АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.946

Мамедов Кудрат Алломович

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Т а ш к е н т – 2010

Работа выполнена на кафедре «Математическая физика и прикладная математика» Ургенчского государственного университета имени Аль-Хорезми.

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, профессор **Хасанов Акназар Бекдурдиевич**
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор **Халмухамедов Алимджан Рахимович**
	Кандидат физико-математических наук, доцент **Аманов Джумаклыч**
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» ____________ 2010 года в ___ часов на заседании специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз. по адресу: 100125, г.Ташкент, ул. Дўрмон йўли, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «____»_________________2010 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д 015.17.01,
кандидат физико–математических наук А.А.Заитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В течение последних тридцати лет был развит новый метод решения нелинейных эволюционных уравнений математической физики – метод обратной задачи (МОЗ).

Впервые в 1967 году Гарднеру, Грину, Крускалу и Миуре (ГГКМ) удалось интегрировать задачу Коши для нелинейного эволюционного уравнения Кортевега - де Фриза (КдФ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R^1, \ t > 0, \tag{1}$$

с помощью обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)\, y \equiv \kappa^2 y, \quad x \in R^1.$$

Вывод уравнения (1) принадлежит (1895 г.) голландским ученым Д.Д.Кортевегу и Г.Де Фризу.

Отметим, что обратная задача теории рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Л.Д.Фаддеева, Б.М.Левитана, В.А.Марченко, П.Дейфта - Е.Трубовица и др.

Приведем несколько примеров нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи: нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0; \tag{2}$$

модифицированное уравнение Кортевега- де Фриза (мКдФ$_\pm$)

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0; \tag{3}$$

уравнение синус-Гордона (СГ)

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u. \tag{4}$$

Применение метода обратной задачи для уравнений (2)-(4), опирается на обратную задачу теории рассеяния для оператора Дирака

$$L = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & q(x) \\ r(x) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}, \quad x \in R^1.$$

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах М.Г.Гасымова, Б.М.Левитана, В.Е.Захарова, А.Б.Шабата, И.С.Фролова, Л.П.Нижника, Фам Лой Ву, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева, М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла, Х.Сигура, А.Б.Хасанова, Г.У.Уразбоева и др.

Настоящая диссертация посвящена интегрированию нелинейного эволюционного уравнения мКдФ$_+$ с различными самосогласованными источниками в классе «быстроубывающих» функций. При этом рассматривается случаи, когда соответствующий несамосопряжённый оператор Дирака имеет простые и кратные собственные значения.

Впервые уравнение мКдФ$_+$ без источника было интегрировано японским математиком М.Вадати.

Степень изученности проблемы. В ходе попытки построить более широкий класс интегрируемых систем, в работе М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла и Х.Сигура, стала ясна важность квадратов собственных функций, в задачах на собственные значения для оператора Дирака. В работах В.К.Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния были проинтегрированы уравнения КдФ с самосогласованным источником, в классе «быстроубывающих» функций. Самосогласованность источника понимается в том смысле, что правая часть рассматриваемого эволюционного уравнения является комбинацией квадратов собственных функций соответствующей спектральной задачи.

Далее нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованным источником изучались в работах Da-jun Zhang, Y.B.Zeng, W.X.Ma, R.L.Lin, D.Y.Chen. Однако, при наличии кратных собственных значений несамосопряжённого оператора Дирака методы, применённые Da-jun Zhang, Y.B.Zeng, W.X.Ma, R.L.Lin, D.Y.Chen, не пригодны для интегрирования нелинейного эволюционного уравнения.

Отметим, что в работах А.Б.Хасанова и Г.У.Уразбоева интегрировано уравнение синус-Гордона при наличии кратных собственных значений соответствующей спектральной задачи. В этой диссертации развитый А.Б.Хасановым и Г.У.Уразбоевым метод применяется для интегрирования нелинейного уравнения мКдФ$_+$ с различными самосогласованными источниками.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Ургенчского государственного университета имени Аль-Хорезми (протокол №5 от 16 января 2003г.) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры «Математическая физика и прикладная математика» УрГУ.

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертации является вывод эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с источниками, в классе быстроубывающих функций.

Задачи исследования. Основные задачи, решаемые в данной диссертации следующие:

- изучение динамики изменения по t спектральных характеристик оператора Дирака с простыми собственными значениями, с потенциалом, являющимся решением уравнения мКдФ$_+$ с источником, в классе «быстроубывающих» функций;
- определение эволюции данных рассеяния несамосопряжённого оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником, в случае движущихся собственных значений;
- вывод аналога уравнений ГГКМ, описывающих эволюцию данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с кратными

собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником.

Объект и предмет исследования. Интегрирование уравнения мКдФ$_+$ с различными самосогласованными источниками в классе «быстроубывающих» функций с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, функционального анализа, теории функций комплексных переменных, спектральной теории дифференциальных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

– выведена динамика изменения по t спектральных характеристик оператора Дирака, с потенциалом, являющимся решением уравнения мКдФ$_+$ с источником в классе «быстроубывающих» функций;

– определена эволюция данных рассеяния для оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником, в случае движущихся собственных значений;

– получен аналог уравнений ГГКМ, описывающих эволюцию данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованными различными источниками.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Найдены уравнения динамики изменения по времени данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, с потенциалом, являющимся решением уравнения мКдФ$_+$ с источником в классе «быстроубывающих» функций.

2. Выведены уравнения эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником, в случае движущихся собственных значений.

3. Получен аналог уравнений ГГКМ, описывающих эволюцию данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованными различными источниками.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Полученные результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации систематически докладывались на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов и их приложения» Ургенчского государственного университета (руководитель: проф. А.Б.Хасанов); на республиканском семинаре по дифференциальным уравнениям «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных» Института математики и информационных технологий АН РУз (руководители: академики АН РУз М.С.Салахитдинов и Т.Д.Джураев); на семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» Национального университета Узбекистана (руководитель: академик АН РУз Ш.А.Алимов); на международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационных технологий», Ташкент, 18-24 апреля 2005 года; на республиканской научной конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа», Нукус, 25-27 июня 2006 года; на международной конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», посвящённой 1000-летнему юбилею Хорезмской академии Маьмуна и 90-летию Национального университета Узбекистана, Ургенч, 11-15 мая 2008 года; на традиционных научных конференциях преподавателей УрГУ (2002-2009 гг.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата. В работе [1] постановка задач принадлежит А.Б.Хасанову, идея доказательства основной теоремы С.С.Содикову, техническая реализация К.А.Мамедову. В работе [8] с А.Б.Хасановым, А.Б.Хасанову принадлежит постановка задачи, решение задачи принадлежит К.А.Мамедову. В работе [3] Г.У.Уразбоеву принадлежит постановка задачи, решение задачи принадлежит К.А.Мамедову. Работы [4,6,7] принадлежат автору данной диссертации. В работах [2,5] автору данной диссертации принадлежат постановки задач и идея доказательств соответствующих теорем, А.А.Рейимберганову - техническая реализация. В работе [9] автору данной диссертации принадлежит постановка задачи и идея доказательств соответствующих теорем, М.М.Рузметову - техническая реализация.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Параграфы, теоремы, леммы, определения и формулы занумерованы двумя цифрами, первая из которых указывает номер главы. В конце приведен список литературы из 77 наименований. Объем диссертации 97 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации посвящена применению метода обратной задачи рассеяния для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе «быстроубывающих» функций.

В первом параграфе приведены хорошо известные, необходимые для дальнейшего изложения, сведения о прямой и обратной задаче рассеяния для оператора Дирака с «быстроубывающим» потенциалом на всей оси.

Рассмотрим систему уравнений Дирака специального вида

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi\, v_1 = u(x) v_2 , \\ v_{2x} - i\xi\, v_2 = -u(x) v_1 , \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty) , \tag{5}$$

где $u(x)$ - действительная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u(x)| dx < \infty . \tag{6}$$

С помощью оператора

$$L = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

и вектор-функции $v = (v_1, v_2)^T$ систему (5) можно переписать в виде

$$L v = \xi v . \tag{7}$$

При условии (6) система уравнений (5) при $\operatorname{Im} \xi = 0$ обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \overline{\varphi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad x \to -\infty , \qquad \left.\begin{aligned} \psi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \overline{\psi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad x \to \infty . \tag{8}$$

(Отметим, что $\overline{\varphi}$ не является комплексным сопряжением к φ).

Для решений $\psi(x,\xi)$ и $\varphi(x,\xi)$ справедливы следующие интегральные представления

$$\psi(x,\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^{\infty} \mathbf{K}(x,s) e^{i\xi s} ds , \quad \varphi(x,\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} - \int_{-\infty}^{x} \mathrm{L}(x,s) e^{-i\xi s} ds , \tag{9}$$

где

$$\mathbf{K}(x,s) = \begin{pmatrix} K_1(x,s) \\ K_2(x,s) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}(x,s) = \begin{pmatrix} L_1(x,s) \\ L_2(x,s) \end{pmatrix}.$$

В представлениях (9) ядра $\mathbf{K}(x,s)$ и $\mathrm{L}(x,s)$ не зависят от ξ и связаны с $u(x)$ с помощью равенства

$$u(x) = -2K_1(x,x) = 2L_2(x,x) .$$

При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \overline{\varphi}\}$ и $\{\psi, \overline{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (5). Поэтому имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a(\xi)\overline{\psi} + b(\xi)\psi , \\ \overline{\varphi} &= -\overline{a}(\xi)\psi + \overline{b}(\xi)\overline{\psi} \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} \psi &= -a(\xi)\overline{\varphi} + \overline{b}(\xi)\varphi , \\ \overline{\psi} &= \overline{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\overline{\varphi} \end{aligned}\right\} , \tag{10}$$

где

$$a(\xi) = W\{\varphi, \psi\}, \quad b(\xi) = W\{\overline{\varphi}, \psi\}. \qquad (11)$$

Нетрудно видеть, что при $\xi \in R^1$ имеет место

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1, \quad \overline{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \overline{b}(\xi) = b(-\xi).$$

Коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$ являются непрерывными функциями при $\operatorname{Im}\xi = 0$ и удовлетворяют асимптотическим равенствам:

$$a(\xi) = 1 + \underline{\underline{O}}\left(|\xi|^{-1}\right), \qquad b(\xi) = \underline{\underline{O}}\left(|\xi|^{-1}\right), \qquad |\xi| \to \infty .$$

Более того, функция $a(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\xi > 0$ и обладает там асимптотикой

$$a(\xi) = 1 + \underline{\underline{O}}\left(|\xi|^{-1}\right), \qquad |\xi| \to \infty .$$

Вещественные нули функции $a(\xi)$ мы будем называть спектральными особенностями системы (5). Будем предполагать, что система (5) не имеет спектральных особенностей, т.е. $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^1$.

Функция $a(\xi)$ $(\overline{a}(\xi_n))$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi > 0$ $(\operatorname{Im}\xi < 0)$ только конечное число нулей $\xi_k\,(\overline{\xi}_k)$, $k = 1,2,\ldots, N$. Будем предполагать, что эти нули являются простыми. Из представления (11) следует, что

$$\varphi(x, \xi_k) = d_k \psi(x, \xi_k), \quad \overline{\xi}_k = -\xi_k, \quad \overline{d_k} = d_k, \quad k = 1,2,\ldots, N .$$

Легко показать, что функции

$$h_n(x) = \frac{\left.\dfrac{d}{d\xi}(\varphi - C_n\psi)\right|_{\xi = \xi_n}}{\dot{a}(\xi_n)}, \qquad n = 1,2,\ldots, N \qquad (12)$$

являются решениями уравнений $LY = \xi_n Y$. Здесь $C_k = \dfrac{d_k}{\dot{a}(\xi_k)}$, $k = 1,2,\ldots, N$.

Набор величин $\left\{ r^+(\xi) \equiv \dfrac{b(\xi)}{a(\xi)},\ \xi \in R^1;\ \xi_k, \operatorname{Im}\xi_k > 0;\ C_k,\ k = 1,2,\ldots, N \right\}$ называется данными рассеяния для системы (5). Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u(x)$, а обратная - в восстановлении потенциала системы уравнений (5) по данным рассеяния.

Компоненты ядра $\mathbf{K}(x, y)$ в представлении (9) при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{cases} K_2(x,y) + \int\limits_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds = 0, \\ -K_1(x,y) + F(x+y) + \int\limits_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)\,ds = 0, \end{cases}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{+}(\xi)e^{i\xi x}d\xi - i\sum_{j=1}^{N} C_j e^{i\xi_j x}.$$

Нетрудно видеть, что система интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко и равенство

$$u(x)=-2K_1(x,x) \tag{13}$$

позволяют решить обратную задачу рассеяния для системы (5).

Замечание. Всюду через $L(t)$ обозначается следующий линейный, дифференциальный несамосопряженный оператор

$$L(t)y=i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}, \quad x\in R^1,$$

действующий в пространстве $L_2^2(R^1)$. Здесь $t\in[0,\infty)$ - действительный параметр. Считается, что действительная функция $u(x,t)$ трижды непрерывно дифференцируема по *x*, один раз дифференцируема по t, т.е. $u(x,t)\in C_{x,t}^{3,1}(R^1\times R_+)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)|u(x,t)|+\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx<\infty. \tag{14}$$

В этом случае данные рассеяния для оператора $L(t)$ зависят от параметра t, т.е.

$$\left\{ r^{+}(\xi,t)\equiv\frac{b(\xi,t)}{a(\xi,t)},\ \xi\in R^1;\ \xi_k(t), \operatorname{Im}\ \xi_k(t)>0;\quad C_k(t),\quad k=1,2,\dots,\ N\right\}.$$

Под термином «$L(t)$ не имеет спектральных особенностей» понимаем, что $a(\xi,t)\neq 0$ при $\xi\in R^1$. Мы считаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей.

Второй параграф первой главы диссертации посвящен определению данных рассеяния оператора Дирака, «быстроубывающий» потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с источником. В этом параграфе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=\sum_{k=1}^{2N}\left(\Phi_{k1}^2-\Phi_{k2}^2\right)+i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\phi_1^2-\phi_2^2\right)d\eta, \\ L(t)\Phi_k=\xi_k\Phi_k,\ L(t)\phi=\eta\phi,\ k=1,2,\dots,\ 2N,\ x\in R^1, \end{cases} \tag{15}$$

при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in R^1, \tag{16}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|dx<\infty;$$

2) Оператор $L(0)$ имеет ровно *2N* простых невещественных собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$.

В рассматриваемой задаче $\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению ξ_k и $\phi = (\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t))^T$ обладает следующей асимптотикой при $x \to \infty$

$$\phi(x,\eta,t) \to \begin{pmatrix} A(\eta,t)e^{-i\eta x} \\ A(\eta,t)e^{i\eta x} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Здесь $A(\eta,t) = A(-\eta,t)$ – заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|A(\eta,t)\right|^2 d\eta < \infty \quad \text{при} \quad t \geq 0 . \tag{18}$$

Для определённости будем предполагать, что в сумме участвующей в правой части (15) сначала идут члены с $\operatorname{Im} \xi_k > 0,\ k = 1,2,\ldots, N$. Также предполагается, что функции Φ_k удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1}\Phi_{k2}dx = B_k(t), \quad k = 1,2,\ldots, 2N, \tag{19}$$

где $B_k(t)$ – заданные непрерывные, положительные функции такие, что

$$B_k(t) = B_n(t), \quad \text{при} \quad \xi_k = -\xi_n . \tag{20}$$

Будем считать, что существует решение $u(x,t)$ задачи (15)-(20), в классе функций (14).

Важным моментом метода обратной задачи является нахождение уравнений, описывающих эволюции данных рассеяния оператора $L(t)$, коэффициент которого является решением системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (15), относительно неизвестных функций *u(x,t)*, $\phi_1(x,\eta,t),\ \phi_2(x,\eta,t),\ \Phi_{k1}(x,t), \Phi_{k2}(x,t),\ k = 1,2,\ldots, 2N$.

Пусть потенциал $u(x,t)$ в системе уравнений (5) является решением уравнения

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = G(x,t), \tag{21}$$

где $G(x,t)$ при всех $t \geq 0$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Имеет место следующая основная

Лемма 1.7. Если $u(x,t)$ является решением уравнения (21) в классе функций (14), то данные рассеяния системы уравнений (5) с потенциалом $u(x,t)$ зависят от t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = 8i\xi^3 r^+ - \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} G\cdot\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)dx, \quad (\operatorname{Im}\xi = 0),$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 - \int_{-\infty}^{\infty} G\cdot\left(h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}\right)dx\right)C_n,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G\cdot\left(\varphi_{n1}^2 + \varphi_{n2}^2\right)dx}{2i\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n1}\varphi_{n2}dx}, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Применяя результаты леммы 1.7 к системе уравнений (15), доказана следующая

Теорема 1.2. Если функции $u(x,t)$, $\Phi_{k1}(x,t)$, $\Phi_{k2}(x,t)$, $k=1,2,\ldots,N$, $\phi_1(x,\eta,t)$, $\phi_2(x,\eta,t)$ являются решением задачи (15) – (20) в классе функций (14), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt}=\left[8i\xi^3+2V.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{\eta+\xi}d\eta-2\pi i A^2(\eta,t)\right]r^+,\ \ (\operatorname{Im}\xi=0)$$

$$\frac{dC_n}{dt}=\left[8i\xi_n^3+2B_n(t)+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))(\eta+\xi_n)}d\eta\right]C_n,\quad n=1,2,\ldots,N,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=0,\ \ n=1,2,\ldots,N,$$

где $V.p.$ означает интеграл в смысле главного значения.

В конце второго параграфа приведен пример решения задачи (15) – (20).

Вторая глава диссертационной работы посвящена к определению эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником, в случае движущихся собственных значений.

В первом параграфе второй главы рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=\sum\limits_{k=1}^{2N}(f_{k1}g_{k1}-f_{k2}g_{k2}), \\ L(t)f_k=\xi_k f_k,\quad L(t)g_k=\xi_k g_k,\qquad k=1,2,\ldots,2N, \end{cases} \tag{22}$$

при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in R^1, \tag{23}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|dx<\infty; \tag{24}$$

2) Оператор $L(0)$ имеет ровно $2N$ простых невещественных собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_{2N}(0)$.

В рассматриваемой задаче $f_k=(f_{k1},f_{k2})^T$ является собственной вектор-функцией оператора $L(t)$ соответствующей собственному значению ξ_k, а $g_k=(g_{k1},g_{k2})^T$ – решение уравнения $Lg_k=\xi_k g_k$, для которой

$$W\{f_k,g_k\}\equiv f_{k1}g_{k2}-f_{k2}g_{k1}=\omega_k(t)\neq 0,\quad k=1,2,\ldots,2N, \tag{25}$$

где $\omega_k(t)$ – изначально заданные непрерывные функции t, удовлетворяющие условиям

$$\omega_n(t) = -\omega_k(t) \qquad \text{при} \qquad \xi_n = -\xi_k,$$

$$\operatorname{Re}\left\{\int_0^t \omega_k(\tau)\,d\tau\right\} > -\operatorname{Im}\{\xi_k(0)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{26}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Для функции $h_n(x)$, которая определяется равенством (12), справедливы равенства

$$h_n(x) = \frac{\beta_n}{\dot{a}(\xi_n)}\varphi(x, \xi_n) + \alpha_n g_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{27}$$

Основным результатом первого параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.1. Если функции $u(x,t)$, $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$, $k = 1,2,\ldots, N$ являются решением задачи (22) – (26) в классе функций (14), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{d\xi_n}{dt} = i\omega_n(t), \qquad n = 1,2,\ldots, N,$$

$$\frac{dC_n}{dt} = [8i\xi_n^3 + i\beta_n(t)\omega_n(t)]\,C_n, \quad n = 1,2,\ldots, N,$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \left[8i\xi^3 + \sum_{k=1}^{N} i\omega_k(t)\left(\frac{1}{\xi+\xi_k} + \frac{1}{\xi-\xi_k}\right)\right]r^+, \quad (\operatorname{Im}\xi = 0),$$

где $\beta_n(t)$ определяются из равенств (27).

В конце первого параграфа приведен пример решения задачи (22) – (26).

Во втором параграфе второй главы рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = \sum\limits_{k=1}^{2N}(f_{k1}g_{k1} - f_{k2}g_{k2}) + i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\phi_1^2 - \phi_2^2)\,d\eta, \\ L(t)f_k = \xi_k f_k, \quad L(t)g_k = \xi_k g_k, \quad L(t)\phi = \eta\phi, \quad k = 1,2,\ldots, 2N, \end{cases} \tag{28}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \tag{29}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty;$$

2) Оператор $L(0)$ имеет ровно $2N$ простых невещественных собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_{2N}(0)$.

В рассматриваемой задаче $f_k = (f_{k1}, f_{k2})^T$ является собственной вектор-функцией оператора $L(t)$, соответствующей собственному значению ξ_k, а $g_k = (g_{k1}, g_{k2})^T$ - решение уравнения $Lg_k = \xi_k g_k$, для которой

$$W\{f_k, g_k\} \equiv f_{k1}g_{k2} - f_{k2}g_{k1} = \omega_k(t) \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2N, \tag{30}$$

где $\omega_k(t)$ – изначально заданные непрерывные функции t, удовлетворяющие условиям

$$
\begin{gathered}
\omega_n(t) = -\omega_k(t) \qquad \text{при} \qquad \xi_n = -\xi_k, \\
\operatorname{Re}\left\{\int_0^t \omega_k(\tau)\,d\tau\right\} > -\operatorname{Im}\{\xi_k(0)\}, \quad k = 1, 2, ..., N,
\end{gathered} \tag{31}
$$

при всех неотрицательных значениях t. Для определённости будем предполагать, что в сумме участвующей в правой части (28) сначала идут члены с $\operatorname{Im}\xi_k > 0$, $k = 1,2,..., N$ и вектор-функция $\phi = (\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t))^T$ обладает следующей асимптотикой при $x \to \infty$

$$
\phi(x,\eta,t) \to \begin{pmatrix} A(\eta,t)e^{-i\eta x} \\ A(\eta,t)e^{i\eta x} \end{pmatrix}. \tag{32}
$$

Здесь $A(\eta,t) = A(-\eta,t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |A(\eta,t)|^2 d\eta < \infty \quad \text{при} \quad t \ge 0. \tag{33}
$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2. Если функции $u(x,t)$, $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$, $k = 1,2,..., N$, $\phi_1(x,\eta,t)$, $\phi_2(x,\eta,t)$ являются решением задачи (28)–(33) в классе функций (14), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$
\frac{d\xi_n}{dt} = i\omega_n(t), \qquad n = 1,2,..., N,
$$

$$
\frac{dC_n}{dt} = \left[8i\xi_n^3 + i\beta_n(t)\omega_n(t) + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2(\eta,t)}{(1 + r(\eta)r(-\eta))(\eta + \xi_n)}d\eta\right]C_n, \quad n = 1,2,..., N
$$

$$
\frac{dr^+}{dt} = \left[8i\xi^3 + \sum_{k=1}^{N} i\omega_k(t)\left(\frac{1}{\xi + \xi_k} + \frac{1}{\xi - \xi_k}\right) + 2\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2(\eta)}{\eta + \xi}d\eta - 2i\pi A^2(\xi)\right]r^+, \ (\operatorname{Im}\xi = 0),
$$

где $\beta_n(t)$ определяются из равенств (27).

В третьей главе диссертации определена эволюция данных рассеяния несамосопряжённого оператора Дирака с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным источником.

В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для системы уравнений (5), на всей оси. При выполнении условия (6) существуют решения Йоста системы уравнений (5) с асимптотиками (8). Функция $a(\xi)$, которая определяется равенством (11), аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\xi > 0$ и имеет там конечное число (в общем случае кратных) нулей $\xi_1, \xi_2,..., \xi_N$. Далее, обозначим, через m_k, кратность корня ξ_k уравнения

$a(\xi) = 0, \ \operatorname{Im} \xi > 0, \ \ k = 1,2,..., N$.

Существует так называемая нормировочная цепочка чисел оператора $L(0)$ $\{\chi_0^k, \chi_1^k, ..., \chi_{m_k-1}^k\}$ такая, что имеют место соотношения

$$\overset{(l)}{\varphi}(x,\xi_k) = \sum_{\nu=0}^{l} \chi_{l-\nu}^k \frac{l!}{\nu!} \overset{(\nu)}{\psi}(x,\xi_k), \ \ k = 1,2,..., N, \qquad l = 0,1,2,..., m_k - 1 .$$

В этом случае компоненты ядра $\mathbf{K}(x, y)$ в представлении (9) при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{cases} K_2(x,y) + \int\limits_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)ds = 0, \\ -K_1(x,y) + F(x+y) + \int\limits_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)ds = 0, \end{cases}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)e^{i\xi x}d\xi - i\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_k-1}\chi_{m_k-\nu-1}^k \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\frac{(z-\xi_k)^{m_k}}{a(z)}e^{izx}\right]\Bigg|_{z=\xi_k}, \quad r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)},$$

$a(z)$ - аналитическое продолжение функции $a(\xi)$, $\operatorname{Im} \xi = 0$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. При этом $u(x)$ определяется из формулы (13).

Набор величин $\{r^+(\xi),\ \xi \in R^1,\ \ \xi_k,\ \chi_j^k,\ \ \operatorname{Im}\xi_k > 0,\ \ k = 1,2,..., N,\ \ j = 0,1,..., m_k - 1\}$ называется данными рассеяния для несамосопряженного оператора $L(t)$.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается система уравнений

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j\left(f_{k1}^j f_{k1}^{m_k-1-j} - f_{k2}^j f_{k2}^{m_k-1-j}\right), \tag{34}$$

$$\begin{gathered} L(t)f_k^0 = \xi_k f_k^0, \quad L(t)f_k^j = \xi_k f_k^j + jf_k^{j-1}, \quad \operatorname{Im}\xi_k > 0, \\ f_k^j \in L_2^2(-\infty,\infty), \quad k = 1,2,..., N, \ \ j = 0,1,..., m_k - 1, \end{gathered} \tag{35}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \tag{36}$$

где $C_n^l = \dfrac{n!}{(n-l)!\,l!}$, $f_k^0 = \left(f_{k1}^0(x,t),\ f_{k2}^0(x,t)\right)^T$ – собственная вектор - функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k $(\operatorname{Im}\xi_k > 0)$ кратности m_k, $k = 1,2,..., N$. В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|dx < \infty\,; \tag{37}$$

2) Оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0),..., \ \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0),..., \ m_N(0)$.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_k - 1 - l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_{k1}^{m_k-1} f_{k2}^{m_k-1-l} + f_{k2}^{m_k-1} f_{k1}^{m_k-1-l}\right)dx = A_{m_k-1-l}^{k}(t)\,, \tag{38}$$

где $A_{m_k-1-l}^{k}(t)$ – изначально заданные непрерывные функции t, $k = 1,2,..., N$, $l = 0,1,..., m_k - 1$.

Теорема 3.3. Если функции $u(x,t)$, $f_k^j(x,t)$, $k = 1,2,..., N$, $j = 0,1,..., m_k - 1$ являются решением задачи (34)-(38) в классе функций (14), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = 8i\xi^3 r^+,\ \left(\operatorname{Im}\xi = 0\right), \qquad m_n(t) = m_n(0), \qquad \frac{d\xi_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 + A_0^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 + A_0^n(t)\right)\chi_1^n + \left(24i\xi_n^2 + A_1^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 + A_0^n(t)\right)\chi_2^n + \left(24i\xi_n^2 + A_1^n(t)\right)\chi_1^n + \left(24i\xi_n + A_2^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 + A_0^n(t)\right)\chi_3^n + \left(24i\xi_n^2 + A_1^n(t)\right)\chi_2^n + \left(24i\xi_n + A_2^n(t)\right)\chi_1^n + \left(8i + A_3^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_l^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 + A_0^n(t)\right)\chi_l^n + \left(24i\xi_n^2 + A_1^n(t)\right)\chi_{l-1}^n + \left(24i\xi_n + A_2^n(t)\right)\chi_{l-2}^n +$$

$$+ \left(8i + A_3^n(t)\right)\chi_{l-3}^n + \sum_{s=0}^{l-4} A_{l-s}^n(t)\chi_s^n\,, \qquad n = 1,2,..., N, \quad l = 4, 5, ..., m_n - 1.$$

В третьем параграфе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)d\eta, \\ L(t)\phi = \eta\phi, \quad x \in R^1, \end{cases} \tag{39}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in R^1, \tag{40}$$

где $\phi = \left(\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t)\right)^T$ обладает следующей асимптотикой при $x \to \infty$

$$\phi(x,\eta,t) \to \begin{pmatrix} A(\eta,t)e^{-i\eta x} \\ A(\eta,t)e^{i\eta x} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Здесь $A(\eta,t) = A(-\eta,t)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|A(\eta,t)\right|^2 d\eta < \infty \quad \text{при} \quad t \ge 0\,. \tag{42}$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u_0(x)|dx<\infty\ ; \qquad (43)$$

2) Оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0),\xi_2(0),...,\ \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),...,\ m_N(0)$.

В третьем параграфе гл. III доказана следующая

Теорема 3.4. Если функции $u(x,t)$, $\phi_1(x,\eta,t)$, $\phi_2(x,\eta,t)$ являются решением задачи (39) – (43) в классе функций (14), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{d\xi_n}{dt}=0, \qquad \frac{dr^+}{dt}=\left(8i\xi^3+2V.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{\xi+\eta}d\eta-2i\pi A^2(\xi,t)\right)r^+,\ \left(\operatorname{Im}\xi=0\right),$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)}d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)}d\eta\right)\chi_1^n+$$

$$+\left(24i\xi_n^2-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^2}d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)}d\eta\right)\chi_2^n+$$

$$+\left(24i\xi_n^2-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^2}d\eta\right)\chi_1^n+$$

$$+\left(24i\xi_n+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^3}d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)}d\eta\right)\chi_3^n+$$

$$+\left(24i\xi_n^2-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^2}d\eta\right)\chi_2^n+$$

$$+\left(24i\xi_n+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^3}d\eta\right)\chi_1^n+$$

$$+\left(8i-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^4}d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_l^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)}d\eta\right)\chi_l^n+$$

$$+\left(24i\xi^2{}_n-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^2}d\eta\right)\chi^n_{l-1}+$$

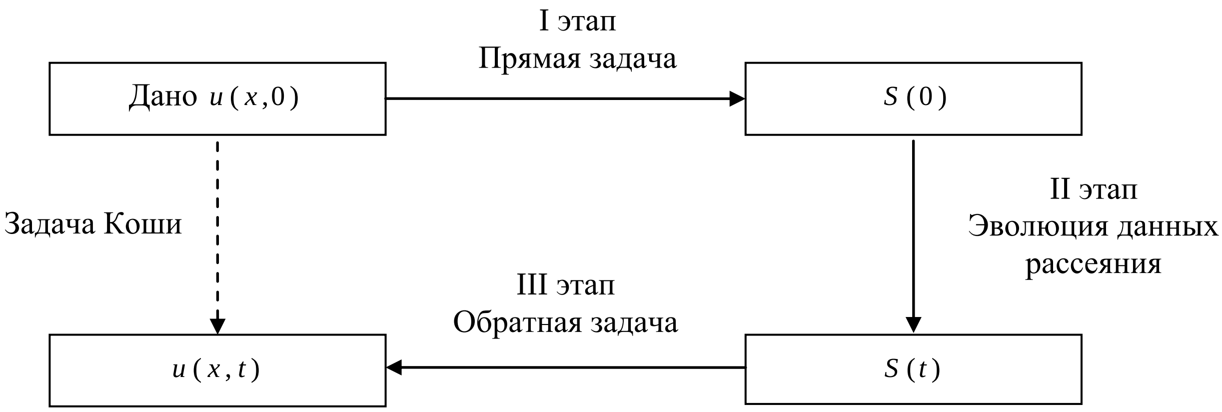
$$+\left(24i\xi_n+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^3}d\eta\right)\chi^n_{l-2}+$$

$$+\left(8i-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^4}d\eta\right)\chi^n_{l-3}+$$

$$+2\sum_{s=0}^{l-4}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{l-s}A^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))(\eta+\xi_n)^{l-s+1}}d\eta\right)\chi^n_s,\quad n=1,2,\ldots,N,\quad l=4,5,\ldots,m_n-1.$$

В четвертом параграфе этой главы проинтегрировано уравнение мКдФ$_+$ с источником общего вида, в случае кратных собственных значений оператора Дирака.

Ниже приведём схему нахождения решения задачи Коши для уравнения мКдФ$_+$ с источником методом обратной задачи.



На первом этапе по заданному потенциалу $u(x,0)$ в начальный момент времени решается так называемая прямая задача рассеяния для системы уравнений Дирака $L(0)y=\lambda y$ т.е. определяется данные рассеяния $S(t=0)$. На втором этапе интегрирование обыкновенных рекуррентных дифференциальных уравнений типа ГГКМ даёт данные рассеяния $S(t)$ в момент времени *t*. Наконец, на третьем этапе по данным S(*t*) с помощью системы интегральных уравнений типа Гельфанда-Левитана-Марченко определяется потенциал $u(x,t)$ в момент времени *t*.

В заключении автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору А.Б.Хасанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена применению метода обратной задачи рассеяния для интегрирования нелинейного уравнения мКдФ $_{+}$ с различными самосогласованными источниками, в классе «быстроубывающих» функций. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) выведены уравнения динамики изменения по времени данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ $_{+}$ с самосогласованным источником, в классе «быстроубывающих» функций.

2) выведены уравнения данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ $_{+}$ с различными самосогласованными источниками, в случае движущихся собственных значений.

3) выведены уравнения данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ $_{+}$ с различными самосогласованными источниками, в классе «быстроубывающих» функций.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений и при решении некоторых задач физики плазмы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Хасанов А.Б., Содиков С.С., Мамедов К.А. Об эволюции данных рассеяний оператора Дирака являющейся решением модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегрального типа// Труды межд. научный конф. «Дифференциальные уравнении с частными производными и родственные проблемы анализа» 16-19 ноября 2004 г. - Ташкент, 2004. Том I. - С.287-289.
2. Мамедов К.А., Рейимберганов А.А. Об интегрировании модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с источником// Труды межд. конф. «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» 18-24 апреля 2005 г. - Ташкент, 2005. Том I. - С. 108-110.
3. Уразбоев Г.У., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником в случае движущихся собственных значений// Вестник ЕГУ, сер.”Математика.Компьютерная математика”. – Елец (Россия), 2005. - вып.8. - № 1, - С. 84-94.
4. Мамедов К.А. Об интегрировании модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегрального типа// Доклады АН РУз. –Ташкент, 2006. - № 2. - С. 24-28.
5. Мамедов К.А.,Рейимберганов А.А. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником// Материалы Респ. научной конф. «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа» 25-27 июня 2006 г. - Нукус, 2006. - С. 96-100.
6. Мамедов К.А. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в случае конечной плотности// Тезисы межд.научной конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий» 20-22 сентября 2006 г. - Алматы, 2006. - С. 71-72.
7. Мамедов К.А. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности, в случае движущихся собственных значений// Материалы меж. конф. «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач 19-20 октября 2007г. - Самарканд, 2007. -С. 46-48.
8. Хасанов А.Б., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником интегрального типа соответствующего кратным собственным значениям // Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2007. - №4. - С. 81-93.
9. Мамедов К.А. Рузметов М.М. Об интегрировании уравнения мКдФ с источником в классе функций конечной плотности, в случае движущихся собственных значений// Материалы меж. конф. «Актуальные вопросы комплексного анализа» посвящённой 1000-летнему юбилею Хорезмской академии Маьмуна и 90-летию Национального Университета Узбекистана 11-15 мая 2008г. - Ургенч, 2008. – 24 с.

Физика–математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Мамедов Қудрат Алломович**нинг 01.01.02–дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича **«Мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг солитонсимон ечимлари»** мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: сочилиш назариясининг тескари масаласи усули, Дирак оператори, Йост ечими, хос қиймат, хос функция, сочилиш назариясининг берилганлари, модифицирланган Кортевег-де Фриз (мКдФ$_+$) тенгламаси.

Тадқиқот объектлари: мКдФ$_+$ тенгламаси.

Ишнинг мақсади: мосланган манбали мКдФ$_+$ тенгламасини «тез камаювчи» функциялар синфида интеграллаш.

Тадқиқот усули: диссертацияда дифференциал тенгламалар, математик физика тенгламалари, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, дифференциал операторлар спектрал назариясининг усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертациядаги барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

1. Потенциали «тез камаювчи» функциялар синфидаги манбага эга бўлган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг ечими бўлган, Дирак операторининг спектрал характеристикаларининг t бўйича ўзгариш қонуни келтириб чиқарилган.

2. Ҳаракатланувчан хос қиймат ҳолида, потенциали мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг ечими бўладиган, оддий хос қийматларга эга бўлган Дирак оператори сочилиш назарияси берилганларининг эволюцияси аниқланган.

3. Потенциали ҳар хил мосланган манбали мКдФ$_+$ тенгламасининг ечими бўладиган, каррали хос қийматларга эга бўлган ўз-ўзига қўшма бўлмаган Дирак оператори сочилиш назарияси берилганларининг эволюцияси аниқланган.

Амалий аҳамияти: диссертация назарий характерга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантлар ва аспирантларга махсус курс ўқитилиши мумкин.

Қўлланиш (фойдаланиш) соҳаси: олинган натижалар математик физикада учрайдиган ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашда қўлланилиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации **Мамедова Кудрата Алломовича** на тему: **«Солитонные решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–дифференциальные уравнения

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, оператор Дирака, решение Йоста, собственное значение, собственная функция, данные рассеяния, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ$_+$).

Объекты исследования: уравнение мКдФ$_+$.

Цель работы: интегрирование уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованными источниками в классе «быстроубывающих» функций.

Метод исследования: в диссертационной работе используются методы дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, функционального анализа, теории функций комплексных переменных, спектральной теории дифференциальных операторов.

Полученные результаты и их новизна: все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Выведена динамика изменения по t спектральных характеристик оператора Дирака, с потенциалом, являющимся решением модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с источником в классе «быстроубывающих» функций.
2. Определена эволюция данных рассеяния для оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с самосогласованным источником, в случае движущихся собственных значений.
3. Определена эволюция данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ$_+$ с самосогласованным различным источником.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для магистрантов и аспирантов.

Область применения: полученные результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

R E S U M E

Thesis of **Mamedov Kudrat Allomovich** on the scientific degree of the candidate of sciences on physics and mathematics on speciality 01.01.02–differential equations. Theme: **“Soliton solutions of the modified Korteweg-de Vries equation with the self-consistent source”**

Key words: the inverse scattering method, operator of Dirac, Jost’s solution, the eigenvalue, the eigenfunction, the scattering data, the modified Korteweg-de Vries equation.

Objects of the investigation: the modified Korteweg-de Vries equation.

Aim of the investigation: integration of the modified Korteweg-de Vries equation with the self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions.

Method of the investigation: in this work the methods of mathematical physics, differential equations, functional analysis, the theory of complex variable functions and the spectral theory of differential operators are used.

The results achieved and their novelty: all of the main results of this work are new and consist of the following:

1. The law of spectral data of spectral characteristics of Dirak operator with potential changing on t, which is the solution to the modified Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions is deduced.

2. The evolutions of scattering data of Dirak operator with simple eigenvalue potential of the solution to the modified Korteweg-de Vries equation with the self consistent sources rapidly decreasing functions in case of moving eigenvalues are defined.

3. The evolutions of scattering data of no self-joined Dirak operator with multiple eigenvalues potential of the solution to the modified Korteweg-de Vries equation with the self consistent different sources are defined.

Practical value: the work has theoretical character.

Degree of embed and economic affectivity: on the basis of the received results a special course will be read for the students of masters’ department and postgraduate study.

Sphere of usage: the obtained results may be used in mathematical physics for integration of the equations nonlinear evolution.