\lambda)}{z - \lambda},$$

$$M_{22}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{1 + \lambda^2} \right) d\zeta(\lambda) + a_1.$$

(бу ерда a_1 ўзгармас сон

$$M_{22}(z) = -\frac{1}{2} \sqrt{z} + o(1), \quad z \rightarrow +i\infty$$

муносабатдан аникланади.)

(1.3.8) га кўра

$$M_{11}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{E}} \frac{1}{z - \lambda} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}} d(\lambda).$$

Қуйидаги функцияни

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - \lambda} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}$$

қолдиқлар ҳақидаги Коши теоремасига асосан интеграллаймиз:

$$\int_{\gamma_R} f(\lambda) d(\lambda) + \int_{\mathbb{E}_\varepsilon^+} f(\lambda) d\lambda + \int_{\mathbb{E}_\varepsilon^-} f(\lambda) d(\lambda) = 2\pi i \operatorname{res}_z f(\lambda).$$

Ушбу тенгликда $\varepsilon \rightarrow +0$ ва $R \rightarrow +\infty$ ларда лимитга ўтамиз. Бунинг учун қуйидагиларни ҳисобга олиш керак.

$$f(\lambda) \approx \frac{\lambda^N}{\lambda \sqrt{\lambda^{2N+1}}} = \frac{\lambda^N}{\lambda \lambda^{N+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\gamma_R} f(\lambda) d(\lambda) = \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\varphi}) \operatorname{Re}^{i\varphi} d(\varphi) = O\left[\frac{1}{\sqrt{R}}\right] \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

$$f(\lambda)|_{E^-} = -f(\lambda)|_{E^+},$$

Иккинчи ва учинчи интегралларда интеграллаш тартиби қарама-қарши.

$$2 \int_E f(\lambda) d\lambda = 2\pi i \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}} \right),$$

$$\int_E f(\lambda) d(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}.$$

Демак

$$M_{11}(z) = -\frac{1}{2} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}.$$

Қолган тенгликлар ҳам худди шундай исботланади.

Лемма 1.3.2. исботланди.

Натижа: $R(\lambda)$ матрица-функция учун Рофе-Бекетов айнияти

$$M_{11}(z)M_{22} - M_{12}^2(z) = -\frac{1}{4}$$

бажарилади.

Ҳақиқатан ҳам, лемма 1.3.2 га кўра

$$M_{11}(z)M_{22} - M_{12}^2(z) = -\frac{1}{2} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}} \left(-\frac{1}{2} \frac{S(z)}{\sqrt{R(z)}} \right) - \left(-\frac{1}{2} \frac{Q(z)}{\sqrt{R(z)}} \right)^2 = -\frac{1}{4} \frac{P(z)S(z) - Q^2(z)}{R(z)} = -\frac{1}{4}$$

Лемма 1.3.3. $R(\lambda)$ матрица-функция учун Рофе-Бекетов теоремасидаги $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функциялар қуйидагича тасвирланади:

$$m_1(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} + i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)}, \quad m_1(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} - i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)} \quad (1.3.11)$$

$$\textbf{Исбот.} \quad m_1(z) \text{ функция тузилишига кўра } m_1(z) = \frac{-M_{22}(z)}{\frac{1}{2} - M_{12}(z)}.$$

(1.3.10) тенгликдан

$$m_1(z) = \frac{S(z)}{Q(z) - i\sqrt{R(z)}} = \frac{S(z)[Q(z) + i\sqrt{R(z)}]}{Q^2(z) + R(z)} = \frac{S(z)[Q(z) + i\sqrt{R(z)}]}{S(z)P(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)}$$

(1.3.11) келиб чиқади. $m_2(z)$ учун ҳам худди шундай исботланади.

Лемма 1.3.4. $R(\lambda)$ матрица-функция учун Рофе-Бекетов теоремасидаги $m_1(z)$ ва $m_2(z)$ функциялар қуйидагича тасвирланади:

$$m_1(z) = - \int_E \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\pi P(\lambda)} d\lambda + 2 \sum_{\alpha_k=1}^N \frac{\sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)} + \gamma,$$

$$m_2(z) = - \int_E \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\pi P(\lambda)} d\lambda - 2 \sum_{\alpha_k=-1}^N \frac{\sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)} - \gamma, \quad (1.3.12)$$

бу ерда γ z га боғлиқ эмас.

Исбот. Аввало $i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)}$ учун интеграл тасвир оламиз.

бунинг учун 1 - расмдаги контур бўйича

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)} d\lambda$$

функцияни интеграллаймиз. Коши теоремасидан фойдаланиб, лемма 1.3.2 исботида бажарилган амалларни бажариб,

$$i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)} = - \int_E \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\pi P(\lambda)} d\lambda + \sum_{\alpha_k=1}^N \frac{\sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)} + \gamma,$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $Q(z)$ кўпхаднинг тузилиши (1.3.6) га кўра

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k \sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)} = \sum_{\alpha_k=1}^N \frac{\sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)} - \sum_{\alpha_k=-1}^N \frac{\sqrt{-R(\xi_k)}}{(z - \xi_k) P'(\xi_k)}.$$

Лемма 1.3.3 дан (1.3.12) тенгликлар келиб чиқади.

Лемма 1.3.4. исботланди.

Изоҳ. Лемма 3.4 даги тасвирдан фойдаланиб Рофе-Бекетов теоремасидаги $\rho_1(\lambda)$ ва $\rho_2(\lambda)$ функцияларни тузиб олишимиз мумкин. $\rho_1(\lambda)$ ва $\rho_2(\lambda)$ функциялар $(-\infty, 0]$ ва $[0, \infty)$ ярим ўқларда $y(0)=0$ чегаравий шартда бирор Штрум-Лиувилл операторининг спектрал функциялари эканлигини кўрсатиш мумкин. Шунинг билан Рофе-Бекетов теоремасининг шартлари бажарилиши тўла кўрсатилди. Демак, теорема 3.1 исботланди.

Натижа. Шундай қилиб берилган

$$E = \Re^1 / \prod_{k=1}^N (\lambda_k, \mu_k)$$

тўплам, $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ сонлар ва $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, N}$ ишоралар учун ягона Штрум-Лиувилл оператори мавжуд бўлиб, унинг спектрал матрицаси $R(\lambda)$ функция билан устма-уст тушади. Ушбу операторнинг коэффиценти $q(x)$ га N - зонали потециал дейилади, у кўпинча $q_N(x)$ билан белгиланади.

$\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ сонлар ва $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, N}$ ишораларга N - зонали потециал $q_N(x)$ нинг спектрал параметрлари дейилади.

Энди аргументи силжитилган чекли зонали потенциал учун Вейл-Титчмарш функциясини топиш билан шуғулланамиз:

Ҳақиқий сонлар ўқида

$$(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \dots (\lambda_N, \mu_N)$$

интерваллар берилган бўлсин. Бундан ташқари $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = \overline{1, N}$ $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, N}$ сонлар ва ишоралар маълум бўлсин.

Улар ёрдамида

$$R(\lambda) = \lambda(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1) \dots (\lambda - \lambda_n)(\lambda - \mu_n)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) \dots (\lambda - \xi_n)$$

$$Q(\lambda) = P(\lambda) \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k \sqrt{-R(\xi_k)}}{(\lambda - \xi_k) P'(\xi_k)}$$

$$S(\lambda) = \frac{R(\lambda) + Q^2(\lambda)}{P(\lambda)}$$

кўпхадларни тузиб оламиз. Бу кўпхадлар бўйича

$$\Re(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi(\lambda) & \eta(\lambda) \\ \eta(\lambda) & \zeta(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

матрица функция тузиб оламиз. Бу ерда

$$\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{P(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

$$\frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{Q(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

$$\frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{S(\lambda)}{\pm \sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

бўлиб, илдиз олдидаги ишоралар $\xi'(\lambda) > 0$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ тенгсизлик ёрдамида аниқланади ва E нинг қолган қисмларида аналитик давом эттириш ёрдамида аниқланади. Юқорида матрица-функция учун Рофе-Бекетов теоремаси бажарилаишини кўрсатдик. Бундан ташқари унинг Вейл-Титчмарш функциялари

$$m_{1,2}(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \pm i \frac{\sqrt{R(z)}}{P(z)}$$

эканини исботлаган эдик. Бу ерда $m_1(z)$ функция қуйидаги масаланинг Вейл-Титчмарш функцияси

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad (-\infty, 0) \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

бўлади. Энди қуйидаги

$$\begin{aligned} -y'' + q(x+t)y &= \lambda y, \quad (-\infty, 0) \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

масаланинг Вейл-Титчмарш функциясини ҳисоблаймиз. У қуйидагича

бўлади:

$$m_1(\lambda, t) = \frac{Q(t, \lambda)}{P(t, \lambda)} + i \frac{\sqrt{R}}{P(t, \lambda)}$$

Бу ерда

$$P(t, \lambda) = P(\lambda)\theta^2(t, \lambda) + 2Q(\lambda)\theta(t, \lambda)\varphi(t, \lambda) + S(\lambda)\varphi^2(t, \lambda),$$

$$Q(t, \lambda) = P(\lambda)\theta(t, \lambda)\theta'(t, \lambda) + Q(\lambda)[\theta'(t, \lambda)\varphi(t, \lambda) + \varphi(t, \lambda)\theta'(t, \lambda)] + S(\lambda)\varphi(t, \lambda)\varphi'(t, \lambda),$$

$$S(t, \lambda) = P(\lambda)\theta'^2(t, \lambda) + 2Q(\lambda)\theta'(t, \lambda)\varphi'(t, \lambda) + S(\lambda)\varphi'^2(t, \lambda).$$

Қуйидаги лемма ва теоремаларни исботсиз келтирамыз.

Лемма 1.3. 5. $P(t, \lambda)$, $Q(t, \lambda)$, $S(t, \lambda)$ функциялар

$$P(t, \lambda)S(t, \lambda) - Q^2(t, \lambda) = R(\lambda)$$

тенгликни қаноатлантиради.

Лемма 1.3.6. $P(t, \lambda)$, $Q(t, \lambda)$, $S(t, \lambda)$ функциялар учун

$$\frac{dP(t, \lambda)}{dt} = 2Q(t, \lambda),$$

$$S(t, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{d^2 P(t, \lambda)}{dt^2} + [\lambda - q(t)]P(t, \lambda)$$

тенликлар ўринли бўлади.

Теорема 1.3.2. (Дубровин-Трубовиц). Штрум-Лиувилл операторининг чекли зонали потенциаллари $q_N(x+t)$ га мос келувчи спектрал параметрлар $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)$

қуйидаги дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради.

$$\frac{d\xi_j(t)}{dt} = \frac{2\alpha_j(t)\sqrt{-R(\xi_j(t))}}{\prod_{k \neq j}^N (\xi_j(t) - \xi_k(t))}, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Теорема 1.3.3. $q_N(x+t)$ N зонали потенциал бўлиб, унинг лакуналари (λ_k, μ_k) , $k=\overline{1, N}$ ва спектрал параметрлари

$$\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k], \quad k=\overline{1, N} \quad \sigma_k = \pm 1, \quad k=\overline{1, N}$$

бўлсин. У ҳолда қуйидаги айният ўринли.

$$q_N(t) = \sum_{j=1}^N (\lambda_j + \mu_j - 2\xi_j(t)).$$

II-боб. Чексиз зонали потенциаллар.

1-§. Чексиз зонали потенциалли Штрум-Лиувилл тескари масаласи.

Қуйидаги $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \dots$ кетма-кетлик ушбу

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = a_1 < \infty \quad (2.1.1)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\mu_n - \lambda_n) = a_2 < \infty \quad (2.1.2)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty, \quad \lambda_n = O(n^2), n \rightarrow \infty \quad (2.1.3)$$

шартларни қаноатлантирувчи хакикий сонлар кетма-кетлиги бўлсин.

Ихтиёрий $\tilde{\xi}_n \in [\lambda_n, \mu_n], n=1,2,\dots$ сонлар ва $\tilde{\sigma}_n = \pm 1, n=1,2,\dots$ ишораларни оламиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$f_N(z) = z \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \frac{\mu_k - z}{\lambda_k},$$

$$g_N(z) = \prod_{k=1}^N \frac{\tilde{\xi}_k - z}{\lambda_k},$$

$$K_N(z) = q_N(z) \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{\sigma}_k \sqrt{-f_N(\tilde{\xi}_k)}}{q'_N(\tilde{\xi}_k)(z - \tilde{\xi}_k)},$$

$$h_N(z) = \frac{f_N(z) + K_N^2(z)}{g_N(z)}, \quad N=1,2,\dots$$

(2.1.1), (2.1.2) ва (2.1.3) шартлар бажарилса,

$$\{f_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{g_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{K_N(z)\}_{N=1}^{\infty}, \{h_N(z)\}_{N=1}^{\infty},$$

функциялар кетма – кетлиги комплекс текисликнинг ихтиёрий чегараланган соҳасида текис яқинлашувчи бўлади. Бу функциялар кетма-кетлигининг лимитларини мос равишда $f(z)$, $g(z)$, $k(z)$, $h(z)$ равишда

белгилаймиз. Бу функциялар бутун аналитик функциялар бўлиб, ушбу

$$g(z)h(z)-k^2(z)=f(z)$$

айниятни қаноатлантиради. Бундан ташқари ушбу ёйилмалар ўринли:

$$f(z)=z\prod_{k=1}^N\frac{\lambda_k-z}{\lambda_k}\frac{\mu_k-z}{\lambda_k},$$

$$g(z)=\prod_{k=1}^N\frac{\tilde{\xi}_k-z}{\lambda_k},$$

$$h(z)=(z-\tilde{\tau}_0)\prod_{k=1}^N\frac{\tilde{\tau}_k-z}{\lambda_k},$$

бу ерда $\tilde{\tau}_0\in[-\infty,0]$, $\tilde{\tau}_k\in[\lambda_k,\mu_k]$, $k=1,2,\dots$

Ушбу (λ_n,μ_n) , $\tilde{\xi}_n\in[\lambda_n,\mu_n]$, $\tilde{\sigma}_n=\pm 1$, $n=1,2,\dots,N$ спектрал берилганлар бўйича тесқари масалани ечиб Штрум – Лиувилл

$$H_N y\equiv -y''+q_N(x)y=\lambda y, \quad x\in\mathbb{R}^1$$

операторининг чекли зонали потенциалли $q_N(x)$ ни бир қийматли аниқлаймиз.

(2.1.1) шарт бажарилганда $\{q_N(x)\}_{N=1}^\infty$ функциялар кетма – кетлиги ҳақиқий ўқнинг ҳар бир чегараланган соҳасида қандайдир $q(x)$ - чегараланган функцияга текис яқинлашади. Шу йўл билин қурилган $q(x)$ - функцияга Штрум – Лиувилл операторининг чексиз зонали потенциалли дейилади. Чексиз зонали потенциалли Штрум – Лиувилл оператори учун Б. А. Дубровин тенгламаси ва излар формуласи чекли зонали потенциалли Штрум – Лиувилл оператори учун I-бобда олинган Б. А. Дубровин тенгламаси ва излар формуласидан лимитга ўтиш ёрдамида келтириб чиқарилади. У қуйидаги

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=-2\sigma_n(t)\lambda_n\frac{\sqrt{-f(\xi_n)}}{\prod_{k\neq n}\frac{\xi_k-\xi_n}{\lambda_k}}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\sum_{j=1}^\infty[\lambda_j+\mu_j-2\xi_j]=q(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j^2 + \mu_j^2 - 2\xi_j^2(x)] = -\frac{1}{2} q''(x) + q(x)$$

кўринишга эга. Дубровин тенгламасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -2\sigma_j(t) [(\xi_j - \lambda_j)(\mu_j - \xi_j)]^{\frac{1}{2}} h_j(\xi_1, \xi_2, \dots), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (2.1.4)$$

бу ерда

$$h_j(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sqrt{\xi_j} \left\{ \prod_{k \neq j}^{\infty} \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \xi_j} \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right\}^{1/2} \quad (2.1.5)$$

бу системани $t=0$ бошланғич вақтда $\sigma_j(0) = \pm$, $\xi_j(0) = \xi_j$ (1.4') бошланғич шартлар билан қараймиз. (1.4) + (1.4') масаланинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги масаласи билан шуғулланамиз. Шу мақсадда қуйидагича алмаштириш бажарамиз:

$$\xi_j(t) = \lambda_j + (\mu_j - \lambda_j) \sin^2 x_j(t) \quad (2.1.6)$$

$$\frac{d\xi_j(t)}{dt} = 2(\mu_j - \lambda_j) \sin x_j(t) \cos x_j(t) \frac{dx_j(t)}{dt}, \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (2.1.7)$$

$$[(\xi_j - \lambda_j)(\mu_j - \xi_j)]^{\frac{1}{2}} = (\mu_j - \lambda_j) |\sin x_j(t) \cos x_j(t)| \quad (2.1.8)$$

$\xi_j(t)$ - ўзгарувчи лакуна четига бориб қайтганда $\sigma_j(t)$ ўз ишорасини ўзгартиради ва худди шунингдек $\sin x_j(t) \cdot \cos x_j(t)$ ҳам ўз ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун бу алмаштиришда (1) системанинг ўнг тарафидаги ишора ўзгармас бўлиб $\sigma_j(0)$ га тенг. Шундай қилиб (1.6) алмаширишдан кейин (1.4) система қуйидагича кўриниш олади:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = -\sigma_n(0) h_j(\xi_1, \xi_2, \dots) \quad (2.1.9)$$

(1.9) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = H_j(x_1, x_2, \dots) \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (2.1.10)$$

$$x_j(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_j(0) - \lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}} \quad (2.1.11)$$

(2.1.10) + (2.1.11) Коши масаласини ўрганиш учун ушбу Банах фазосини

киритиб оламиз:

$$K = \left\{ x \in K : x = (x_1, x_2, \dots), x_j \in \mathbb{R}^1, \|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j) |x_j| \right\};$$

Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$H(x) = (H_1(x_1), H_2(x_2), \dots)$$

Натижада (1.9) система қуйидагича кўринишни олади:

$$\frac{dx}{dt} = H(x) \quad (2.1.12)$$

Маълумки Банах фазосидаги Коши масаласи ягона ечимга эга бўлиши учун $H(x)$ функция Липшиц шартини қаноатлантириши етарли, яъни ихтиёрий $\forall (x, y) \in K$ учун $\|H(x) - H(y)\| \leq c \|x - y\|$ эканини кўрсатиш етарли.

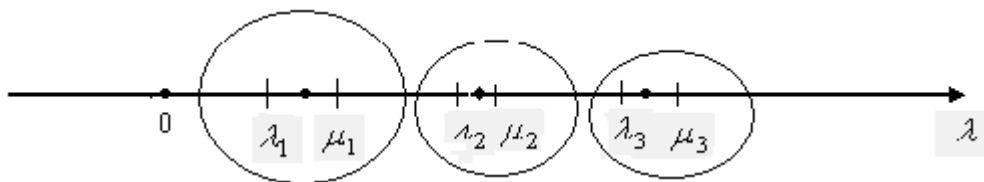
К фазода $H(x)$ учун Липшиц шarti ўринли эканини кўрсатамиз:

Шу мақсадда $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ тўпламини киритамиз (1- расм), бунда $D_k, (k=1, 2, \dots)$

лар ўзаро кесишмайдиган очик доиралар. D_k - доира λ - текисликда жойлашган бўлиб, ўз ичига ёпиқ $[\lambda_k, \mu_k]$ лакунани олган ва маркази $\frac{\lambda_k + \mu_k}{2}$ нуқтада, радиуси r_k етарлича катта $\|k\|$ лар учун

$$r_k = \frac{\mu_k - \lambda_k}{2} + \frac{1}{k^2} \quad (2.1.13)$$

формула билин аниқланади.



1- расм

Лемма 2.11. $\xi \in D$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги баҳолашлар ўринли:

$$1) h_n = \underline{O}(n), \quad (2.1.14)$$

$$2) \frac{\partial h_n}{\partial \xi_k} = \underline{O}(n), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.1.15)$$

Исбот.

$$|h_n(\xi)|^2 = \xi_n \left\{ \prod_{k \neq n}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| \left| \frac{\mu_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| \right\} = \xi_n \left\{ \prod_{k \neq n}^{\infty} \left| 1 + \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \left| 1 + \frac{\mu_k - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \right\} \leq \xi_n \left\{ \prod_{k \neq n}^{\infty} \left| 1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\xi_k - \xi_n} \right| \right\}^2$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)$ яқинлашувчи ва $\inf_{k \neq j} (\xi_k - \xi_j) > 0$ бўлгани учун,

$$|h_n(\xi)|^2 \leq \xi_n \text{const}, \quad \frac{\xi_n}{\lambda_n} \rightarrow 1 \text{ бўлгани учун, } |h_n(\xi)| \leq \underline{O}(n); \text{ бўлади.}$$

Лемма 2.1.2. $\forall (x, y) \in K$ учун $H(x)$ вектор функция Липшиц шартини қаноатлантиради, яъни

$$\|H(x) - H(y)\| \leq C|x - y|$$

тенгсизлик ўринли. Бунда C ўзгармас $x, y \in K$ ларга боғлиқ эмас.

Исбот. $\frac{\partial h_n}{\partial \xi_m}$ ҳосилани баҳолаймиз:

$m \neq n$ бўлсин.

$$\frac{\partial h_n^2}{\partial^2 \xi_m} = 2h_n \frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} = -2\xi_n \prod_{k \neq n} \frac{\lambda_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \cdot \frac{\mu_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \cdot \frac{(\lambda_m - \xi_n)(\mu_m - \xi_n)}{(\xi_m - \xi_n)^3} = -2 \frac{h_n^2}{\xi_m - \xi_n}$$

Шунга кўра $\frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} = -\frac{h_n}{\xi_k - \xi_n}$ бўлади. Лемма 1 га кўра

$$\left| \frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} \right| \leq C \cdot \sqrt{\lambda_n}, m \neq n; \quad \frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} = \underline{O}(n)$$

Энди $m = n$ бўлсин.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$f_{1,n} = \prod_{k \neq n}^{\infty} \frac{\lambda_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}, \quad f_{2,n} = \prod_{k \neq n}^{\infty} \frac{\mu_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}.$$

$$|f_{1,n}| = \left| \prod_{k \neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right) \right| \leq \prod_{k \neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{|\xi_k - \xi_n|} \right) \leq C$$

Шундай қилиб

$$\ln f_{1,n} = \sum_{k \neq n}^{\infty} \ln \frac{\lambda_k - \xi_n}{\xi_k - \xi_n},$$

бундан

$$\left| \frac{\partial f_{1,n}}{\partial \xi_n} \right| = \left| f_{1,n} \sum_{k \neq n}^{\infty} \ln \frac{\lambda_k - \xi_r}{(\lambda_k - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)} \right| \leq C$$

Худди шунга ўхшаш, $|f_{2,n}| \leq C$, $\left| \frac{\partial f_{2,n}}{\partial \xi_n} \right| \leq C$. Бўлардан фойдаланиб, ҳамда

$$h_n^2 = \xi_n \cdot f_{1,n} \cdot f_{2,n}$$

эканлигидан, қуйидагига эга бўламиз.

$$2h_n \frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} = f_{1,n} \cdot f_{2,n} + \xi_n \frac{\partial f_{1,n}}{\partial \xi_n} + \xi_n \cdot f_{1,n} \cdot \frac{\partial f_{2,n}}{\partial \xi_n}$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \xi_m} = \frac{(f_{1,n} \cdot f_{2,n})^{\frac{1}{2}}}{\xi_n^{\frac{1}{2}}} + \xi_n^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial f_{1,n}}{\partial \xi_n} \cdot \left(\frac{f_{2,n}}{f_{1,n}} \right)^{\frac{1}{2}} + f_{1,n} \cdot \frac{\partial f_{2,n}}{\partial \xi_n} \cdot \left(\frac{f_{1,n}}{f_{2,n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq C \cdot \sqrt{\lambda_n};$$

Демак,

$$\left| \frac{\partial h_n}{\partial \xi_n} \right| \leq C \cdot n; \quad \frac{\partial h_n}{\partial \xi_n} = O(n);$$

(1.14) ва (1.15) баҳолашлардан ва Лагранж теоремасидан

$$|H_n(x) - H_n(y)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\partial \overline{h_n}(\theta)}{\partial \xi_m} \right| \cdot (\mu_m - \lambda_m) \cdot |\sin^2 x_m - \sin^2 y_m| \leq$$

$$C \cdot \sqrt{\lambda_n} \cdot \frac{1}{2} (\mu_m - \lambda_m) \cdot |x_m - y_m| = C \cdot \sqrt{\lambda_j} \cdot \|x - y\|$$

n бўйича қўшсак, қуйидагига эга бўламиз.

$$|H(x) - H(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) |H_n(x) - H_n(y)| \leq C \|x - y\| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\mu_n - \lambda_n) = C \|x - y\|.$$

Лемма 2.1.2. исботланди.

2-§. Чексиз зонали потенциални чекли зонали потециал билан якинлаштириш

Бу параграфда $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \dots$ кетма-кетлик куйидаги шартларни каноатлантиради деб хисоблаймиз:

$$1) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\mu_j - \lambda_j) < \infty$$

$$2) \inf_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) > 0$$

Куйидаги чексиз сондаги Дубровин тенламалар системасини куриб чикамиз:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = 2[(\xi_j - \lambda_j)(\mu_j - \xi_j)]^{\frac{1}{2}} h_j(\xi_1, \xi_2, \dots), \quad \xi_{j0} = \xi_j(0) \quad (2.2.1)$$

$$h_j(\xi_1, \xi_2, \dots) = h_j(\xi) = \mu \sqrt{\xi_j} \left\{ \prod_{k \neq j}^{\infty} \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \xi_j} \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right\}^{1/2} \quad (2.2.2)$$

бу тенгламаларда ξ_j - хакикий узгарувчилар бўлиб, $\xi_j \in [\lambda_j, \mu_j]$ бўлади.

Лемма 2.2.1. Ихтиёрий $\xi_1, \xi_2, \dots$ кийматлар учун

$$|h_j(\xi_1, \xi_2, \dots)| \leq C \sqrt{\lambda_j} \quad (2.2.3)$$

бу ерда C - ўзгармас j -га боглик эмас.

Лемма 2.2.2. $\forall x, y \in X$ лар учун $H(x)$ вектор функция

$$\|H(x) - H(y)\| \leq C|x - y|,$$

Липшиц шартини каноатлантиради, бунда C ўзгармас $x, y \in X$ га боглик эмас.

Энди чекли зонали потенциалли Штрум-Лиувилл оператори учун Дубровин тенгламалар системасини кўриб чикамиз. У

$$\xi_j = \lambda_j + (\mu_j - \lambda_j) \sin^2(x_j) \quad (2.2.4)$$

алмаштиришдан кейин куйидагича

$$\frac{\partial x_j^{(N)}}{\partial t} = H_j^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.5)$$

кўринишга келади. Бу ерда

$$H_j^{(N)}(x) = h_j^{(N)} \left[\lambda_1 + (\mu_1 - \lambda_1) \sin^2 x_1, \lambda_2 + (\mu_2 - \lambda_2) \sin^2 x_2, \dots, \lambda_N + (\mu_N - \lambda_N) \sin^2 x_N \right] \quad (2.2.6)$$

$$h_j^{(N)}(\xi) = \pm \xi_j^{1/2} \left\{ \prod_{k \neq j}^N \frac{\lambda_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right\}^{1/2} \quad (2.2.7)$$

(2.2.5) га

$$\frac{\partial x_j^{(N)}}{\partial t} = H_j^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N, \dots), j = N+1, N+2, \dots$$

ни кўшиб чексиз системага айлантирамиз.

Лемма 2.2.3. $\forall x \in X$ учун

$$\|H(x) - H^{(N)}(x)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j).$$

ўринли бўладиган C константа мавжуд.

Исбот. $\xi_1, \xi_2, \dots$ лар учун $|h_j(\xi_1, \xi_2, \dots) - h_j^{(N)}(\xi_1, \xi_2, \dots)|$ айирмани

баҳолаймиз.

$j \leq N$ бўлсин.

$$\frac{h_j(\xi)}{h_j^{(N)}(\xi)} = \left\{ \prod_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right\}^{1/2} = \left\{ \prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right) \left(1 - \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right) \right\}^{1/2}$$

ифодани куриб чиқамиз. $x > 0$ учун $0 \leq \mu_k - \xi_k \leq \mu_k - \lambda_k, \ln(1+x) < x$ ва $k \neq j$ учун $\xi_k - \xi_j > \alpha > 0$, тенгсизликлардан фойдаланиб

$$1 \leq \prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right) \leq \exp \left\{ C \sum_{k=N+1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) \right\}. \quad (2.2.13)$$

га эга бўламиз.

$x > 0$ учун $0 \leq \mu_k - \xi_k \leq \mu_k - \lambda_k, \ln(1+x) < x$ ва $k \neq j$ учун

$\xi_k - \xi_j > \alpha > 0$, тенгсизликлардан фойдаланиб $x > 0$ учун

$0 \leq \xi_k - \lambda_k \leq \mu_k - \lambda_k, \xi_k - \xi_j \geq \alpha, k \neq j, \ln(1+x) < x$ ва $0 < x < 1$ учун

$\ln(1-x) > -\frac{x}{1-x}$ тенгсизликлардан фойдаланиб

$$\exp\left\{-C \sum_{k=N+1}^{\infty}(\mu_k - \lambda_k)\right\} \leq \prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi_k - \lambda_k}{\xi_k - \xi_j}\right) \leq \exp\left\{C \sum_{k=N+1}^{\infty}(\mu_k - \lambda_k)\right\}. \quad (2.2.14)$$

баҳолаш ўринли бўлишини осонликча кўрсатиш мумкин. (2.2.13) ва (2.2.14) тенгсизликлардан

$$\left| \frac{h_j(\xi)}{h_j^{(N)}(\xi)} - 1 \right| < C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j)$$

ни ҳосил киламиз. Демак, $h_j^{(N)}(\xi) = O(\sqrt{\lambda_j})$ экан. Охири баҳолашдан

$$|h_j(\xi) - h_j^{(N)}(\xi)| < C \sqrt{\lambda_j} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k). \quad (2.2.15)$$

$j > N$ учун $H_j^{(N)} = H_j$. ўринли. Шунинг учун

$$\begin{aligned} \|H(x) - H^{(N)}(x)\| &= \sum_{j=1}^N (\mu_j - \lambda_j) |h_j(\xi) - h_j^{(N)}(\xi)| \leq \\ &C \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda_j} (\mu_j - \lambda_j) \sum_{k=N+1}^N (\mu_k - \lambda_k) \leq C' \sum_{k=N+1}^N (\mu_k - \lambda_k), \end{aligned}$$

бўлади. Лемма исботланди.

Лемма 2.2.4 X Банах фазосида иккита

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y), y|_{t=0} = y_0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi(z), z|_{t=0} = z_0.$$

Коши масаласи берилган бўлсин.

$\forall x \in X$ учун $\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$ ва $\forall x, y \in X$ учун $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$ лар ўринли бўлсин. Бу ерда C - ўзгармас. Шунингдек $\|y_0 - z_0\| \leq \varepsilon$ ҳам ўринли бўлсин.

У ҳолда ихтиёрий чекли (a, b) интервал учун мусбат C ни кўрсатиш мумкинки, $\forall t \in (a, b)$ учун

$$\|y(t) - z(t)\| \leq C\varepsilon \quad (2.2.18)$$

ўринли бўлади.

Исбот. (2.1.16) ва (2.1.13) тенгламаларни интеграллаб, норма бўйича

баҳолаб

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|f(y) - \varphi(z)\| ds \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{t_0}^t \|f(y) - \varphi(z)\| ds \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t \|f(z) - \varphi(z)\| ds \right| \leq \varepsilon(1 + |t - t_0|) + C \left| \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\| ds \right|. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

га эга бўламиз. Агар $\|y(s) - z(s)\|$ норма $[t_0, t]$ интервалда t_0 нуктада узининг тах га эришса, у холда $\forall s \in [t_0, t]$ учун

$$\|y(s) - z(s)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \leq \varepsilon$$

ўринли бўлади. Шунинг учун (2.2.19) да $t \in (t_0, t]$ да

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \varepsilon(1 + 2|t - t_0|), \text{ га эга бўламиз. Бу эса леммани } (t_0, t)$$

интервал учун исботлайди.

Теорема 2.2.1. $x(t)$ оркали (2.2.5) системанинг, $x^{(N)}(t)$ оркали (2.2.12)-(2.2.12') ини белгилаймиз. Ихтиёрий чекли (a, b) интервал учун шундай $C = C(a, b)$ мавжудки, бунда

$$\max_{t \in [a, b]} \|x(t) - x^{(N)}(t)\| \leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j). \quad (2.2.20)$$

ўринли. (2.2.20) баҳолашдан ва излар формуласидан фойдаланиб $|q(t) - q_N(t)|$ ни баҳолаймиз.

Теорема 2.2.2. Ихтиёрий чекли (a, b) интервал учун шундай C мавжудки, бунда

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a, b]} \|q(t) - q_N(t)\| &\leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j), \\ \max_{t \in [a, b]} \|q'(t) - q'_N(t)\| &\leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} (\mu_j - \lambda_j), \\ \max_{t \in [a, b]} \|q''(t) - q''_N(t)\| &\leq C \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (\mu_j - \lambda_j). \end{aligned}$$

баҳолашлар ўринли.

Исбот. Қуйидаги

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(\lambda_n + \mu_n) - 2\xi_n(t)\}, \quad q_N(t) = \sum_{n=1}^N \{(\lambda_n + \mu_n) - 2\xi_n^{(N)}(t)\},$$

излар формуласидан

$$|q(t) - q_N(t)| \leq 2 \sum_{n=1}^N |\xi_n(t) - \xi_n^{(N)}(t)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |(\lambda_n + \mu_n) - 2\xi_n(t)| \leq$$

$$2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) |\sin^2(x_n(t) - \sin^2 x_n^{(N)}(t))| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) \leq 4 \|x(t) - x^{(N)}(t)\| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n)$$

баҳолаш келиб чиқади. (2.2.20) баҳолашдан фойдаланиб,

$$\max_{t \in [a, b]} \|q(t) - q_N(t)\| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n).$$

га эга бўламиз. Кейин

$$|q'(t) - q'_N(t)| \leq 2 \sum_{n=1}^N (\mu_n - \lambda_n) \left| \sin 2x_n \frac{dx_n}{dt} - \sin 2x_n^{(N)}(t) \frac{dx_n^{(N)}}{dt} \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) \left| \frac{dx_n}{dt} \right| \leq$$

$$2 \sum_{n=1}^N (\mu_n - \lambda_n) |H_n| |\sin 2x_n - \sin 2x_n^{(N)}(t)| + 2 \sum_{n=1}^N (\mu_n - \lambda_n) |H_n - H_n^{(N)}| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) |H_n| \leq$$

$$C \sum_{n=1}^N (\mu_n - \lambda_n) \sqrt{\lambda_n} |x_n - x_n^{(N)}| + C \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) + C \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\mu_n - \lambda_n) \leq C \sqrt{\lambda_N} \|x_n - x_n^{(N)}\| +$$

$$C \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\mu_n - \lambda_n) \leq \sqrt{\lambda_N} C \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) + C \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\mu_n - \lambda_n) \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\mu_n - \lambda_n)$$

га эга бўламиз.

$|q''(t) - q''_N(t)|$, ни баҳолаш учун излар формуласидан фойдаланамиз.

Ва бундан

$$q''(t) = -2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 + \lambda_n^2 - 2\xi_n^2(t)) \right\} + 2q^2(t).$$

ўринли эканлиги келиб чиқади.

$$|q^2(t) - q_N^2(t)| = |q(t) - q_N(t)| |q(t) + q_N(t)|$$

ва $q(t), q_N(t)$ лар текис чегараланганлигиб, ҳамда $|q(t) - q_N(t)|$ баҳолаш маълумлигидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu_n^2 + \lambda_n^2 - 2\xi_n^2(t) \right] - \left[\mu_n^2 + \lambda_n^2 - 2\xi_n^{(N)}(t) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu_n^2 + \lambda_n^2 - 2\xi_n^2(t) \right] = I_1 + I_2$$

айирмани баҳолаш етарли.

I_2 ифодани осонликча баҳолаш мумкин:

$$|I_2| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n^2 - \lambda_n^2) \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n (\mu_n - \lambda_n).$$

I_1 ифодани баҳолаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq 2 \sum_{n=1}^N \left(\xi_n^2(t) - \xi_n^{(N)2}(t) \right) \leq 4 \sum_{n=1}^N \mu_n \left| \xi_n - \xi_n^{(N)} \right| = \\
 &= 4 \sum_{n=1}^N \mu_n (\mu_n - \lambda_n) \left| \sin^2 x_n - \sin^2 x_n^{(N)} \right| \leq 8 \sum_{n=1}^N \mu_n (\mu_n - \lambda_n) \left| x_n - x_n^{(N)} \right| \leq \\
 &\leq 8 \mu_N \sum_{n=1}^N (\mu_n - \lambda_n) \left| x_n - x_n^{(N)} \right| = 8 \mu_N \left| x_n - x_n^{(N)} \right| \leq C \lambda_N \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n (\mu_n - \lambda_n)
 \end{aligned}$$

3-§. Чексиз зонали потенциалнинг аналитиклиги

Теорема. 2.2.3. Агар $q(x)$ - чексиз зонали потенциалли Штрум – Лиувилл операторининг коэффиценти бўлиб, лакуналарининг узунлиги экспоненциал равишда камайса, яъни $\exists a > 0, b > 0$ ўзгармас сонлар топилиб, $\mu_n - \lambda_n < a \cdot e^{-bn}, n = \overline{1, \infty}$ бўлса, у ҳолда $q(x)$ - функция бутун уқда ҳақиқий аналитик функция бўлади.

Исбот. Агар $|y_n| \leq \frac{b}{4}n, n = \overline{1, \infty}$ бўлса, у ҳолда

$$\xi_n = \lambda_n + (\mu_n - \lambda_n) \sin^2 z_n \in D_n, \quad n = \overline{1, \infty}$$

бўлишини кўрсатамиз. Бунда $z_n = x_n + iy_n, x = (x_1, x_2, \dots) \in K$. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu_n + \lambda_n}{2} - \xi_n \right| &= \left| \frac{\mu_n + \lambda_n}{2} - (\lambda_n + (\mu_n - \lambda_n) \sin^2 z_n) \right| = \left| \frac{\mu_n + \lambda_n}{2} - \lambda_n - (\mu_n - \lambda_n) \sin^2 z_n \right| = \\ &= \frac{1}{2} (\mu_n - \lambda_n) |1 - 2 \sin^2 z_n| = \left| \frac{1}{2} \cos 2z_n \right| (\mu_n - \lambda_n) \leq a e^{-bn} \frac{1}{2} e^{2|y_n|} \leq \frac{a}{2} e^{-\frac{b}{2}n} < r_n. \end{aligned}$$

Демак $\xi_n \in D_n$ экан.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи комплекс кетма –кетликлар тўплами F ни киритиб оламиз:

$$F = \left\{ z = (z_1, z_2, \dots) \mid z = x + iy, x \in K, |y_n| \leq \frac{b}{4}n, n = \overline{1, \infty} \right\}$$

Юқоридаги леммадаги каби F тўпланда $H(z)$ функция учун Липшиц шarti бажарилишини кўрсатиш мумкин.

Қуйидаги вектор-функциялар кетма- кетлигини кўриб чиқамиз

$$z_n^{(0)}(t) = x_n(0), \quad n = \overline{1, \infty}$$

$$z_n^{(1)}(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(z_1^{(0)}(s), z_2^{(0)}(s), \dots) ds$$

.....

$$z_n^{(m+1)}(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(z^{(m)}(s)) ds, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

бу ерда t - комплекс аргумент. $y_n^{(m+1)}(t)$ вектор-функция $z_n^{(m+1)}(t)$ вектор

функциянинг мавхум қисми бўлсин.

$$\left| y_n^{(m+1)}(t) \right| = \left| \operatorname{Im} \int_0^t H_n(z^{(m)}(s)) ds \right| \leq \left| \int_0^t H_n(z^{(m)}(s)) ds \right| \leq C |n| |t|.$$

$|t| \leq \frac{b}{4c}$ бўлганда $|y_n^{(m+1)}(t)| \leq \frac{b}{4} |n|$, $m=0,1,2,\dots$ бўлади.

Демак $|t| \leq \frac{b}{4c}$ лар учун $z^{(m)}(t)$ вектор функциялар кетма-кетлиги F тўпламга тегишли бўлади. $z^{(m)}(t)$ вектор функциялар кетма – кетлиги $|t| \leq \frac{b}{4c}$ доирада текис яқинлашувчи эканини Липшиц шарти ёрдамида кўрсатиш мумкин.

$z^{(m)}(t)$ вектор функция тузилишига кўра $|t| \leq \frac{b}{4c}$ доирада голоморф. Вейерштрасс теоремасига кўра лимитик функция $z(t)$ ҳам ушбу доирада голоморф бўлади. Бундан эса

$$\xi_n = \lambda_n + (\mu_n - \lambda_n) \sin^2 z_n$$

функциянинг $|t| \leq \frac{b}{4c}$ доирада голоморф эканлиги келиб чиқади. Ушбу

$$\tilde{q}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \mu_n - 2\xi_n(t))$$

каторнинг текис яқинлашувчи эканлигидан ҳамда унинг ҳадлари нол нуқтанинг атрофида голоморф эканлигидан унинг йиғиндиси $\tilde{q}(t)$ нинг голоморф эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқий t ларда бу қатор излар формуласи билан устма-уст тушади ва $q(t)$ - потенциалнинг нол нуқта атрофида голоморф эканлиги келиб чиқади. Агар биз $q(t)$ потенциалнинг ўрнига $q(t+t_0)$ потенциални қарасак ва унга мос келувчи лакуналар ҳам (μ_n, λ_n) бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда $q(t+t_0)$ потенциал $t=0$ нуқта атрофида голоморф бўлишини келтириб чиқарамиз. Бундан эса $q(t)$ потенциал $t=t_0$ нуқта атрофида голоморф бўлиши келиб чиқади.

Фойдаланилган адабиётлар.

- [1]. Амбарцумян В.А. // *Über eine Frege der Eigenwerttheore.-Zeitschr. Fur Physik*, 1929, Bd.53, s.690-695.
- [2]. Архиезер Н.И. «Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов». // *ДАН СССР*, 1961, Т.141, «№2, стр. 262-266.
- [3]. Hochstadt H., Goldberg W. «An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum». // *J.Math.Anal. and Appl.* 1985, 105, 206-221.
- [4]. Гельфанд И.М. и Левитан Б.М. //Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. - Изв. АН, матем.,1951,т.15,с.309-360.
- [5]. Марченко В.А., Островский И.В. «Характеристика спектра оператора Хилла». // *Мат. сб.* 1975, 97, вып. 4, стр. 540-606.
- [6]. Итс А.Р., Матвеев В.Б. «Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N - солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза». // *Теор. и мат. физика*, 1975, Т.23, №1, стр. 51-68.
- [7]. Trubowitz E. «The inverse problem for periodic potentials». // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1977, v. 30, p. 321-337.
- [8]. Дубровин Б.А. «Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов». // *Функ. анал. и прилож.*, 1975, Т.9, «№3, стр. 41-51.
- [9]. Новиков С.П. «Периодическая задача Кортевега – де Фриза I». // *Функ. анал. и прилож.* 1974, Т.8, №3, стр. 43-53, 54-66
- [10]. Левитан Б.М. «Обратные задачи Штурма – Лиувилля». М.: «Наука», 1984, стр. 240.
- [11]. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Москва, “Наука”, 1970, 672 стр.
- [12]. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 стр.
- [13]. Блох А.Ш. Об определения дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. - *ДАН СССР*, 1953, 42, № 2, с. 209-213.

- [14]. Gardner G., Creen I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Kortevég-de Vries equation.// Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1095-1098.
- [15]. Levinson N. //The inverse Sturm-Liouville problem.-Math.Tidsskr.B, 1949, p.25-30.
- [16]. Левитан Б.М. Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов.// Изв. АН СССР, сер. Матем. 1981, т. 45, № 2, с. 291-320.
- [17]. Левитан Б.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля для конечнозонных и бесконечнозонных потенциалов.// Труды Москов. Мат. Общества, 1982, т. 45, с. 3-36.
- [18]. Левитан Б.М. О замыкании множества конечнозонных потенциалов.// Мат. сб., 1984, 123. (165), № 1, с. 69-91.
- [19]. Левитан Б.М. и Гасымов М.Г.// Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.-УМН. 1964,т.19,№2,с.3-63.
- [20]. Фаддеев Л.Д. // Обратная задача квантовой теории рассеяния. УМН, 1959, т.14,№4,с. 57-119.
- [21]. Левитан Б. М. О разрешимости обратной задачи Штурма-Лиувилля на всей прямой. – ДАН, 1977, 234, № 1, 22-25.
- [22]. Березанский Ю.М. // О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шрёдингера.-Труды Моск. мат. об-ва, 1958,т.7, №3.
- [23]. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям. Т. 1. М., ИЛ, 1960.
- [24]. Рофе-Бекетов Ф.С. Спектральная матрица и обратная задача Штурма-Лиувилля на всей оси. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1967, № 4, с. 189-197.
- [25]. Крейн М.Г./ Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. ДАН 1951.
- [26]. Lax P. Periodic solutions of the KdV equations. – Comm. Pure Appl. Math., 1975, 28, стр. 141-188.
- [27]. Чудов Л.А./Обратная задача Штурма-Лиувилля. Мат.1949.