МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 519.21(575.1)

Атахужаев Акбарали Азамхужаевич

АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Ташкент–2010

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Наманганского инженерно – педагогического института

Научный руководитель: доктор физико – математических наук
Ходжибаев Вали Рахимджанович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук
Абдушукуров Абдурахим Ахмедович

кандидат физико–математических наук, доцент
Кенджаев Равшан Худойберганович

Ведущая организация: Институт математики и информационных технологий АН РУз

Защита состоится «____»___________ 2010 г. в «_____» часов на заседании Объединенного Специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 100174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, ауд. Г–303, механико–математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «____» _____________ 2010 г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета
кандидат физико–математических наук,
доцент Ю.Х. Эшкабилов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Граничные задачи для случайных процессов являются весьма важным разделом теории вероятностей. Это связано с их математической содержательностью и с тем обстоятельством, что они имеют многочисленные применения, среди которых выделяются изучение систем массового обслуживания, задачи хранения запасов, задачи теории надежности и другие. Термин „граничные задачи“ понимается в том смысле, что речь идёт об исследовании распределений разного вида функционалов, связанных с достижением границы некоторого множества траекториями случайного процесса.

Поведение различных граничных функционалов от траекторий случайных процессов исследовалось многими авторами. Существенную роль здесь сыграли работы А.Н. Колмогорова, Н.В. Смирнова, В. Феллера, В.С. Королюка, А.А. Боровкова, Ф. Спицера, Б.А. Рогозина, Л.Такача, И.И. Гихмана, А.В. Скорохода, Д.В. Гусака, В.И. Лотова и др. Литература, посвященная этим вопросам, обширна и в сколько–нибудь полном объёме не может быть отражена в рамках одной работы. Ниже приводятся ссылки лишь на те работы, которые имеют непосредственное отношение к предмету проводимых в данной работе исследований.

В диссертационной работе изучается распределение числа пересечений прямолинейной полосы траекториями однородного случайного процесса с независимыми приращениями и обобщенного процесса восстановления.

В отличие, скажем, от исследования траекторий стационарных гауссовских процессов, где изучению числа пересечений уровня (не полосы) уделено достаточно много внимания, для процессов с независимыми приращениями распределения числа пересечений уровня и, тем более, полосы изучено мало.

Степень изученности проблемы. Для симметричного винеровского процесса распределение числа пересечений полосы с помощью метода зеркальных отражений легко сводится к известному распределению супремума траектории.

Изучение числа пересечений за конечный интервал времени при нулевом сносе процесса является задачей более трудной. По-видимому, первый результат в этом направлении содержится в работе И.И. Гихмана, где доказаны предельные теоремы для распределения числа пересечений уровня в простейших ситуациях. Некоторые предельные результаты для числа пересечений уровня траекториями случайного блуждания, порожденного суммами независимых одинаково распределенных случайных величин, изложены в монографии А.В.Скорохода и Н.Г.Слободенюка «Предельные теоремы для случайных блужданий» (Киев: Наукова Думка, 1970). В книге К.Ито и Г.Маккина «Диффузионные процессы и их траектории» (М.:Мир, 1968) изучалась асимптотика распределения числа пересечений полосы траекторией броуновского движения. А в книге А.В.Скорохода «Случайные процессы с независимыми приращениями» (М.: Наука, 1986) выведены некоторые представления для распределения числа пересечений прямо-линейной полосы траекторией однородного случайного процесса с независимыми приращениями через распределения других граничных функционалов.

В случае, когда процесс является однородным полунепрерывным (т.е. скачками только одного знака) процессом с независимыми приращениями, распределение числа пересечений полосы изучалось в работах Т.В. Каданковой, где найдены явные выражения для распределений и их преобразований в терминах резольвенты процесса и доказаны предельные теоремы в случае нулевого математического ожидания и конечной дисперсии.

В ряде работ В.И. Лотова и Н.Г.Орловой изучалось предельное поведение распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания, порожденного суммами независимых одинаково распределенных слагаемых. В этих работах найдены выражения в точном виде для распределения числа пересечений полосы за конечный промежуток времени в простейших ситуациях, доказана предельная теорема для совместного распределения числа пересечений и положения процесса в случае нулевого математического ожидания и конечной дисперсии, и при условиях Крамера в достаточно широком диапазоне уклонений границ получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы. Асимптотика распределения общего числа пересечений (т.е. числа пересечений за бесконечное время), когда они конечны с вероятностью единица, исследовалась в совместной работе В.И. Лотова и В.Р. Ходжибаева.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Учёном совете Наманганского инженерно – педагогического института (протокол № 163, 31 мая 2007 года) и выполнена в соответствии с плановой темой научно - исследовательских работ кафедры «Высшая математика».

Цель исследования. Основной целью диссертационной работы является получение полных асимптотических разложений распределения числа пересечений полосы траекториями однородного случайного процесса с независимыми приращениями, а также обобщенного процесса восстановления.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

- установление факторизационных тождеств для преобразований рассматриваемых распределений;
- асимптотическое исследование преобразований искомых распределений;
- получение полных асимптотических разложений для искомых вероятностей.

Объект и предмет исследования: однородный случайный процесс с независимыми приращениями и обобщенный процесс восстановления. Изучение распределения числа пересечений прямолинейной полосы.

Методы исследования. Исследования проводятся в несколько этапов с помощью факторизационного метода, разработанного А.А. Боровковым. На первом этапе находятся факторизационные представления для преобразований Лапласа – Стилтьеса над искомыми распределениями. Получаемые здесь формулы не требуют для их справедливости никаких дополнительных условий; однако найденные представления оказываются слишком сложными для непосредственного обращения. В то же время исследование асимптотических свойств изучаемых распределений возможно при весьма широких ограничениях на исходные распределения. Используемая в граничных задачах факторизационная техника позволяет, как правило, получить более сильные асимптотические результаты, а именно полные асимптотические разложения в условиях удаляющихся границ. Для этого на втором этапе с помощью свойств компонент факторизации проводится асимптотический анализ преобразований Лапласа – Стильтеса искомых распределений. При этом выделяются главные части этих преобразований, пригодные для последующего обращения и оцениваются остаточные члены. Они отличаются от главных частей экспоненциально малым множителем. Таким образом, второй этап завершается построением асимптотических представлений для преобразований Лапласа – Стильтеса; здесь на процесс накладываются некоторые условия крамеровского типа. На заключительном этапе главные части полученных асимптотических представлений обращаются с помощью контурного интегрирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

- явные формулы для преобразований рассматриваемых распределений;
- исследование асимптотики преобразований с помощью аналитических свойств компонент факторизации;
- применение метода перевала к главным частям асимптотических представлений для преобразований.

Научная новизна. Все результаты являются новыми. Они состоят в следующем:

- найдены полные асимптотические разложения при $t \to \infty$ распределения числа пересечений прямолинейной полосы до момента t траекторией однородного случайного процесса с независимыми приращениями. При этом предполагается, что границы полосы растут вместе с t и накладываются на процесс условия, в основном, крамеровского типа;
- выписаны в явном виде первые члены асимптотических разложений и указан алгоритм вычисления последующих членов;
- указанные выше результаты перенесены на случай обобщенного процесса восстановления.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Научная и практическая значимость результатов исследования. Основные результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при решении различных задач математической статистики, теории массового обслуживания, теории хранения запасов и др.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях граничных задач и при чтении специальных курсов по теории вероятностей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на заседаниях городского семинара по теории вероятностей и математической статистике при механико-математическом факультете НУУз (руководители: академик Ш.К.Форманов, доктор физико - математических наук А.А.Абдушукуров) и семинара отдела Теории вероятностей и математической статистики Института математики и информационных технологий АН РУз (руководители: академик Ш.К.Форманов, доктор физико – математических наук О.Ш.Шарипов), на IV Международной конференции "Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения" (Новосибирск, 2006), на конференции по теории вероятностей и математической статистике "Сираждиновские чтения" (Ташкент, 2006), на Республиканской научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информационных технологий" (Ташкент, 2008), на Республиканской научной конференции "Новые теоремы молодых математиков–2009" (Наманган) и на ежегодных научно – теоретических конференциях Наманганского инженерно – педагогического института (2008 - 2010).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–12], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы из 41 наименования. Диссертация изложена на 94 страницах компьютерного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ – однородный случайный процесс с независимыми приращениями, $\xi(0)=0$. Выборочные траектории процесса предполагаются непрерывными справа. Для произвольных положительных a и b определим случайные величины $\eta_t^{(1)}$, $\eta_t^{(2)}$, равные соответственно числу пересечений снизу вверх и сверху вниз полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек $(x; y)$ траекторией случайного блуждания с непрерывным временем $\{t, \xi(t)\}_{t\geq 0}$ за промежуток времени от 0 до t.

В диссертации изучается асимптотика распределения случайных величин $\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)}$ при $a = a(t) \to \infty$,$=b \quad b(t) \to \infty$, $t \to \infty$. При этом

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

предполагается, что $E\xi(1)=0$. Конечным результатом является получение полных асимптотических разложений для вероятностей $P\left(\eta_t^{(i)}=k\right)$, $i=1,2$ при различных ограничениях на a,b,k, совместимых с условием $(a+b)k=o(t),\ t\to\infty$.

Обозначим $V_i(u,k)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\,dt\,P(\eta_t^{(i)}=k),\ i\quad 1,2$.

В первой главе доказываются факторизационные представления для $V_i(u,k)$, $i=1,2$.

В § 1.1 приведены условия, накладываемые на процесс, обсуждены достаточные условия для их выполнения, предварительные сведения о факторизации и свойствах компонент факторизации.

Пусть $\psi(\lambda)=\ln Ee^{\lambda\xi(1)}$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$.

Понятие безгранично делимой факторизации введено и аналитические свойства его компонент изучены Б.А. Рогозиным. Им установлено, что функция

$$r_u(\lambda)=\frac{u}{u-\psi(\lambda)}$$

допускает безгранично делимую факторизацию $r_u(\lambda)=r_{u+}(\lambda)\cdot r_{u-}(\lambda)$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$, $\mathrm{Re}\,u>0$. При этом функция $r_{u+}(\lambda)$ аналитична при $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, непрерывна и не обращается в нуль при $\mathrm{Re}\,\lambda\le 0$, за исключением, быть может, бесконечно удалённой точки, а функция $r_{u-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости.

Пусть функция $g(\lambda)$ допускает на $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ представление

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}dG(x),$$

где полная вариация функции $G(x)$ ограничена. Введем операторы

$$A\,g(u,\lambda)=r_{u-}^{-1}(\lambda)\left[r_{u-}(\lambda)\cdot g(\lambda)\right]^{(-\infty;-a]},$$

$$B\,g(u,\lambda)=r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)\cdot g(\lambda)\right]^{[b;\infty)}.$$

Здесь $\mathrm{Re}\,u>0$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ и по определению

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}dG(x)\right]^D=\int\limits_D e^{\lambda x}dG(x).$$

Следующая теорема, которая доказана в § 1.2, является основным результатом главы I.

Теорема 1.2.2. *Для любого* $k\ge 0$ *и* $\mathrm{Re}\,u>0$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$V_1(u,k)=\left(\left(BA\right)^k e\right)(u,0)-\left(\left(BA\right)^{k+1} e\right)(u,0),$$
$$V_2(u,k)=\left(\left(AB\right)^k e\right)(u,0)-\left(\left(AB\right)^{k+1} e\right)(u,0),$$

где $e(u;\lambda)\equiv 1$.

Отметим, что теорема 1.2.2 справедлива для любого однородного случайного процесса с независимыми приращениями, без каких – либо дополнительных ограничений.

Во второй главе предполагается, что $E\xi(1)=0$. В этой главе решается задача получения полных асимптотических разложений вероятностей $P\left(\eta_t^{(i)}=k\right)$, $i=1,2$ при различных ограничениях на $a=a(t)$, $b=b(t)$, $k=k(t)$, совместимых с требованиями $(a+b)k=o(t)$, $a\to\infty$, $b\to\infty$, $t\to\infty$.

На протяжении этой главы на процесс $\xi(t)$ накладываются следующие ограничения:

1. $E\exp\{\lambda\xi(1)\}<\infty$ при $-\infty<\lambda_-\le\lambda\le\lambda_+<\infty$, $\lambda_-<0<\lambda_+$;
2. $\lim\limits_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda_-\le\operatorname{Re}\lambda\le\lambda_+}}\sup\dfrac{\left|E\exp\{\lambda\xi(1)\}\right|}{E\exp\{\operatorname{Re}\lambda\xi(1)\}}<1$.

Как известно, для функции $\psi(\lambda)=\ln E e^{\lambda\xi(1)}$ имеет место представление

$$\psi(\lambda)=\alpha\lambda+\frac{w^2\lambda^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\lambda x}-1-\lambda x)\,dS(x),$$

в котором α, w – некоторые вещественные числа,

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dS(x)<\infty,\quad S(-\infty)=S(+\infty)=0.$$

В § 2.1 получены асимптотические представления для функций $V_i(u,k)$, $i=1,2$ при $a\to\infty$, $b\to\infty$ в некоторой окрестности точки $u=0$. При этом требуется выполнение одного из следующих условий А и Б:

А. $w^2>0$.

Б. $w=0$, $\int_{-1}^{1}|x|\,dS(x)<\infty$, $\alpha-\int_{-\infty}^{\infty}x\,dS(x)\neq 0$.

Пусть $U_\varepsilon=\{u:0\le\operatorname{Re}u<\varepsilon,\ |\operatorname{Im}u|<\varepsilon,\ u\neq 0\}$, $\varepsilon>0$. Основные результаты § 2.1 приведены в следующей теореме.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполняются условия* А *или* Б. *Тогда существуют числа* $\varepsilon>0,\delta>0$ *такие, что при* $u\in U_\varepsilon$, $k\ge 1$, $a\to\infty$, $b\to\infty$

$$V_1(u,k) = \left(1 - \mu^{a+b}(u)H(u)\right)\left\{a_1(u)\frac{\left(\mu^{a+b}(u)H(u)\right)^k}{e^{\lambda_-(u)b}} + \Lambda_1(u,k)\right\}$$

$$V_2(u,k) = \left(1 - \mu^{a+b}(u)H(u)\right)\left\{a_2(u)\left(\mu^{a+b}(u)H(u)\right)^k e^{\lambda_+(u)a} + \Lambda_2(u,k)\right\},$$

равномерно по u

$$\Lambda_i(u,k) = \left(\mu^{a+b}(u)H(u)\right)^{k-1} O(e^{-\delta(a+b)}), \quad i = 1,2,$$

где функции $\mu(u)$, $H(u)$, $a_1(u)$, $a_2(u)$ *выражаются в явном виде через характеристики распределения* $\xi(1)$ *и не зависят от* a *и* b.

В теореме 2.1.1 числа $\varepsilon > 0, \delta > 0$ определяются из условия, что единственным решением уравнения $u = \psi(\lambda)$ при $u \in U_\varepsilon$, $0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \delta$ $(-\delta \le \operatorname{Re}\lambda \le 0)$ является $\lambda_+(u)$ $(\lambda_-(u))$.

Известно, что функция $u - \psi(\lambda)$ при $\operatorname{Re}u = 0$, $|\operatorname{Im}u| > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не имеет нулей в некоторой полосе $-\delta \le \operatorname{Re}\lambda \le \delta$, $\delta > 0$. Это позволяет сравнительно легко получить для функций $V_i(u,k)$, $i = 1,2$ равномерные оценки порядка $O(e^{-\delta(a+b)k})$. Так как в последующем обращении контурное интегрирование производится по бесконечной прямой, эти оценки оказываются недостаточными (в случае дискретного времени контурное интегрирование производится по окружности единичного радиуса, поэтому оценки указанного порядка являются достаточными).

§ 2.2 является одним из основных с точки зрения преодоления технических трудностей. В этом параграфе получены оценки типа $O\left(\dfrac{e^{-\delta(a+b)k}}{|u|^\gamma}\right)$, $\gamma > 0, a \to \infty, b \to \infty$ для $V_i(u,k)$, $i = 1,2$, равномерные при $u \in \widetilde{U}_\varepsilon = \{u : \operatorname{Re}u = 0, |\operatorname{Im}u| \ge \varepsilon\}$ (при некотором $\varepsilon > 0$). При этом вместо условий А и Б потребуется выполнение одного из следующих условий:

А$_1$. $w^2 > 0$, $\left|\psi(\lambda) - \alpha\lambda - \dfrac{w^2\lambda^2}{2}\right| \le C|\lambda|^{2-p}$ при $\lambda_- < \operatorname{Re}\lambda < \lambda_+$, некотором $p > 0$ и некоторой постоянной C.

Б$_1$. $w = 0$, $S(x)$ является функцией ограниченной вариации на $(-\infty;\infty)$ и при $\lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{|\psi_1(\lambda)|}{\psi_1(\operatorname{Re}\lambda)} < 1,$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

где $\psi_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dS(x) - S(+0) + S(-0)$.

Условия А$_1$ и Б$_1$ являются усилениями условий А и Б соответственно. Достаточные условия для выполнения А$_1$, Б$_1$ приведены в § 1.1.
Приведем основную теорему из § 2.2.

<u>Теорема 2.2.3.</u> *Пусть выполняются условия* А$_1$ *или* Б$_1$. *Тогда при некоторых* $\varepsilon > 0,\ \gamma > 0$

$$\left|V_i(u,k)\right| = \Theta\left(\frac{e^{-\delta(a+b)k}}{|u|^{\gamma}}\right),\ i = 1,2\ ,\ k \geq 1,\ a \to \infty,\ b \to \infty,$$

равномерно по $u \in \widetilde{U}_{\varepsilon}$.

По формуле обращения при любом $c > 0$

$$P(\eta_t^{(i)} = k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{V_i(u,k)e^{ut}}{u}\, du = I_0^{(i)}(t)\ ,\ i = 1,2.$$

Подынтегральная функция аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,u > 0$, непрерывна и ограничена, включая границу $\mathrm{Re}\,u = 0$, за исключением некоторой малой окрестности точки $u = 0$. Поэтому в качестве контура интегрирования выберем K – контур $\mathrm{Re}\,u = 0$, искривленный вправо в окрестности точки $u = 0$. Пусть $K_1 = K \bigcap \{|\,\mathrm{Im}\,u\,| < \varepsilon\},\ K_2 = K - K_1$. Тогда

$$I_0^{(i)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} \frac{V_i(u,k)e^{ut}}{u}\, du + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} \frac{V_i(u,k)e^{ut}}{u}\, du =$$

$$= I_1^{(i)}(t) + I_2^{(i)}(t), \qquad i = 1,2$$

Теорема 2.2.1 даёт возможность легко получить экспоненциальные оценки для интегралов $I_2^{(i)}(t), i = 1,2$. А для получения полных асимптотических разложений вероятностей к интегралам $I_1^{(i)}(t), i = 1,2$ применяется модификация метода перевала, что составляет содержание § 2.3. Это проводится по схеме работы В.И Лотова и Н.Г. Орловой с необходимыми изменениями, возникающими вследствие перехода от дискретного времени к непрерывному. Получены искомые полные асимптотические разложения вероятностей в различных ограничениях на зависимость $a = a(t), b = b(t)$.

Наибольший интерес представляет случай нормального роста границ, когда границы растут пропорционально $\sqrt{t}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполняются условия* А₁ *или* Б₁, $k = const, k \geq 1$, $a = x_1\sqrt{t}, b \quad x_2\sqrt{t}$, $t \to \infty$. *Тогда при* $q \geq 1$

$$P(\eta_t^{(1)} = k) \quad \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{t^{l/2}} \sum_{i_1+i_2 \in M_i} U_{i_1 i_2}^{(l)}(k)\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \frac{1}{t^{q/2}} \psi_q(k, x_1, x_2),$$

где главный член разложения

$$U_{10}^{(0)} x_1 + U_{01}^{(0)} x_2 \quad \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{\pi}} 2\psi_1 \int_0^1 \exp\left\{ -\psi_1^2 \left((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2} x_2 \right)^2 \right\} dx =$$

$$= 2\left(\Phi_{0,\sigma}(2(k+1)(x_1+x_2) - x_2) - \Phi_{0,\sigma}(2k(x_1+x_2) - x_2) \right),$$

$\Phi_{0,\sigma}(x)$ - *функция распределения нормального закона с параметрами* a *и* σ, $\sigma^2 = D\xi(1)$.

Найдены способы нахождения $M_l, U_{i_1,i_2}^{(l)}(k), \psi_q(k, x_1, x_2)$.

В этом параграфе также рассмотрены и другие ограничения на скорость роста границ. Получены полные асимптотические разложения вероятностей $P(\eta_t^{(1)} = k)$ при условии, что величина $(a+b)k$ растёт:

1) быстрее, чем $\sqrt{t}$, 2) медленнее, чем $\sqrt{t}$.

В главе II выполнение условия А или Б означает, что у процесса $\xi(t)$ существует диффузионная компонента или ненулевой снос, т.е. из рассмотрения исключаются чисто скачкообразные процессы. Чтобы сделать исследование более полным, в главе III рассматривается задача получения полных асимптотических разложений распределения числа пересечений полосы для обобщенных процессов восстановления. При этом для простоты предполагается, что процесс $\xi(t)$ целочисленный, и обсуждается возможность получения аналогичных результатов в случае, когда распределение скачка процесса содержит абсолютно непрерывную компоненту. Здесь основное внимание уделено получению асимптотических представлений и необходимых для контурного интегрирования оценок интегральных преобразований $V_i(u,k)$, $i = 1,2$. Обнаруживается, что главные части полученных асимптотических представлений можно привести к виду, совпадающему с точностью до обозначений с аналогичными результатами § 2.1. Поэтому дальнейший анализ, ведущий к получению асимптотических разложений указанных распределений, не проводится, и выписываются сразу некоторые из возможных результатов (теорема 3.2.3).

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук В.Р.Ходжибаеву за постановку задач, постоянное внимание и помощь при работе над диссертацией. А также выражаю глубокую признательность академику АН Республики Узбекистан, профессору Ш.К. Форманову за полезные советы при работе над диссертацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена асимптотическому анализу распределения числа пересечений прямолинейной полосы траекториями однородного случайного процесса с независимыми приращениями и обобщенного процесса восстановления за промежуток времени от 0 до t.

Исследования в основном носят асимптотический характер. Асимптотические разложения искомых распределений и их преобразований получаются при условии, что ширина полосы неограниченно растет вместе с t.

Применяется факторизационный метод решения граничных задач, разработанный А.А. Боровковым, который состоит из нескольких этапов. На процесс накладываются, в основном, условия крамеровского типа. В диссертации получены следующие результаты:

- найдены факторизационные представления в точном виде для преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений числа пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз траекториями рассматриваемых процессов;
- выделены главные части интегральных преобразований и оценены остаточные члены, которые отличаются от главных частей экспоненциально малым множителем;
- получены полные асимптотические разложения для распределений числа пересечений прямолинейной полосы снизу вверх и сверху вниз траекториями рассматриваемых процессов при $t \to \infty$. Рассмотрены случаи, когда ширина полосы растет: 1) как $\sqrt{t}$, 2) быстрее, чем $\sqrt{t}$, 3) медленнее, чем $\sqrt{t}$.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания с непрерывным временем // Доклады АН РУз.–Ташкент, 2007. – №5. – С. 20 – 23.
2. Атахужаев А.А. Распределение числа пересечений полосы для одного класса случайных блужданий.// Узб.Мат.Жур.–Ташкент, 2009. – № 4 . – С. 29 – 34.
3. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. Распределение числа пересечений полосы для случайных процессов с независимыми приращениями // Узб.Мат.Жур.–Ташкент, 2010. № 1. – С. 150–169.
4. Khodjibaev V.R., Atakhuzhaev A.A. On the distribution of the number of crossing of a strip for stochastic processes with independent increments // IV International Conference, Limit Theorems in Probability Theory and their Applications, Novosibirsk, 2006. –P. 8.
5. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания с непрерывным временем // Материалы научной конференции “Сираждиновские чтения“– Ташкент, 2006.– С. 7–9.
6. Атахужаев А.А. Распределение числа пересечений полосы для обобщенного процесса восстановления // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Материалы Респ. науч. конф. – Ташкент, 2008.– С. 42 – 44.
7. Атахужаев А.А. О точных формулах для распределения числа пересечений полосы // Респ. илм. конф. материаллари. – Фарғона , 2006. – С. 5–6.
8. Атахужаев А.А. Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы // Респ. илм. конф. материаллари. – Наманган, 2006. – С.35–37.
9. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. О факторизационнных представлениях в одной граничной задаче.// Респ. илм. конф. материаллари. – Наманган, НамДУ–2009. – С. 41–43.
10. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. О числе пересечений полосы // Респ. илм. конф. материаллари. –Наманган, НамМПИ – 2007 . – С. 105–107
11. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. О точных формулах в одной граничной задаче// Актуальные проблемы теории вероятностей и дифференциальных уравнений.Тез. док.науч. конф–Фергана,2001. –С.37–38.
12. Ходжибаев В.Р., Атахужаев А.А. О распределении числа пересечений полосы для одного класса случайных процессов.// Респ. илм. конф. материаллари. – Наманган, НамМПИ, 2009. – С. 53–55.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

РЕЗЮМЕ

диссертации **Атахужаева Акбарали Азамхужаевича** на тему: “Асимптотика распределения числа пересечений полосы для случайных процессов с независимыми приращениями” на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика»

Ключевые слова: случайные процессы с независимыми приращениями, граничные задачи, факторизация, прямолинейная полоса, полные асимптотические разложения.

Объекты исследования: однородные случайные процессы с независимыми приращениями и обобщенные процессы восстановления.

Цель работы: получение полных асимптотических разложений распределения числа пересечений прямолинейной полосы траекториями однородного случайного процесса с независимыми приращениями и обобщенного процесса восстановления.

Методы исследования: в диссертации использован аналитический метод, который называется факторизационным.

Полученные результаты и их новизна: все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- найдены полные асимптотические разложения при $t \to \infty$ распределения числа пересечений прямолинейной полосы до момента t траекторией однородного процесса с независимыми приращениями. При этом предполагается, что границы полосы растут вместе с t и накладываются на процесс условия, в основном, крамеровского типа;
- выписаны в явном виде первые члены асимптотических разложений и указан алгоритм вычисления последующих членов;
- указанные выше результаты перенесены на случай обобщенного процесса восстановления.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер

Область применения: полученные результаты могут быть использованы при решении различных задач математической статистики, теории массового обслуживания, теории хранения запасов и др.

Физика–математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Атахужаев Акбарали Азамхужаевич**нинг 01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика ихтисослиги бўйича “Боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараёнлар учун йўлакни кесиб ўтишлар сони тақсимотининг асимптотикаси” мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараёнлар, чегаравий масалалар, факторизация, тўла асимптотик ёйилмалар.

Тадқиқот объектлари: бир жинсли боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараёнлар ва умумлашган тикланиш жараёнлари.

Ишнинг мақсади: бир жинсли боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараёнлар ва умумлашган тикланиш жараёнлари изларининг тўғри чизиқли йўлакни кесиб ўтишлар сони тақсимотининг тўла асимптотик ёйилмаларини топиш.

Тадқиқот методлари: диссертацияда факторизация усули деб номланадиган аналитик усулдан фойдаланилган.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

- бир жинсли боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараёнлар ва умумлашган тикланиш жараёнлари изларининг тўғри чизиқли йўлакни t моментгача кесиб ўтишлар сони тақсимотининг $t \to \infty$ да тўла асимптотик ёйилмалари топилган. Бунда t ўсиши билан йўлак кенглиги ҳам t га боғлиқ равишда ўсиб боради ва жараёнга, асосан, Крамер типидаги шартлар қўйилади;
- асимптотик ёйилмалар биринчи ҳадларининг аниқ кўриниши ёзилган ва кейинги ҳадларини ҳисоблаш алгоритми келтирилган;
- юқорида кўрсатилган натижалар умумлашган тикланиш жараёнлари ҳолига ўтказилган.

Амалий аҳамияти: диссертация назарий характерга эга.

Қўлланиш соҳаси: олинган натижалар оммавий хизмат назарияси, математик статистика, захираларни сақлаш назарияси масалаларини ва бошқа масалаларни ҳал қилишда қўлланиши мумкин.

RESUME

Thesis of **Atakhuzhaev Akbarali Azamkuzhaevich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics, on speciality 01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics, subject: "Asymptotics distribution of the number of crossing of a strip for stochastic processes with independent increments"

Key words: stochastic processes with independent increments, boundary problems, factorization, the rectilinear strip, complete asymptotic expansions.

Subject of research: homogeneous processes with independent increments and the generalised renewal processes.

Aim of the research: obtaine the complete asymptotic expansions for the distribution of the number of a rectilinear strip by trajectories of homogeneous process with independent increments and the generalised renewal process.

Methods of research: in the dissertation a used the analytical factorization method.

The results achivved and their novelty: all main outcomes of the thesis are new and consist of the following:

- complete asymptotic expansions in $t \to \infty$ for the distribution of the number of crossings of a rectilinear strip till the moment t by a trajectory of homogeneous process with independent increments have been obtained. Thus it is supposed that strip borders grow together with t and are imposed on condition process, basically, Kramer's type;
- the first members of asymptotic decomposition are written out in an explicit form and the algorithm of calculation of the subsequent members is specified;
- the results specified above are transferred in case of the generalised process of restoration.

Practical value: the thesis has theoretical character.

Field of application: the received results can be used at the decision of various problems of mathematical statistics, the theory of mass service, the theory of storage of stocks and others.

Сдано в набор 01.06.2010г. Разрешено к печати 08. 06. 2010г.
Формат 60/84 1/16 1,25 усл.печ. л. Бумага офсетная. Заказ 49. Т. 100.

Отпечатано в ММП «Фахризода» (пр. Дустлик, 2-А)