O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

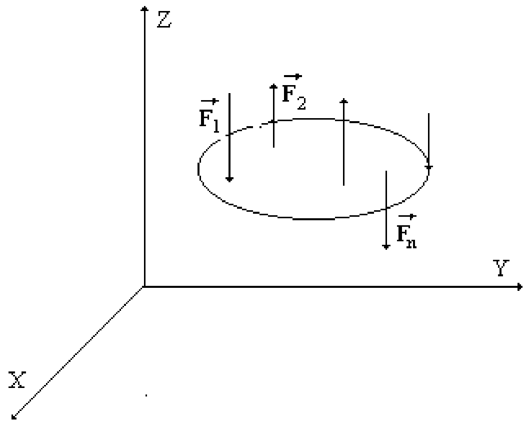
NAMANGAN
MUHANDISLIK – PEDAGOGIKA
INSTITUTI

QURILISH FAKUL’TETI

“MATERIALLAR QARSHILIGI VA QURILISH MEXANIKASI”
KAFEDRASI

“NAZARIY MEXANIKA”
FANIDAN MA’RUZAlAR MATNI

(DINAMIKA)



NAMANGAN – 2012

Ma’ruzalar matni o’quv dasturi asosida yozilgan bo’lib, Nazariy mexanikaning statik va kinematik qismini o’z ichiga olgan. Moddiy jismlarning muvozanati, ularga qo’yilgan kuchlarni qo’shish, ayirish va kuchlarni ta’sir jixatidan teng bo’lgan ekvivalent kuchlar sistemasi bilan almashtirish, nuqta kinematikasi va qattiq jism kinematikasi masalalari yoritilgan.

Mualliflar: **t.f.d., prof. Sh.S.Yuldashev**
k. o’qt. Sh. Jumaboeva
k. o’qt К.Ахмadaliyev

Taqrizchi: **t.f.n., dots. Murodov R. M.**

Ma’ruzalar matni “Materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi” kafedrasining yig’ilishida ko’rib chiqilgan (1999 yil 29 avgustdagi 1-sonli bayoni) va institut ilmiy-uslubiy kengashida chop etishga ruxsat berilgan (1999 yil 1 iyun 2-majlis bayoni).

MUNDARIJA

beti

1 -Mavzu: Kirish. NUQTA DINAMIKASI.

Reja:

1. Dinamikaning asosiy tushunchlari.
2. Dinamikaning asosiy qonunlari.
3. Mexanik o'lchov birliklari sistemasi.
4. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.
5. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.
6. Matematik tebrangich.

Muammoli vaziyat, savol yoki topshiriq.

N yuton qonunlari qaysi sanoq sistemasiga nisbatan qanday jismlarning harakatlari uchun o'rinli?

Tayanch so'z va iboralar.

Kuch. Jism inertligi. Jismning massasi. Inertsiya qonuni. Dinamikaning asosiy qonuni. Erkin tushish tezlanishi. Ta`sir va aks ta`sirning tengligi qonuni. Kuchlar ta`sirining Mustaqillik qonuni.

Halqaro SI birliklar sistemasi. Moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari.

Mavzuning maqsadi: Qadim zamonlardan beri harakat qilayotgan moddiy nuqta o'z harakatini qanday sabablarga ko'ra o'zgartira olishi, va uning matematik ifodasini aniqlash ustida juda ko'p olimlar bosh qotirganlar. Lekin bu masalani yechimini birinchi bo'lib Italiyalik olim G.Galiley va Ingliz olimi I.Nyutonlar tomonidan aniq ifodasi berildi. Quyida shu haqdagi fikrlar, boshqacha qilib aytganda dinamikaning asosiy qonunlari keltiriladi.

Bayoni:

1. Klassik mexanikaning asosiy qonunlari.

Asosiy tushunchalar: Dinamika qismining asosiy maqsadi, birinchidan biron nuqtaning harakatining qonuniyatiga asosan, shu nuqtaga yoki jismga qanday kuchlar ta`sir etayotganligini aniqlash, ikkinchidan shu nuqtaga yoki jismga ta`sir etayotgan kuchlarga bog'liq ravishda ularning harakatlarini o'rganish, yani shu nuqta yoki mexanik sistemaning harakat qonunini aniqlash hisoblanadi.

XVII asrda Italiya olimi G.Galiley va Ingliz olimi I.Nyutonlar tomonidan uzoq vaqtlar davomida olib borilgan tajriba va kuzatishlar natijasida harqanday harakatning paydo bo'lishi, yoki uning o'zgarishi unga ta`sir etayotgan kuchlarga uzviy bog'liq ekanligini aniqlandi. Keyinchalik I.Nyuton ushbu bog'liklik qanday qonuniyatlarga asoslangan ekanligini aniqladi, va o'zining 1687 yili chop etilgan «Natural falsafaning matematik asoslari» asarida ularni batafsil bayon qildi.

Unga ko’ra barcha jismlar yoki moddiy nuqtalar asosan quyidagi uchta qonun bo’yicha harakatlanishi yoki muvozanat holatida bo’lishlarini tushuntiradi:

1-qonun. Bu qonun inertsiya qonuni deyiladi, va u G.Galiley tomonidan kashf etilgan bo’lib, quyidagicha ifodalanadi. *Inertsial sistemada joylashgan har qanday moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo’lsa, shu moddiy nuqta o’zining muvozanat holatini, yoki to’g’ri chiziqli tekis harakatini cheksiz vaqt ichida davom etdiraveradi. Demak, agar*

$$\sum \overline{F}_k = 0 \quad \text{bo'lsa,} \quad \overline{V} = const \quad \text{va} \quad \overline{a} = 0 \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu qonunda uchta tayanch iboralar, yani *inertsial sistema*, *moddiy nuqta*, *tekis harakat* ishlatilgan bo’lib, ularning ta`rifi quyidagichadir:

Inertsial sistema deb, shunday sanoq sistemasiga aytiladiki, bu sistemaning absolyut tezlanishi doimo nolga teng bo’lishi shart, shuning uchun bu sistemada joylashgan har kanday jism yoki moddiy nuqtaning harakat tenglamasida, uning ko’chirma va Koriolis tezlanishlari har doim nolga teng bo’ladi.

Moddiy nuqta deb, ma`lum massaga ega bo’lgan, lekin uning geometrik o’lchamlari e`tiborga olinmagan jismga aytiladi.

Tekkis harakat deb, moddiy nuqtaning tezlik vektori o’zgarmas bo’lgan harakatga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda moddiy nuqtaning urinma, normal va Koriolis tezlanish vektorlari harakat davomida doimo nolga teng bo’lgan harakatga aytiladi.

Xulosa. Demak, inertsial sistemada joylashgan har qanday moddiy nuqta unga qo’yilgan kuchlar ta`sirida muvozanat holatda bo’lsa, o’z-o’zidan, yani qo’shimcha kuch ta`sir qilmasdan turib, o’z harakatini boshlay olmaydi, yoki bajarayotgan to’g’ri chiziqli tekis harakatini o’zgartira olmaydi.

Shu yerda yana shuni eslatib o’tish lozimki, ushbu birinchi qonunda, aytib o’tildiki, *moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo’lsa* deyildi, chunki tabiatda kuch ta`sir etmaydigan moddiy nuqta aslida yo’q va unday moddiy nuqta umuman bo’lishi mumkin ham emas. Farqi shundaki shu **kuchlar sistemasinigng bosh vektori *nol bo’lishi, yoki nol bo’lmasligi*** mumkin, shunga ko’ra dinamikaning birinchi qonuni asosan, shu kuchlarning bosh vektori nol bo’lgan holda, moddiy nuqtaning harakati qanday bo’lishi to’g’risida uqtirib o’tmoqda.

2-qonun. Bu qonun dinamikaning asosiy qonuni deyiladi, va I.Nyuton tomonidan matematik ko’rinishda yozilgan bo’lib, quyidagicha ifodalanadi. *Inertsial sistemada joylashgan har qanday moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo’lmasa, u nuqta o’zining massasiga teskari proportsional va unga ta`sir etayotgan kuchlarning bosh vektoriga to’g’ri proportsional va shu yo’nalishda bo’lgan tezlanish vektori oladi, Demak, agar*

$\sum \vec{F}_k \neq 0$ bo’lsa $\overline{V} \neq const$ $|a| > 0$, va uning qiymati va yo’nalishi quyidagi qonun orqali aniqlanadi, yani

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_k \quad \text{yoki,} \quad \vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}_k \tag{3.1}$$

Bu yerda, $\vec{a}$ - nuqtaning tezlanish vektori, m - uning massasi, $\vec{F}_k$ - moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlar.

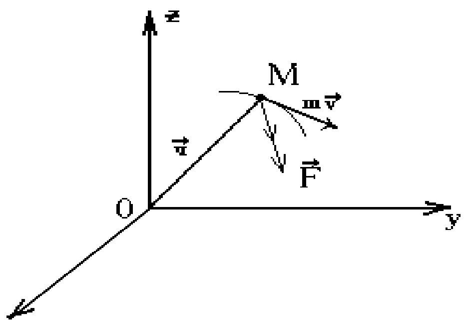
Yuqoridagi (3.1) formuladan ko’rinib turibdiki, moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning bosh vektori nolga teng bo’lmasa, nuqta tezlanish vektoriga ega bo’ladigan va uning yo’nalishi kuchlarning bosh vektori bilan bir xilda, qiymat jihatidan esa nuqtaning massasiga teskari proportsional bo’lar ekan..

Shunday savol bo’lishi mumkin, nima uchun tezlanish vektorining absolyut qiymatigina noldan katta bo’ladi, yani u manfiy tezlanish ham olishi mumkinmi. Sababi shuki, agar shu nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning bosh vektori nuqtaning tezlik vektori bilan bir yo’nalishda bo’lsa u musbat tezlanish oladi, agar kuchlarning bosh vektori nuqtaning tezlik vektoriga teskari bo’lsa u manfiy tezlanish oladi.

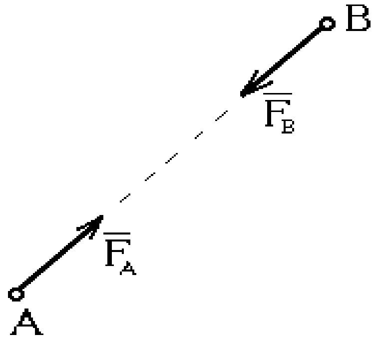
Boshqacha qilib aytganda kuchlarning bosh vektori bilan moddiy nuqtaning boshlang'ich tezlik vektori qanday burchakda yo'nalishiga bog'liq ravishda tezlanish vektori oladi. Agar nuqtaga kuch vektorlari ta`sir etishni boshlagan vaqtda u muvozanat holatda, yani $V_0 = 0$ bo'lsa, uning tezlanish vektori doimo musbat bo'ladi.

3-qonun. Ta`sir va aks ta`sir qonuni deyiladi. *Inertsial sistemada joylashgan miqdolari tehg shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylabqarama-qarshi tomtonga yonalgan kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi*, yani

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \tag{3.2}$$



Shakl 3.1



Shakl 3.2

2. Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.

Tabiatda moddiy nuqta erkin holda, qisman erkin yoki mutlaq erksiz holatlarda bo'ladi. Agar moddiy nuqta fazoda muallaq joylashgan bo'lib istalgan tomonga harakatlana olsa, bunday moddiy *nuqta erkin* deyiladi. Agar uning harakati cheklangan bo'lsa, masalan kichkina sharcha egri trubkaning ichida joylashgan bo'lsa, u faqat shu trubkaning ichidagina xarakat qila oladi xolos, poezdning vagoni faqat temir yo'l qanday yhnalgan bo'lsa, vagon ham faqat shu traektoriya bo'ylab yo'nalishi mumkin xolos, shuning uchun bunday nuqta yoki qattiq jism holat *qisman erkin* deyiladi.

Agar moddiy nuqta birorta qo'zg'lmas jismga qattiq mahkamlangan bo'lsa, u *erksiz* deyiladi. Shuning uchun biz moddiy nuqta dinamikasida faqat ikkita holatdagi harakatni, yani erkin yoki qisman erkin moddiy nuqtaning harakatini o'rganamiz.

Moddiy nuqtaning differensial tenglamasini yozishdan oldin, kuchlarni ikkita guruhga ajratib olamiz, ulardan biri aktiv kuchlar, ikkinchisi reaktsiya kuchlari. Erkin moddiy nuqtaga faqat aktiv kuchlar ta`sir etadi, qisman erkin moddiy nuqtaga ikki xil kuchlar, aktiv kuchlar va reaktsiya kuchlari ta`sir etadi.

Tayanch so'zlar: *Erkin nuqta, qisman erkin, erksiz nuqta*, yuqorida aytib o'tilgan, *aktiv kuchlar va reaktiv kuchlar* esa quyidagicha ta`riflanadi.

Aktiv kuchlar, bu moddiy nuqtaga uning erkinlik darajasidan qatiy nazar ta`sir etuvchi kuchlar hisoblanadi, yani bog'lanish bormi - yo'qligidan qatiy nazar ular ta`sir etaveradilar, masalan og'irlik kuchi.

Reaktsiya kuchlari, bu moddiy nuqtaning erkinligini qisman cheklovchi bog'lanishlarning nuqtaga ko'rsatgan reaktsiyasiga aytiladi. Masalan, bog'lanishlar olib tashlansa, reaktsiya kuchlari ham o'z-o'zidan yo'qoladi.

3. Erkin moddiy nuqta harakatining vektor formadagi differensial tenglamasi.

Agar biz birorta koordinata o'qlarini tanlab olsak, va uning boshidan massasi m-ga teng bo'lgan moddiy M nuqtaning $t = 0$ dagi holatiga, unga radius vektor $\vec{r}$ o'tkazamiz (3.2 rasm), va $t > 0\, c$ vaqtdagi holatni egallaydi. So'ngra shu moddiy nuqta unga ta`sir etuvchi kuchlarning bosh vektori $\vec{F}$

ta`sirida o'z holatini o'zgartiradi, yani dinamikaning ikkinchi qonuniga asosan quyidagini yozamiz, $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$

Ma'lumk, $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt}$ yoki $\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ u holda

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k \quad \text{yoki} \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k \tag{3.3}$$

Tayanch so'z: *differensial tenglama*. Yuqoridagi tenglamalarning chap tomonidagi qiymatlar, yani radius vektor va tezlik vektorlari differensial belgisi ostida qatnashmoqdalar.

Moddiy nuqta harakati haqidagi masalalarni yechishda yuqoridagi (3.3) tenglamadan to'g'ridan to'g'ri foydalanish mumkin emas. Masalani yechishdan avval albatta birorta koordinata o'qlar tanlab olinishi kerak, shunga khra masalaning shartiga bog'liq ravishda Dekart o'qlari, yoki tabiiy o'qlardan foydalanib masalalar yechiladi. Qanday hollarda Dekart o'qlaridan foydalanish, va qanday hollarda tabiiy o'qlardan foydalanish kerakligi to'g'risida quyidagicha maslahat beriladi.

Agar moddiy nuqtaning traektoriyasi avvaldan ma`lum bo'lsa, albatta tabiiy o'qlarga murojaat qilinadi. Agar moddiy nuqtaning traektoriyasi oldindan nomalum bo'lsa, yoki uning harakat traektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa Dekart o'qlaridan foydalanib masala yechiladi.

4..Erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari.

Faraz qilaylik, massasi *m*- ga teng bo'lgan moddiy nuqtaga, fazoda ixtiyoriy yo'nalgan bir nechta kuchlar sistemasi ta`sir etsin, lekin yuqorida aytilgandek uning harakat traektoriyasi nomalum, u holda (3.3) tenglikni, yani dinamikaning asosiy qonunining vektor ifodasini Dekart koordinata o'qlariga proektsiyalaymiz, va uchta skalyar tenglamalar sistemasini yozamiz,

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots\ldots\ldots + F_{Nx} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots\ldots\ldots + F_{Ny} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots\ldots\ldots + F_{Nz} \end{cases} \tag{3.4}$$

Agar moddiy nuqta birorta tekislikda harakatlanayotgan bo'lsa, (masalan Oxy tekisligida), u holda yuqoridagi tenglamalar sistemasi, faqat ikkita bo'ladi,

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots\ldots\ldots + F_{Nx} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots\ldots\ldots + F_{Ny} \end{cases} \tag{3.5}$$

Agar moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsa, (masalan Ox o'qi bo'ylab), u holda yuqoridagi tenglamalar sistemasi, faqat bitta tenglamaga keladi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots\ldots\ldots + F_{Nx} \tag{3.6}$$

Ushbu tenglamalar sistemasi, erkin moddiy nuqta harakatining Dekart o’qlaridagi differensial tenglamalarini ifodalaydi.

Har bir tenglama ikkinchi tartibli hosilaga ega bo’lganligi uchun, ularning har birini ikki marta integrallash natijasida $Ox, Oy, ва \, Oz$ o’qlari bo’yicha moddiy nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Integrallash natijasida 6 dona integral doimiylari hosil bo’ladi, ularni aniqlash uchun nuqtaning $t = 0$ vaqtdagi yoki boshqa vaqtdagi boshlang’ich shartlar, yani nuqtaning harakat boshlanganda qaysi joyda ekanligi, hamda uning boshlang’ich yoki t s. dagi tezligi qanday qiymatga ega ekanligi aniq bo’lishi shart.

5 .Erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o’qlaridagi differensial tenglamalari.

Faraz qilaylik, birorta moddiy M nuqtaning harakatini traektoriyasi berilgan bo’lsin, va u to’g’ri chiziq bo’lmasdan qandaydir ixtiyoriy egri chiziqdan iborat bo’lsin, u holda yuqorida takidlaganimizdek, bunday masalalarni tabiiy o’qlar orqali yechish katta qulayliklarga olib keladi. Buning uchun (3.1) tenglamani kinematika qismida ko’rib o’tilgan o’qlar, yani tabiiy o’qlarga, yoki Eyler o’qlariga proektsiya qilamiz, yani

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{dv}{dt} = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \dots\dots\dots + F_{N\tau} \\ m \cdot \dfrac{v^2}{\rho} = F_{1n} + F_{2n} + \dots\dots\dots + F_{Nn} \\ 0 = F_{1b} + F_{2b} + \dots\dots\dots + F_{Nb} \end{cases} \tag{3.7}$$

yoki,

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2 s}{dt^2} = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \dots\dots\dots + F_{N\tau} \\ m \cdot \dfrac{v^2}{\rho} = F_{1n} + F_{2n} + \dots\dots\dots + F_{Nn} \\ 0 = F_{1b} + F_{2b} + \dots\dots\dots + F_{Nb} \end{cases} \tag{3.7a}$$

Ushbu tenglamalar, erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o’qlaridagi differensial tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalarni yechganimizdan so’ng, faqat ikkita integral doimiylari hosil bo’ladi. Ularni aniqlash uchun nuqtaning boshlang’ich tezligi va uning tabiiy o’qdagi boshlang’ich holati oldindan ma`lum bo’lishi shart, yani $V_o \, ва \, S_o$ lar berilishi shart.

2 - Mavzu. MODDIY NUQTA DINAMIKASINING IKKITA ASOSIY MASALASI. MODDIY NUQTA NISBIY HARAKATINING DIFFERENSIAL TENGLAMALARI.

Reja:

1. Moddiy nuqta dinamikasining ikki masalasi.
2. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasini yechishga doir masalalar.
3. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati differentsial tenglamalari.
4. Jismlarning muvozanati va harakatiga yer aylanishining ta`siri.
5. Vaznsizlik.

Muammoli vaziyat, savol yoki topshiriq

Moddiy nuqta harakat differentsial tenglamasini qanday hollarda analitik yechimini olish, ya`ni integrallash mumkin? Boshlang'ich shartlar deganda nimani tushunasiz? Nisbiy muvozanat nima? Vaznsizlik nima? Inertsiya kuchi qanday kuch?

Tayanch so'z va iboralar

Nuqta dinamikasining birinchi masalasi. Nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi. Nisbiy harakat differentsial tenglamalari. Inertsiya kuchlari. Vaznsizlik. Boshlang'ich shartlar. Integrallash o'zgarmaslari.

Mavzuning maqsadi: Dinamikaning asosiy qonuni bitta (3.1) vektor tenglamadan iborat bo'lganligi uchun, ular orqali faqat bitta nomalumni aniqlash mumkin xolos, ya`ni agar moddiy nuqtaning massasi va uning harakat qonuni berilgan bo'lsa, shu moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning bosh vektorini aniqlash mumkin. Yoki shu moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlar sistemasi va uning massasi ma'lum bo'lsa, shu moddiy nuqtaning harakat qonuni aniqlanadi. Quyida shunday masalalarni yechish haqida ko'rsatmalar beriladi.

Bayoni:

1. Birinchi asosiy masala

Birinchi asosiy masalani yechish uncha qiyinchiliklarga olib kelmaydi, chunki harakat qonunlari berilgan bo'lsa, ulardan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olamiz, va ularni moddiy nuqtaning massasiga ko'paytirib, shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning bosh vektorini tegishli o'qlardagi proektsiyalarini aniqlaymiz.

Masalan, massasi m - ga teng bo'lgan moddiy nuqta inertsial sistemadagi Dekart o'qlarida

$$x = x(t), \quad y = y(t), \; z = z(t)$$

qonuniyat bilan harakat qilsin, va shu moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasining bosh vektorini aniqlash so'ralsin. U holda shu harakat qonunlaridan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olamiz, ushbu hosilalar aslida shu nuqtaning tezlanishini Dekart koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini tashkil etadi. Shuning uchun ularning har birini nuqtaning massasiga ko'paytmalari, shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasining bosh vektorini shu o'qlardagi proektsiyalarini beradi, ya`ni

$$F_x = m \cdot \ddot{x}; \qquad F_y = m \cdot \ddot{y}; \qquad F_z = m \cdot \ddot{z}; \quad (3.8)$$

Moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi bosh vektorining moduli (son qiymati) quyidagicha aniqlanadi,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (3.9)$$

Ushbu vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchak kosinuslari, quyidagi formulalar orqali aniqlanadi

$$Cos\left(\vec{F},\hat{x}\right) = \frac{F_x}{F}; \qquad Cos\left(\vec{F},\hat{y}\right) = \frac{F_y}{F}; \qquad Cos\left(\vec{F},\hat{z}\right) = \frac{F_z}{F}; \quad (3.9a)$$

Agarda moddiy nuqtaning massasi m, va uning tabiiy o'qlardagi harakat qonuniyati $S = f(t)$ berilgan bo'lsa, shu moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasining bosh vektorini tabiiy o'qlardagi (3.7) formulalardan aniqlaymiz. Kuchlarning bosh vektorini moduli

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \qquad (3.10)$$

yo'nalishi esa quyidagicha aniqlanadi,

$$tg\mu = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n}; \qquad (3.10a)$$

bu yerda $\vec{F}_\tau$ - doimo traektoriyaga urinma holda yotadi, agar $F_\tau > 0$ bo'lsa tezlik vektori bilan bir tomonga yo'naladi va ular ustma-ust yotadilar, τ - o'q tezlik vektori bilan bir tomonga yo'nalgan, agar $F_\tau > 0$ bo'lsa tezlik vektoriga qarama-qarshi tomonga yo'naladi. $F_n -$ vektori normal o'q bo'ylab yo'naladi, agar $F_n > 0$ bo'lsa u egrilik radiusi bo'ylab botiq tomonga yo'naladi, chunki $\overline{n}$ -vektori doimo traektoriya`ning shu nuqtadagi botiq tomoniga yo'nalgan.

2.Ikkinchi asosiy masala

Nazariy mexanika fanining dinamika qismi asosan ikkinchi masalani yechishga bag'ishlangan bo'lib, unda moddiy nuqtaning massasi va shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi berilgan bo'lib, nuqtaning harakat qonunlari aniqlanadi.

Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi quyidagi tartibda yechiladi.

1.Inertsial sanoq sistemasini kiritib, koordinata o'qlari tanlab olinadi. Agar nuqta biror holatda muvozanatda bo'la olsa, u holda sanoq boshi uchun nuqtaning statik muvozanat holatini olinadi.

2. Nuqtaga ta`sir etuvchi va bog'lanish reaktsiya kuchlari ko'rsatiladi.

3. Nuqta harakatining boshlang'ich shartlari aniqlanadi, ya`ni $t = o$ bo'lgan boshlang'ich paytda $x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$ aniqlab olinadi.
4. Nuqta harakatining differentsial tenglamalari tuziladi.
5. Tuzilgan differentsial tenglamalarning boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi aniqlanadi va izlanayotgan noma`lumlar topiladi.

Masalan, massasi m ga teng bo'lgan M moddiy nuqtaga N ta kuchlar sistemasi ta`sir etsin, shu kuchlar ta`siridagi moddiy nuqtaning harakat qonunini aniqlash so'ralsin. Bunday masalani yechish uchun, avval $t = 0$ yoki t vaqtdagi nuqtaning tezligi, ya`ni uning boshlang'ich yoki t dagi tezligi, hamda shu M nuqta koordinatalar sistemasining qaysi joyida turgan ekanligi berilishi shart.

So'ngra yuqorida aytganimizdek, agar nuqtaning traektoriyasi berilgan bo'lsa (3.1) tenglamani tabiiy o'qlarga proektsiyalab (3.7) tenglamalar sistemasini yozamiz. Agar nuqtaning traektoriyasi nomalum bo'lsa, (3.1) vektor tenglamani Dekart koordinata o'qlariga proektsiyalab tegishlicha, moddiy nuqta fazoda harakatlansa (3.4), birorta tekislikda harakatlansa (3.5), va nihoyat to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa (3.6) tenglamalarni hosil qilamiz.

Agar moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi faqat o'zgarmas kuchlar sistemasidan (masalan og'irlik kuchidan), yoki faqat vaqtga bog'liq o'zgaruvchi kuchlar sistemasidan iborat bo'lsa, bunday masalani yechish oddiy usulda ikki marta integrallash orqali bajariladi.

Agar moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi nuqtaning holatiga va uning tezligiga, yoki aralash bo'lgan kuchlar sistemasidan tashkil topsa, (3.4), (3.5), (3.6) va (3.7) tenglamalar sistemasi ikkinchi tartibli differentsial tenglamalardan iborat bo'ladi, va unday masalalar har doim ham tugal yechimga ega bo'lavermasligi mumkin.

Lekin hozirgi davrda kompyuterlar yordami bilan harqanday tenglamani juda katta aniqlikda va o'ta qisqa muddatda yechish mumkinligini hisobga olsak, endi yechilmagan masala deyarli yo'q desak ham bo'laveradi.

Shunday qilib yuqorida tuzilgan differentsial tenglamalar sistemasini yechib, harakat qonunlarini aniqladik deylik, ya`ni Dekart koordinatalarida bo'lsa

$$x = x(t_1, C_1, C_2) \;\; y = y(t_1, C_2, C_4)\, z = z(t_1, C_5, C_6)$$

ni aniqladik, lekin ko'rinib turganidek, 6 ta integral doimiylari paydo bo'ldi, ularni aniqlash uchun, yuqorida aytganimizdek nuqtaning boshlang'ich shartlari yordamida ularning qiymatlarini aniqlaymiz.

Agar tenglama tabiiy o'qlarda tuzilgan bo'lsa, (3.7) tenglamalarni yo'l $S-$ ga nisbatan yechamiz, ya`ni

$$S = f\,(t_1, C_1, C_2)$$

bu holda faqat ikkita integral doimiysi hosil bo'ladi, ularni ham nuqtaning $t = 0$ vaqtdagi, boshlang'ich tezlik va boshlang'ich holati orqali aniqlaymiz. Va nihoyat topilgan integral doimiylarini yechilgan tenglamalarga qo'ysak, moddiy nuqtaning shu kuchlar ta`siridagi harakat qonuniyatini aniqlaymiz.

3. Kuchlarning klassifikatsiyasi

Biz yuqorida aytib o'tganimizdek, moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar asosan 4-ta guruhga bo'linadi:

1 nchi guruhga yo'nalishi va son qiymati doimiy bo'lgan kuchlar sistemasi kiradi, masalan og'irlik kuchi, bunga misol bo'la oladi, ya`ni

$$\vec{F} = \text{const}.$$

2-chi guruh ga yo'nalishi va uning son qiymati faqat vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan kuchlar sistemasi kiradi, masalan elektr qo'ng'irog'ining kuchi misol bo'la oladi, $F = f\,(t)$

3-chi guruh ga yo’nalishi va son qiymati nuqtaning holatiga ya`ni uning koordinatlariga bog’liq ravishda o’zgaruvchi kuchlar, masalan prujinaning elastiklik kuchi bunga misol bo’laoladi, $F = f(x, y, z)$

4-chi guruh ga yo’nalishi va son qiymati nuqtaning tezligiga bog’liq ravishda o’zgaruvchan kuchlar sistemasi, masalan muhit qarshiligining ta`sir kuchi misol bo’la oladi, $F = (V_k, V_y, V_z)$

Ko’p hollarda ular alohida alohida ta`sir etmasdan balki aralash holda keladilar, ya`ni $F = (C, t, x, y, z\ V)$ Mexanik sistemaga ta`sir etuvchi kuchlar bundan tashqari yana ikki guruhga, ichki va tashqi kuchlarga ajraladilar, lekin ularni keyinchalik ko’rib o’tamiz.

Shundan keyin, talabalarga dinamikaning birinchi va ikkinchi masalasiga doir masalalar yechilib ko’rsatiladi.

4. Dinamikaning birinchi va ikkinchi asosiy masalasiga doir masalalarni qaraylik.

Masala 1. *Massasi m-ga teng bo’lgan M moddiy nuqta Oxy tekisligida,*

$$x = \alpha \cdot \cos k(t) \quad y = b \cdot \sin k(t)$$

qonuniyat bilan harakat qilayotgan bo’lsin. Bu yerda $\alpha, b, k -$ lar o’zgarmas qiymatlar,
t - vaqt. Shunday harakatdagi moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning bosh vektori aniqlansin.

Echish: Avvalo shu moddiy nuqtaning harakatining traektoriyasini aniqlaylik, bunday masalalarni kinematika qismida batafsil ko’rib o’tilgan, shuning uchun har bir tenglamani ikkala tarafini kvadratga ko’tarib, ularni qo’shamiz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Demak moddiy nuqta, yarim o’qlari a va b - lardan iborat bo’lgan ellips bo’ylab harakat qilmoqda. Endi (3.8) differentsial sistemasiga asosan, quyidagini yozamiz,

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2 ac”skt, \qquad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2 b\sin kt,$$

Ushbu kuchning modulini aniqlaylik,

$$F_x = -mk^2x, \qquad F_y = -mk^2y,$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

bu yerda $r -$ harakatlanayotgan moddiy nuqtaning radius vektori.

MODDIY NUQTA NISBIY HARAKATINING DIFFERENTSIAL TENGLAMALARI,

Mavzuning maqsadi: Biz yuqorida inertsial sistemada joylashgan moddiy nuqtaning harakati uchun (3.1), ya`ni nuqta dinamikasining asosiy qonunini I.Nyuton tomonidan ifoda etilganini aytib o’tgan edik. Endi agar shu moddiy nuqta noinertsial hisoblash sistemasida harakatlansa, uning differentsial tengalamasining ko’rinishi qanday bo’lishini aniqlaylik.

Bayoni:

1. ***Moddiy nuqta nisbiy harakatining differentsial tenglamasi***

Buning uchun (3.1) vektor tenglamaning chap tarafidagi absolyut tezlanish vektorini, <u>*Kinematika*</u> qismidagi nuqtaning murakkab harakati uchun yozilgan ko'rinishidan foydalanamiz, ya`ni

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{Kor}$$

Bu yerda $\vec{a}$ - nuqtaning absolyut tezlanishi, $\vec{a}_r$ - nisbiy tezlanishi, $\vec{a}_e$ - ko'chirma tezlanishi, $\vec{a}_{Kor}$ - Koriolis tezlanishi. Tenglamani ikkala tomonini nuqtaning massasiga ko'paytirsak,

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_r + m \cdot \vec{a}_e + m \cdot \vec{a}_{kor}$$

ni hosil qilamiz, endi bu tenglamani nisbiy tezlanish vektoriga nisbatan yechsak, quyidagini olamiz,

$$\mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}} = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{a}} - \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{e}} - \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{kor}}$$

yoki,

$$m \cdot \vec{a}_r = m \cdot \vec{a} + (-m \cdot \vec{a}_e) + (-m \cdot \vec{a}_{kor})$$

moddiy nuqta massasining uning tezlanish vektoriga ko'paytmasi unga ta`sir etayotgan kuchlar sistemasining yig'indisi ekanligini (3.1) tenglamadan eslasak va quyidagi belgilashni kiritsak,

$$\vec{\Phi}_e^u = -m \cdot \vec{a}_e$$

$$\vec{\Phi}_{kor}^u = -m \cdot \vec{a}_{kor}$$ va (3.1) tenglamaga asosan $$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

ekanligini xisobga olsak erkin moddiy nuqtaning noinertsial sanoq sistemasidagi nisbiy harakatining differentsial tenglamasining vektor ifodasini aniqlaymiz, ya`ni

$$m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e^u + \vec{\Phi}_{kor}^u \tag{3.11}$$

agar moddiy nuqta bog'lanishli bo'lsa, ya`ni qisman erkin harakatda bo'lsa, uning noinertsial sanoq sistemasidagi nisbiy harakatining differentsial tenglamasi, quyidagicha yoziladi,

$$m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \vec{\Phi}_e^u + \vec{\Phi}_{kor}^u \tag{3.12}$$

Bu yerda $\sum \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{k}}$ - bog'lanishlarning reaktsiya kuchlari vektorlari. $\vec{\Phi}_{\mathrm{kor}}^{и} -$ Koriolis inertsiya kuchi, $\vec{\Phi}_e -$ ko'chirma harakatdagi inertsiya kuchi bo'lib, ular real kuch bo'lmasdan, balki sanoq sistemasining noinertsialligidan paydo bo'ladigan kuchlardir.

Shunga ko'ra mabodo shu sanoq sistemasi o'zining harakatini to'g'ri chiziq bo'ylab va o'zgarmas tezlik bilan davom etdirsa, ushbu inertsiya kuchlari o'z-o'zidan yo'qoladilar, va (3.1) formulaga qaytiladi.

Endi agar, birorta moddiy nuqtaning noinertsial sanoq sistemasidagi nisbiy harakati tekshirilayotgan bo'lsa, yuqoridagi differentsial tenglamani, masalaning shartiga ko'ra Dekart koordinata o'qlariga yoki tabiiy o'qlarga proektsiyalab, tegishlicha skalyar tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, va ularni nomalum qiymatlarga nisbatan yechib, tegishli javoblarni olamiz.

2. Klassik mexanikaning nisbiylik printsipi

Faraz qilaylik massasi *m* - ga teng bo'lgan moddiy nuqta, qiymat jihatidan o'zgarmas bo'lgan har qanday katta tezlikda, to'g'ri chiziqli traektoriya bilan harakat qilayotgan sanoq sistemasida joylashgan bo'lsin. U holda $\vec{V}_e = const$, bo'lgani sababli, bunday sanoq sistemaning absolyut tezlanishi nol ga teng bo'ladi, yoki ko'chirma va Koriolis tezlanishlar nol ga teng bo'ladilar.

Shu sababli tenglamadagi, Koriolis va ko'chirma inertsiya kuchlari ham nolga teng bo'lib, ushbu differentsial tenglama, (3.1) dan hech qanday farq qilmaydi.

Demak inertsial sistemalarning harakati tezlik vektorlarining qiymatlari harxil bo'lganda ham, dinamikaning asosiy qonuni ikkala sistemada ham bir hilda amal qilar ekan.

Buni *klassik mexanikaning nisbiylik printsipi* deb ataladi, ya`ni dinamikaning asosiy qonunlari barcha inertsial sistemalarda, ularning tezlik vektorlarining modullari va yo'nalishlari qanday bo'lishlaridan qatiy nazar, o'z kuchini saqlab qolar ekan, boshqacha qilib aytganda u qonun barcha inertsial sistemalarda *invariant* bo'lar ekan.

Masalan siz, katta lekin qiymati o'zgarmas bo'lgan tezlik bilan fazoda uchib ketayotgan samolyotda, va kichikroq modulga (qiymatga) ega bo'lgan, lekin u ham o'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan poezdda bir hil massali moddiy nuqtalar olib, ularga bir`il kuchlar ta`sir etsangiz, ikkala sistemada ham bir hil nisbiy harakat olar ekansiz, va ular bir xil traektoriyalar chizar ekanlar.

3. Moddiy nuqtaning nisbiy muvozanati.

Endi shunday holatni ko'raylik, moddiy nuqta noinertsial qo'zg'aluvchi sanoq sistemasida joylashgan bo'lsin, lekin u, shu sistemada muvozanat holatini saqlab tursin, u holda ushbu muvozanat *nisbiy muvozanat* deyiladi. Masalan osmonga ko'tarilib ketayotgan samolyotni ichida tikka turgan odamni, yoki egri yo'ldan ketayotgan poezdni ichidagi tikka turgan odamni faraz o'iling, agar shu odam o'z muvozanati saqlab qolishni istasa yerdagiga o'xshab turaolmaydi, buning uchun unga qo'shimcha kuch ta`sir etish kerak.

Sababi, yerdagi kichkina tezlik bilan harakat qilayotgan jismlarda, *ko'chirma inertsiya kuchi* uncha sezilmaydi, osmondagi samolyot va tez yurar poezdlarda ko'chirma inertsiya kuchlari sezilarli darajada paydo bo'ladi, shuning uchun *nisbiy muvozanat*ni saqlash uchun, ko'chirma va *Koriolis inertsiya kuchlari*ning vektor yig'indilariga qiymat jihatidan teng va yo'nalishi esa unga qarama-qarshi bo'lgan aktiv kuch bilan aks ta`sir etish kerak, ya`ni

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e^{и} + \vec{\Phi}_{kor}^{и} = 0 \qquad (3.13)$$

Erning ustida tinch holatda turganingizda, sizning yerga nisbatan tezligingiz nolga teng, shuning uchun Koriolis tezlanishi yo'q, lekin siz samolyot yoki poezdda ketayotganingizda siz shu poezd yoki samolyotning tezlanish vektoriga teng bo'lgan, ko'chirma harakat olasiz, natijada sizning massangizga proportsional ravishda ko'chirma va Koriolis inertsiya kuchlari ta`sir etadi.

Bu esa o'z navbatida bir xil tezlanish vektori bilan yonma-yon joylashgan, lekin massalari har xil bo'lgan ikki odamga qiymatlari ikki xil bo'lgan inertsiya kuchlari ta`sir etadi, shuning uchun massasi ozroo' odam bu kuchni ozroq sezsa, massasi katta odam esa kattaroq miqdorda sezadi.

Natijada massasi kichkina odam *nisbiy muvozanat*ni saqlashga ozroq kuch bilan aks ta`sir ko'rsatsa, massasi katta odam o'z navbatida tegishlicha kattaroq kuch bilan aks ta`sir ko'rsatishi zarur bo'ladi.

Demak Koriolis inertsiya kuchlari ta`sirida uchayotgan samolyotlar, raketalar, snaryadlar, harakatlanayotgan havo, oqayotgan daryolar va umuman nisbiy harakatda bo'lgan hamma massalarga uning ta`siri natijasida, shu massalarning harakatida katta o'zgarishlar sodir bo'ladi.

4.Vaznsizlik

Koriolisning dinamik teoremasi orqali har qanday jismning qaysi holatlarda vaznsiz bo'lishini osongina aniqlab olamiz, xuddi shu sababli osmondagi suniy yer yo'ldoshlarining harakatini chuqur tushunib olishimiz mumkin. Vaznsizlik holati yuz berganda jismlarning bir-biriga o'zaro ta`siri va aks ta`siri nolga teng bo'ladi. Ushbu holatda xar bir nuqtaning tezlik va tezlanishlari o'zaro teng bhladi.

Vaznsizlik yuz bergan joyda joylashgan tarozida hech qanday jismni og'irligini aniqlab bo'lmaydi, chunki u yerda joylashgan jismlarning o'zaro ta`sir va aks ta`sir kuchlari nolga teng bo'ladi. Ya`ni `ar bir zarrachaga ikkita kuch ta`sir etadi, ulardan biri inertsiya kuchi ikkinchisi, butun dunyo tortilish kuchi bo'lib ularning vektor yig'indilari nolga teng bo'ladi, ya`ni

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e^и = 0 \quad \text{yoki} \quad \vec{R} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^и = 0 \qquad (3.13\text{ a})$$

Bundan ko'rinib turibdiki agar bog'lanishlarning reaktsiya kuchlari nol`ga teng bo'lsa, bu vaznsizlik alomatini belgilar ekan.

4 - Mavzu: MEXANIK SISTEMA
MEXANIK SISTEMA MASSALAR MARKAZINING HARAKATI HAQIDAGI TEOREMA.

Reja:

1. Mexanik sistema deb nimaga aytiladi.
2. Tashqi va ichki kuchlarni tariflang.
3. Ichki kuchlarning asosiy xossalarini aytib bering.
4. Massalar markazi deb nimaga aytiladi va qaysi formulalar orqali aniqlanadi.
5. Mexanik sistema massalar markazi deb nimaga aytiladi.
6. Mexanik sistema massalar markazi bo'shliq joyda o'rnashgan bo'lishi mumkinmi.
7. Massalar markazini qanday kuchlar harakatga keltiradi.
8. Massalar markazining harakatini saqlanish qonunini ifodalang.
9. Moddiy nuqta harakat mikdorining o'zgarish teoremasini ifodalang.
10. Kuch impulsini ifodalang.
11. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarish teoremasini ifodalang.
12. Mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonunini ifodalang.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Mexanik sistema, mexanizm, mashina tushunchalari, qattiq jism, ichki kuchlar va ularning xossalari? Mexanizm va mashina harakatlari uchun ham dinamika masalalarini yechish mumkinmi? Sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonuni bilan inertsiya qonuni farqi bormi? Savollarga javobni shu mavzuni o'zlashtirsangiz bilib olasiz.

Tayanch so'z va iboralar

Mexanik sistema. Sistema massalalar markazi koordinatalari Ichki kuchlar. Tashqi kuchlar. Ichki kuchlarning I-xossasi. Ichki kuchlarning II-xossasi. Mexanik sistema harakati differentsial tenglamalari. Bog'lanishdagi sistema harakatining differentsial tenglamalari.

Mavzuning maqsadi: Texnikada qo'llaniladigan turli xil mashina va mexanizmlar, qurilish inshootlari va boshqalar umuman olganda moddiy nuqta bo'lmasdan, balki ularning majmuasidandan iborat bo'lib, ularni bir so'z bilan aytganda mexanik sistema deyiladi. Quyida shunday mexanik sistemalarning dinamikasi o'rganiladi.

Bayoni:

1.Mexanik sistema va unga ta`sir etuvchi ichki kuchlarning xossalari

Mexanik sistema deb shunday moddiy nuqtalar to'plamiga aytiladiki, uni tashkil etuvchi moddiy nuqtalar yoki jismlar ma`lum qonuniyat asosida bir-birlari bilan *ichki kuchlar* ta`siri orqali o'zaro bog'langan bo'ladilar.

Shunga ko'ra mexanik sistema nuqtalariga tasir etuvchi kuchlar ichki va tashqi kuchlarga ajraladi. *Ichki kuchlar* deb, shu mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalarning o'zaro ta`sir va aks ta`sir kuchlariga aytiladi. *Tashqi kuchlar* deb, shu mexanik sistema nuqtalariga, sistemaga kirmagan boshqa moddiy nuqtalarning tasir kuchlariga aytiladi.

Ichki kuchlarni tashqi kuchlardan farqlash uchun, quyidagicha belgi kiritiladi. $F_k^{\,e} -$ tashqi kuchlar, $F_k^{\,i}$ - ichki kuchlar etib belgilanadi.

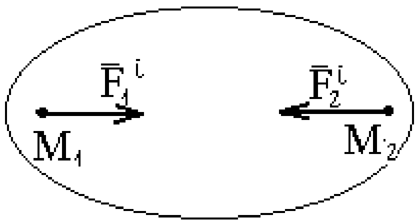
Shuni eslatib o'tish lozimki, biz moddiy nuqta dinamikasini o'rganganimizda, barcha kuchlar faqat tashqi bo'lar edi, ichki kuchlar mutloq yo'q edi, shuning uchun bunday belgilashning xojati yo'q edi.

Har qanday mexanik sistemaning harakati ichki va tashqi kuchlarga bog'liq holda o'rganiladi. Shunga ko'ra, ichki kuchlarning quyidagi ikkita asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

1-xossasi. Mexanik sistema ichki kuchlarining bosh vektori (u sistema hoh harakatda, hoh muvozanat holatda bo'lsin) har doim nol ga teng, ya`ni:

$$\sum \vec{F}_k^{\,i} = 0 \qquad (3.45)$$

Isbot (3.12 shaklga qarang): Biz mexanik sistemaga kiruvchi ixtiyoriy ikki nuqta tanlab olaylik va ularni M_1 *ва* M_2 deb belgilaylik. Dinamikaning uchinchi qonuniga asosan $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, lekin, agar shu ikkala nuqta bir mexanik sistemaga taaluqli bo'lsa, ushbu kuchlar ichki kuchlar guruhiga kiradilar, yani $\vec{F}^{\,i}{}_1 = -\vec{F}^{\,i}{}_2$, shunga ko'ra $\vec{F}^{\,i}{}_1 + \vec{F}^{\,i}{}_2 = 0$, shu bilan 1-xossa isbotlandi.



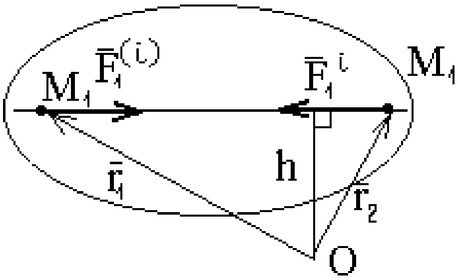
3.12 shakl.

2-xossasi. Mexanik sistema ichki kuchlarining, ixtiyoriy nuqtaga nisbatan olingan bosh moment vektori (u sistema hoh harakatda, hoh muvozanat holatda bo'lsin) har doim nol ga teng, yani:

$$M_o = \sum m_o(\vec{F}_k^{\,i}) = 0 \tag{3.46}$$

Isbot (3.13 shaklga qarang): Statika kursidagi qoidaga binoan, har qanday kuchning biror nuqtaga nisbatan momenti, quyidagicha aniqlanadi,

va $m_o(\vec{F}_2^{\,i}) = +F_2^{\,i} \cdot h$



3.13 shakl.

Ichki kuchlarning har bir juftining modullarini o'zaro tengligini e`tiborga olsak, ya`ni $F_1^i + F_2^i$ ekanligini uchun,

$$m_o(\vec{F}^i{}_1) + m_o(\vec{F}^i{}_2) = (F^i{}_2 - F^i{}_1) \cdot h = 0$$ ekanligini isbot qilamiz. Demak ichki kuchlarning ikkala xossalariga asosan quyidagi ikkita tenglamani isbot qildik, ya`ni

$$\vec{F}^i = \sum \vec{F}_k^{\,i} = 0$$

$$\vec{M}^i{}_o = \sum m_o(\vec{F}_k^{\,i}) = 0$$

2. Mexanik sistema harakatining differentsial tenglamalari

Agar mexanik sistema nuqtalariga tasir etuvchi kuchlarning bosh vektorini F^i, va tashqi kuchlarning bosh vektorini F^e deb belgilasak, dinamikaning ikkinchi qonuniga asosan quyidagi differentsial tenglamalar sistemasini yozamiz.

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}^e{}_1 + \vec{F}^i{}_1$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}^e{}_2 + \vec{F}^i{}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3.47}$$

$$m_N \frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = \vec{F}^e{}_N + \vec{F}^i{}_N$$

Agarda ushbu (3.47) tenglamalar sistemasini O_x, O_y, O_z koordinata o'qlariga proektsiyalasak, masalalarni yechishda foydalaniladigan *3 N* ta skalyar tenglamalar sistemasini yozishimiz mumkin.

Mexanik sistemaning harakat qonunini aniqlash uchun shu *3 N* ta differentsial tenglamalar sistemasini integrallash lozim, so’ngra boshlag’ich shartlar orqali integral doimiylarini aniqlash zarur bo’ladi.

Aslini olsak bu (3.47) tenglamalar sistemasini yechish murakkab vazifani tashkil etadi. Xatto ikkita va uchta moddiy nuqtalarning butun dunyo tortilish qonuni asosidagi xarakatini aniqlash ham, juda murakkab hisoblarni bajarishga olib keladi.

Shuning uchun, ushbu tenglamalar sistemasidan amalda kam foydalaniladi, asosan mexanik sistemaning xarakatini o’rganishda Lagranjning ikkinchi tur differentsial tenglamalaridan foydalaniladi, uni keyinroq o’rganamiz.

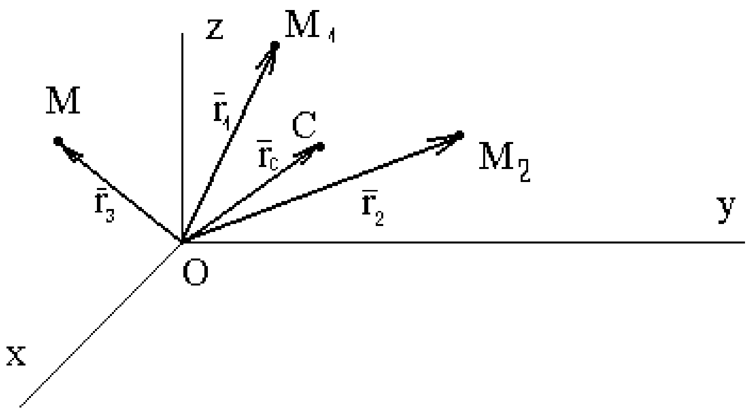
Shunga qaramasdan, mexanik sistema uchun qo’yidagi to’rtta teoremadan keng foydalaniladi, va aksariyat masalalar ular orqali tezdagina o’z yechimini topadi.

Mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalarning o’zaro joylashishlari, uning harakatiga uzviy bog’liqdir. Masalan bir xil og’irlikdagi, lekin massalari turlicha joylashgan mexanik sistemaning harakatlarini solishtirib ko’raylik. Ulardan birida massalar disk shaklida, ikkinchisida nayza shaklida joylashgan bo’lib, lekin ularning massalari miqdor jihatdan o’zaro teng, deb faraz qilaylik.

Endi ularning og’irlik markazlariga bir xil qiymatdagi kuchlar tasir etgandagi harakatlarni tekshirsak, ular turlicha harakat qilishadi. Demak massalarni o’zaro joylashishi ularning harakatlariga katta tasir ko’rsatar ekanligini guvohi bo’lamiz. Shuning uchun nazariy mexanikada inertsiya momentlari tushunchasi kiritiladi, va u mexanik sistemaning aylanma harakatlarida eng asosiy qiymatlardan biri hisoblanadi. Quyida ushbu masala bilan tanishib o’taylik.

3.Massalar markazi.

Faraz qilaylik, mexanik sistema *N*-ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo’lib, har birining massalari turlicha, ya'ni $m_1, m_2, m_3, \dots m_N,$ dan iborat bo’lsin. Shu mexanik sistema biror koordinata sistemasida harakat qilayotgan bo’lsin, va xozirgi onda, yani $t = 0$ da ularning xar biri tegishlicha $r_1, r_2, \dots r_N$ radius vektorlarga ega bo’lsinlar.



3.14 shakl

U holda, statika qismidagi og’irlik markazini aniqlash formulasidan foydalanib, og’irlik kuchlarini uning massalariga o’xshab joylashishini e`tiborga olsak, u quyidagicha bo’ladi.

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \tag{3.48}$$

bu yerda $M = \Sigma m_k$, yani mexanik sistemaning umumiy massasi, skalyar qiymat.

Endi (3.48) vektor tenglamani O_x, O_y, O_z koordinata o’qlariga proektsiyalasak

$$\begin{cases} X_{\_} = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} \\ Y_c = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} \\ Z_c = \dfrac{\sum m_{.} z_k}{M} \end{cases} \qquad (3.49)$$

Amalda, yani masalalar yechganimizda massalar markazini (3.48) tenglama bilan emas, balki (3.49) skalyar tenglamalar sistemasi orqali aniqlanadi.

Shunday hollar bo'lishi mumkinki massa markazi jismdan tashqarida bo'shlikda ham yotishi mumkin. Masalan halqaning massa markazi uning geometrik markazi, yani o'rtasida joylashgan, lekin u yerda massa yo'q.

Shuning uchun massa markazini, ularning to'plangan joyi ekan deb tushunmaslik kerak, balki shu nuqta mexanik sistema nuqtalarining massalarini qanday joylashganligini belgilaydigan nuqta, yani massalar shu nuqtaga nisbatan simmetrik ravishda joylashgan markaz deb qarash lozim.

Mavzuning maqsadi: Mexanik sistema dinamikasining asosiy parametrlaridan biri sifatida, *massalar markazi* degan tushuncha kiritilgan. Quyida shu tushunchani keng ravishda yoritish bilan birga, shu *massalar markazining harakat qonuni*yati, uning o'zgarishi qanday sabablarga bog'liq ekanligi va qanday holatlarda u o'zgarmas, yani saqlanib qolishligi haqida so'z yuritiladi.

Bayoni:

1.Mexanik sistema massalarining markazi

Faraz qilaylik mexanik sistema *N*-ta moddiy nuqtadan iborat bo'lsin va har birining massasi tegishlicha $m_1, m_2, - m_N$ larga teng bo'lsin. U holda shu *mexanik sistemaning massa markazi* qo'yidagi formuladan aniqlanadi,

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} \\ y_c = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} \\ z_c = \dfrac{\sum m_k z_k}{M} \end{cases} \qquad (3.69)$$

yoki

$$\begin{cases} Mx_c = \sum m_k x_k \\ My_c = \sum m_k y_k \\ Mz_c = \sum m_k z_k \end{cases} \qquad (3.70)$$

2. Mexanik sistema massalar markazi harakatining differentsial tenglamasi.

Endi (3.7) tenglamalarning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha 2 marta hosila olsak massalar o'zgarmas bo'lgani uchun,

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum m_k \ddot{x}_k \\ M\ddot{y}_c = \sum m_k \ddot{y}_k \\ M\ddot{z}_c = \sum m_k \ddot{z}_k \end{cases} \tag{3.71}$$

Bu tenglamalarni o'ng tomoni mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini anglatadi, shunga ko'ra u

$$\begin{aligned} \sum m_k \ddot{x}_k &= \sum F_{kx}^e + \sum F_{kx}^i \\ \sum m_k \ddot{y}_k &= \sum F_{ky}^e + \sum F_{ky}^i \\ \sum m_k \ddot{z}_k &= \sum F_{kz}^e + \sum F_{kz}^i \end{aligned} \tag{3.72}$$

$\sum \mathrm{F}_{\mathrm{kx}}^{\mathrm{i}} = \sum \mathrm{F}_{\mathrm{ky}}^{\mathrm{i}} = \sum \mathrm{F}_{\mathrm{kz}}^{\mathrm{i}} = 0$ bo'lgani uchun (3.72) tenglamani (3.71) ga qo'ysak

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^u \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^u \\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^u \end{cases} \tag{3.73}$$

Bu tenglamalar sistemasi, mexanik sistema massasining markazi C nuqtaning qanday qonuniyat bilan harakat qilishini aniqlab beruvchi differentsial tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bundan ko'rinib turibdiki massa markazi C, o'z harakatini faqat tashqi kuchlar orqaligina o'zgartira olar ekan xolos. Yani massa markazining tezlik vektori $\vec{V}_C$ - faqatgina tashqi kuchlar ta`sirdagina o'zgarishi mumkin ekan xolos.

Shunga ko'ra, ichki kuchlar qanday kattalikka ega bo'lishlaridan qatiy nazar hech qachon massa markazining holatini o'zgartira olmas ekan, demak teorema isbot bo'ldi.

Teorema: ***Mexanik sistema massasining markazi*** C nuqtaning harakatini ichki kuchlar (qanday kattalikka ega bo'lishlaridan qatiy nazar) hech qachon o'zgartira olmas ekan, ular faqat tashqi kuchlar tasiridagina o'zgartirilar ekan.

3. Massa markazi harakatining saqlanish qonuni.

Faraz qilaylik umumiy massasi *M*-ga teng bo'lgan mexanik sistemaning massa markazi bo'lgan C nuqtaning tezlik vektori $\overline{V}_c$ bo'lsin, va shu nuqtaning tezlik vektorini o'zgarmas holda saqlash lozim bo'lsin, ya`ni $\overline{V}_c = const$, u holda C nuqtaning tezlanishi nol ga teng bo'lishi shart,

U holda $\overline{a}_c = \dot{\overline{V}}_c = 0$, chunki $\overline{V}_c = const.$

$\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = \ddot{z}_c = 0$, bo'lgani uchun (3.73) tenglamadan $\sum F_{kx}^e = \sum F_{ky}^e = \sum F_{kz}^e = 0$ bo'lishi zarur ekanligini aniqlaymiz.

Demak, agarda mexanik sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarining bosh vektori nolga teng bo'lsa, mexanik sistemaning massa markazi bo'lgan C nuqta tezligining moduli va yo'nalishi o'zgarmas holda saqlanib qoladi.

Bu qonun <u>*mexanik sistema massa markazining harakatini saqlanish qonuni*</u> deyiladi.

Bundan faqat uning harakati o'zgarmas bo'lar ekan degan, xulosa chiqmaydi, agar C nuqta muvozanat (tinch) holatda yani $V = 0$ bo'lsa, yoki $V = cons\ t$ bo'lsa, uning tezlik vektorini faqat tashqi kuchlargina o'zgartirishi mumkin.

Ushbu qonun nafaqat erkin mexanik sistema uchun, va hatto bog'lanishdagi mexanik sistema uchun ham o'rinlidir.

<u>Masalan</u>: Massasi M bo'lgan vagon to'g'ri chiziq bo'ylab yotqizilgan relsda V_C tezlik bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Agar tashqi kuchlarining bosh vektorining shu o'qdagi proektsiyasi $\Sigma F^e{}_{kk} = 0$ bo'lsa (3.73) tenglamalar sistemasidan $V_C = cons\ t$ ekanligini aniqlaymiz.

Demak, agar tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proektsiyasi nolga teng bo'lsa, massa markazining tezlik vektorining shu o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'lar ekan.

Bu teorema orqali juda ko'p masalalarni yechiladi, hamda texnikada sodir bo'ladigan ko'p hodisalarning asl sabablarini aniqlashda keng foydalaniladi.

<u>*5- Mavzu: MASSALAR GEOEMETRIYASI QATTIQ JISMNING INERTSIYA MOMENTLARI.*</u>

Reja:

1. Inertsiya momenti deb nimaga aytiladi.
2. Inertsiya radiusi nima.
3. Parallel o'qlarga nisbatan inertsiya momentini yozib bering.
4. Bir jinsli oddiy figuralarning (sterjen, to'g'ri to'rtburchakli plastina, doira) inertsiya momentlarini yozib bering.
5. Ixtiyoriy yo'nalgan o'qqa nisbatan inertsiya momenti formulasini yozib bering.

Muammoli vaziyat, savol yoki topshiriq

Massalar geometriyasi nima? Masalalar markazi va og'irlik markazi tushunchalarining nima farqi bor? Doira yoki tsilindrning markazidan ko'ndalang kesimiga perpendikulyar o'tgan o'qqa nisbatan inertsiya radiusi bilan *R*-orasida qanday bog'lanish bor?

Tayanch so'z va iboralar

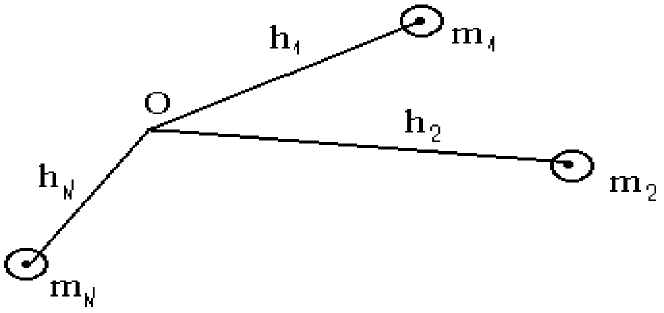
O'qqa nisbatan inertsiya momenti. Nuqtaga nisbatan inertsiya momenti. Tekislikka nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi.

Gyugens-Shteyner teoremasi. Markazdan qochuvchi inertsiya momentlari. Inertsiya ellipsoidi. Inertsiya bosh o'qlari. Inertsiya bosh momentlari.

Mavzuning maqsadi: Mexanik sistemaning aylanma harakatlarini o'rganishda, ularning massalarini aylanish o'qiga nisbatan qanday joylashganligi katta ahamiyatga ega ekanligi uchun, *inertsiya momentlari* degan tushuncha kiritamiz va uni qanday hisoblashni o'rganaylik.

Bayoni:

1.Nuqtaga nisbatan inertsiya momenti.

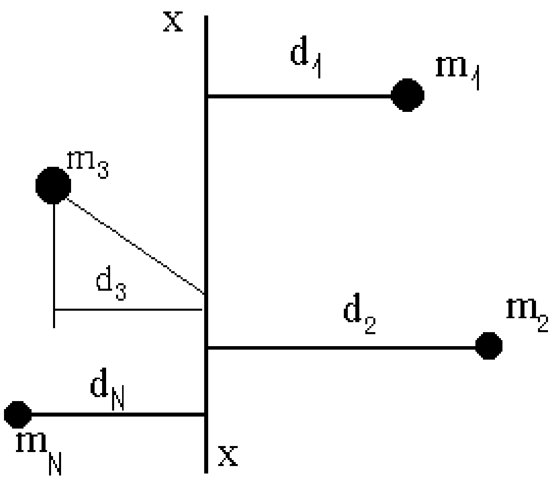


3.15 shakl.

3.15 shaklda massalari turlicha bo'lgan *N*-ta moddiy nuqta *O* nuqtadan tegishlicha $h_1, h_2, \ldots h_n -$ uzoqlikda joylashgan bo'lsinlar. U holda shu sistemaning *O* *nuqtaga nisbatan inertsiya momenti* deb, har bir moddiy nuqtaning massasini, uni *O* nuqtagacha bo'lgan masofa kvadratlariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi, yani

$$J_0 = m_1\ h_1^2 + m_2\ h_2^2 + \ldots + m_N\ h_N^2 = \Sigma m_k\ h_k^2 \qquad (3.50)$$

2. O'qqa nisbatan inertsiya momenti.



3.16 shakl

3.16 shaklda, yuqoridagi mexanik sistemaning, ixtiyoriy yo'nalgan XX o'qqa nisbatan joylashganligi tasvirlangan. Shuning uchun shu mexanik sistemani XX *o'qqa nisbatan inertsiya momenti* deb, har bir moddiy nuqtalarning massalarini shu XX o'qigacha bo'lgan eng qisqa masofalari kvadratlariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi.

$$J_{kk} = m_1\ d_1^2 + m_2\ d_2^2 + \ldots + m_N\ d_N^2 = \Sigma m_k\ d_k^2 \qquad (3.51)$$

3. Inertsiya radiusi.

Agar figuralar bir jinsli bo'lsa, yani bir xil metalldan ishlangan bo'lsa, *inertsiya radiusi* degan tushuncha kiritiladi, bu masofada hamma massa joylashgan deb faraz qilinadi va u quyidagicha aniqlanadi,

$$\rho_{xx} = \sqrt{\frac{J_{xx}}{M}} \qquad (3.52)$$

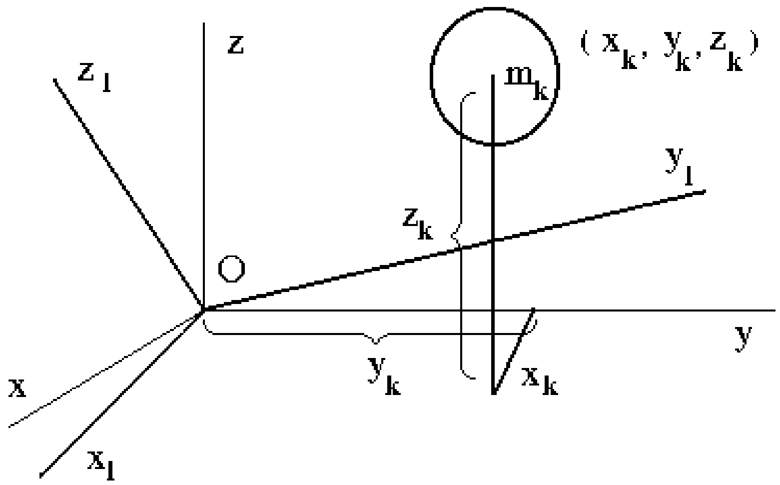
va $$\rho_0 = \sqrt{\frac{J_0}{M}} \qquad (3.53)$$

bu ***yerda*** ρ_{xx} mexanik sistemaning XX o'qiga nisbatan inertsiya radiusi, p_o mexanik sistemaning O nuqtaga nisbatan inertsiya radiusi, shunga ko'ra

$$J_{xx} = M\ \rho_{xx}^2 \quad ва \quad J_0 = M\ \rho_0^2$$

Yuqoridagiga ko'ra *inertsiya radiusi,* shunday keltirilgan bir masofaki, butun massa aylanish o'qidan, yoki nuqtadan shu masofada joylashgan deb faraz qilinadi.

4.Koordinata o'qlariga nisbatan inertsiya momentlari



3.17 shakl.

3.17 shaklda m_k -massali moddiy nuqta Dekart koordinatalar sistemasining ixtiyoriy x_k, y_k, z_k nuqtasida joylashgan bo'lsin, u holda bu moddiy nuqta massasining O_k, O_k, O_k - o'qlarga nisbatan inertsiya momenti quyidagicha aniqlanadi.

$$\begin{cases} J_{ox} = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ J_{oy} = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) \\ J_{oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{cases} \qquad (3.54)$$

Koordinata markazi O nuqtaga nisbatan inersiya momenti

$$J_0 = \Sigma\, m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) \qquad (3.55)$$

formulalar orqali aniqlanadi.

Agar mexanik sistema, alohida - alohida joylashgan moddiy nuqtalardan iborat bo'lmasdan, yaxlit jismdan tashkil topgan bo'lsa, u holda yuqoridagi folmulalardagi yig'indini integral bilan almashtirish lozim, ya`ni $m_k \to dm,$ bo'lsa $\Sigma \to \int$ belgisi bilan almashtiriladi, u holda

$$\begin{cases} J_{ox} = \int (y^2 + z^2)dm \\ J_{oy} = \int (x^2 + z^2)dm \\ J_{oz} = \int (x^2 + y^2)dm \end{cases} \qquad (3.56)$$

$$J_0 = \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dm \qquad (3.57)$$

formulalardan foydalaniladi, (3.56) va (3.57) formulalardan quyidagi munosabatni aniqlaymiz

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z \qquad (3.58)$$

Agar (3.17) shaklda ko'rsatilgandek, ya`ni $Ox_1 y_1\ z_1$ o'qlar o'tkazsak, baribir yuqoridagidek natijani olamiz, ya`ni

$$2J_0 = J_{x1} + J_{y1} + J_{z1} \qquad (3.59)$$

(3.58) va (3.59) tenglamalarning chap tomonlari birxil ekanligi uchun, o'ng tomonlari ham teng bo'lishligidan quyidagini aniqlaymiz, ya`ni

$$J_x + J_y + J_z = J_{k1} + J_{y1} + J_{z1} \qquad (3.60)$$

Demak koordinata o'qlariga nisbatan olingan inertsiya momentlarining yig'indisi, ushbu o'qlarning yo'nalish orientatsiyalarini o'zgarishiga bog'liq emas ekan, ya`ni o'qlarning yo'nalishiga nisbatan *invariant* ekan.

$O\,xyz$ koordinata o'klariga nisbatan *markazdan qochma inertsiya momentlari* ham hisoblanadi, ular quyidagichadir:

$$\begin{cases} J_{xy} = \int xydm \\ J_{yz} = \int yzdm \\ J_{xz} = \int xzdm \end{cases} \qquad (3.61)$$

ko'p hollarda buni inertsiya momenti ko'paytmasi deb ham aytiladi.

O'qqa va nuqtaga nisbatan inertsiya momentlari hardoim faqat musbat qiymatga ega bo'lsa, markazdan qochma inertsiya momentlari musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin.

Markazdan qochma inertsiya momentlari jismlarning aylanma harakatida, podshipniklarga tushgan bosim kuchlarini o'zgaruvchan holatga olib keladi, va natijada ular tezda ishdan chiqishlari mumkin. Ushbu masala keyinchalik alohida o'rganiladi.

5.Parallel o'qlarga nisbatan inertsiya momentlari. (Shteyner teoremasi)

Жисмнинг турли ы=ларга нисбатан инерция моментлари турлича былади.
Жисмнинг бирор ы==а нисбатан инерция моменти маълум былса, шу ы==а параллел былган исталган бош=а ы==а нисбатан инерцич моменти =андай щисоблашни кыриб ытымиз.
Бунинг учун жисмнинг массалар маркази С ор=али ихтиёрий
Texnikada, ya`ni mashinashunoslikda turli xil figuralarga ega bo'lgan detallarning massa markazlaridan o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash ancha murakkab masalalardan hisoblanadi, shuning uchun ularning inertsiya momentlarining formulalari, mashinashunoslik spravochniklarida keltiriladi.

Lekin ko'p hollarda, massa markazidan o'tmagan o'qlarga nisbatan inertsiya momentlarini aniqlash zarur bo'lib qolishi mumkin.

Faraz qilaylik, ushbu figurali jism uchun uning massa markazi C nuqtadan o'tgan C_x, C_y, C_z o'qlarga nisbatan J_{ck}, J_{cy}, J_{cz} inertsiya momentlari berilgan bo'lsin. So'ngra shu o'qlarga parallel, lekin massa mrkazidan OC masofada joylashgan J_{x1}, J_{y1}, J_{z1} o'qlariga nisbatan inertsiya momentlarini aniqlash zarur bo'lsin. Inertsiya momentining qoidasiga binoan

$$J_{os} = \Sigma\, m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) \tag{3.62}$$

$$J_{oz1} = \Sigma\, m_k\left(x_{1k}^2 + y_{1k}^2\right) \tag{3.63}$$

bu yerda x_k, y_k, z_k *лар* $m_k -$ massaning $O\,xyz$ o'qlaridagi koordinatalari, x_{1k}, y_{2k}, z_{2k} lar esa shu nuqtaning $O\,x_1\;y_1\;z_1$ o'qlaridagi koordinatalari. Shunga ko'ra massa markazi C nuqtaning $O\,x_1\;y_1\;z_1$ o'qlaridagi koordinatalari x_c, y_c, z_c bo'lgani uchun

$$x_k = x_{1k} + x_c;\quad y_k = y_{1k} + y_c;\quad z_k = z_{1k} + z_c;$$

Ushbu qiymatlarni (3.62) ga qo'yib, tegishli o'zgatirishlar kiritsak,

$$J_{oz} = \Sigma\, m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) + 2x_o \Sigma\, m_k x_{1k} + 2y_o \Sigma\, m_k y_{1k} + \left(x_c^2 + y_c^2\right)\Sigma\, m_k \tag{3.64}$$

bu yerda $\Sigma\, m_k = M -$ mexanik sistemaning umumiy massasi, $\Sigma\, m_k x_{1k} = M\;x_1\;c = 0$ *ва* $\Sigma\, m_л y_{1k} = M\;y_1\;c = 0$ Chunki C nuqta massa markazi, hamda $x_c^2 + y_c^2 = d_1^2$ *ва* $d - Cz$ *ва* Oz_1 o'qlar orasidagi eng qisqa masofa, shunga ko'ra (3.64) tenglik qo'yidagi ko'rinishga keladi,

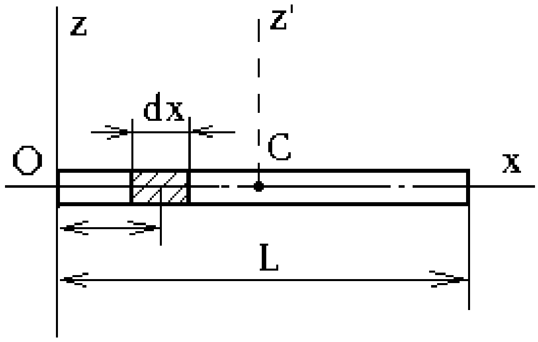
$$J_{os1} = J_{cs} + M\,d^2 \tag{3.65}$$

Demak sistemaning massa markazidan o'tuvchi Cz o'qqa parallel bo'lgan ixtiyoriy $O\,z_1$ o'qqa nisbatan inertsiya momenti, ikkita yig'indidan iborat bo'lib, ulardan biri massa markazidan o'tuvchi Cz o'qqa nisbatan inertsiya momenti, ikkinchisi esa o'qlar orasidagi masofa kvadratining sistemaning umumiy massasiga ko'naytmasining yig'indisidan iborat.

<u>*6.Bir jinsli oddiy figuralarning inertsiya momentlarini aniqlash.*</u>

<u>A) Bir jinsli sterjenning inertsiya momenti</u>.

Massasi *M*-ga teng bo'lgan birjinsli sterjenning *Oz* o'qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo'lsin.



3.18 shakl.

O x o'qini sterjenning o'qi bo'ylab yo'naltiraylik, Oz-o'qini sterjenning bir uchidan boshlab sterjen o'qiga perpendikular ravishda yo'naltiraylik.

Yaxlit jismlar uchun inertsiya momenti formulasini yozaylik

$$J_{"z} = \int_0^L x^2 dm \tag{3.65}$$

Bu yerda *x*-uzunligi *dx*-ga, teng bo'lgan elementar *dm*-massaning *Oz* - o'qigacha bo'lgan masofasi. Shunga ko'ra

$$d\,m = y \cdot dV; \quad dV = S \cdot d\,x$$

Bu yerda γ-jismning zichligi, *dV*-esa jismning elementar *dx* - bo'lgan qismining hajmi, *S*-sterjenning ko'ndalang kesim yuzasi, u holda sterjenning umumiy massasi, quyidagiga teng bo'ladi:

$$M = y; \quad V = S \cdot L$$

Bu yerda *V*-sterjenning umumiy hajmi. Shunga ko'ra $M = y \cdot S \cdot L$

bundan $y = M/(S \cdot L),$ va nihoyat

$$dm = \gamma \cdot dx \cdot S = \frac{M}{S \cdot L} \cdot dx \cdot S = \frac{M}{L} dx$$

ushbu qiymatni (3.65) ga quysak

$$J_{oy} = \int_0^L x^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\cdot\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}M\cdot L^2 \tag{3.66}$$

Endi agar, shu sterjenni massa markazi S nuqtadan o'tuvchi *Cz* o'qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo'lsa (3.64) formula orqali aniqlaymiz, yani

$$J_{os1} = J_{cs} + M\,d^2$$

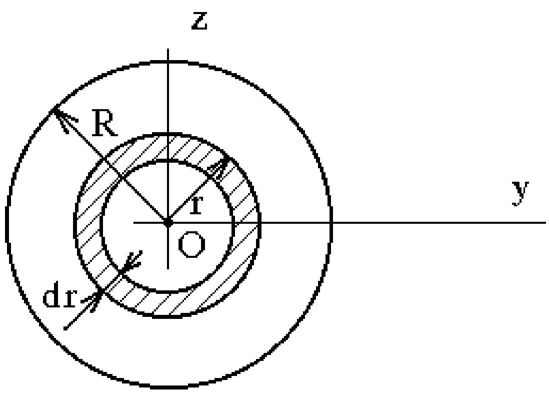
ushbu masalada $d = \frac{L}{2}$ ga teng, tenglamani $J_{c\,z}$ ga nisbatan yechib, uni aniqlaymiz

$$J_{cz1} = J_{мz1} - Md\cdot^2 = \frac{1}{3}M\,L^2 - M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}M\,L^2 - M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{12}M\,L^2$$

yani $$J_{Cz} = \frac{1}{12}ML^2 \tag{3.67}$$

Endi agar Ox-o'qiga nisbatan inertsiya momentini hisoblash kerak bo'lsa, sterjenning ko'ndalang kesimini diametrini bilishimiz zarur bo'ladi. Ushbu masalani quyidagicha yechamiz.

V) Bir jinsli disksimon figuraning inertsiya momenti.



3.19 shakl.

Ushbu masalani yechish uchun diskning yuzasida *O* nuqtadan *r* masofada joylashgan va eni *dr*-ga teng bo'lgan halqacha ajratib olaylik, halqachaning massasi dm-ni quyidagicha aniqlaymiz

$$d\,m = y\,d\,S = y\,2\,\pi r d\,r$$

tegishlicha diskning umumiy massasi $M = \pi R^2 y$ ga teng, bundan

$$\gamma = \frac{M}{\pi R^2};\ \text{va}\quad dm = 2\pi\gamma\cdot rdr = 2\pi\frac{M}{\pi R^2}rdr = \frac{2M}{R^2}rdr$$

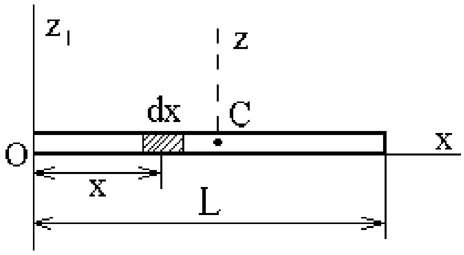
Endi, yaxlit jismlarning inertsiya momentlarini aniqlash formulalaridan, quyidagini yozamiz

$$J_{Ox} = \int_0^R r^2 \cdot dm = \int_0^R r^2 \cdot \frac{2M}{R^2} rdr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$, demak

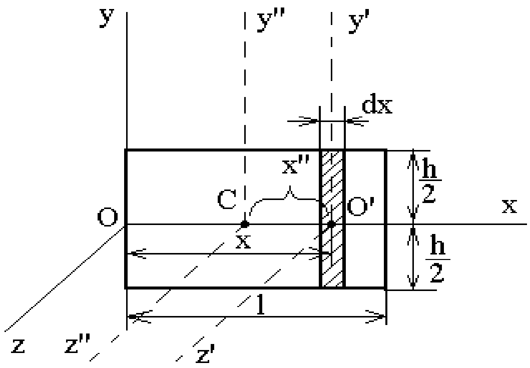
$$J_{ox} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{3.68}$$

S) <u>To'g'ri to'rtburchakli bir jinsli plastina.</u>

Massasi M-ga teng va o'lchamlari L va h bo'lgan bir jinsli plastina berilgan bo'lsin.



3.20 shakl



3.21 shakl

Shu plastinaning shaklda ko'rsatilgan o'qlarga nisbatan inertsiya momentlarini aniqlash zarur bo'lsin. *Ox* va *Oy* o'qlari plastina tekisligida, *Oz* o'qi esa shu tekislikka perpendikulyar joylashgan.

Oy o'qiga nisbatan inertsiya momenti J_y ni aniqlash uchun, plastinka tekisligida yotuvchi va shu *Oy* o'qiga parallel bo'lgan *dS*-yuzacha ajratib olaylik. U holda shu yuzachaning massasi $d\ m = y\ dV = y\ h\ dx$ bo'lgani uchun,

$$J_y = \int_0^l x^2 dm = \gamma h \int_0^l x^2 dx = \gamma h \frac{l^3}{3}$$

Plastinkaning zichligini aniqlaylik. Umumiy massa $M = yV = yLh,$ bundan $\gamma = \frac{M}{Lh}$, buni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak

$$J_y = \gamma h \frac{L^3}{3} = \frac{M}{lh} \cdot \frac{hL^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2$$

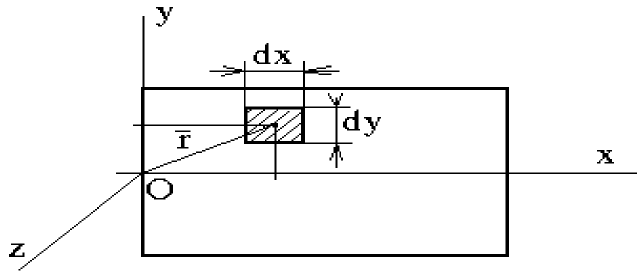
Endi agar massa markazi *S* nuqtadan o'tuvchi *Sy* - o'qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo'lsin. <u>*Shteyner teoremasi*</u> (3.65) dan foydalanamiz, yani

$$J_y = J_{cy'} + Md^2 \Rightarrow J_{cy'} = J_y - Md^2$$

d-o'qlar orasidagi masofa bo'lib o'q $L/2$ ga teng, shuning uchun

$$J_{Oy1} = \frac{ML^2}{3} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3} - \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{12}ML^2$$

Agar plastina tekisligiga perpendikulyar bo'lgan *Oz* o'qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash zarur bo'lsa, uni quyidagixa hisoblaymiz.



3.22 shakl

Buning uchun *O* markazdan *r* uzoklikda joylashgan *dm*-massa ajratib olaylik, uning yuzigi $dS = dy \cdot dx$ teng bo'lgani uchun $dm = \gamma dV = \gamma dx \cdot dy,$ lekin $\gamma = \dfrac{M}{Lh}$, bo'lgani uchun $dm = \dfrac{M}{L \cdot h} \cdot dx \cdot dy$ inertsiya momentining formulasiga asosan

$$J_z = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) \cdot dm =$$

$$\iint \left(x^2 + y^2\right) \cdot \frac{M}{Lh} dx \cdot dy = \frac{M}{Lh} \iint \left(x^2 + y^2\right) \cdot dx \cdot dy$$

Ko'rganigizdek biz 2 karrali integralga duch keldik, chunki bu masalada ham *Ox*, ham *Oy* o'qlari bo'ylab integral olish lozim, shuning uchun, avval dx bo'yicha integrallaylik, yani

$$J_z = \frac{M}{lh} \int \left[\int \left(x^2 + y^2\right) dx\right] dy$$

deb yozib olib, katta qavs ichini integrallaylik

$$\int_0^L \left(x^2 + y^2\right) dx = \int_0^L x^2 dx + y^2 \int_0^L dx = \frac{1}{3} L^3 + y^2 \cdot L = L\left(\frac{L^2}{3} + y^2\right)$$

buni J_z-ga qo'yib *dy* - bo'yicha integrallaylik va *L*-ni qavsdan chiqarib maxrajdagi *L* bilan qisqartiraylik,

$$J_z = \frac{M}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{3} L^2 + y^2\right) dy = \frac{M}{h} \left[\frac{L^2}{3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy\right] =$$

$$\frac{M}{h} \left[\frac{L^2}{3} y \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{L^3}{3} y^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\right] = \frac{M}{h} \left[\frac{1}{3} hL^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{4}\right] = M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Endi agar massa markazi *S* nuqtadan o'tuvchi va *Oz* o'qiga parallel bo'lgan

Cz -o'qiga nisbatan inertsiya momentini aniqlash uchun *Shteyner teoremasi* (3.65) ga asosan

$$J_z = J_{cz'} + Md^2 \quad \text{yoki,}$$

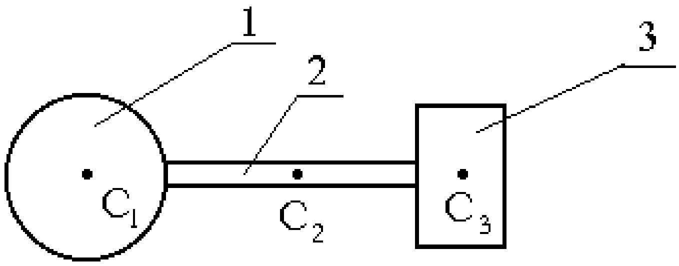
$$J_{cz'} = J_z - Md^2 = M \cdot \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{12} \right) - M \cdot \frac{L^2}{4}$$

bu yerda $d = \dfrac{L}{2}$, endi ushbu tenglikni soddalashtirib chiqsak,

$$J_{cz'} = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{12} \right) = \frac{M}{12}\left(L^2 + h^2\right)$$

Shunday qilib oddiy figuralarning inertsiya momentlarini aniqlanadi, ular juda ko'p, shuning uchun mashinashunoslik spravochniklarida hamma oddiy figuralarning massa markazlaridan o'tuvchi o'qlarga nisbatan inertsiya momentlari hisoblanib, ular formulalar shaklida berilgan.

Endi texnikada ko'p hollarda murakkab figurali jismlarning inertsiya momentlarini aniqlash zarur bo'lib qoladi. Masalan, quyidagi ko'rinishdagi detalning inertsiya momentini hisoblash kerak bo'lsin.



3.23 shakl

U holda, ushbu 3.23 shakldagi jismni 3-ta oddiy figuraga ajratib olamiz va har bir figura uchun spravochnikdan tegishlicha ularning massa markazlari C_1, C_2, C_3 nuqtalardan o'tuvchi o'qlarga nisbatan inertsiya momentlarini hisoblaymiz, so'ngra shu jismning qaeridan o'tgazilgan o'qqa nisbatan inertsiya momentini aniqlash uchun *Shteyner teoremasi* (3.65) dan foydalanib aniqlaymiz.

Agarda berilgan o'q, figuraning bosh inertsiya o'klariga parallel bo'lmasa, u holda uni qo'yidagi formula orqali aniqlaymiz. Ushbu o'qni LL deb belgilaylik, u holda

$$J_{LL} = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\beta + J_z \cdot \cos^2\gamma -$$
$$- 2J_{xy} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2J_{yz} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - 2J_{xz} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$$

bu yerda α, β, y *лар* C_x, C_y, C_z o'qlarining *LL* o'q bilan tashqil qilgan burchaklari. Biz ushbu formulani isbotsiz keltirdik, lekin zaruriyat tug'ilsa, uning isbotini barcha darsliklardan ko'rib olish mumkin.

Mavzuning maqsadi: Mexanik sistema dinamikasining asosiy parametrlaridan biri bo'lib, *massalar markazi* degan tushuncha kiritilgan. Quyida shu tushunchani keng ravishda yoritish bilan birga, shu *massalar markazining harakat qonuni*yati, uning o'zgarishi qanday sabablarga bog'liq ekanligi va qanday holatlarda u o'zgarmas, yani saqlanib qolishligi haqida so'z yuritiladi.

Bayoni:

1.Mexanik sistema massalarining markazi

Faraz qilaylik mexanik sistema *N*-ta moddiy nuqtadan iborat bo'lsin va har birining massasi tegishlicha m_1 , m_2 , ... , m_N -larga teng bo'lsin. U holda shu *mexanik sistemaning massa markazi* qo'yidagi formuladan aniqlanadi,

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} \\ y_c = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} \\ z_c = \dfrac{\sum m_k z_k}{M} \end{cases} \quad (3.69)$$

yoki

$$\begin{cases} Mx_c = \sum m_k x_k \\ My_c = \sum m_k y_k \\ Mz_c = \sum m_k z_k \end{cases} \quad (3.70)$$

2. Mexanik sistema massalar markazi harakatining differentsial tenglamasi.

Endi ushbu tenglamalarning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olsak massalar o'zgarmas bo'lgani uchun,

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum m_k \ddot{x}_k \\ M\ddot{y}_c = \sum m_k \ddot{y}_k \\ M\ddot{z}_c = \sum m_k \ddot{z}_k \end{cases} \quad (3.71)$$

Ushbu tenglamalarning o'ng tomoni mexanik sistema harakatining differentsial tenglamasini anglatadi, shunga ko'ra u

$$\begin{aligned} \sum m_k \ddot{x}_k &= \sum F_{kx}^e + \sum F_{kx}^i \\ \sum m_k \ddot{y}_k &= \sum F_{ky}^e + \sum F_{ky}^i \\ \sum m_k \ddot{z}_k &= \sum F_{kz}^e + \sum F_{kz}^i \end{aligned} \quad (3.72)$$

$\sum F_{kx}^{i} = \sum F_{ky}^{i} = \sum F_{kz}^{i} = 0$ bo'lgani uchun (3.72) tenglamani (3.71) ga qo'ysak

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{e} \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{e} \\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^{e} \end{cases} \tag{3.73}$$

Ushbu tenglamalar sistemasi, mexanik sistema massasining markazi *S* nuqtaning qanday qonuniyat bilan harakat qilishini aniqlab beruvchi differentsial tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bundan ko'rinib turibdiki massa markazi *C* o'z harakatini faqat tashqi kuchlar orqaligina o'zgartira olar ekan xolos. Yani massa markazining tezlik vektori $\vec{V}_C$ - faqatgina tashqi kuchlar tasiridagina o'zgarishi mumkin ekan xolos.

Shunga ko'ra, ichki kuchlar qanday kattalikka ega bo'lishlaridan qatiy nazar hech qachon massa markazining holatini o'zgartira olmas ekan, demak teorema isbot bo'ldi, yani

Teorema: *Mexanik sistema massasining markazi* *C* nuqtaning harakatini ichki kuchlar (qanday kattalikka ega bo'lishlaridan qatiy nazar) hech qachon o'zgartira olmas ekan, ular faqat tashqi kuchlar tasiradigina o'zgartirilar ekan.

3. Massa markazi harakatining saqlanish qonuni.

Faraz qilaylik umumiy massasi *M*-ga teng bo'lgan mexanik sistema massa markazi bo'lgan *C* nuqtaning tezlik vektori $\overline{V}_C$ bo'lsin, va shu nuqtaning tezlik vektorini o'zgarmas holda saqlash lozim bo'lsin, yani $\overline{V}_C = const$, u holda *C* nuqtaning tezlanishi nolga teng bo'lishi shart, yoki

$\overline{a}_c = \dot{\overline{V}}_C = 0$, chunki $\overline{V}_c = const.$

Shuncha ko'ra $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = \ddot{z}_c = 0$, bo'lgani uchun (3.73) tenglamadan $\sum F_{kx}^{e} = \sum F_{ky}^{e} = \sum F_{kz}^{e} = 0$ bo'lishi zarur ekanligini aniqlaymiz.

Demak, agarda mexanik sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarining bosh vektori nolga teng bo'lsa, mexanik sistemaning massa markazi bo'lgan S nuqta tezligining moduli va yo'nalishi o'zgarmas holda saqlanib qoladi.

Bu qonun *mexanik sistema massa markazining harakatini saqlanish qonuni* deyiladi.

Bundan faqat uning harakati o'zgarmas bo'lar ekan degan, xulosa chiqmaydi, agar *C* nuqta muvozanat (tinch) holatda yani $V = 0$ bo'lsa, yoki $V = const$ bo'lsa, uning tezlik vektorini faqat tashqi kuchlargina o'zgartirishi mumkin.

Ushbu qonun nafaqat erkin mexanik sistema uchun, va hatto bog'lanishdagi mexanik sistema uchun ham o'rinlidir.

Masalan: Massasi *M* bo'lgan vagon to'g'ri chiziq bo'ylab yotqizilgan relsda V_x tezlik bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Agar tashqi kuchlarining bosh vektorini shu o'qdagi proektsiyasi $\sum F^{e}_{kx} = 0$ bo'lsa (3.73) tenglamalar sistemasidan V_x qconst ekanligini aniqlaymiz.

Demak, agar tashqi kuchlar bosh vektorini biror o'qqa proektsiyasi nolga teng bo'lsa, massa markazining tezlik vektorini shu o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'lar ekan.

Bu teorema orqali juda ko'p masalalarni yechiladi, hamda texnikada sodir bo'ladigan ko'p hodisalarning asl sabablarini aniqlashda keng foydalaniladi.

Savollar:

1) Mexanik sistema massalar markazi deb nimaga aytiladi?
2) Mexanik sistema massalar markazi bo'shliq joyda o'rnashgan bo'lishi mumkinmi?
3) Massalar markazini qanday kuchlar harakatga keltiradi?
4) Massalar markazining harakatini saqlanish qonunini ifodalang?

MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA HARAKAT MIQDORINING O'ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA

Mavzuning maqsadi: Dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri sifatida *harakat miqdori* degan tushunchasi kiritilgan. Quyida shu tushunchani keng ravishda yoritish bilan birga, shu qiymatning o'zgarishi qanday sabablarga bog'liq ekanligi va qanday holatlarda u o'zgarmas bo'lishi mumkinligi haqida so'z yuritiladi.

Bayoni:

1. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.

Moddiy nuqtaning harakatini (3.1) differentsial tenglama shaklida yozganimizdan keyin, uning harakat qonunini aniqlash uchun, uni ikki marta integrallash kerak bo'ladi. Lekin ko'p hollarda, shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar doimiy yoki vaqtgagina bog'liq ravishda o'zgarsa, u holda bunday masalalar bir xil tipli (rusumli) o'zgartirishlar orqali yechiladi.

Shuni e'tiborga olib, bunday ishlarni oldindan bajarib qo'yilishi mumkin ekan. Xozir ana shunday masalalarni qanday holda umumiy yechimini topish bilan shug'ullanamiz.

Dinamikaning asosiy qonuni $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$, massa - m o'zgarmas qiymat bo'lganligi uchun, uni differentsial ostiga olib yozish mumkin, yaoni

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \sum \bar{F}_k \qquad \text{yoki} \qquad d(m\bar{V}) = \sum \bar{F}_k \cdot dt \tag{3.74}$$

vektor - $m\bar{V}$, moddiy nuqtaning harakat miqdori deyiladi.

Nuqtaga taosir etuvchi kuchlarning elementar vaqtga ko'paytmalarining yig'indisi *kuchning elementar impulsi* deyiladi. Shunga ko'ra (3.74) formula moddiy nuqta harakat miqdori o'zgarish teoremasining differentsial formasini ifodalaydi. Harakat miqdorining elementar o'zgarishi shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning elementar impul slarining yig'indisiga teng ekan.

Endi harakatni dt vaqt ichida emas, balki, t vaqt ichidagi holatini tekshiraylik $t=0$ da $\bar{V} = \bar{V}_0$ deb qabul qilsak, va (3.74) formulani ikkala tomonini integrallasak.

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum \int_0^t F_k dt \tag{3.75}$$

hosil qilamiz. Tenglamaning o'ng tomonidagi integral *[0, t]* vaqt ichida moddiy nuqtaga tasir etgan kuchlarning impulslarining yig'indisi deyiladi, yoki bosh impuls deyiladi.

Shunday qilib, tugal vaqt ichida moddiy nuqtaning harakat miqdorini o'zgarishi, shu vaqt oralig'ida taosir etgan kuchlarning impulslarini yig'indisiga teng ekan.

Agar ushbu (3.75) tenglamani Dekart o'qlariga proektsiyalasak, 3-ta skalyar tenglama hosil qilamiz, ya'ni

$$\begin{aligned} m\dot{x} - m\dot{x}_0 &= \sum \int_0^t F_{kx} dt \\ m\dot{y} - m\dot{y}_0 &= \sum \int_0^t F_{ky} dt \\ m\dot{z} - m\dot{z}_0 &= \sum \int_0^t F_{kz} dt \end{aligned} \tag{3.76}$$

bu yerda $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ va $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ lar, moddiy nuqtaning oxirgi, yani t - vaqt o'tgandagi, va boshlang'ich, yani tq0 c. vaqtdagi tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari, F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} -lar esa, shu moddiy nuqtaga taosir etayotgan kuchlarning, koordinata o'qlaridagi proektsiyalaridir.

Lekin yuqorida aytganimizdek, $\overline{F}_k$- kuchlar doimiy, yoki faqat vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradigan funktsiya bo'lsa, ularning integrallarini hisoblab, moddiy nuqtaning ixtiyoriy vaqtdagi tezlik vektorini aniqlash mumkin.

Agarda $\overline{F}_k$-kuchlari, nuqtaning tezligiga yoki uning holatiga bog'liq ravishda o'zgaruvchi funktsiyadan iborat bo'lsa, u holda ushbu teoremadan foydalanish mumkin emas.

Biz yuqorida moddiy nuqta uchun harakat miqdorini o'zgarish teoremasini o'rgandik. Endi shu masalani sistema uchun tadbiq etamiz.

2. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarish teoremasi

Faraz qilaylik mexanik sistema alohida - alohida moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin, u holda har bir moddiy nuqta uchun harakat mikdorlarini aniqlab, so'ngra ularning yig'indisini olsak, mexanik sistema harakat mikdorining bosh vektorini aniqlaymiz, yani

$$\begin{cases} \overline{q}_1 = m_1\overline{V}_1 \\ \overline{q}_2 = m_2\overline{V}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{q}_n = m_n\overline{V}_n \end{cases} \tag{3.76a}$$

$$\overline{Q} = \overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \dots + \overline{q}_n = m_1\overline{V}_1 + m_1\overline{V}_1 + \dots + m_n\overline{V}_n ,$$

yoki $$\overline{Q} = \sum m_k \overline{V}_k \ , \tag{3.76v}$$

yani *mexanik sistemaning harakat miqdori* deb, sistemani tashkil qiluvchi moddiy nuqtalar harakat miqdorlarining vektor yig'indisiga aytiladi, va uni koordinata o'qlaridagi proektsiyalari quyidagicha bo'ladi,

$$Q_x = \sum m_k V_{kx} \ ; \quad Q_y = \sum m_k V_{ky} \ ; \quad Q_z = \sum m_k V_{kz} \tag{3.76s}$$

Lekin mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalar soni ko'p bo'lsa, ularning xar birining tezlik vektorlarini hisoblashga va ularni tegishli massalariga ko'paytirib, so'ngra ularni yana vektor yig'indilarni aniqlashga to'g'ri keladi. Masalani soddalashtirish uchun mexanik sistema massalar markazlarini aniqlash formulalaridan foydalanamiz, yani

$$\begin{cases} Mx_c = \sum m_k x_k \\ My_c = \sum m_k y_k \\ Mz_c = \sum m_k z_k \end{cases} \tag{3.76d}$$

Massalar o'zgarmas bo'lganligini etiborga olib, ushbu tenglamalar sistemasidan vaqt bo'yicha hosila olsak,

$$\begin{cases} M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k \\ M\dot{y}_c = \sum m_k \dot{y}_k \\ M\dot{z}_c = \sum m_k \dot{z}_k \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} Q_x = MV_{cx} \\ Q_y = MV_{cy} \\ Q_z = MV_{cz} \end{cases} \tag{3.77}$$

Demak, <u>*mexanik sistema xarakat mikdori*</u>ni aniqlash uchun, har bir <u>*moddiy nuqtaning harakat mikdori*</u>ni aniqlash va ularni qo'shishdek mushkul ishni bajarish shart emas ekan. Massa markazi bo'lgan *C* nuqtaning tezlik vektorini koordinata o'qlardagi proektsiyalarini aniqlab, sistemaning umumiy massasi *M* - ga ko'paytirish kifoya ekan.

Bundan quyidagi xulosa chiqishi mumkin, masalan biror disk yoki sterjen o'zlarining massa markazidan o'tuvchi o'q atrofida harakat qilsalar, u holda *C* nuqta aylanish o'qida yotgani uchun $\overline{V}_c = 0$, shunga ko'ra $\overline{Q} = M\overline{V}_c = 0$.

Yuqoridagilardan xulosa chiqarib shuni aytishi mumkinki, agar mexanik sistemaning massa markazi harakatda bo'lmasa, ushbu mexanik sistemaning harakat mikdori nolga teng bo'lar ekan. Boshqacha qilib aytganda, mexanik sistema o'zining massa markazi bo'lgan *C* nuqta atrofida aylanma harakat bajarganda, ushbu teorema orqali uning bunday harakatini o'rganib bo'lmas ekan.

Endi faraz qilaylik, biz harakatini tekshiriyotgan mexanik sistemaning massa markazi *C* nuqta harakatda bo'lsin deylik, shu harakatning o'zgarish sabablarini tekshiraylik, $\overline{Q} \neq const$ emas deb faraz qilaylik, u holda $\overline{Q} = \sum m_k \overline{V}_k$ qiymat o'zgaruvchan bo'lgani uchun, undan vaqt bo'yicha hosila olaylik

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \overline{V}_k\right), \quad \text{yoki} \quad \frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum m_k \vec{a}_k$$

u holda $\sum m_k \vec{a}_k = \sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i$ bo'lgani uchun,

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i \tag{3.78}$$

ekanligini aniqlaymiz, va ichki kuchlarning vektor yig'indisi nolga teng ekanligini yani $\sum \overline{F}_k^i = 0$ etiborga olsak , (3.78) qo'yidagi ko'rinishga keladi,

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \tag{3.79}$$

Ushbu tenglama mexanik sistema <u>*harakat miqdori o'zgarish teoremasining differentsial ko'rinishi*</u> deyiladi, yani mexanik sistema harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila shu sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarining bosh vektoriga teng ekan.

Yuqoridagi tenglama vektor nfoda bo'lganligi uchun, uni koordinata o'qlariga proektsiyalasak, uchta skalyar tenglamani hosil qilaimz,

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e \end{cases} \tag{3.80}$$

yani, mexanik sistema harakat mikdorining biror o'qqa proektsiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, shu sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarning shu o'qqa proektsiyalarining yig'indisiga teng ekan.

Yukoridagi (3.80) tenglamalar sistemasini tuzganimizdek keyin, ularni bir marta integrallasak, tekshirilayotgan *t* - vaqt davomida *Q* ning qanchaga o'zgargan ekanligini aniqlash mumkin, lekin buning uchun *t=0* vaqtdagi, yani *Q* ning boshlang'ich qiymatini koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini bilishimiz shart, aks holda uni qanchaga ortgani yoki kamayganini bila olmaymiz.

(3.80) tenglamalar sistemasini ikkala tomonlarini *dt* ga ko'paytirsak,

$$\begin{cases} dQ_x = \sum F_{kx}^e \cdot dt \\ dQ_y = \sum F_{ky}^e \cdot dt \\ dQ_z = \sum F_{kz}^e \cdot dt \end{cases} \tag{3.81}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini ikkala tomonlarini bir marta integrallab qo'yidagini hosil qilamiz

$$\begin{cases} Q_x - Q_{ox} = \sum \int_o^t F_{kx}^e \cdot dt \\ Q_y - Q_{oy} = \sum \int_o^t F_{ky}^e \cdot dt \\ Q_z - Q_{oz} = \sum \int_o^t F_{kz}^e \cdot dt \end{cases} \tag{3.82}$$

$S_{kx}^e = \int_o^t F_{kx}^e \cdot dt, \quad S_{ky}^e = \int_o^t F_{ky}^e \cdot dt, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{kz}}^{\mathrm{e}} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}_{\mathrm{kz}}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{dt}$ lar, mexanik sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlar impulslarining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari deyiladi.

Bu yerda Q_x, Q_y, Q_z lar malum *t*- vaqt o'tgandagi harakat miqdorining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari, Q_{ox}, Q_{ou}, Q_{oz} -lar *t=0* vaqtdagi harakat miqdorini koordinata o'qlariga proektsiyalaridan iborat, boshqacha qilib aytganda ular boshlang'ich shartlar deyiladi.

(3.82) tenglamalar sistemasini vektor ko'rinishda, qo'yidagicha yoziladi

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e \tag{3.83}$$

$\overline{Q}_0$ - boshlang'ich vaqtdagi harakat miqdori vektori,

$\overline{Q}$ - malum t- vaqt o'tgandagi harakat miqdori vektori,

$\sum \overline{S}_k^e$ - shu t -vaqt ichida mexanik sistemaga tasir etgan <u>*tashqi kuchlar impulslari*</u>ning vektor yig'indisidan iborat. Shunga ko'ra (3.83) tenglama mexanik sistema harakat miqdori o'zgarish teoremasining integral yoki tugal ifodasi deyiladi, yani: mexanik sistema xarakat miqdorining biror vaqt ichidagi o'zgarishi, shu vaqt davomida tasir etgan tashqi kuchlarning impulslarining yig'indisiga teng ekan, (3.79) va (3.80) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, harakat miqdorini faqat tashqi kuchlargina o'zgartirar ekan xolos.

<u>*3.Mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni.*</u>

1. Ichki kuchlarning miqdorlari qanday bo'lishidan qatiy nazar, tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, <u>*mexanik sistema harakat miqdori o'zgarmas*</u> bo'lar ekan, yani agar $\sum \overline{F}_k^e = 0$ bo'lsa $\overline{Q} = const$ bo'lar ekan.

<u>Isbot:</u> (3.79) formulaga asosan , agar $\overline{Q} = const$ bo'lsa, $\frac{d\overline{Q}}{dt} = 0$ bo'ladi, shunga ko'ra $\sum \overline{F}_k^e = 0$.

Xulosa: Agar mexanik sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, shu mexanik sistemaning xarakat miqdori vektori o'zgarmas bo'lar ekan. Boshqacha qilib aytganda mexanik sistemaga tasir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, shu mexanik sistemaning xarakat miqdori saqlanib qoladi.

2.Tashqi kuchlarning biror o'qqa proektsiyalarining yigindisi nolga teng bo'lsa, mexanik sistema harakat mikdorining shu o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'ladi, yani agar $\sum F_{kx}^e = 0$ bo'lsa Q_x=const bo'ladi. Isbot: Agar Q_x -dan bir marta vaqt bo'yicha hosila olsak

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0 \tag{3.84}$$

ekanligi isbotlanadi.

6-Mavzu: MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA HARAKAT MIQDORI MOMENTINING O'ZGARIShI HAQIDAGI TEOREMA.

Reja:

1. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining (kinetik momentni) ifodalang.
2. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarish teoremasini tariflang.
3. Mexanik sistema harakat miqdori momentining o'zgarish teoremasini tariflang.
4. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdori momentining saqlanish qonunini ifodalang.
5. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatini differentsial tenglamasini yozib bering.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Qattiq jismnig qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat kinetik momentini hisoblashga misollar keltiring. Markaziy kuch ta`siridagi nuqtaning harakati va yuzalar qonunidan foydalanib, planetalar o'rtasidagi harakatni yoki sun'iy yo'ldoshlar, harakatini tushuntirib bering?

Tayanch so'z va iboralar

Moddiy nuqta harakat miqdori momenti. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema. Markaziy kuch. Nuqtaning markaziy kuch ta`siridagi harakati. Sistema kinetik momenti. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni.

Mavzuning maqsadi: Dinamikaning asosiy parametrlaridan biri bo'lib, *harakat miqdorining momenti* yoki *kinetik moment* tushunchasi hisoblanadi. quyida ushbu parametrning mazmuni, va uning o'zgarish sabablari, saqlanish qonuniyatlari ustida so'z yuritiladi.

Bayoni:

1. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarish teoremasi

Nazariy mexanikada, *moddiy nuqta harakat miqdori*ni biror markazdan shu nuqtaga o'tkazilgan radius-vektorga vektor ko'paytmasi, moddiy nuqtaning shu markazga nisbatan *harakat miqdorining momenti* deyiladi, ya`ni

$$\overline{K}_0 = \overline{r} \times m\overline{V} \qquad (3.85)$$

Endi, shu vektorning vaqtga nisbatan qanday qonun bilan o'zgarishini aniqlash uchun, (3.85) tenglamani ikkala tomonidan vaqt bo'yicha bir marta hosila olaylik.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{r} \times m\overline{V}\right) = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{V} + \overline{r} \times m\frac{d\overline{V}}{dt}$$

bu yerda $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{V}$ ga teng, va vektorlar algebrasi qoidasi bo'yicha

$\overline{V} \times m\overline{V} = m\left(\overline{V} \times \overline{V}\right) = 0$ bo'lgani uchun,

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{r} \times m\overline{a} = \overline{r} \times \sum \overline{F}_k$$

chunki $m\overline{a} = \sum \overline{F}_k$, demak

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{r} \times \sum \overline{F}_k \qquad (3.86)$$

bu yerda, $\overline{r} \times \sum \overline{F}_k = \overline{M}_0$, ya`ni moddiy nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning biror O nuqtaga nisbatan kuch momentlarining yig'indisi yoki bosh vektoriga teng bo'lgani uchun,

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0 \qquad (3.87)$$

Demak, moddiy nuqta harakat miqdori momenti vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, shu moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning, shu nuqtaga nisbatan olingan bosh moment vektoriga teng ekan.

(3.87) vektor tenglamani, masalalar yechganimizda uchta skalyar tenglama bilan almashtiramiz, yoki Dekart o'qlariga proektsiyalaymiz, ya`ni

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \qquad \textbf{\textit{va}} \qquad \overline{M}_0 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

bo'lgani uchun, ularni (3.87) ga qo'ysak, moddiy nuqta harakat miqdori momentining koordinata o'qlari bo'ylab o'zgarishini aniqlovchi formulalarni keltirib chiqaramiz, ya`ni

$$\begin{cases} m\frac{d}{dt}\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right) = yF_z - zF_y, \\ m\frac{d}{dt}\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right) = zF_x - xF_z, \\ m\frac{d}{dt}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = xF_y - yF_x \end{cases} \qquad (3.88)$$

hosil qilamiz.

Lekin (3.88) tenglamadan ko'rinib turganidek, o'ng tomondagi qiymatlarni aniqlash uchun, nuqtaning koordinatalarini, ya`ni *x, y, z* -larni bilish zarur, aks holda uning chap tomonlaridagi qiymatlarni aniqlab bo'lmaydi.

Ikkinchi tomondan, agarda *x, y, z* - larni funktsiyasi ma`lum bo'lsa, bunday tenglamani yechishni zaruriyati yo'q, chunki biz o'sha *x, y, z*-larni izlamoqdamiz, shuning uchun zarur bo'lsa ulardan vaqt bo'yicha hosila olib, axtarilayotgan qiymat ya`ni tezliklarning ham funktsiyasi $\_\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ larni aniqlash mumkin.

Ammo, ko'p hollarda, bu tenglamalardan foydalanish zarur bo'ladi, masalan, agarda nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning biror o'qqa yoki nuqtaga nisbatan momentlari nolga teng bo'lgan holatlarda, yoki biror nuqtaga yoki o'qqa nisbatan momenti aniq bo'lgan, yoki u berilgan bo'lsa bunday hollarda masalani yechishni juda soddalashtiradi.

2.Moddiy nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonuni.

Yuqorida ko'rganimizdek moddiy nuqta harakat miqdori momenti $\overline{K}_0 = \bar{r} \times m\overline{V}$ vektor orqali ifodalanadi, va u yuqoridagi teoremaga asosan faqat shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning momenti $M_0 = 0$ nolga teng bo'lgan holdagina $K_0 = cons\ t$ bo'ladi. Shunga ko'ra $\overline{K}_0$ - ikkita qiymatning vektor ko'paytmasidan, ya`ni radius vektor va harakat miqdori vektorlarining vektor ko'paymalaridan iborat bo'lib, u o'zgarmas bo'lar ekan.

Demak agar $r-$ ortaborsa, $V-$ kamayaveradi, va aksincha $r-$ kamayaversa, $V-$ ortaboradi, lekin ularning ko'paytmasi o'zgarmas qolaveradi, ya`ni

$$\bar{r} \times m\overline{V} = const \tag{3.89}$$

Faraz qilaylik shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning biror o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisi (bosh momenti) nol ga teng bo'lsin, masalan $M_{0л} = 0$ u holda, ushbu nuqtaning kinetik momentining ana shu $O\ x$ o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'ladi, ya`ni

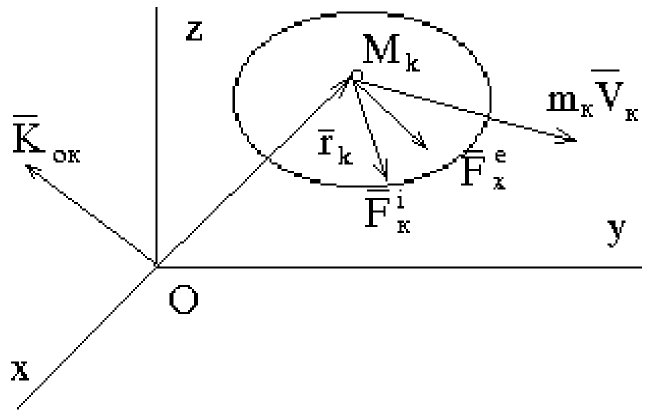
$$K_{Ox} = y\dot{z} - z\dot{y} = const \tag{3.90}$$

Xulosa kilib, shuni aytish mumkinni, nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'lsa, shu nuqtaning *kinetik momenti (o'zgarmas bo'ladi) saqlanib qoladi*.

3.Mexanik sistemaning harakat miqdorining momenti (kinetik momenti)

Biz yuqorida khrganimizdek agar biror mexanik sistema hzining massa markazi C nuqta atrofida aylanma harakat bajarsayu, aylanish o'qi qo'zgalmas bo'lib C nuqtadan o'tsa, $V_c = 0$ bo'lganligi sababli $Q = M \cdot V_c = 0$ bo'lib harakat miqdori nolga teng bo'lib, ghyoki u harakatsiz degan xulosa chiqarishga olib kelishi mumkin.

Aslida harakat miqdorining o'zgarishi ushbu teoremadan khrinib turgandek faqat ilgarilama harakatni belgilaydi, xullas aylanma harakatni *mexanik sistema harakat miqdori momenti* yoki *kinetik momentning* o'zgarish teoremasi orqali hisoblanadi.



3.24 shakl

Shunga ko'ra *mexanik sistema harakat miqdori momenti* deb, mexanik sistemaga kiruvchi moddiy nuqtalarning radius vektorlarini ularning harakat miqdori vektorlariga vektor ko'paytmasiga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda har bir moddiy nuqta harakat miqdori vektorini biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning vektor yig'indisiga teng, yani

$$\overline{K}_0 = \sum m_0\left(m_k \overline{V}_k\right) = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k \qquad (3.91)$$

3.24 shaklda khrsatilgan kinetik moment vektori $\overline{K}_0$, koordinata hqlar markazi O nuqtaga qhyilgan bo'ladi, agar kinetik moment, massa markazi C nuqtaga nisbatan olinsa $\overline{K}_-$, vektori hsha C nuqtaga qhyilgan bo'ladi.

Ikkinchidan bu $\overline{K}_-$, vektor radius, vektor $\overline{r}_k$, va harakat miqdori vektori $m_k\overline{V}_k$ yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'ladi.

Endi (3.91) vektor tenglamani koordinata o'qlariga proektsiyalasak uchta skalyar tenglama hosil bo'ladi,

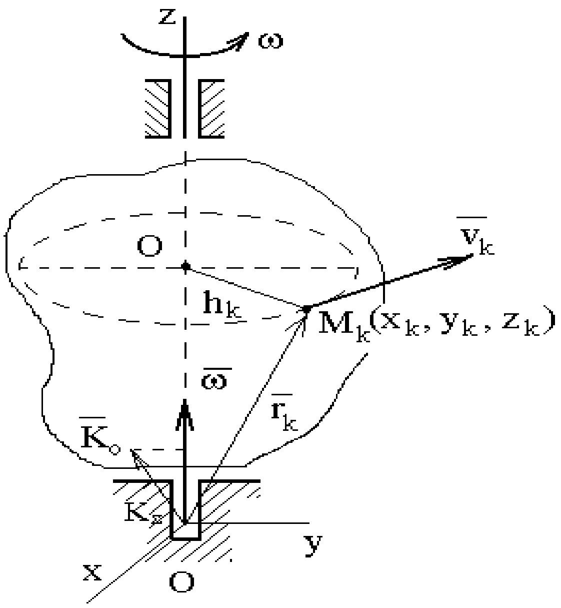
$$\begin{cases} K_x = m_x\left(m_k\overline{V}_k\right) = \sum m_k\left(y_k \cdot V_{kz} - z_k \cdot V_{ky}\right) \\ K_y = m_y\left(m_k\overline{V}_k\right) = \sum m_k\left(z_k \cdot V_{kx} - x_k \cdot V_{kz}\right) \\ K_x = m_z\left(m_k\overline{V}_k\right) = \sum m_k\left(x_k \cdot V_{ky} - y_k \cdot V_{kx}\right) \end{cases} \qquad (3.92)$$

4. Mexanik sistema kinetik momentining (harakat miqdori momentining)o'zgarish teoremasi.

Biz yuqorida ko'rganimizdek agar biror mexanik sistema o'zining massalar markazi C nuqta atrofida aylanma harakat bajarsa, aylanish o'qi qo'zg'almas bo'lib C nuqtadan o'tsa $V_c = 0$ bo'lganligi sababli $Q = MV_c = 0$, ya'ni harakat miqdori nol ga teng bo'lib, go'yoki u harakatsiz degan xulosa chiqarishga olib kelishi mumkin. Aslida harakat miqdorining o'zgarishi ushbu teoremadan ko'rinib turganidek, faqat ilgarilanma harakatni belgilaydi xolos, aylanma harakatni mexanik sistema harakat miqdori momenti, yoki kinetik momentining o'zgarish teoremasi orqali hisoblanadi.

Shunga ko'ra mexanik sistema harakat miqdori momenti deb, mexanik sistemaga kiruvchi moddiy nuqtalarning radius vektorlarini ularning harakat miqdorlari vektorlariga vektor ko'paytmalarning aytiladi. Boshqacha qilib aytganda har bir moddiy nuqta harakat miqdori vektorini biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisiga teng.

3.25 shaklda ko'rsatilgan kinetik moment vektori $\overline{K}_0$, koordinata o'qlar markazi O nuqtaga qo'yilgan bo'ladi, agar kinetik moment massa markazi C nuqtaga nisbatan olinsa $\overline{K}_C$, vektori o'sha C nuqtaga qo'yilgan bo'ladi.



3.25 shakl

Ikkinchidan bu $\overline{K}_C$, vektor, radius vektor $\overline{r}_k$, va harakat miqdori vektori $m_k\overline{V}_k$ yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'ladi.

Mexanik sistema kinetik momenti (3.91) formula orqali aniqlanadi, uning o'zgarish qonunini aniqlash uchun, ushbu tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha bir marta hosila olaylik.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \frac{d\overline{r}_k}{dt} \times m_k \overline{V}_k + \sum \overline{r}_k \times m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt}$$

Avval ko'rganimizdek o'ng tarafdagi birinchi had vektor algebrasi qoidasiga binoan nolga teng, va $\frac{d\overline{V}_k}{dt} = \overline{a}_k$ bo'lgani uchun

$\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k = \sum \overline{r}_k \times \left(\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i\right) = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i$ ga teng, lekin ichki kuchlarning ikkinchi xossasiga asosan

$\sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i = 0$ ga teng bo'lgani uchun

$\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e$ bo'ladi, va nihoyat

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e \qquad (3.93)$$

yoki

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0^e \qquad (3.94)$$

ya`ni, mexanik sistemaning kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi xosila, shu sistemaga ta`sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh momentiga teng ekan.

Ushbu (3.94) vektor tenglamani Dekart koordinata o'qlariga proektsiyalasak, quyidagi 3 ta skalyar tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, ya`ni

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = M_{0x}^{e} \quad ; \qquad \frac{dK_{0y}}{dt} = M_{0y}^{e} \quad ; \qquad \frac{dK_{0z}}{dt} = M_{0z}^{e} \qquad (3.95)$$

tenglamalar sistemasini olamiz.

5. Mexanik sistema kinetik momentining saqlanish qonuni.

1. Agar mexanik sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'lsa, shu sistemaning kinetik momenti o'zgarmas bo'ladi, yani (3.94) tenglamasiga asosan,

$\overline{M}_0^e = 0,$ bo'lsa, $\overline{K}_0 = const$ bo'ladi (3.96)

Ushbu qonuniyatga *mexanik sistema kinetik momentining saqlanish qonuni* deyiladi.

2. Lekin shunday hollar bo'ladiki, masalan mexanik sistema faqat bitta Oz o'q atrofida aylanma harakat qilsin, agar tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa, kinetik momentning shu o'qdagi proektsiyasi o'zgarmas bo'ladi, yani

$M_{oz}^e = 0$ bo'lsa, $K_{oz} = const$ bo'ladi.

Demak, agar mexanik sistema kinetik momentining biror o'qqa proektsiyasi o'zgarmas bo'lsa, u holda tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lar ekan, demak,

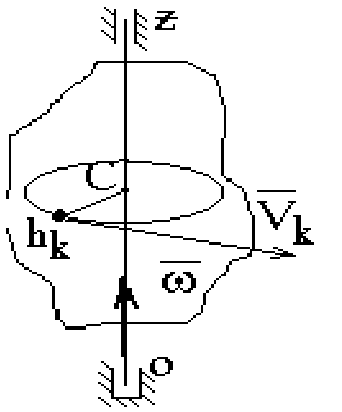
$$K_{oz} = J_{oz} \cdot \omega = cons\ t \qquad (3.97)$$

Masalan tashqi kuchlarning Oz o'qiga nisbatan bosh momenti nol ga teng bo'lsa, inertsiya momenti bilan burchakli tezlikning ko'paytmasi o'zgarmas bo'lar ekan. Agar inertsiya momentini kamaytirsak, burchakli tezlik hech qanday tashqi momentsiz ortadi, aksincha inertsiya momenti ortib ketsa, jismning burchakli tezligi kamayib ketadi.

6.qattik jismning qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatida kinetik momentni xisoblash.

Faraz qilaylik biror qattiq jism hzining massa markazidan htuvchi o'q atrofida ω - burchakli tezlik bilan harakat qilsin. Shu jismning kinetik momentini hisoblash zarur bo'lsin. Bu yerda aylanma harakat faqat bir o'q, yani Oz o'qi atrofida bo'lgani uchun

$K_x = K_y = 0, \quad K_{os} = \Sigma\, m_{os}(m_k V_k)$ bo'ladi.



3.26 shakl

3.26 shakldan ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy olingan M_k nuqtaning tezlik vektori $V_k = h_k \omega_1$ va shu nuqtaning harakat miqdori uning aylanish radiusiga perpendikulyar, va aylanish hqiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotadi. Shunga ko'ra bu nuqtaning kinetik momenti

$$m_{\hat{\imath}z}\left(m_k \overline{V}_k\right) = h_k m_k V_k = m_k h_k^2 \omega$$

Butun jism uchun

$$K_z = \sum m_k h_k^2 \omega = \omega \sum m_k h_k^2 = \omega \cdot J_{"z} \quad \text{ya`ni}$$

$$K_z = J_{"z} \cdot \omega \qquad (3.98)$$

Shunday qilib qattiq jismning massa markazi C nuqtadan o'tuvchi qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatdagi kinetik momenti, jismning shu o'qqa nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezligiga ko'paytmasiga teng ekan.

Kinetik momentining ishorasi burchakli tezlikning ishorasi bilan bir xil bo'ladi, chunki $J_{xz} > o$ doimo musbat qiymatdir.

Umumiy holda yani aylanish hqi massa markazi C nuqtadan o'tmagan holda, markazdan qochma inertsiya momentlari paydo bo'ladi, lekin bunday masala keyinroq o'rganiladi.

7-Mavzu: KUChNING BAJARGAN IShI. QUVVAT.

Reja:

1. Kuchning bajargan ishini tariflang.
2. Og'irlik kuchining bajargan ishini ko'rsating.
3. Elastiklik kuchining bajargan ishini yozib bering.
4. Ishqalanish kuchining bajargan ishini ifodalang.
5. Quvvat deb nimaga aytiladi va qaysi formulalar orqali hisoblanadi.
6. Moddiy nuqta va mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarish teoremasini yozib bering.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Kuchning bajargan ishi bilan energiya o'rtasida qanday bog'liqlik bor? Avtomabilni quvvati bilan uning tezligi o'rtasidagi bog'liqlikni toping? Potentsial kuch qanday kuch?

Tayanch so'z va iboralar

Og'irlik kuchini bajargan ishi. Elastik lik kuchini bajargan ishi. Ishqalanish kuchini bajargan ishi. Quvvat. Kuchning to'la bajargan ishi. Kuchning elementar ishi.

<u>Mavzuning maqsadi:</u> Nuqta dinamikasining uchinchi teoremasi, moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarish teoremasi hisoblanadi, lekin uni o'rganish uchun, mexanikaning fundamental tushunchalaridan ikkitasi, ya`ni ish va quvvatni o'rganish zarur. Ushbu tushuncha fizika kursida ham ko'rib o'tilgan, shunga qaramay eslatma uchun, yana ozgina qaytarish qilamiz.

<u>Bayoni:</u>

<u>1.Kuchning elementar bajargan ishi</u>

<u>Elementar ish</u> deb, kuch vektorini moddiy nuqtaning elementar ko'chish vektoriga skalyar ko'paytmasiga aytiladi, ya`ni

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} \qquad (3.101)$$

bu yerda $d\ A-$ elementar ish, $\bar{F}$ - kuch vektori, $d\bar{r}$ - moddiy nuqtaning elementar ko'chish vektori.

<u>Ish</u> skalyar qiymat, ya`ni uning yo'nalishi va qo'yilgan nuqtasi bo'lmaydi, uning faqat katta yoki kichikligi, musbat-manfiyligi (moduli) bilan farqlanadi.

(3.101) formuladagi elementar ishning moduli, ya`ni (son qiymati) quyidagicha aniqlanadi

$$dA = F \cdot dr \cdot Cos\alpha \qquad (3.102)$$

bu yerda $\alpha -$ kuch vektori bilan elementar ko'chish vektori orasidagi bo'rchak.

Shunga ko'ra $\alpha = 0$ bo'lsa, ish maksimum bo'ladi, $\alpha = \pi F2$ bo'lsa, ish nolga teng bo'ladi, agar $\alpha = \pi$ bo'lsa ish manfiy bo'ladi. Moddiy nuqtaning elementar ko'chish vektori $d\vec{r} = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$ va shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuch vektori $\vec{F} = \vec{i} \cdot F_x + \vec{j} \cdot F_y + \vec{k} \cdot F_z$ bo'lgani uchun, shu nuqtaning ana shu kuch vektori ta`sirida ko'chishda bajargan elementar ishi $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, yoki $dA = F_k\ dx + F_y\, dy + F_z\ dz$ ga teng bo'lgan skalyar qiymatdir.

<u>2.Kuchning tugal ko'chishdagi to'liq bajarilgan ishni hisoblash.</u>

Moddiy nuqtaning malum tugal ko'chishdagi, ya`ni traektoriya bo'ylab $M_0$ holatdan $M_1$ holatga ko'chishdagi harakatida, unga ta`sir etuvchi <u>kuchlarning bajargan ishlari</u>ning yig'indisi quyidagicha aniqlanadi,

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (3.103)$$

yoki $$A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds \qquad (3.103\ a)$$

ga teng bo'ladi. Ishning o'lchov birligi qilib halqaro $C\ И$ sistemasida Djoul qabul qilingan $(1Дж. = 1Н\,м)$. Yuqoridagi formulalar orqali moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar o'zgarmas yoki nuqtaning koordinatalariga bog'liq bo'lgandagina ularni integrallab, ularning bajargan ishlarini topishimiz mumkin.

Agar kuchlar o'zgaruvchan bo'lsalaru, lekin vaqtning yoki nuqta tezligining funktsiyasiga bog'liq bo'lsalar, bu formulalar orqali shu kuchlarning bajargan ishlarini aniqlash mumkin emas.

Ayrim kuchlarning bajargan ishlarini xisoblash.

A) Og'irlik kuchining bajargan ishini hisoblash.

Massasi m - ga teng bo'lgan moddiy nuqta og'irlik kuchi ta`sirida M_0 holatdan M_1 holatga ixtiyoriy traektoriya bo'ylab ko'chdi, deb faraz qilaylik. Shu moddiy nuqtaning *og'irlik kuchini bajargan ishi*ni aniqlash zarur bo'lsin. Og'irlik kuchining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari $F_k = F_v = 0,$ hamda $F_s = -mg$ bo'lgani uchun ularni (1) formulaga qo'yib, integrallasak

$$A = \int_{z_0}^{z_1} (-mg)dz = -mg\int_{z_0}^{z_1} dz = mg(z_0 - z_1)$$

Agar nuqtaning M_0 holatdagi balandligi, uning M_1 holatdagi balandligidan katta bo'lsa, ish musbat bo'ladi, aks xolda u manfiy ish bajaradi. $Z_o - Z_1 = h$ ga teng bo'lib, h-nuqtaning vertikal bo'yicha ko'chishi, shunga ko'ra,

$$A(mg) = m\,g\,h \tag{3.104}$$

Demak moddiy nuqtaning ixtiyoriy traektoriya bo'ylab qilgan harakatida, uning og'irlik kuchini bajargan ishi, faqat og'irlik kuchining modulini shu balandliklarning farqiga ko'paytmasiga teng ekan xolos, ya`ni traektoriyaga bog'liq emas ekan, bu yerda $Z_0 -$ nuqtaning harakat boshlangandagi balandligi, $Z_1 -$ nuqtaning harakat oxiridagi balandligi.

Xulosa. Og'irlik kuchining bajargan ishi faqat balandliklarning farqiga bog'lik ekan xolos, ya`ni koordinatalarning funktsiyasi ekan, bunday kuchlar *potentsial kuchlar* deyiladi.

V). Elastiklik kuchlarning bajargan ishi.

Faraz qilaylik, massasi m-ga teng bo'lgan moddiy nuqta qattiqligi $C-$ ga teng bo'lgan prujinaga mahkamlangan bo'lsin. Prujinaning bir uchi A nuqtaga mahkamlangan bo'lib, prujinaning normal holatdagi uzunligi $AO = L_0$ ga teng bo'lsin.

Endi, agar shu prujinani $d\,x-$ uzunlikka uzaytirsak, prujinada shu uzayishga proportsional bo'lgan elastiklik kuch paydo bo'ladi, va shu kuch prujinani muvozanat holatiga qaytarishga harakat qiladi.

Moddiy nuqtaning muvozanat holatini O nuqta bilan belgilab, uni koordinata boshi qilib tanlab olamiz. Guk qonuniga asosan elastiklik kuchining qiymati, prujinaning uzayishiga va uning qattiqlik koeffitsienti $C-$ ga ko'paytmasiga teng, ya`ni $F = -F_k = -C_x$ bo'lgani uchun bularni (3.103) ga qo'ysak,

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} (-\mathrm{Cx})\mathrm{dx} = -\mathrm{C}\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} \mathrm{xdx} = \frac{\mathrm{C}}{2}(\mathrm{x}_0^2 - \mathrm{x}_1^2) \tag{3.105}$$

Demak, <u>*elastiklik kuchining bajargan ishi*</u>, boshlangich va oxirgi uzunliklar kvadratlari ayirmasining prujinani qattiqligiga ko'paytmasining yarmiga teng ekan.

Agar moddiy nuqta o'zining harakatida, muvozanat holatdan uzoqlashsa elastiklik kuchi manfiy ish bajaradi, agar u muvozanat holatga qarab harakatlansa musbat ish bajaradi.

Prujina bitta o'q bo'ylab emas, balki tekislikda, yoki fazoda joylashgan bo'lishi mumkin, u holda elastiklik kuchining bajargan ishi quyidagi formuladan aniqlanadi,

$$A = -\frac{C}{2}(r_0^2 - r_1^2) \tag{3.106}$$

Shunga ko'ra, elastiklik kuchi ham <u>*potentsial kuchlar*</u> guruhiga kiradi.

<u>*S) Ishqalanish kuchining bajargan ishi.*</u>

Massasi m - bo'lgan moddiy nuqta g'adir-budir tekislikda, yoki chiziqda harakatlanayotgan bo'lsin. U holda Kulon qonuniga asosan, ishqalanish kuchi paydo bo'ladi, va uning yunalishi har doim tezlik vektoriga qarama-qarshi bo'ladi, ya`ni <u>*ishqalanish kuchining bajargan ishi*</u>

$$A = -\int_{m_0}^{m_1} F \cdot ds = -\int_{s_0}^{s_1} f \cdot N \cdot ds = -fN(s_1 - s_0) \tag{3.107}$$

bu yerda *f* - ishqalanish koeffitsienti.

Ishqalanish kuchi har doim manfiy ish bajaradi, va u nuqtaning koordinatasiga bog'liq bo'lmagan holda o'zgaradi, shuning uchun u potentsial kuchlar guruhiga kirmaydi.

<u>*3. quvvat haqida tushuncha*</u>

Mexanikada <u>*quvvat*</u> deb, ishdan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga aytiladi, va u lotincha $N-$ harfi bilan belgilanadi, ya`ni

$$N = \frac{dA}{dt} \tag{3.108}$$

lekin $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, bo'lgani uchun buni yuqoridagi formulaga qo'ysak

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad (3.109$$

Demak, quvvat kuch vektorini tezlik vetoriga skalyar ko'paytmasiga teng ekan, agar jism aylanma harakatda bo'lsa, quvvat quyidagicha hisoblanadi,

$$N = M_{бур} \cdot \omega$$

bu yerda $M_{бур}$ -burovchi moment, ya`ni shu qattiq jismga ta`sir etayotgan kuchlarning aylanish o'qiga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi, ω - qattiq jismning burchakli tezligi.

8-Mavzu: MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA KINETIK ENERGIYASINING O'ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA

Reja:

1. Qattiq jismning turli harakatlarida uning kinetik energiyasini aniqlang.
2. Ilgarilama harakatida.
3. Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatda kinetik energiya.
4. Tekislikka parallel harakatda kinetik energiya.
5. Sferik harakatda kinetik energiya.
6. Mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalang.
7. Agar mexanik sistema qattiq jismdan iborat bo'lsa uning kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalang.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Nima uchun o'zgarmas mexanik sistemada ichki kuchlarning bajargan ishlari

nolga teng bo'ladi (mexanik sistema ta`rifidan kelib chiqib)?

Tayanch so'z va iboralar

Moddiy nuqta kinetik energiyasi o'zgarishi haqidagi teorema. Energiyani saqlanish qonuni. Sistema kinetik energiyasi. Qattiq jismning ilgarilanma harakatdagi kinetik energiyasi. Aylanma harakatda kinetik energiya.

Mavzuning maqsadi: Dinamikada eng asosiy tushunchalardan biri bu moddiy nuqtaning kinetik energiyasi hisoblanadi. Lekin shu energiya o'zgaruvchan bo'lsa, nima sababga ko'ra u ortadi, yoki nima sababdan u kamayadi. Quyida shu masala batafsil ko'rib o'tiladi.

Bayoni:

Massasi $m-$ ga teng bo'lgan M moddiy nuqta, unga qo'yilgan kuchlar tasirida M_0 holatdan M_1 holatga ko'chib, o'zining tezligini V_0 dan $V_1 -$ ga o'zgartirsin. Natijada, shu moddiy nuqtaning kinetik energiyasi

$$T_0 = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad \text{dan} \quad T_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 \quad \text{ga o'zgaradi.}$$

Endi ushbu o'zgarish, musbat bo'lsa, nima hisobiga ortdi, agar manfiy bo'lsa shu yo'qolgan energiya nimaga sarflanganligini aniqlaylik. Buning uchun kinetik energiya formulasini differentsiallaylik, ya`ni

$$dT = d(\frac{1}{2}m\vec{V}^2) = m\vec{V}\cdot d\vec{V} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

Dinamikaning asosiy qonuniga asosan $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$, buni yuqoriga qo'ysak

$$dT = \sum \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \qquad (3.110)$$

Tenglamaning o'ng tomonidagi qiymat, moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning elementar ko'chishdagi bajargan ishlarining yig'indisi. Demak, moddiy nuqta kinetik energiyasining differentsiali, shu nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarning elementar ko'chishdagi bajargan ishlarning yig'indisiga teng ekan.

Ushbu tenglama, moddiy nuqta kinetik energiyasi o'zgarishi haqidagi teoremasining differentsial formasi deyiladi. Tugal ko'chishdagi, ya`ni boshqacha qilib aytganda moddiy nuqtaning bir M_0 holatdan, yangi M_1 holatga ko'chishida, mabodo uning kinetik energiyasi o'zgarsa, uni quyidagicha aniqlaymiz. Buning uchun (3.110) tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz.

$$\int_{T_0}^{T} dT = \sum \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \qquad (3.111)$$

bundan $T_1 - T_o = A,$ ya`ni, moddiy nuqtaning ma`lum masofaga ko'chishida uning kinetik energiyasining o'zgarishi, shu nuqtaga ta`sir etayotgan kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisiga teng ekan.

A).Moddiy nuqta dinamikasining masalalarini yechish tartibi

Moddiy nuqta dinamikasining masalalarini yechishda, qaysi teoremadan foydalanish zarurligini oldindan aniqlab olish kerak, buning uchun:

Agar:

a) moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmas, yoki vaqtga bog'liq holda o'zgarsa, yani $F = cons\ t$ yoki $F = f(t)$ bo'lsa, va

b) harakatga sarflangan vaqt, boshlang'ich va oxirgi tezlik berilgan bo'lsa, ya`ni $F_1,\ t_1,\ V_o,\ V_1 -$ lar berilgan bo'lsa, bunday masalalarni yechishda, moddiy nuqta harakat miqdori o'zgarish teoremasidan foydalanilgani maqul bo'ladi.

Agar:

a) moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmas, yoki kordinatalarga bog'lik ravishda o'zgarsa, $F = cons\ t$ yoki $F = f(\bar{r})$ bo'lsa, va

b) nuqtaning bosib o'tgan yo'li, boshlang'ich -V_0, yoki oxirgi - V_1, tezliklar berilgan bo'lsa, bunday masalalar kinetik energiyani o'zgarish teoremasidan foydalanib yechiladi.

Agarda, moddiy nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar, uning tezligiga bog'lik holda $F = f(V)$ o'zgaruvchan, yoki aralash bo'lsa, ya`ni tezlikka, vaqtga va nuqtaning holatiga bog'liq holda $F = f(V,\ s,\ t)$ o'zgarsa, bunday masalalarni dinamikaning asosiy teoremalari orqali yechib bo'lmaydi.

Shuning uchun unday masalalarni yechishda dinamikaning asosiy qonunidan foydalanib, shu harakatning differentsial tenglamasini tuzib, so'ngra uni integrallab, kerakli nomalumlarni aniqlanadi.

Endi yuqoridagi shartlar orqali birorta yo'lni tanlab olganimizdan keyin, masalalarni quyidagi tartibda yechiladi.

1. Moddiy nuqtaning ixtiyoriy holatdagi harakatining shaklini chizib, unga ta`sir etuvchi aktiv va reaktiv kuchlarni vektor shaklida ifodalaymiz,

2. Koordinata o'qlarni tanlab olamiz, lekin bu o'qlar shunday yo'nalishlari kerakki, ular tezlik vektori bilan bir tomonga yunalishlari shart, aks xolda hamma qiymatlar teskari ishorali bo'lib qoladi.

3. So'ngra tegishli formulalar orqali shu nuqtaga ta`sir etuvchi *kuch impulslari*ni yoki ularning bajargan ishlarining yig'indisini hisoblaymiz.

Ular quyidagicha aniqlanadi. Agar nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar doimiy yoki vaqtga bog'liq ravishda o'zgarsa, u holda ularning kuch impulslarni hisoblaymiz. Shundan keyin, moddiy nuqta *harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema* dan foydalanib tenglama tuzamiz.

Agar nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar doimiy yoki nuqtaning koordinatalariga yoki bosib o'tilgan yulga bog'liq holda berilsa, u holda shu kuchlarning bajargan ishlarining yig'indilarini aniqlaymiz va nuqtaning *kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema* dan foydalanib tegishli tenglama tuzamiz.

Tenglama tuzilgandan keyin, u orqali tegishli nomalumlarni aniqlaymiz, lekin ko'p hollarda asosan nuqtaning ma`lum vaqt, yoki ma`lum masofani bosib o'tgandagi tezligini aniqlash so'raladi.

Ana shu teoremalar orqali nuqtaning tezligini aniqlanishini, nuqta harakatining *birinchi integrali* aniqlandi, deyiladi. Nuqta tezligining qonuniyati aniqlansa, uni yana bir marta integrallab, shu nuqtaning unga ta`sir etuvchi kuchlarga bog'lik harakatidagi qonuniyati yoki boshqacha qilib aytganda *ikkinchi integrali* aniqlanadi. Shu bilan masala to'liq yechilgan hisoblanadi.

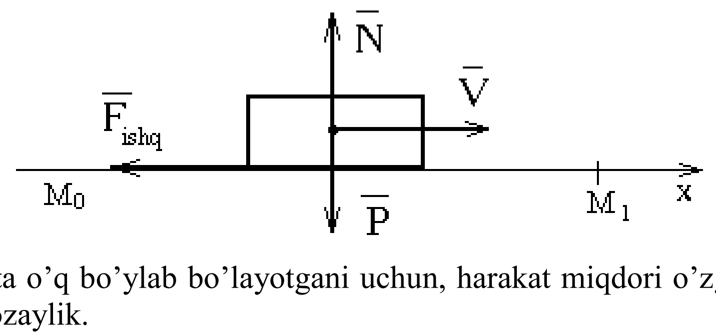
Endi agar, nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi har xil funktsiyalardan iborat bo'lsa, yani bitta kuch doimiy, ikkinchisi vaqtga bog'lik, uchinchisi uning koordinatasiga, yoki uning tezligiga bog'lik ravishda o'zgarsa, u holda yuqoridagi teoremalardan foydalanish mumkin emas.

Bunday holda masalani yechish uchun dinamikaning asosiy qonuniga asosan, yani (3.1) formulaga asosan *differentsial tenglama* tuzib, so'ngra uni yechib, shu nuqta harakatining *tezlik qonuni*yati, undan keyin esa yana bir marta integrallash orqali uning h*arakat qonuniyati* aniqlanadi.

Masala: Massasi m - ga teng bo'lgan va gorizontal tekislikda yotgan jismga turtki berildi, shuning natijasida, u V_0 - tezlik olib harakat boshladi. Agar jism bilan tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti f - ga teng bo'lsa, jism necha sekunddan keyin to'xtaydi va to'xtaguncha qancha masofani bosib o'tishi aniqlansin.

Masalani shartidan ko'rinib turibdiki, vaqtni aniqlash uchun harakat miqdorini o'zgarishi haqidagi teoremadan foydalanish kerak, yo'lni aniqlash uchun esa kinetik energiyani o'zgarishi haqidagi teoremasidan foydalanish zarur.

Echish: Jismning harakatdagi shaklini chizamiz, nuqta M_0 holatdan M_1 holatgacha harakatlanib to'xtaydi. Jismga bir vaqtda uchta kuch ta`sir etmoqda, og'irlik kuchi P_1, normal bosim N_1, va ishkalanish kuchi F Shaklda ko'rsatilgandek $O\,x$ o'qini harakat tomonga yo'naltiramiz.



Harakat faqat bitta o'q bo'ylab bo'layotgani uchun, harakat miqdori o'zgarish teoremasining shu o'qdagi proektsiyasini yozaylik.

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_x \qquad \text{(a)}$$

Jism to’xtaganda $V_{1x} = O$ bo’ladi, va $V_{ox} = V_o$ ga teng. Jismga ta`sir etuvchi kuchlardan faqat ishqalanish kuchigina $O\,x$ o’qiga proektsiya beradi xolos, va u tezlik yo’nalishiga teskari yo’naladi. Kulon qonuniga asosan $F_{ишк} = f\,N,$ bu yerda N-normal bosim, uni aniqlash uchun, hamma kuchlarni $O\,y$ o’qiga proektsiyalab, uni nol ga tenglaymiz, chunki $O\,y$ o’qi bo’ylab, hech qanday harakat yo’q, ya`ni $V_y = O$ demak $\sum F_k = 0$ $N - P = 0$ bundan $N = P$ va $F_{ishq} = f\,P = fmg$ ga quysak

Jism to’xtagandagi tezligi $V_1 = O$ bo’lgani uchun,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A$$

S - masofani bosib qtishda, N va R kuchlar ish bajarishmaydi, chunki ular harakat yo’nalishiga perpendikulyar ravishda yo’nalishgan, shuning uchun faqat ishqalanish kuchi ish bajaradi xolos, shunga ko’ra $A = -F_{ишк}S,\ ёки\ A = -fmg\,S,$ chunki $F_{ишк} = fmg$ shuning uchun,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -fmgS$$

hosil bo’lgan tenglamani S ga nisbatan yechsak, $S = \dfrac{v_0^2}{2\,fg}$ - ya`ni, jismning to’xtaguncha bosib o’tgan yo’lini aniqlaymiz. Ko’rinib turibdiki jism to’xtaguncha o’tadigan vaqt, boshlang’ich tezlik $V_o,$ va ishqalanish koeffitsienti $-f$ ga chiziqli ravishda bog’lik ekan, ya`ni ular birinchi darajada ishtirok etmoqdalar, yoki jism to’xtaguncha bosib o’tilgan yo’l tezlikning kvadratiga bog’lik holda o’zgarar ekan.

Mavzuning maqsadi: Dinamikada eng ko’p uchraydigan qiymatlardan biri kinetik energiyadir, agar biz uni aniqlashni bilsak, demak jismning har qanday harakatdagi energiyasini to’liq bilgan bo’lamiz. Shunga ko’ra bo’lsa kerak, ilgarigi davrlarda uni tirik energiya deb ham atalar edi, ya`ni kinetik energiya ma`lum bo’lsa, harakat miqdori, yoki harakat miqdori momentini bilishning hojati yo’q, u hamma harakatdagi energiyani to’lig’icha aniqlab beradi.

Lekin ular orqali jismga ta`sir etayotgan tashqi kuchni, yoki ularning bosh momentini aniqlashda kerak bo’lsa, kinetik energiya mexanik sistemaning ixtiyoriy harakatda unga ta`sir etayotgan kuchlarning bajargan ishlarini aniqlashda foydalaniladi. quyida biz shu energiyaning o’zgarish sabablarini va uning qonuniyatlarini o’rganamiz.

Bayoni:

1.Mexanik sistemaning turli xarakatdarida uning kinetik energiyasini aniqlash

Kinetik energiya har doim musbat va skalyar qiymat bo’lib, uning yunalishi va qo’yilgan nuqtasi bo’lmaydi, uning moduli (son qiymati) ni bilish kifoyadir.

Avvalo mexanik sistemaning turli xarakatlarida uning kinetik energiyasini qanday aniqlashni ko’rib o’taylik. Kinetik energiya skalyar qiymat bo’lganligi uchun, *mexanik sistemaning kinetik energiyasi*ni aniqlash uchun, uni algebrik yig’indisini olsak kifoyadir, ya`ni

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \Sigma\,T_k = \Sigma\ m_k\ V_k^2 / 2\ i \qquad (3.112)$$

Endi, texnikada uchraydigan turli xil harakatlarda, mexanik sistemaning kinetik energiyasini aniqlashni ko’rib chiqaylik.

1. Mexanik sistemaning ilgarilama xarakatida, uning kinetik energiyasini aniqlash.

Kinematika qismida ko’rib o’tganimizdek, ilgarilama harakatda mexanik sistemaning barcha nuqtalarining tezlik vektorlari bir xil bo’ladi, ya`ni

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \cdots = \overline{V}_n = \overline{V}_c$$

deb qabul qilsak,

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = \frac{1}{2}V_c^2 \cdot \sum m_k = \frac{1}{2}M \cdot V_c^2$$

ni hosil qilamiz.

Demak, *mexanik sistemaning ilgarilama harakatidagi kinetik energiyasi* sistemaning umumiy massasini, uning massa markazining tezlik modulini kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng ekan, ya`ni

$$T = \frac{1}{2}MV_c^2 \tag{3.113}$$

2. qattiq jismning qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatida, uning kinetik energiyasini aniqlash.

qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatda, ixtiyoriy nuqtaning tezligi $V_k = h_k \cdot \omega$ formula bilan aniqlanadi, shunga ko'ra, umumiy kinetik energiya

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k h_k^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_k h_k^2$$

ga teng bo'lib, bunda

$$T = \frac{1}{2}J_{0z} \cdot \omega^2 \tag{3.114}$$

ekanligi isbotlandi, bu yerda ω - jismning burchakli tezligi, J_{os} jismning Oz - o'qiga nisbatan inertsiya momenti.

Ya`ni *qattiq jismning qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatdagi to'liq kinetik energiya*, shu jismning aylanish o'qiga nisbatan *inertsiya moment*ni, uning burchakli tezligi kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng ekan.

3. Qattiq jismning tekis parallel `arakatdagi kinetik energiyasi.

Kinematika qismida kqrib qtganimizdek `ar qanday tekislikka parallel `arakatni ikkita oddiy `arakatga ajratish mumkin, ulardan biri massa markazi bilan ilgarilama `arakat, ikkinchisi esa massa markazi atrofidagi aylanma `arakatdan iborat, shunga kqra,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{MV_c^2} + \frac{1}{2}\mathrm{J_{cz}} \cdot \omega^2 \tag{3.115}$$

Agar mexanik sistema bir nechta qattiq jismlardan iborat bo'lsa va har biri turlicha harakat qilishsa, ularning kinetik energiyalarini alohida alohida aniqlanadi, so'ngra skalyar ravishda qo'shiladi.

2. Mexanik sistema kinetik energiyasining qzgarish teoremasi.

Mexanik sistemaning bir nuqtasining harakati uchun uning differentsial tenglamasini yozaylik.

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad , \qquad \textit{yoki}$$

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \tag{3.116}$$

Endi, shu nuqta dt vaqt ichida $d\bar{r}_k$ masofaga ko'chsa, shu nuqtaga ta`sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar ma`lum ish bajarishadi, uni aniqlash uchun (3.116) tenglamani ikkala tomonini skalyar ravishda $d\bar{r}_k$ vektorga ko'paytiraylik.

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot d\bar{r}_k = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k \tag{3.117}$$

bu yerda $\bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = dA_k^e$ ва $\bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k = dA_k^i$

bo'lganligi uchun,

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot d\bar{r}_k = m_k d\bar{V}_k \cdot \frac{d\bar{r}_k}{dt} = m_k \bar{V}_k \cdot d\bar{V}_k = d\left(\frac{1}{2}\bar{V}_k^2\right) = dT_k$$

ekanligini e`tiborga olsak (3.117) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$dT_k = dA_k^e + dA_k^i \tag{3.118}$$

Butun mexanik sistema uchun,

$$d\sum T_k = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \tag{3.119}$$

Ushbu (3.119) tenglama, *mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarish teoremasining differentsial formasi* deyiladi, ya`ni mexanik sistema kinetik energiyasining differentsiali, shu sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig'indisiga teng ekan.

(3.119) tenglamani ikkala tomonini harakatni boshlanishi va oxiri ichida integrallasak

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \tag{3.120}$$

hosil qilamiz. Ushbu (3.120) tenglama *mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarish teoremasining integral ifodasi* deyiladi, ya`ni mexanik sistemaning bir `olatdan ikkinchi holatda ko'chishdagi kinetik energiyasining o'zgarishi, shu sistemaga ta`sir etuvchi ichki va tashqi kuchlarning shu kqchishida bajargan to'liq ishlarining yig'indisiga teng ekan.

Agar mexanik sistema yaxlit qattiq jismdan iborat bo'lsa, yani uning nuqtalari bir-birlariga nisbatan o'z holatlarini harakat davomida o'zgartirmaydilar, u holda *ichki kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisi* nol ga teng bo'ladi (ichki kuchlarning ikkinchi xossasiga qarang), shunga ko'ra, (3.120) tenglama, quyidagi ko'rinishga keladi,

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{3.121}$$

qattiq jismning biror harakatidagi kinetik energiyasini o'zgarishi, shu sistemaga ta`sir etuvchi tashqi kuchlarining bajargan ishlarining yig'indisiga teng ekan.

Shunday qilib oldingi uchta teoremada ichki kuchlar mutloq ishtirok etmagan edi, bu teoremada esa ular qatnashmoqdalar, lekin absolyut qattiq jismning har qanday harakatida ichki kuchlar yana ishtirok etishmayapti.

9- Mavzu: POTENSIAL KUCH MAYDONI. POTENSIAL ENERGIYA.

Reja:

1. Kuch maydoni nima.
2. Statsionar va statsionar bo'lmagan kuch maydoni nima.
3. Potensial energiya va potensial kuch maydonini tariflang.
4. Og'irlik kuchi maydonining potensial energiyasini yozib bering.
5. Elastiklik kuchining potensial energiyasini ifodalang.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Potensialli kuch maydonida og'irlik va elastiklik kuchlari potensial energiyasini qanday topishni tushuntiring (mavzuni diqqat bilan o'rganib chiqib, javob topasiz).

Tayanch so'z va iboralar

Potensial kuch maydoni. Kuch funktsiyasi. Potensial energiya. Og'ir lik kuch maydonining kuch funktsiyasi. Elastiklik kuchining kuch funtsiyasi.

Mavzuning maqsadi: Dinamikada shunday *kuch maydonlari* bo'ladiki, shu maydonlarning xar bir nuqtasida joylashgan moddiy nuqtalarga tegishli yo'nalishda va tegishli qiymatlardagi kuch vektorlari ta`sir etadi. Shunday maydonlarning asosiy xususiyatlarini o'rganish, va bu maydonlarda to'liq *mexanik energiyaning saqlanishi* haqida fikr yuritiladi.

Bayoni:

1.Kuch maydoni statsionar va statsionar bo'lmagan kuch maydoni.

Kuch maydoni deb, fazoning shunday bir qismiga aytiladiki, uning har bir nuqtasiga joylashgan moddiy nuqtaga ixtiyoriy olingan har bir vaqtda tegishlicha kuch vektori ta`sir etadi, ya`ni shu maydondagi kuch vektori, nuqtaning radius vektori va vaqtning funktsiyasidan iborat bo'ladi, ya`ni

$$\overline{F} = f(\overline{r}, t)$$

yoki uning koordinata o'qlardagi uchta proektsiyasi qo'yidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} F_x = f_1(x,y,z,t) \\ F_y = f_2(x,y,z,t) \\ F_z = f_3(x,y,z,t) \end{cases}$$

bu yerda x,y,z -lar moddiy nuqtaning koordinatalari.

Agar kuchning funktsiyasi vaqtga bog'liq bo'lsa u *statsionar bo'lmagan kuch maydoni* deyiladi, agar kuch vaqtga bog'liq bo'lmasa statsionar maydoni deyiladi. Bizning ishchi dasturda asosan *statsionar kuch maydon*larini o'rganish maqsad qilib qo'yilgan,

$$\begin{cases} F_x = f_1(x,y,z) \\ F_y = f_2(x,y,z) \\ F_z = f_3(x,y,z) \end{cases} \tag{3.122}$$

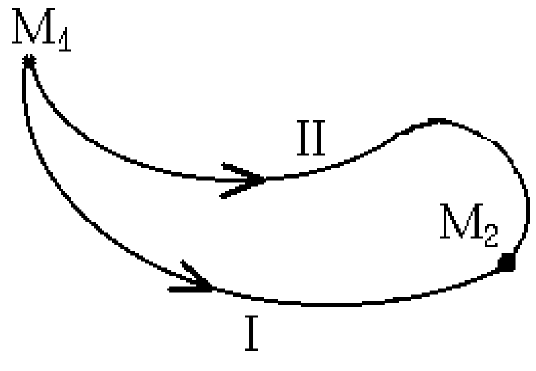
Yuqoridagi kuch maydonlari qo'yidagi ikkita -xususiyatga ega bo'ladi:

1. *Statsionar kuch maydonida bajarilgan ish*, moddiy nuqtaning harakat traektoriyasiga bog'lik bo'lmasdan, faqat uning boshlang'ich va ohirgi xolatining koordinatalariga bog'lik bo'ladi.

2. Moddiy nuqtaning M_1 xolatdan M_2 holatga ko'chishida bajarilgan ish, shu nuqtaning teskari, ya`ni $M_2$ holatdan $M_1$ holatga ko'chishidagi bajarilgan ishining teskari ishorasiga tengdir, ya`ni

$$A_{2,1} = -A_{1,2} \tag{3.123}$$

$A_{1,2} -$ kuch maydonining M_1 nuqtasidan M_2 nuqtasiga ko'chishda bajarilgan ish, $A_{2,1} -$ shu maydoning M_2 nuqtasidan M_1 nuqtasiga ko'chishda bajarilgan ish. Lekin ular har xil traektoriyalar bo'ylab bajarilishi mumkin.



3.27 shakl

2.Potensial energiya

Faraz qilaylik, bizga qandaydir *potensial kuch maydoni* berilgan bo'lsin, va M nuqtasini koordinatalari (x,y,z) bo'lsin. Endi shu maydonda boshqa ixtiyoriy nuqtani M_0 deb belgilaylik, va uni nol nuqta deb hisoblaylik.

U holda, moddiy nuqta M, o’zining M_1 holatidan M_0 holatda ko’chishda bajargan ishi faqat uning koordinatalarigagina bog’lik bo’lar ekan xolos, ya`ni uni shu ko’chishda qancha masofa (yo’l) bosib o’tganligini hech qanday ahamiyati yo’q ekan.

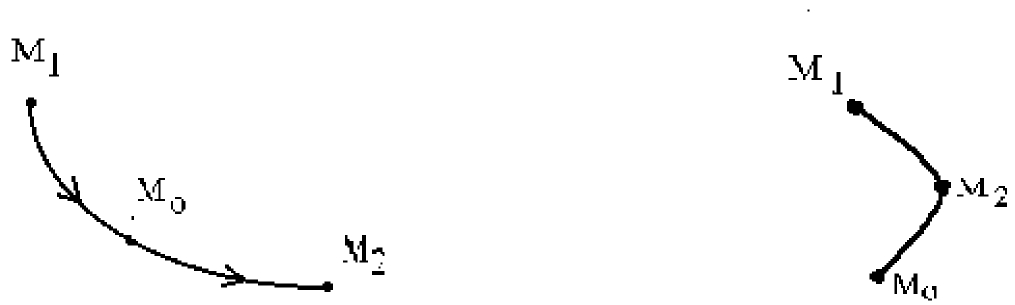
Shunga ko’ra, bu maydonda bajarilgan ish shu nuqtaning koordinatalariga bog’lik bo’lgan funktsiyadan iborat bo’lib, bu funktsiya`ni *potensial energiya* deb ataladi, va grekcha П- harfi bilan belgilanadi, ya`ni

$$\Pi(x, y, z) = A_{MM_0}$$

Lekin bu funktsiya uzluksiz bo’lib, o’zining ikkinchi tartibli hosilasiga ham ega bo’lishi shart.

Yuqoridagi ifodaga ko’ra, nol nuqta shunday nuqtaki, bu nuqtaning potensial energiyasi nolga teng ekan.

Kuch maydonining potensial energiyasining funktsiyasi ma`lum bo’lsin, ya`ni $\Pi -$ ning funktsiyasi malum bo’lsin. U holda moddiy nuqtaning M_1 holatdan M_2 holatga o’tishidagi bajargan ishini hisoblaylik.



3.28 shakl.

U holda M_1 dan M_2 ko’chishda o’tilgan yo’lni aniqlaylik, u holda bu ko’chishdagi bajarilgan ish qo’yidagiga teng bo’ladi:

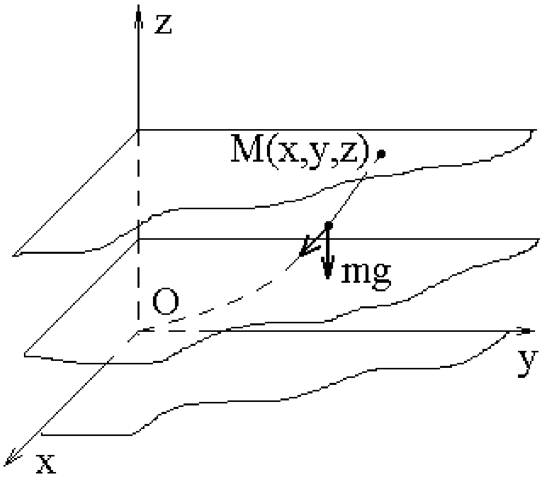
$$\mathrm{A}_{\mathrm{M_1M_0}} = \mathrm{A}_{\mathrm{M_1M_2}} + \mathrm{A}_{\mathrm{M_2M_0}} \tag{3.124}$$

Potensial kuch maydonining ifodasiga asosan $A_{M_1M_0} = \Pi_1$ va $A_{M_2M_0} = \Pi_2$ ga teng bo’ladi. Bu yerda $\Pi_1 - M_1$ nuqtadagi potensial energiya, $\Pi_2 - M_2$ nuqtadagi potensial energiya, u holda

$$A_{M_1M_0} = \Pi_1 - \Pi_2 \tag{3.125}$$

demak potensial kuch maydonida bajarilgan ish, shu nuqtalarning potensial energiyalarining ayirmasiga teng ekan.

A) Og’irlik kuchi maydonining potensial energiyasi.



3.29 shakl

$x\,O\,y$ tekisligini gorizontal holda yotibdi deb tanlaylik, u holda og’irlik kuchining koordinata o’qlaridagi proektsiyalari $F_x = F_y = 0; \;\; F_z = -mg$ bo’ladi. U holda shu kuchning bajargan elementar ishi $d\,A = F_k\;dx + F_y\;dy + F\;{}_z dz = -m\,g\,d\,z$ bo’ladi. Og’irlik kuchning O nuqtadan M nuqtaga ko’chishdagi bajargan ishi esa,

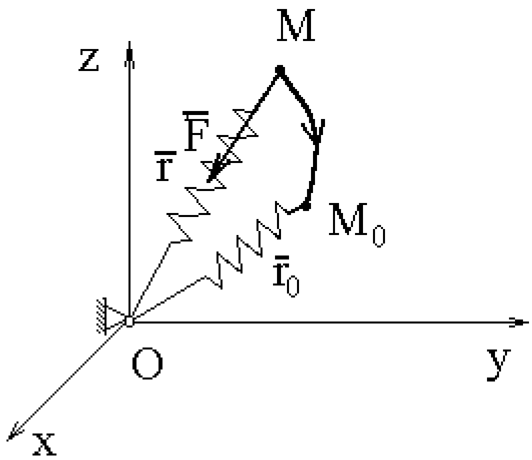
$$A_{OM} = -\int_0^z mgdz = -mgz \tag{3.126}$$

ga teng bo’ladi.

Lekin, M nuqtaga ta`sir etayotgan *og’irlik kuchining potensial energiyasi*, moddiy nuqtaning M holatdan O holatga ko’chishda bajargan ishiga teng bo’lganligi uchun

$$\Pi = A_{MO} = mgz \tag{3.127}$$

v). Prujinaning elastik kuchining potensial energiyasi.



3.30 shakl.

Berilgan prujinani $\bar{r}_0$ radius vektorining o’rnini M_0 nuqta bilan, ya`ni uning potensial energiyasi O nuqta, yoki energiyasi nol nuqta deb belgilaylik. Bu sirt radiusi r_0 bo’lgan sferadan iborat bo’lsin.

Endi ushbu prujinani qandaydir $r-$ uzunlika o'zgartiraylik, u holda tegishligicha elastiklik kuchi paydo bo'ladi, va uning moduli quyidagiga teng bo'ladi:

$$F=-c\left(r-r_0\right)$$

agar $r>r_0$ katta bo'lsa bu kuch M_0 markaz tomonga yo'naladi, aks holda u markazdan tashqariga yo'naladi.

Ushbu ko'chishda bajarilgan ish

$$\Pi(r)=-c\int_r^{r_0}\left(r-r_0\right)dr=\frac{c(r-r_0)^2}{2}$$

yoki

$$\Pi(r)=\frac{c\lambda^2}{2} \qquad (3.128)$$

bu yerda $\lambda=\left|r-r_0\right|,$ ya`ni prujinaning uzunligi qanchaga o'zgarganligini moduli bo'lib, absolyut qiymatiga teng bo'ladi.

Shunga ko'ra, shu maydondagi ixtiyoriy M_1 nuqtadan M_2 nuqtaga ko'chishda bajarilgan ish.

$$A_{2,1}=\frac{c\lambda_1^2}{2}-\frac{c\lambda_2^2}{2} \qquad (3.129)$$

ga teng ekan.

3. Moddiy nuqta va mexanik sistema uchun mexanik energiya`ning saqlanish qonuni

$A=\Pi_0-\Pi$ bo'lgani uchun moddiy nuqta kinetik enegiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\Pi_0-\Pi \qquad (3.130)$$

yoki

$$\frac{mv^2}{2}+\Pi=\frac{mv_0^2}{2}+\Pi_0=h \qquad (3.131)$$

bunda h - o'zgarmas bo'lib, boshlang'ich paytdagi to'liq mexanik energiya`ni ifodalaydi.

$T+\Pi=E$ to'liq mexanik energiya ya`ni ifodalaydi. $E=T+\Pi=h$ Bunga energiyaintegrali ham deyiladi.

Bu formula *moddiy nuqta mexanik energiyasining saqlanish qonunini* ifodalaydi: *potensialli kuch maydonida harakatlanayotgan nuqtaning to'liq mexanik energiyasi o'zgarmasdan qoladi.*

Agar mexanik sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi kuchlar potensialga ega bo'lsa, u xolda sistemaning har bir nuqtasiga qo'yilgan kuchlarning ishi

$$A_k = \Pi_{ok} - \Pi_k$$

formuladan aniqlanadi. Shu sababli mexanik sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlar bajargan ishlarining yig'indisi quyidagiga teng bo'ladi:

$$A = \Sigma A_k = \Sigma \Pi_{ok} - \Sigma \Pi_k = \Pi_o - \Pi \qquad (3.133)$$

bunda $\Pi_o = \Sigma \Pi_{ok}$ *ва* $\Pi = \Sigma \Pi_k$ mos ravishda mexanik sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi barcha kuchlarning boshlang'ich va oxirgi paytdagi potensial energiyalarining yig'indisini ifodalaydi.

(3.133) ni mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi formulaga qo'ysak,

$$T - T_o = \Pi_o - \Pi$$

yoki

$$T + \Pi = T_o + \Pi_o \qquad (3.134)$$

tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglama *mexanik sistema energiyasining saqlanish qonunini* ifodalaydi: *agar sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar potensialga ega bo'lsa, u holda mazkur sistemaning to'liq energiyasi o'zgarmasdan qoladi.*

Mexanik energiya`ning saqlanish qonuni o'rinli bo'lgan mexanik sistema *konservativ sistema* deyiladi.

Moddiy nuqta yoki mexanik sistema nuqtalariga potensialga ega bo'lmagan qarshilik kuchlari (masalan, ishqalanish kuchi, elektr generatori, suv nasosi va boshqa qarshilik kuchlari) ta`sir etsa, mexanik energiya`ning bir qismi issiqlik, elektr va boshqa energiyalarga aylanish natijasida mexanik energiya kamaya boradi.

Binobarin, bu holda mexanik energiya`ning saqlanish qonuni o'rinli bo'lmaydi. Lekin barcha ko'rinishdagi (mexanik, issiqlik, elektr va boshqa) energiyalardan tashkil topgan to'liq energiya, mexanik sistema har qanday kuch maydonida harakatlansa ham, o'zgarmasdan qoladi.

10-Mavzu: QATTIQ JISM HARAKATLARIGA DINAMIKA UMUMIY TEOERMALARINI TADBIQ ETISh.

Reja:

1. Qattiq jismning ilgarilaтma harakatini differentsial tenglamasi.
2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatini differentsial tenglamasi.
3. Qattiq jismning tekis parallel harakatining differentsial tenglamasi.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Ilgarilanma va qo’zg’almas o’q atrofida aylanma harakat differentsial tenglamalarini taqqoslab, umumiylikni toping? Muammoli savol? Nima uchun tekis parallel harakat differentsial tenglamasini tabiiy koordinata o’qlaridagi ko’rinishini har doim ifodalash mumkin emas (tabiiy koordinata o’qlari xossasini eslang).

Tayanch so’z va iboralar

Qattiq jismning ilgarilanma harakati differentsiall tenglamasi. Qattiq jismning aylanma harakati differentsial tenglamasi.
Qattiq jismning tekis parallel harakati differentsial tenglamasi.

<u>Mavzuning maqsadi:</u> Qattiq jism turli harakatlar bajari[illegible]arga ta`sir etayotgan kuchlarga va shu jismning boshlang’ich paytdagi holati va tezligiga bog’liq ravishda bajariladi. Quyida biz qattiq jismning turli xarakatlarida uning *<u>harakat qonunlari</u>*ni aniqlash bilan shug’ullanamiz.

<u>Bayoni:</u>

<u>1.Qattiq jismning ilgarilama harakatini differentsial tenglamasi</u>

Biz kinematika kursida qattiq jismning ilgarilama xarakatida, uning barcha nuqtalarining traektoriyalari, tezlik va tezlanish vektorlari bir xil ekanligini ko’rib o’tgan edik. Shu sababli qattiq jismning massalar markazi qanday harakatda bo’lsa, qolgan barcha nuqtalarining harakati ham xuddi shunday bo’ladi.

Shunga ko’ra, quyidagi vektor tenglama o’rinli bo’ladi, ya`ni

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$$

Ushbu vektor tenglamani koordinata o’qlariga proeksiyalasak, quyidagi 3-ta skalyar tenglama hosil bo’ladi,

$$Ma_{cx} = \sum F_{kx}^e, \qquad Ma_{cy} = \sum F_{ky}^e, \qquad Ma_{cz} = \sum F_{kz}^e,$$

Ikkinchi tomondan ilgarilama harakatdagi *<u>qattiq jismning burchakli tezligi</u>* va *<u>burchakli tezlanishi</u>* nolga teng bo’lganligi uchun, shu jismga ta`sir etuvchi tashqi kuchlarning massa markaziga nisbatan olingan momentlarining bosh vektori har doim nolga teng bo’lishi shart, ya`ni

$$\sum m_c\left(\vec{F}_k^e\right) = 0$$

Shuni ta`kidlab o’tish lozimki, yuqoridagi ikkita vektor tenglama zaruriy shart hisoblanadi, lekin u yetarli emas, ushbu qattiq jism ilgarilama harakat o’ilishi uchun, uning boshlang’ich burchakli tezligi $\omega_0 = 0$ bo’lishi shart. Shu shartlar bajarilgandagina, qattiq jism unga ta`sir etayotgan har qanday kuchlar sistemasiga qaramasdan ilgarilama harakatda bo'ladi. Bunday masalani yechish, moddiy nuqtaning dinamikasi masalalarini yechishga o'hshab ketadi.

2. Qattiq jismning qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatining differentsial tenglamasi

Mexanik sistema qattiq jismdan iborat bo'lsa, u qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan bo'lsa, uning shu *qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat qonunini* aniqlash uchun yuqoridagi kinetik momentning o'zgarish teoremasidan foydalaniladi, chunki bunday masalani yechishda dinamikaning asosiy qonunidan to'g'ridan-to'g'ri foydalanish, masalani murakkablashtirib yuboradi.

Faraz qilaylik 3.24 shaklda ko'rsatilgan qattiq jism, qo'zg'almas Az o'qi atrofida aylanma harakat qilayotgan bo'lsin, va shu vaqtni o'zida unga bir nechta tashqi kuchlar ta`sir etsin. Endi shu kuchlar ta`siri ostida uning harakati qanday qonuniyat bilan o'zgarishi aniqlansin.

Buning uchun (3.96) tenglamalar sistemasidan,

$$\frac{dK_{Az}}{dt} = \sum m_{Az}(\overline{F}_k^e) \tag{3.136}$$

ni yozamiz, bu yerda $K_{AZ} = J_{AZ} \cdot \omega$ *ва* J_{AZ}, shu Qattiq jismning qo'zg'almas Az o'qiga nisbatan inertsiya momenti, $\omega -$ uning shu ondagi burchakli tezligi, bularn`i yuqoridagi tenglamaga qo'ysak

$$J_{Az}\frac{d\omega}{dt} = \sum m_{Az}(\overline{F}_k^e)$$

Tekshirilayotgan sistema qattiq jismdan iborat bo'lgani uchun, uning inertsiya momenti J_{AZ} - differentsialdan tashqariga chiqarib yuborildi.

Agar jismning burilish burchagini $\varphi -$ bilan belgilasak, oxirgi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi,

$$J_{Az} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_{Az}(\overline{F}_k^e) \tag{3.137}$$

Ushbu (3.137) tenglama qattiq jismning qo'zg'almas Az - o'q atrofidagi *aylanma harakatining differentsial tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama qattiq jismning ilgarilama harakatining differentsial tenglamasiga juda o'hshab ketadi, lekin ularni ancha farqi bor. Bu yerda massa o'rnida inertsiya momenti, tezlanish o'rnida burchakli tezlanish, tashqi kuchlarning bosh vektori o'rnida, ularning aylanish o'qiga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi turibdi. Qattiq jismning qo'zgalmas Az, o'qi atrofidagi harakatining differentsial tenglamasi dindmika ikkita asosiy masalani yechishda qo'llaniladi:

1. Berilgan aylanma harakat qonuniga binoan shu jismga ta`sir etayotgan kuchlarining bosh momentini aniqlanadi, ya`ni $\varphi = \varphi(t)$ t berilsa

$$M_{AZ}^e = f(t)$$ aniqlanadi.

2. Shu jismga ta`sir etayotgan tashqi kuchlarning momentlari va boshlang'ich shartlarga asosan, shu jismning aylanma harakatdagi qonuniniyati aniqlanadi, ya`ni agar $M_{AZ}^e = f(t)$ va φ_o, berilsa $\varphi = \varphi(t)$ aniqlanadi.

3. Qattiq jismning tekis parallel harakatining differentsial tenglamasi.

<u>Qattiq jismning tekis parallel harakati</u> qanday ekanligi, nazariy mexanikaning kinematika qismida o'rganilgan edi. Lekin shunday harakat qanday kuchlar sistemasida amalga oshishi to'g'risida gapirilmagan edi.

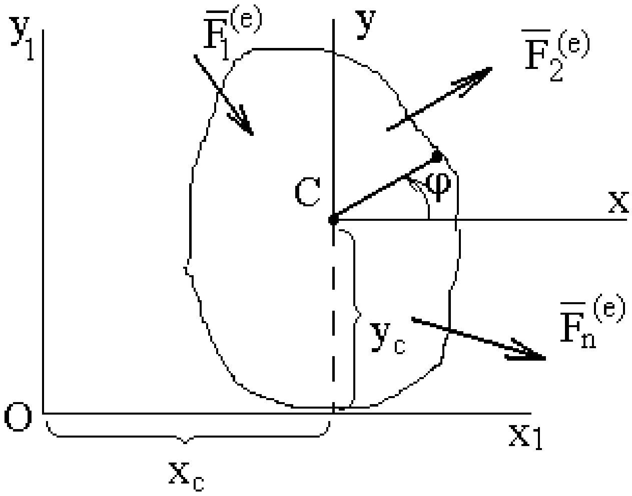
Endi biz shunday harakatni qaysi qonuniyat bilan amalga oshishi mumkinligini ko'rib o'tamiz. Buning uchun inertsial sistemada xOy o'qlar tanlab olaylik va ular bu sistemada qo'zg'almas qilib mahkamlangan bo'lsin va shu qattiq jismning massa markazi S nuqtadan o'qqa va u bilan ilgarilama harakat qiluvchi Cxy o'qlarini tanlab olaylik. (3.31 shakl)

Qattiq jismning kinetik momentini o'zgarish teoremasiga asosan quyidagi differentsial tenglamani yozamiz.

$$\frac{dK_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}(\overline{F}_k^e) \tag{3.139}$$

bu yerda $K_{cz} = J_{cz} \cdot \omega$ $J_{cs} -$ Qattiq jismning massa markazidan o'qqa va harakat tekisligiga perpendikulyar bo'lgan Cz o'qqa nisbatan inertsiya momenti, $\omega -$ jismning burchakli tezligi, shunga ko'ra oxirgi tenglama quyidagicha yoziladi.

$$J_{cz} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_{cz}(\overline{F}_k^e) \tag{3.140}$$



3.31 shakl

Shu (3.138) va (3.139) differentsial tenglamalar sistemasi, uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan jismning *<u>tekis parallel harakatining differentsial tenglamalari</u>* deyiladi.

Ushbu 3 ta differentsial tenglamalar sistemasi orqali dinamikaning ikkita asosiy masalasi yechiladi:

1. Qattiq jism tekis parallel harakatining qonuni berilgan bo'lsa, shu jismga ta`sir etayotgan tashqi kuchlar sistemasini bosh vektorini va ularni massa markazidan o'qqa nisbatan bosh momentini aniqlaymiz, ya`ni agar $x_c = f_1(t)$ $y_c = f_2(t)_1$ $z_c = f_3(t)$ berilgan bo'lsa, $\Sigma F_{kx}^e,\ \Sigma F_{ky}^e$ ва $\Sigma m_{cx}\left(\overline{F}_k^e\right)$ ni aniqlaymiz.

2. Agar qattiq jismning tekis parallel harakatida unga ta`sir etuvchi kuchlar sistemasi berilgan bo'lsa, uning harakat qonunini aniqlaymiz, ya`ni agar $\Sigma F_{kx}^e,\ \Sigma F_{ky}^e$ ва $\Sigma m_{cz}\left(\overline{F}_k^e\right)$ hamda $x_{co}, y_{co}, \varphi_o$ berilgan bo'lsa $x_c = f_c(t),\ y_c = f_c(t)$ ва $\varphi = f_3(t)$ larni aniqlaymiz.

11- MAVZU: MODIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA UCHUN DALAMBER PRINTSIPI. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATIDA HOSIL BO'LADIGAN DINAMIK REAKTSIYALAR.

Reja:

1. Moddiy nuqta uchun Dalamber printsipi.
2. Mexanik sistema uchun Dalamber printsipini.
3. Qattiq jismning turli harakatlarida inertsiya kuchlarini va inertsiya kuchlarining momentlarini aniqlash.

a) Ilgarlanma harakatdagi.
b) Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatdagi.
c) Tekislikka parallel harakatdagi.

4. Dinamik reaktsiyalar deb nimaga aytiladi?
5. Statik reaktsiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Dinamik reaktsiyalar qaysi hollarda mavjud bo'ladi va qaysi hollarda mavjud bo'lmaydi
7. Nima uchun aylanish o'qi bo'ylab dinamik reaktsiyalar mavjud bo'lmaydi.

Muammoli vaziyat savol yoki topshiriq

Mashina o'rnidan qo'zg'alganda undagi odam beixtiyor orqaga, tormoz berayotganda esa oldingi qalqib ketadi. Shu holat nima xisobiga yuz berishini izohlang. (inertsiya kuchini aniqlashga diqqat qiling). Harakatdagi jismga inertsiya kuchlarini qo'yib uni muvozanatlamoqdamiz. Haqiqatda jism o'z harakatini to'xtatadimi. Javobingizni izohlang. (Mavzuni diqqat bilan o'qing). Dinamik bosimni aniqlashda statik muvozanat tenglamalaridan foydalanishga asos nima. Javobingizni izohlang.

Tayanch so'z va iboralar

Inersiya kuchi. Urunma va markazdan qochma inersiya kuchlari. Mexanik sistema uchun Dalamber printsipi. Inertsiya kuchlari bosh vektori. Inertsiya kuchlari bosh momenti. Aylanish o'qiga dinamik bosim. Ayla-nuvchi jism massalarini dinamik muvozanatlash.

Mavzuning maqsadi: Nyutonning qonunlari har qanday mexanik sistemaning harakatlarini o'rganish uchun barcha imkoniyatlarni o'zida jam qilgan. Avvalida bu qonunlar faqat erkin moddiy nuqta va qattiq jism uchun qo'llanilgan edi, keyinchalik bog'lanishdagi jismlarning ham harakatiga qo'llanila boshlandi va bog'lanishlar aksiomasi bilan, ya`ni qo'shimcha qonunlar bilan boyitildi, quyida mexanikaning asosiy printsiplarpidan biri bo'lgan Dalamber printsipi haqida so'z yuritiladi, va uni dinamika masalalarini yechishda tutgan o'rni ko'rsatib beriladi.

Bayoni:

Agar dindmika masalalarida moddiy nuqta yoki qattiq jismlarga ta'sir qilayotgan kuchlardan birini (bu kuch ko;p hollarda bog'lanishlarnung reaksiya kuchlari bo'lishi mumkin) topish talab qilinayotgan bo'lsa dinamikkaning asosiy qonunida shakl o'zgartirish qilib, dinamika masalalarini statika masalalariga o'xshatib echish mumkin. Bu taklifni birinchi bo'lib Dalamber kiritganligi uchun bu prinsip uning nomi bilan ataladi.

1. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Bo\lanishdagi moddiy nuqta uchun N’yutonning ikkinchi qonunini quyidagicha yozish mumkin.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

bu erda $\vec{F}$ - aktiv kuchlarning bosh vektori,

$\vec{R}-$ bog'lanish reaksiya kuchlarining bosh vektori

Dalamber yuqoridagi formuladagi miqdori massa bilan tezlanishning ko’paytmasiga teng, yo’nalishi tezlanishga qarama-qarshi yo’nalgan kuchni inersiya kuch deb belgilanada

$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ bu ifodani (3.141) formulana qo’yib, barcha kuchlarni tenglik bir tomoniga o’tkazsak

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0 \qquad (3.142)$$

hosil bo’ladi.

(3.142) tenglama, moddiy nuqta uchun <u>*Dalamber printsipi*</u>ning matematik ifodasidir, ya`ni moddiy nuqtaning inertsial sistemadagi har qanday harakatida, unga ta`sir etayotgan aktiv kuchlarning bosh vektori, reaktsiya kuchlarning bosh vektori va inertsiya kuchining vektorlarining yig’indilari muvozanatdagi kuchlar sistemasini tashkil etar etadi.

Masalalarni yechishda (3.142) vektor tenglamani ox, oy, oz Dekart koordinata o’qlariga proektsiyaladan

$$\begin{cases} F_x + R_x + \Phi_x = 0 \\ F_y + R_y + \Phi_y = 0 \\ F_z + R_z + \Phi_z = 0 \end{cases} \qquad (3.143)$$

Yoki, tabbiy koordinata o’qlarida quyidagi ko’rinishdagi

$$\begin{cases} F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0 \\ F_n + R_n + \Phi_n = 0 \\ F_b + R_b + \Phi_b = 0 \end{cases} \qquad (3.144)$$

(3.143) va (3.144) formuladagi inersiya kuchi deb atalgan kattalikning miqdori mos ravishda quyidagi tengliklardan aniqlanadi

$\Phi_x = ma_x, \quad \Phi_y = ma_y, \quad \Phi_z = ma_z,$

$\Phi_\tau = ma_\tau, \quad \Phi_n = ma_n, \quad \Phi_b = 0$

tabbiy koordinata o’qlarining o’tkazish xossasiga ko’ra $a_b = 0$ bo’lgani uchun har doim $\Phi_b = 0$ bo’ladi, proyeksiyalaridanfoydalanish mumkin

Aslida inertsiya kuchi nuqtaga qo’yilmagan, bu kuch xarakatdagi kuchga aylangan, ya`ni nuqtaning massasiga teskari proportsional tezlanishga aylangan, aks holda umuman harakat bo’lmas edi.

<u>*2. Mexanik sistema uchun Dalamber printsipi.*</u>

Faraz qilaylik mexanik sistema $n-$ta moddiy nuqtalardan tashkil topsin, va har bir nuqtaga tegishlicha aktiv kuch va tegishlicha reaktsiya kuchi ta`sir etsin, natijada u tegishlicha tezlanish oladi, va har bir nuqta uchun tegishlicha <u>*Dalamber printsipi*</u>ga asosan shartli muvozanat tenglamalarini yozaylik, yani

$$\overline{F}_1 + \overline{R}_1 + \cdots + \overline{\Phi}_1 = 0$$
$$\overline{F}_2 + \overline{R}_2 + \cdots + \overline{\Phi}_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{F}_n + \overline{R}_n + \cdots + \overline{\Phi}_n = 0 \qquad (3.145)$$

(3.145) tenglamalar sistemasini butun mexanik sistema uchun yig'indisini olsak

$$\sum \overline{F}_k + \sum \overline{R}_k + \sum \overline{\Phi}_k = 0 \qquad (3.146)$$

ni hosil qilamiz, lekin bu (3.146) vektor tenglama mexanik sistemaning faqat ilgarilama harakatini ifodalaydi. shunga ko'ra aylanma harakat uchun vektor momentlari tenglamasini yozish lozim. Harakatni to'la o'rganish uchun (3.146) formulada ishtirok etayotganbarcha kuchlardan biror qo'zg'almas markazga nisbatan momen olamiz.

Qo'zg'almas markazdan k nuqtagacha bo'lgan radius vektorni $\vec{r}_k$ disk tenglamani ikkala tomonini har bir nuqtaning radius vektorlariga ko'paytirsak

$$\sum\left(\overline{\mathrm{r}}_{\mathrm{k}} \times \overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}\right) + \sum\left(\overline{\mathrm{r}}_{\mathrm{k}} \times \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{k}}\right) + \sum\left(\overline{\mathrm{r}}_{\mathrm{k}} \times \overline{\Phi}_{\mathrm{k}}\right) = 0$$

ni hosil qilamiz, buni

$$\sum \overline{\mathrm{m}}_0\left(\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{k}}\right) + \sum \overline{\mathrm{m}}_0\left(\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{k}}\right) + \sum \overline{\mathrm{m}}_0\left(\overline{\Phi}_{\mathrm{k}}\right) = 0 \qquad (3.147)$$

deb ham yozish mumkin.

(3.146) va (3.147) vektor tenglamalarni $o\,x\,y\,z$ koordinata o'qlariga proektsiyalasak 6- ta skalyar tenglama hosil qilamiz, bu tenglamalar statika kursidagi fazoviy kuchlar sistemasining muvozanatlik shartini analitik ifodasiga o'xshab ketadi, lekin bu yerda aktiv kuchlar, reaktsiya kuchlaridan tashqari inertsiya kuchlarini ham qatnashadi.

$$\sum F_{kx} + \sum R_{kx} + \sum \Phi_{kx} = 0$$
$$\sum F_{ky} + \sum R_{ky} + \sum \Phi_{ky} = 0$$
$$\sum F_{kz} + \sum R_{kz} + \sum \Phi_{kz} = 0$$
$$\sum mom_x(\vec{F}_k) + \sum mom_x(\vec{R}_k) + \sum mom_x(\vec{\Phi}_k) = 0$$
$$\sum mom_y(\vec{F}_k) + \sum mom_y(\vec{R}_k) + \sum mom_y(\vec{\Phi}_k) = 0$$
$$\sum mom_z(\vec{F}_k) + \sum mom_z(\vec{R}_k) + \sum mom_z(\vec{\Phi}_k) = 0$$

Shuning uchun *inertsiya kuchlari*ni va *inertsiya kuchlarining momentlari*ni qanday aniqlash kerakligini ko'rib o'tamiz.

3. Qattik jismning turli harakatlarida inertsiya kuchlarini aniqlash.

1. *Ilgarilanma harakatda inertsiya kuchlari*ni aniqlash. Qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalarining tezlanishlari bir xil bo'ladi. Bu holda inertsiya kuchlar sistemasining teng ta`sir etuvchisi

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}_c \qquad (3.148)$$

bo'lib, uning ta'sir chizig'i massa markazidan o'tadi.

2. Qattiq jismning *qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakatida inertsiya kuchi*ni va *inertsiya kuchlarining bosh momenti*ni aniqlash.

Agar qattiq jism biror qo'zgalmas o'q atrofida aylanma harakatda bo'lsa, va bu o'q jismning massa markazidan o'tmasa, u holda *inertsiya kuchlarining bosh vektori* va *inertsiya kuchlarining bosh momenti* quyidagicha aniqlanadi,

$$\begin{cases} \overline{\Phi} = -m\bar{a}_c \\ \vec{M}_{oz}^{(u)} = \sum mo\vec{m}_{oz}(\vec{\Phi}_k) - \dfrac{dK_{oz}}{dt} \end{cases} \tag{3.149}$$

Agar aylanish o'qi $O\,z$, massa markazi C nuqtadan o'tsa $\vec{a}_c = O$ bo'ladi, inertsiya kuchlarining shu o'qqa nisbatan bosh momenti

$$M_{oz} = -\frac{dK_{oz}}{dt} = -J_{oz} \cdot \varepsilon \tag{3.150}$$

bu yerda $\varepsilon -$ qattiq jismning burchakli tezlanish.

3. *Tekis parallel harakat*. Bunday harakatni ikkita oddiy harakatdan iborat deb hisoblasak, ya`ni massa markazi bilan birgalikdagi ilgarilama va massa markazi $C-$ nuqta atrofidagi aylanma harakatga ajratsak, u holda *inertsiya kuchlarining bosh vektori*,

$$\overline{\Phi}^{(и)} = -\mathrm{m}\bar{\mathrm{a}}_\mathrm{c} \tag{3.151}$$

Inertsiya kuchlarining massa markaziga nisbatan bosh momenti,

$$\mathrm{M}_{\mathrm{Cz}}^{(и)} = -\mathrm{J}_{\mathrm{Cz}} \cdot \varepsilon \tag{3.152}$$

bu yerda $C\,z-$o'qi harakat tekisligiga perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'lib, massa markazi $C-$ nuqtadan o'tadi.

QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATIDA HOSIL BO'LADIGAN DINAMIK REAKTSIYaLAR.

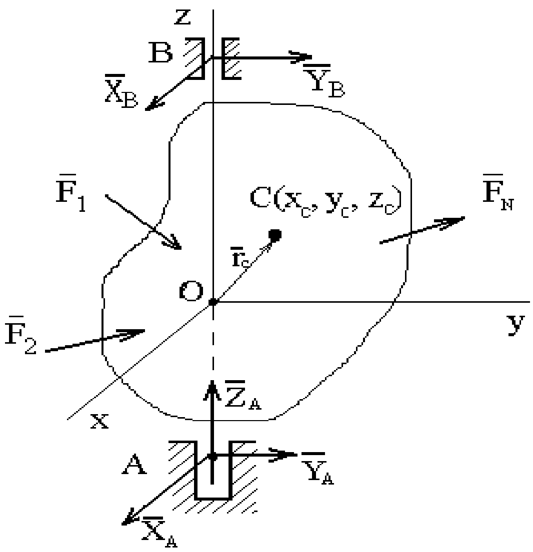
Mavzuning maqsadi: Texnikada uchraydigan aksariyat harakatlardan biri bu qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatlar bo'lib, agar shu qattiq jismning massa markazi aylanish o'qida yotmasa, aylanish o'qiga statik reaktsiyalardan tashqari dinamik reaktsiyalar ta`sir etadi.

Agar aylanishning burchak tezligi yuqori bo'lsa bunday dinamik reaktsiyalarning moduli juda katta bo'lishi mumkin, natijada tegishli mashinani mutloq ishdan chiqishiga olib ketishi mumkin. quyida shunday masalalarni qanday yechish, hosil yuo'ladigan dinamik reaktsiyalarni qanday yo'qotish ustida so'z yuritiladi.

Bayoni:

1. ***Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatidagi dinamik reaktsiyalarni hisoblash.***

Faraz qilaylik, biror qattiq jism qo'zg'almas $O\,z$, o'qi atrofida $\overline{F}_1; \overline{F}_2; \quad \cdots \quad ; \overline{F}_n$ kuchlar ta`sirida aylanma harakat qilayotgan bo'lsin (shakl 87). Ushbu qattiq jism A *ва* B nuqtalarda podshipniklarga o'rnatilgan bo'lsin.



3.33 shakl

Agar bu jism tinch holatda bo'lsa, unga faqat jismning og'irlik kuchlaridan hosil bo'ladigan reaktsiyalar ta`sir etadi, va ularni *statik reaktsiyalar* deyiladi. Statika kursida hisoblangan reaktsiyalar faqat *statik reaktsiyalar* bo'lgan edi.

Dinamikada esa reaktsiyalar ikki xil bo'ladi, statik reaktsiyalar va dinamik reaktsiyalar. *Statik reaktsiyalar* haqida yuqorida gapirib o'tdik. *Dinamik reaktsiyalar* jismning aylanma harakatida paydo bo'ladigan reaktsiyalarga aytiladi, ya`ni dinamik reaktsiyalar bo'lishi uchun $\omega > 0$ bo'lishi kerak.

Harakati tekshirilayotgan jismning A *ва* B nuqtalardagi podshipniklarga jismning aylanishidan paydo bo'ladigan *dinamik reaktsiyalar*ni xisoblash zarur bo'lsin. Shuni aytib o'tish zarurki, agarda burchakli tezlik katta bo'lganda *dinamik reaktsiyalar* hatto podshipniklarni sindirib yuborishi mumkin.

Masalani yechish uchun A *ва* B nuqtalarga,

reaktsiya kuchlarini vektorini qo'yaylik, ular $X_A, Y_A, Z_A,$ *ва* $X_B, Y_B, Z_B -$ bo'lib, bu kuchlar qattiq jism uchun tashqi kuchlar hisoblanadi.

Jismning har bir nuqtasiga ularning *inertsiya kuchlari*ni qo'yib, *Dalamber printsipi*ni qo'llaylik. Buning uchun tashqi kuchlarining va inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momentini nolga tenglab, ikkita vektor tenglama yozaylik, ya`ni

$$\begin{cases} \sum \overline{F}_k + \overline{R}_A + \overline{R}_B + \overline{\Phi} = 0 \\ \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) + \overline{m}_0(\overline{R}_A) + \overline{m}_0(\overline{R}_B) + \overline{m}_0(\overline{\Phi}) = 0 \end{cases} \tag{3.153}$$

bu yerda $\overline{m}_0(\vec{\Phi})$ -inertsiya kuchlarining O nuqtaga nisbatan bosh momenti. bu yerda $\overline{\Phi} = -M\overline{a}_c$, $M -$ jismning massasi, $\overline{a}_c$ - massa markazining tezlanishi.

Kinematika kursidan ma`lumki qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatida, uning nuqtalarning chiziqli tezlanishlari qo'yidagicha aniqlanadi.

$$\bar{a}_k = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_k + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_k \right)$$

Ikkita vektorning vektor ko'paytmasi, qo'yidagi aniqlovchilar orqali ifodalanadi,

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \bar{i}(-\omega \cdot y_c) + \bar{j}\omega \cdot x_c + \bar{k} \cdot 0$$

chunki $\omega_л = \omega_v = 0 \; ва \; \omega_s = \omega_1 \quad x_c, \, y_c, \, z_c$ lar massa markazining koordinatalari

$$\bar{a}_c = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_c & \omega x_c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-\varepsilon y_c - \omega^2 x_c) + \bar{j}(\varepsilon x_c - \omega^2 y_c) + \bar{k} \cdot 0 \qquad (3.154)$$

chunki $\varepsilon_k = \varepsilon_v = 0 \; ва \; \varepsilon_s = \varepsilon$

Inertsiya kuchlarining bosh vektorini koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini topamiz,

$$\begin{cases} \Phi_x = -Ma_{cx} = My_c\varepsilon + Mx_c\omega^2 \\ \Phi_y = -Ma_{cy} = -Mx_c\varepsilon + My_c\omega^2 \\ \Phi_z = -Ma_{cz} = 0 \end{cases} \qquad (3.155)$$

Xuddi shunday formulalarni har bir $M_k -$nuqtalar uchun yozishimiz mumkin.

$$\begin{cases} \Phi_{kx} = -m_k a_{kx} = m_k y_k \varepsilon + m_k x_k \omega^2 \\ \Phi_{ky} = -m_k a_{ky} = -m_k x_k \varepsilon + m_k y_k \omega^2 \\ \Phi_{kz} = -m_k a_{kz} = 0 \end{cases} \qquad (3.156)$$

_Inertsiya kuchlari_ning $x, \, y, \, z$ o'qlarga nisbatan bosh momentini qo'yidagicha aniqlaymiz, $\varepsilon \; ва \; \omega$ lar hamma nuqtalar uchun bir xil bo'lganligini e`tiborga olsak, u qavsdan tashqariga chiqarib yuboriladi.

$$M_k^И = \Sigma \left(Y_k \; \Phi_{ks} - Z_k \Phi_{kv} \right) = \varepsilon \; \Sigma \; m_k \; y_k \; z_k = \varepsilon \; J_{ks} - \omega^2 J_{vc},$$

$$M_v^{И} = \Sigma\left(Z_k\ \Phi_{kk} - X_k \Phi_{ks}\right) = \varepsilon\, \Sigma\, m_k\ y_k\ z_k + \omega^2 \varepsilon\, \Sigma\, m_k x_k z_k = \varepsilon J_{vs} + \omega^2 J_{ks},$$
$$M_z^{И} = \Sigma\left(X_k\ \Phi_{ky} - У_k \Phi_{kч}\right) = \varepsilon\, \Sigma\left(x_k^2 + y_k^2\right) = \varepsilon\ J_z \qquad (3.157)$$

bu yerda $J_{ks} = \Sigma\, m_k\, x_k\ z_k;\quad J_{ys} = \Sigma\, m_k\, y_k\ z_k -$ lar markazdan qochma inertsiya momentlari, $J_s = \Sigma\left(x_k^2 + y_k^2\right) m_k -$ o’qqa nisbatan inertsiya momenti.

$$\begin{cases} M^{u}{}_x = \varepsilon \cdot J_{xz} - \omega^2 \cdot J_{yz} \\ M^{u}{}_y = \varepsilon \cdot J_{yz} + \omega^2 \cdot J_{xz} \\ M^{u}{}_z = -\varepsilon \cdot J_z \end{cases} \qquad (3.158)$$

(3.153) vektor tenglamalarni koordinata o’qlariga proektsiyalab 6-ta tenglama hosil qilamiz, va ular orqali $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B -$ larni aniqlaymiz

$$\begin{cases} \sum F_{kx} + X_A + X_B + M \cdot y_c \varepsilon + M \cdot x_c \omega^2 = 0 \\ \sum F_{ky} + Y_A + Y_B - M \cdot x_c \varepsilon + M \cdot y_c \omega^2 = 0 \\ \sum F_{kz} + Z_A + Z_B = 0 \\ \sum m_{ox}(\overline{F}_k) + Y_A \cdot h_a - Y_B \cdot h_b + \varepsilon \cdot J_{xz} - \omega^2 \cdot J_{yz} = 0 \\ \sum m_{oy}(\overline{F}_k) - X_A \cdot h_a + X_B \cdot h_b + \varepsilon \cdot J_{yz} + \omega^2 \cdot J_{xz} = 0 \\ \sum m_{oz}(\overline{F}_k) - \varepsilon \cdot J_z = 0 \end{cases} \qquad (3.159)$$

chunki,

$$M_x(\overline{R}_A) + M_x(\overline{R}_B) = Y_A h_A - Y_B h_B;$$
$$M_y(\overline{R}_A) + M_y(\overline{R}_B) = -X_A h_A + X_B h_B$$

(3.159) tenglamalar sistemasining 6-chi tenglamasida tayanch reaktsiyalari qatnashmaydi, chunki bu tenglama qattiq jismning qo’zg’almas o’q atrofidagi aylanma xarakatining differentsial tenglamasi.

Agar qattiq jismning $O\,z -$ o’qqa nisbatan inertsiya momenti $-\,J_s$ va tashqi kuchlarni shu o’qqa nisbatan bosh momenti malum bo’lsa, ushbu tenglamadan jismning burchakli tezlanishi $\varepsilon -$ ni aniqlash mumkin. So’ngra $\varepsilon -$ aniqlangandan keyin uni bir marta integrallab burchakli tezlik $\omega -$ ni aniqlanadi.

Qolgan 5-ta tenglamadan 6- ta nomalum tayanch reaktsiyalarni aniqlash lozim. Lekin 5-ta tenglamadan 6-ta nomalumni aniqlab bo'lmasligi sababli Z_A *ва* Z_B larni alohida alohida aniqlash mumkin emas, shunga ko'ra faqat ularning yig'indilarini aniqlash mumkin xolos.

Shuning uchun A nuqtaga podpyatnik qo'ysak nomalum reaktsiyalar 5 taga tushadi, va $Z_B = 0$, bo'ladi.

Endi statik va dinamik reaktsiyalarni aniqlash uchun R_A *ва* $R_B -$ larni tashkil etuvchilarga ajratib olaylik, ya`ni

$$\overline{R}_A = \overline{R}_A^{CT} + \overline{R}_A^{Ђ} \quad ; \quad \overline{R}_B = \overline{R}_B^{CT} + \overline{R}_B^{Ђ}$$

Ularni aniqlash uchun tenglamalar sistemasining 5 ta tenglamasidan aniqlaymiz. Agarda $\varepsilon = 0$ va $\omega = 0$ deb faraz qilsak, mexanik sistema muvozanat holatda bo'ladi, natijada A *ва* B nuqtalardagi statik reaktsiyalargina ishtirok etadi xolos, ya`ni

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} F_{kx} + X_A^{CT} + X_B^{CT} = 0\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{ky} + Y_A^{CT} + Y_B^{CT} = 0\\
&\sum_{k=1}^{N} F_{kz} + Z_A^{CT} = 0\\
&\sum_{k=1}^{N} M_x(\overline{F}_k) + Y_A^{CT} \cdot h_A - Y_B^{CT} \cdot h_B = 0\\
&\sum_{k=1}^{N} M_y(\overline{F}_k) - X_A^{CT} \cdot h_A + X_B^{CT} \cdot h_B = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.160}$$

Endi shu jismni qo'zg'almas Az o'qi atrofida aylantirsak, A *ва* B nuqtalardagi qo'shimcha reaktsiyalar, yoki dinamik reaktsiyalar mavjud bo'lib, ular quyidagi tenglamalardan aniqlanadi, ya`ni

$$\left.\begin{aligned}
&X_A^{Д} + X_B^{Д} + My_c\varepsilon + Mx_c\omega^2 = 0\\
&Y_A^{Д} + Y_B^{Д} - Mx_c\varepsilon + My_c\omega^2 = 0\\
&Y_A^{Д}h_A - Y_B^{Д}h_B + \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz} = 0\\
&- X_A^{Д}h_A + X_B^{Д}h_B + \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.161}$$

$Oz -$ o'qi bo'ylab <u>dinamik reaktsiyalar</u> mavjud bo'lmaydi, chunki bu o'q bo'ylab inertsiya kuchlarining tashkil etuvchilari yo'q. Shunday qilib oxirgi tengalamalar sistemasidan barcha <u>dinamik reaktsiyalar</u>ning tashkil etuvchilarini aniqlab olish mumkin.

12-Mavzu: ANALITIK MEXANIKA.

Reja:

1. Mumkin bo’lgan ko’chishlar nima.
2. Ideal bog’lanishlar nima va ideal bog’lanishlarning mumkin bo’lgan ko’chishdagi bajargan ishini ifodalang.
3. Mumkin bo’lgan ko’chishlar printsipini ifodalang.
4. Mumkin bo’lgan ko’chishlar printsipining zaruriy sharti nimadan iborat.
5. Mumkin bo’lgan ko’chishlar printsipining yetarli shartlari nimadan iborat.

Muammoli vaziyat, savol yoki topshiriq

Quyidagi bog’lanish tenglamasi berilgan. $f\left(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t\right) \geq 0$ undan bir qancha bog’lanish tenglamasini hususiy hol sifatida keltirib chiqaring? Mumkin bo’lgan ko’chish bilan haqiqiy ko’chish orasida nima farq bor. Umumlashgan koordinatalarga misollar keltiring?

Tayanch so’z va iboralar

Geometrik bog’lanish. Kinematik bog’lanish. Statsionar bog’lanish. Nostatsionar bog’lanish. Bo’shatmaydigan bog’lanish. Bo’shatadigan bog’lanish. Umumlashgan koordinatalar. Sistemaning erkinlik darajasi. Mumkin bo’lgan ko’chish. Ideal bog’lanish. Umumlashgan kuchlar. Mumkin bo’lgan ko’chish printsipi. Golonomli bog’lanish. Begolonomli bog’lanish.

Mavzuning maqsadi: *Analitik mexanika* qismida asosan mexanik sistemalarning muvozanati va harakatining qonuniyatlari o’rganiladi. Mexanik sistemaning *erkinlik darajasi*, *bog’lanishlarning turlari* va *mumkin bo’lgan ko’chishlar* tushunchasi keng qo’llaniladi. quyida shu haqda batafsil so’z yuritiladi.

Bayoni:

1. Bog'lanishlar va ularning klassifikatsiyasi.

Qisman erkin mexanik sistemaning har qanday harakatida, uning nuqtalariga albatta qandaydir bog'lanishlarning reaktsiyalari ta`sir etadi. Shunga ko'ra shu mexanik sistemaning *erkinlik darajasi* turli xil bo'ladi. Shu mexanik sistemaning erkinligini cheklovchi shartlar *bog'lanishlar* deyiladi.

Bog'lanishlar matematik ko'rinishdagi tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalanishlari mumkin. Ushbu ifodalar mexanik sistema nuqtalarining koordinatalari va ularning har darajadagi hosilalari orqali berilishi mumkin.

Lekin biz bog'lanishlarning matematik ifodasi ularning koordatalaridan va faqat birinchi tartibli hosilalaridan tashkil topgan tenglama yoki tengsizliklardan iborat bog'lanishlar haqida gapirib o'tamiz, xolos.

$N-$ ta moddiy nuqtadan tashkil topgan mexanik sistema uchun bog'lanishlarning tenglamalari quyidagicha bo'lishi mumkin, yani

$$f_s\left(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t\right) = 0, \qquad s = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ell$$

Bunday bog'lanishlar *kinematik bog'lanishlar* deyiladi. Agar mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlarning tenglamalarida uning nuqtalari koordinatalarining hosilalari ishtirok etmasa, bunday bog'lanishlar *geometrik bog'lanishlar* deyiladi, yani

$$f_s\left(x_k, y_k, z_k; t\right) = 0, \qquad s = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ell$$

Bundan tashqari bog'lanishlar *real va ideal bog'lanishlar*ga ajraladilar. *Ideal bog'lanishlar* deb ishqalanish kuchi nolga teng bo'lgan bog'lanishlarga aytiladi. Ishqalanish kuchi nolga teng bo'lmagan bog'lanishlar *real bog'lanishlar* deyiladi.

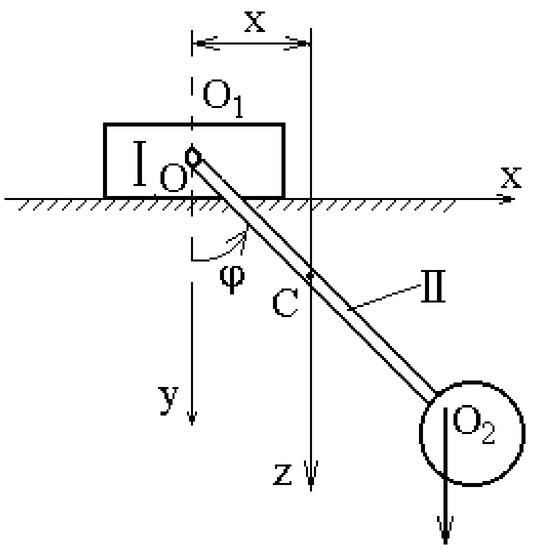
Agar mexanik sistemaga qo'yilgan kinematik bog'lanishlarni integrallab, geometrik holga keltirish mumkin bo'lsa, bunday bog'lanishlar *golonom bog'lanishlar* deyiladi, yani barcha geometrik bog'lanishlar va integrallash natijasida geometrik ko'rinishga olib kelinishi mumkin bo'lgan kinematik bog'lanishlar *golonom bog'lanishlar* deyiladi. Agar kinematik bog'lanishlarning tenglamalarini integrallash mumkin bo'lmasa bunday bog'lanishlar *nogolonom* yoki *golonom bo'lmagan bog'lanishlar* deyiladi.

Bizning ishchi dasturimizga ko'ra faqat *golonom* bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning harakatini o'rganamiz.

2.Mumkin bo'lgan ko'chishlar

Biz statika kursida har qanday mexanik sistemani, unga ta`sir etayotgan aktiv va reaktiv kuchlar ta`siridagi muvozanat shartlarini o'rgangan edik. Quyida biz nafaqat muvozanatdagi mexanik sistemanigina emas, balki har qanday harakatdagi mexanik sistemaning qonuniyatlarini ifodalovchi tenglamalarni ko'rib chiqamiz.

Statika kursida, mexanik sistemaning muvozanatlik shartini tekshirishda uning har bir qisimini muvozanatini alohida-alohida ko'rib chiqar edik, va har bir qismga ta`sir etuvchi aktiv kuchlar, hamda shu qismlarning bog'lanish reaktsiyalarini qo'yib, keyinchalik tegishli muvozanat tenglamalar sistemasini tuzar edik.



3.34 shakl

Lekin mexanik sistema $N-$ ta qismdan tashkil topgan bo'lsa, har bir qism uchun 3-tadan muvozanat tenglamalar sistemasi tuzilsa, jami bo'lib $3N-$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Ularni yechib kerakli natijalarni chiqarish mumkin, lekin qismlar soni ko'p bo'lgan hollarda bu usul juda murakkab hisoblashlarga olib keladi.

Mumkin bo'lgan ko'chishlar printsipini qo'llanilsa, bunday muammo mutloq yo'q bo'ladi, natijada har qanday mexanik sistemalarni muvozanatini tekshirish sodda holga aylanib qoladi.

Bu usulning afzalligi shundaki, muvozanat holatdagi sistemaning bog'lanish reaktsiyalarini qo'yish o'rniga, shu mexanik sistemaga *elementar ko'chish* berish orqali uning muvozanat holatidan chiqarib yuboriladi. Ana shu elementar ko'chishlarni *mumkin bo'lgan ko'chishlar* deyiladi.

Mumkin bo'lgan ko'chishlaga quyidagi ikkita shartlar qo'yiladi:

1) Mumkin bo'lgan ko'chishlar nihoyat darajada kichkina bo'lishi shart, aks holda mexanik sistema mutloq yangi boshqa holatga o'tishi mumkin.

2) Bunday ko'chishlarda, mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar saqlanib qolishi shart, aks holda u boshqa mexanik sistemani tashkil etishi mumkin.

Shunday qilib, mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari deb, shu sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar saqlanib qolgan holatdagi ixtiyoriy, lekin cheksiz kichkina ko'chishlar to'plamiga aytiladi. Mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chish vektorini ko'chish tomonga yo'nalgan $\delta\vec{S}$ - elementar vektor bilan belgilanadi. Agar nuqta tekislikda harakatlansa, u holda $\delta\vec{S}$ - vektorini ikkita o'qqa, fazoda harakatlansa uchta o'qqa proektsiyalash zarur bo'ladi.

Mexanik sistemaning erkinlik darajasi nechta bo'lsa, o'zaro mustaqil bo'lgan mumkin bo'lgan ko'chishlar elementar vektorlari ham shuncha bo'ladi. Masalan 3.34 shaklda ko'rsatilgan mexanik sistemaning C nuqtasi O nuqta atrofida aylanma va Ox o'qi bo'ylab ilgarilama harakat qiladi. Umuman olganda δx va $\delta\varphi$ lar mustaqil ravishda o'zgaradilar, shuning uchun uning erkinlik darajasi 2-ga teng.

3. Ideal bog'lanishlar. Mumkin bo'lgan ko'chishda bajarilgan elementar ishlar.

Biz yuqorida mexanik sistemaga ta`sir etuvchi kuchlarning, shu sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishida bog'lanishlar raktsiya kuchlarining bajargan elementar ishlarini *virtual ishlar* deb ataladi. Endi shu mexanik sistemaga ta`sir etuvchi aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlarini δA_k^a - belgi bilan, va reaktsiya kuchlarining elementar ishlarini δA_k^r - belgi bilan belgilaylik. Ilgari ko'rganimizdek, agar mexanik sistemaga qo'yilgan *bog'lanishlar ideal* bo'lsa, shu sistemaning mumkin bo'lgan ixtiyoriy ko'chishida bog'lanishlar reaktsiya kuchlarining bajargan elementar ishlarining yig'indisi har doim nolga teng bo'ladi, yani

$$\sum \delta A_k^r = 0 \qquad (3.162)$$

Faraz qilaylik ixtiyoriy mexanik sistema berilsin, unga qo'yilgan aktiv kuchlar va *ideal bog'lanishlar*ning reaktsiya kuchlari ta`sirida u muvozanat holatda bo'lsin. Shu mexanik sistemada ixtiyoriy birorta $M_k$ nuqtani tanlab olaylik, va unga ta`sir etuvchi aktiv kuchlarning bosh vektorini $\vec{F}_k^a$ - bilan, bog'lanishlar reaktsiya kuchlarining bosh vektorini $\vec{N}_k^r$ – bilan belgilaylik. M_k -nuqta muvozanatda bo'lishi uchun $\vec{F}_k^a + \vec{N}_k^r = 0$ tenglama qanoatlanishi shart.

4. Mumkin bo'lgan ko'chishlar printsipi

Endi shu nuqtaga mumkin bo'lgan virtual ko'chish beraylik, ya`ni shu tenglamani ikkala tomonini $\delta\vec{r}_k$ - vektoriga skalyar ravishda ko'paytiraylik, u holda shu mexanik sistemaga ta`sir etuvchi aktiv va reaktsiya kuchlari tegishlicha virtual ish bajaradilar,

$$\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0$$

Xuddi shunday tengliklarni mexanik sistemaning barcha nuqtalari uchun yozib, so'ngra ularning yig'indisini olsak,

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0 \qquad (3.163)$$

tenglama hosil bo'ladi. Lekin mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lganliklari uchun, tenglamaning ikkinchi yig'indisi har doim nol ga teng ekanligini hisobga olsak, yuqoridagi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi,

$$\sum \delta A_k^a = 0 \qquad (3.164)$$

Shunday qilib, biz shuni isbot qildikki, agar ideal bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistema (3.164) tenglamani qanoatlantirsa ushbu mexanik sistema muvozanat holatda bo'ladi, yoki mexanik sistema muvozanatda bo'lsa ushbu tenglama qanoatlanishi shart.

Lekin bu faqat zaruriy shart hisoblanadi, chunki ushbu sistema tekshirilayotgan paytda uning barcha nuqtalarining boshlang'ich tezlik vektorlari nol ga teng bo'lishlari shart. Agar ana shu ikkala shartlar bajarilsa mexanik sistema aniq muvozanat holatda bo'ladi.

Demak, *mumkin bo'lgan ko'chishlar printsipi* quyidagicha ifodalaniladi: *Statsionar, golonom, ideal bog'lanishlar*ga ega bo'lgan mexanik sistemaning muvozanatda bo'lishi uchun, shu *mexanik sistemaga ta`sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin bo'lgan khchishlarda bajarilgan elementar ishlarining yig'indisi nol ga teng bo'lsa* hamda mexanik sistemaning boshlang'ich tezligi nol ga teng bo'lishligi kifoyadir.

MEXANIK SISTEMANING UMUMLAShGAN KOORDINATALARI

Mavzuning maqsadi: Mexanik sistema bir nechta moddiy nuqta yoki qattiq jismlarning birikmalaridan iborat bo'lsa, bunday mexanik sistemalar uchun harakat tuzilganda, ko'p hollarda juda ko'p sonli tenglamalar sistemasini tashkil etar ekan.

So'ngra ushbu tenglamalar sistemasini yechib, shu mexanik sistemaning xarakat qonuniyatini aniqlash katta qiyinchiliklarga olib kelishi mumkin ekan. Shularni e`tiborga olib, Frantsuz olimi Lagranj *umumlashgan koordinatalar*dan foydalanilsa, bunday masalalar juda sodda holga kelishi mumkinligini ko'rsatib o'tgan. quyida shu haqda batafsil so'z yuritiladi.

Bayoni:

1.Umumlashgan koordinatalar.

Mexanik sistema harakatining aksariyat masalalarini yechishda Dekart koordinatalaridan foydalanish katta noqulayliklarga olib keladi, shuning uchun amalda *umumlashgan koordinatalar*dan keng foydalaniladi. Faraz qilaylik $N-$ ta moddiy nuqtadan tashkil topgan mexanik sistemaga h-ta golonom ideal bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin, va har bir bog'lanishlar tegishlicha quyidagi tenglamalarni qoniqtirsin,

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots\dots\dots x_N, y_N, z_N, t) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \dots\dots h$$

ushbu tenglamalar o'zaro mustaqil bo'lganliklari sababli, ushbu mexanik sistemaning nuqtalarini holatini belgilovchi erkin koordinatalar soni $S = 3N - h$ ga teng bo'ladi.

Shuning uchun o'zaro bog'liq bo'lmagan $q_1, q_2, \dots\dots q_s$ *umumlashgan koordinatalar* kiritilsa, ular orqali shu mexanik sistemaning nuqtalarini ixtiyoriy holatini aniq belgilab olish mumkin bo'ladi.

Masalan, matematik mayatnikning holatini, ya`ni vertikaldan og'ish burchagi $\varphi -$ orqali aniq belgilab olish mumkin, shuning uchun shu $\varphi -$ burchagini *umumlashgan koordinata* deb qabul qilish mumkin, ya`ni $q_1 = \varphi$

Endi, mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalarning radius vektorlarini umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha belgilash mumkin,

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots\dots\dots\dots q_s, t) \qquad (k = 1,2,3,\dots\dots\dots N)$$

Ushbu vektor tenglama $3N$ ta skalyar tenglamani tashkil etadi, yani

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots\dots\dots\dots q_s, t)$$
$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots\dots\dots\dots q_s, t)$$
$$z_k = z_k(q_1, q_2, \dots\dots\dots\dots q_s, t)$$

Masalan, yuqoridagi uzunligi L ga teng bo'lgan matematik mayatnikni holatini quyidagi 1-ta vektor, yoki 3-ta skalyar tenglamalar orqali ifodalash mumkin,

$$\vec{r}_M = L\sin\varphi \cdot \vec{i} + L\cos\varphi \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

yoki $$x = L\sin\varphi, \quad y = L\cos\varphi, \quad z = 0$$

Agar bog'lanishlar statsionar bo'lsa, yuqoridagi tenglamalarda $t-$ vaqt ochiq holda qatnashmaydi. Demak mexanik sistemaning erkinlik darajasi nechta bo'lsa, umumlashgan koordinatlar ham shuncha bo'ladi va _variatsiyalar soni_ ham shuncha bo'ladi.

2.Umumlashgan kuchlar va ularni hisoblash

Endi _umumlashgan kuchlar_ haqida so'z yuritaylik. Faraz qilaylik ideal bog'lanishlardagi mexanik sistema unga ta`sir etuvchi aktiv kuchlar ta`sirida *elementar ko'chish*, *yani* _variatsiya olsin_. U holda har bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar tegishlicha elementar ish bajaradi, ularning yig'indisi quyidagiga teng bo'lsin,

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k \tag{3.165}$$

bu yerda $$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (k = 1,2\ldots,n)\; ва\; (j = 1,2,\ldots,s) \tag{3.165a}$$

shuni e`tiborga olish lozimki, ushbu $\delta\vec{r}_k$ variatsiyalar, vaqtni o'zgarmas deb qabul qilingan holatda olinadi, ya`ni $t = cons\ t,$ yoki $\delta\ t = 0$ u holda

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j$$

yoki yig'iluvchilarni o'rnini almashtirgan bilan yig'indi o'zgarmasligini e`tiborga olsak

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \delta q_j \tag{3.166}$$

Agar $$Qj = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ldots,s)$$ belgilash kiritsak

$$\delta A = \sum_{j=1}^{S} Q_j \cdot \delta q_j = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s \tag{3.167}$$

Umumlashgan koordinatalarning variatsiyalari $\delta\ q_1, \delta\ q_2, \ldots \delta\ q_s,$ larni oldidagi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ qiymatlar _umumlashgan kuchlar_ deyiladi. Aslida ular biz tushungan fizik manodagi kuch emas, shuning uchun ularning o'lchov birliklari har doim Nyuton bilan o'lchanmaydi, ularning o'lchov birliklari umumlashgan koordinatalarning o'lchov birligiga bog'liq holda aniqlanadi, ya`ni

$$\left|Q_j\right| = \frac{|A|}{\left|q_j\right|} \qquad \text{bu yerda} \qquad |A| = H \cdot м = Дж \tag{3.167a}$$

shunga ko'ra, masalan umumlashgan koordinata q- metrlarda o'lchansa, $Q-$ Nyutonda o'lchanadi. Agar umumlashgan koordinata q - radianlarda o'lchansa, $Q-$ ning o'lchov birligi $H \cdot м / рад$ da o'lchanadi.

Umumlashgan kuchlar vektor qiymat bo'lmasdan faqat skalyar qiymatni tashkil etadilar, chunki ular ikkita vektorning skalyar ko'paytmasidan iboratdir, ya`ni

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \qquad (3.168)$$

bu yerda $F_{kk}, F_{ky}, F_{ks},$ lar $F_{kk},$ kuch vektorlarni koordinata o'qlaridagi proektsiyalaridir.

Masalan umumlashgan q_1 koordinatani variatsiya qilib, ya`ni unga elementar ko'chish berib, shu ko'chishda mexanik sistemaga ta`sir etuvchi kuchlarning umumlashgan kuchlari Q_1 – ni aniqlash uchun, quyidagi shartni qabul qilamiz, ya`ni

$$\delta q_1 \neq 0 \quad , \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \cdots = \delta q_s = 0$$

u xolda $\delta A_1 = \delta Q_1\ \delta q_1,$ xuddi shu kabi birin ketin $\delta A_2 = Q_2\ \delta q_2,\quad \delta A_3 = Q_3\ \delta q_3 \ldots \delta A_s = Q_s\ \delta q_s$ larni topamiz, so'ngra ular orqali umumlashgan kuchlarni quyidagi formulalar orqali aniqlaymiz

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\partial q_1} \quad ; \quad Q_2 = \frac{\delta A_2}{\partial q_2} \quad ;\ldots\ldots..; \quad Q_s = \frac{\delta A_s}{\partial q_s} \qquad (3.169)$$

3.Umumlashgan koordinatalar sistemasida mexanik sistemaning muvozanat sharti.

Mumkin bo'lgan ko'chishlar printsipiga asosan *ideal, statsionar va golonom bog'lanish*lar qo'yilgan mexanik sistemaning ixtiyoriy *virtual ko'chishida* unga ta`sir etuvchi kuchlarning bajargan elementar ishlarini yig'indisi nol ga teng bo'lishi shart. Lekin u yetarli emas, yetarli bo'lishi uchun har bir nuqtaning boshlangich tezligi albatta nol ga teng bo'lishlarii shart, ya`ni $V_k(0) = 0, \quad \text{яъни} \quad \delta A = 0,$ bunda

$$Q_1\ \delta q_1 + Q_2\ \delta q_2 + \ldots + Q_s\ \delta q_s = 0$$

Umumlashgan koordinatalar o'zaro bog'lanmaganligi va ularning variatsiyalari nol ga teng bo'lmaganligi sababli, yuqoridagi tenglama S – -ta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi, ya`ni

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ Q_s = 0 \end{cases} \qquad (3.170)$$

Demak *ideal, statsionar va golonom bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun*, shu sistemaning har bir umumlashgan kuchlari alohida-alohida nol ga teng bo'lishlari shart, lekin albatta shu sistemaning barcha nuqtalarining boshlang'ich tezliklari ham nol ga teng bo'lishlari shart. Shuning uchun ularni zaruriy va yetarli shartlar deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. P.Shoxaydarova, Sh.Shoziyotov, J.Zoirov “Nazariy mexanika” Toshkent: “O`qituvchi” , 1991 y.

2. T.Rashidov va boshqalar “Nazariy mexanika asoslari” - Toshkent: “O`qituvchi” , 1990 y.

3. I.V.Mesherskiy “Nazariy mexanikadan masalalar to`plami”-Toshkent: “O`qituvchi”, 1990 y.

4. A.A.Yablonskiy “Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to`plami” - Toshkent: “O`qituvchi” , 2002 y.

5. O.E.Kepe, Ya.A.Viba, O.P.Grapis, “Nazariy mexanika fanidan qisqa masalalar to`plami”-Toshkent: “Yangi asr avlodi”, 2008 y.