МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Направление: Математика

Группа: 08.404 (Р)

Отабекова Комилахон Эминжоновна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

На тему:

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ С ПОСТОЯННЫМИ ЧЛЕНАМИ

Руководитель:

преподаватель Икромова Н.С

Фергана 2012

ТЕМА: БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ С ПОСТОЯННЫМИ ЧЛЕНАМИ

ПЛАН

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

Постоянная работа в сфере просвещения и духовности, совершенствование личности определена в докладе Президента нашей страны Ислама Абдуганиевича Каримова на девятой сессии Олий Мажлиса Республики Узбекистан второго созыва как важнейшая составляющая формирования основ гражданского общества. И, как подчеркнул наш Президент: ” Это должно превратиться в постоянный принцип, в основу развития общества, что представляет собой целостную систему действий, где важнейшее место должны занять : Духовность, - Нравственность, - Просвещенность “. Эти ценности, как известно, закладываются в самом раннем возрасте, в семье, в детском дошкольном учереждении, в школе, в вузах.

В отличии от прошлой системы, прежде всего, изменились цели и задачи образования в целом. Основной целью образования является формирование свободной, всесторонне развитой, духовно богатой личности, преданный и честный гражданин.

Создана качественно новая система девятилетнего общего среднего образования, обепечивающая преемственность и непрерывность между дошкольным и средним специальным, профессиональным образованием. В этой системе образования существует такая наука, как математика, которая помогает во многих научных исследованиях. В области математики есть огромный раздел - это математический анализ.

Теория рядов является одним из важнейших разделов математического анализа. Ряды используются во многих областях современной математики – как в теоретических исследованиях, так и для практических целей. При помощи рядов были вычислены, например, постоянные числа π и e, составлены значения логарифмов, тригонометрических функций и т.д. С помощью рядов приближенно вычисляются не берущиеся в конечном виде интегралы, решаются дифференциальные уравнения.

1. Основные понятия.

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \qquad (1)$$

Составленный из этих чисел символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (2)$$

который, называется бесконечным рядом, а сами числа (1) - членами ряда. Вместо (2) пользуясь знаком суммы, часто пишут так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; (2а) указатель n пробегает здесь все значения от 1 до ∞.

Станем последовательно складывать члены ряда, составляя (в бесконечном количестве) суммы; $\left.\begin{matrix} A_1 = a_1, A_2 = a_{1+}a_{2,} A_3 = a_1 + a_2 + a_{3,} \\ ..., A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n ...; \end{matrix}\right\}$ (3)

их называют частичными суммами (или отрезками) ряда.

Эту последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ мы всегда будем сопоставлять с рядом (2): роль этого символа и заключается в порождении упомянутой последовательности.

Конечный или бесконечный предел A частичной суммы A_n ряда (2) при $n \to \infty$. $A = \lim A_n$ называют суммой ряда и пишут $A = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ придавая тем самым символу (2) или (2а) числовой смысл. Если ряд имеет конечную сумму, его называют сходящимся, в противном же случае (т. е. если сумма равна $\pm\infty$ либо, же суммы вовсе нет)- расходящимся.

Таким образом, вопрос о сходимости ряда (2), по определению, равносилен вопросу о существовании конечного предела для последовательности (3). Обратно, какую бы варианту $x = x_n (n = 1,2,3 ...)$ наперед ни взять, вопрос о наличии для нее конечного предела может быть сведен к вопросу о сходимости ряда

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots \qquad (4)$$

для которого частичными суммами как раз и будут последовательные

значения варианты: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ При этом сумма ряда совпадает с пределом варианты. Пусть переменная величина x принимает последовательно значения: $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n, \ldots,$ (1) которые занумерованы и расположены в порядке возрастания своих номеров. Такое множество значений переменной x называют *числовой последовательностью*. Сами числа $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ называются *членами* этой последовательности.

Числа $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ можно рассматривать как значения некоторой функции положительного целочисленного аргумента: каждому целому числу n соответствует число x_n - член последовательности, имеющий номер n. Так что: $x_n = f(n), (n = 1,2,3,\ldots)$.

Поэтому числовую последовательность можно определить как множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел: 1,2,3, …, n, …..

Член x_n называют общим членом последовательности (1).

Переменную x, пробегающую последовательность значений (1), часто обозначают через x_n, подчеркивая тем самым, что она рассматривается не как переменная, а как некоторая функция от *n*.

Приведем примеры последовательностей:

1. *1,2,3, …..,n, …* $\quad f(n)=n$

2. *1!, 2!,3!, ….,n!, …* $\quad f(n)=n!$

3. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad f(n)=\frac{1}{n}$

Определение 1. Постоянное число a называется пределом п последовательности x_n, если каково бы ни было наперед заданное положительное число δ, всегда можно было найти такое натуральное число N, что для всех значений $n > N$ будет выполняться неравенство:

$$|a - x_n| < \delta. \qquad (2)$$

То, что число a есть предел переменной величины x_n, или последовательности с общим членом $x_n = f(n)$, символически записывается так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Говорят также в этом случае, что переменная x_n стремится к a, или что последовательность (1) сходится к a и записывают: $x_n \to a$.

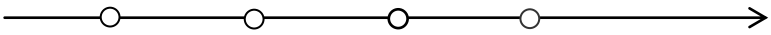
Из неравенства (2) только тогда будет следовать, что a есть предел x_n, когда при произвольно заданном положительном числе δ оно удовлетворяется не при одном каком- либо значении x_n, а при всех его значениях, начиная с некоторого. Номер N указывает то место, после которого выполняется неравенство (2). Число N, вообще говоря, зависит от δ. При уменьшении δ соответствующий номер N увеличивается: чем большей близости значений переменной x_n к a мы требуем, тем более далекие значения ее - в последовательности (1) – приходится рассматривать.

Неравенство (2) равносильно двум таким неравенствам:

$$-\delta < a - x_n < \delta,$$
$$a - \delta < x_n < a + \delta$$

Следовательно, если переменная x_n стремится к числу a, то это означает, что как бы мало ни было число δ, все числа последовательности (1), начиная с числа x_{N+1}, заключены между $a - \delta$ и $a + \delta$.

Дадим геометрическое истолкование понятию предела последовательности.

Изобразим числа $a, a-\delta, a+\delta$ и значения переменной x_n точками на числовой оси. 

Все точки x_n, начиная с точки x_{N+1}, т.е. точки, индекс которой превосходит некоторое натуральное число N, будут лежать внутри отрезка заданной длины 2δ с центром в точке a; вне этого отрезка их окажется конечное число.

Замечание. Если в определении предела последовательности понимать под N наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих при заданном δ этому определению, то для одной и той же последовательности, имеющей предел a, окажется, что при $\delta_1 < \delta_2$ будет $N_1 > N_2$.

Определение 1. Числовым рядом с общим членом $\boldsymbol{a_n}$ называют последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...,$ соединенных знаком плюс, то есть выражение вида: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называют членами ряда. Общий член последовательности $\{a_n\}$ называется общим членом данного ряда. Такой ряд записывают также в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Например, если $a_n = \frac{1}{n^2}$, то ряд имеет вид: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Напишем одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые четыре члена:

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + ...$$

Решение: Рассмотрим сначала последовательность числителей 2, 5, 8, 11, ... Они образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Это позволяет в качестве общего выражения для числителей взять формулу общего члена арифметической прогрессии: $2 + 3 \cdot (n-1) = 3n - 1$.

Знаменатели 2, 6, 18, 54, ... образуют геометрическую прогрессию с первым членом 2 и знаменателем 3. В качестве их общего выражения можно взять формулу общего члена геометрической прогрессии $2 \cdot 3^{n-1}$. Общий член ряда будет иметь следующий вид: $a_n = \frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$. В качестве общего члена можно было бы принять и более сложное выражение: $\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$, которое совпадает с написанным выше при $n = 1,2,3,4$

Числа a_n могут быть как положительными, так и отрицательными. Иногда бывает целесообразным записать ряд $a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \ldots$ в виде: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$.

Пример. Простейшим примером бесконечного ряда является уже знакомая геометрическая прогрессия: $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ Ее частичная сумма будет (если q≠1) равна $s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$ Если знаменатель прогрессии q, по абсолютной величине меньше единицы, то s_n имеет конечный предел $s = \frac{a}{1-q}$ т. е. наш ряд сходится, и s будет его суммой.

При $|q| \geq 1$ та же прогрессия дает пример расходящегося ряда. Если так, то его суммой будет бесконечность (определенного знака), в прочих случаях суммы вовсе нет. Отметим, в частности, любопытный ряд, который получается при $a = 1$ и $q = -1$, $1-1+1-1+\ldots \equiv 1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ Его частичные суммы попеременно равны то 1, то 0.

2. Основные теоремы.

Если в ряде (2) отбросить первые m членов, то получится ряд:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \qquad (5)$$

называемый остатком ряда (2) после m-го члена.

1°. Если сходится ряд (2), то сходится и любой из его остатков (5); обратно, из сходимости остатка (5) вытекает сходимость исходного ряда (2).

Фиксируем m и обозначим k-ю частичную сумму ряда (5) через A'_k: $A`_k = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k}$ Тогда, очевидно, $A`_k = a_{m+k} + a_m$ (6)

Если ряд (2) сходится, так что $A_n A$, то - при безграничном возрастании k - существует конечный предел $A` = A - A_m$ (7)

и для суммы A'_k, что и означает сходимость ряда (5).

Обратно, если сходится ряд (5), так что $A'_к \to A'$, то перепишем равенство (6), полагая в нем $k=n-m$ (при $a>m$), так: $A_n = A_m + \grave{A}_{-n}$ отсюда можно усмотреть, что - при безграничном возрастании n -частичная сумма A_n имеет предел $A = A_m + A`$ (8) т. е. сходится ряд (2).

Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов

ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда (в смысле его сходимости или расходимости).

Сумму ряда (5), если он сходится, обозначим вместо A' символом α_m, указывая значком, после какого члена берется остаток. Тогда формулы (8) и (7) перепишутся следующим образом: $A = A_m + \alpha_m$, $\alpha_m = A - A_m$. (9)

Если увеличивать m до бесконечности, то $A_m \to A$, а $\alpha_m \to 0$.

2°. Если ряд (2) сходится, то сумма α_m его остатка после *m-го* члена с возрастанием m стремится к нулю.

Упомянем следующие простые свойства сходящихся рядов:

3°. Если члены сходящегося ряда (2) умножить на один и тот же множитель с, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на с).

В самом деле, частичная сумма A_n ряда $ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$, очевидно, равна

$\bar{A}_n = ca_1 - ca_2 - ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + ... + a_n) = cA_n$ и имеет пределом с А.

4°. Два сходящихся ряда $A = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ и $B = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$

можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ также сходится, и его сумма равна, соответственно, A ± B.

Если A_n, B_n и C_n означают частичные суммы упомянутых рядов,

то, очевидно, $$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n \end{aligned}$$

Переходя к пределу, найдем, что $\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n$, что и доказывает наше утверждение.

В заключение сделаем еще одно замечание.

5°. Общий член a_n сходящегося ряда стремится к нулю.

Это может быть доказано совершенно элементарно: раз A_n имеет конечный предел A, то имеем $a_n = A_n - A_{n-1} \to 0$

§ 2. СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ.

1. Условие сходимости положительного ряда.

Составим последовательность частичных сумм ряда, т.е. последовательность вида $\{S_n\}$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и поставим в соответствие ряду $:\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ бесконечную последовательность чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{n,\ldots}$. Будем называть число S_n *n-й частичной суммой* ряда (А). Очевидно, что $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, и потому $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Определение 1. Числовой ряд называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, то есть если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Значение S этого предела называется суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, ряд называется *расходящимся.*

Будем условно писать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, если $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (соответственно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$, если $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$). В случае, когда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет сумму, будем иногда обозначать его тем же символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что и сам ряд.

Пример. Исследуем на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию, т.е. ряд: $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$.

Решение. Для этого ряда $s_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$. Если $|q| < 1$, то выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$, а потому $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. Значит, при $|q| < 1$ исследуемая прогрессия сходится и ее сумма равна $\frac{a}{1-q}$, значит и сумма ряда равна $\frac{a}{1-q}$. Если $\frac{a}{1-q}$ $|q| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} |q|^n = +\infty$, а потому и $\lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty$. В этом случае последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, т.е. ряд расходится. Этот ряд расходится и при $q = 1$. В этом случае $S_n = a + a + a + ... + a = n \cdot a$, а при $a > 0$ $\lim_{n\to\infty} n \cdot a = +\infty$. Наконец, ряд расходится при $q = -1$, так как частичными суммами ряда $a - a + a - a + a - ...$ являются: $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = a$

Последовательность $a, 0, a, 0, ... a,$ где $a \neq 0$, не имеет предела, а это значит, что ряд расходится. Таким образом, ряд сходится для $|q| < 1$ и расходится $|q| > 1$.

Пример . Докажем, что ряд: $1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} ...,$ где $0 < \alpha < 1$, расходится.

Решение. Для этого ряда $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. Так как все члены этой суммы не меньше чем $\frac{1}{n^\alpha}$, а она состоит из n членов, то $s_n > n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}$. Но при $0 < \alpha < 1$ имеем $1 - \alpha > 0$ и, значит, $\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha} = +\infty$. Расходимость ряда доказана.

Пример . Докажем, что сходится ряд: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+...$ и найдем его сумму.

Решение. Пользуясь известным разложением $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, находим, что $s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд сходится и его сумма равна 1.

Рассмотрим простейшие свойства числовых рядов.

Свойство 1. Если ряды (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся, то сходящимся будет и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$, причем его сумма равна сумме двух первых рядов.

Свойство 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}k\cdot a_n$, где $k\neq 0$ - постоянное число, также сходится и его сумма равна $k\cdot S$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак ряда.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **(1)**

Отбросим первые n членов этого ряда и получим ряд

$$a_{n+1}+a_{n+1}+...+a_{n+m}+... \qquad \textbf{(2)}$$

Ряд (2) называется остатком ряда (1) и обозначается R_n.

Теорема 1. Если сходится ряд (1), то сходится и любой из его остатков (2). и, наоборот, из сходимости остатка (2) вытекает сходимость ряда (1).

Таким образом, ряд и его остаток сходятся и расходятся одновременно. Отбрасывание конечного числа первых членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда в смысле его сходимости или расходимости.

Теорема 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Этот признак является необходимым, но не является достаточным, так как существуют ряды, общий член которых стремится к нулю, но тем не менее они расходятся. К таким рядам относится *гармонический ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \quad . \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

но ряд расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или не существует, то можно сказать, что ряд расходится.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что при любом $p > 0$ и при любом $n > N$ выполняется неравенство: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

Теорема 3. (критерий Коши). Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ сходилась на множестве действительных чисел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Теорема 4. Для того, чтобы числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ этого ряда была фундаментальной, т.е. чтобы $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N$, что при $\forall p > 0$ и $\forall n > N$ выполнялось неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ или $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Написать простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным его первым членам: $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$,

Решение. Исследуем закономерность, которой подчиняются числа, составляющие ряд. Каждый член данного ряда представляет собой дробь, числитель которой равен удвоенному номеру члена. Следовательно, n – ый член ряда будет иметь числитель, равный $2n$. Знаменатели дробей представляют собой арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Следовательно, знаменатель дроби n – го члена запишется формулой $3n+2$. Таким образом, простейшей формулой n – го члена данного ряда будет: $a_n = \dfrac{2n}{3n+2}$.

Записать ряд, используя знак суммы $\left(\sum\ \right)$:

$$1+\frac{2}{7}+\frac{3}{13}+\ldots$$

Решение. Так как любой член ряда может быть вычислен по формуле общего члена, то сначала запишем общий член ряда. Числитель дроби представляет собой последовательность натуральных чисел, а знаменатель дроби – арифметическую прогрессию с разностью равной 6, поэтому $a_n = \frac{n}{6n-5}$.

Краткая запись данного ряда будет иметь вид: $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{6n-5}$

Найти сумму ряда: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$

Решение. *Первый способ*. Составим последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3},$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{2}{5},$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{3}{7},$$
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{4}{9}.$$

Мы видим, что частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны индексу (номеру) частичной суммы, а знаменатели – удвоенному индексу, сложенному с единицей. Поэтому можно предположить, что $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Методом полной математической индукции докажем, что эта формула верна. В самом деле, имеем:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n\cdot(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} =$$
$$\frac{2n^2+2n+n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

таким образом, мы доказали, что $S_n = \frac{n}{2n+1}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, сумма данного ряда существует и равна $\frac{1}{2}$.

Второй способ. Представим общий член данного ряда в виде суммы двух дробей, т.е. разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределенных коэффициентов: $\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$ В этом тождестве мы приводим левую и правую части к общему знаменателю и отбрасываем его:

$$A\cdot(2n+1)+B\cdot(2n-1)\equiv 1 \text{ или } 2An+A+2Bn-B\equiv 1$$

Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему уравнений: $\begin{cases}2A+2B=0\\ A-B=1\end{cases}$, из которой находим: $A=\frac{1}{2}$ и $B=-\frac{1}{2}$. таким образом,

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2\cdot(2n-1)}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}.$$

Представляя теперь каждый член данного ряда в виде суммы двух слагаемых, мы получим следующее выражение для n – ой частичной суммы:

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5}-...-\frac{1}{2\cdot(2n-1)}+\frac{1}{2\cdot(2n-1)}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}.$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

Теперь находим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}$$

Займемся теперь вопросом об установлении сходимости или расходимости ряда. Этот вопрос всего проще решается для рядов, члены которых неотрицательны; для краткости такие ряды мы будем называть просто положительными.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (A) будет положительным, т. е. $a_n \geq 0$ (n=1, 2, 3, ...). Тогда, очевидно, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$, т. е. варианта A_n оказывается возрастающей. Вспоминая теорему о пределе монотонной варианты, мы непосредственно приходим к следующему основному в теории положительных рядов предложению: Положительный ряд (A) всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно, ряд - сходящимся), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (а ряд - расходящимся) в противном случае.

Все признаки сходимости (и расходимости) положительных рядов в конечном счете, основаны на этой простой теореме, Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере ряда. Приведем примеры этого рода.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots,$$

известный под названием гармонического ряда.

Имеем очевидное неравенство: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (1)

Если, отбросив первые два члена, остальные члены гармонического ряда последовательно разбить на группы, по 2, 4, 8, …, 2^{k-1}, … членов в каждой

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2}; \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}; \ldots;$$

то каждая из этих сумм в отдельности будет больше $\frac{1}{2}$; в этом легко убедиться, полагая в (*A*) поочередно *n*= 2, 4, 8, ..., 2^{k-1}, ... Обозначим n-ю частичную сумму гармонического ряда через H_n;

тогда, очевидно, $H_{2^k} > k \cdot \dfrac{1}{2}$

Мы видим, что частичные суммы не могут быть ограничены сверху: ряд имеет бесконечную сумму.

Упомянем уже здесь, что H_n с возрастанием n возрастает очень медленно. Эйлер, например, вычислил, что $H_{1000} = 7,48..., H_{1000000} = 14,39...,$ и.т.д

Пример. Рассмотрим теперь более общий ряд: $\sum_{n-1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + ... + \dfrac{1}{n^s} + ...,$

где s - любое вещественное число; он содержит в себе, как частный случай (при s= 1), предыдущий ряд. По сходству с рядом 1), и этот ряд тоже называют гармоническим.

Так как при s<1 члены рассматриваемого ряда больше соответствующих членов ряда 1), то, в этом предположении, частичные суммы и подавно не ограничены сверху, так что ряд расходится.

Займемся случаем, когда s>l; положим для удобства s=1+σ, где σ>0.

Аналогично А), имеем на этот раз: $\dfrac{1}{(n+1)^s} + \dfrac{1}{(n+2)^s} + ... + \dfrac{1}{(2n)} < n \cdot \dfrac{1}{n^s} = \dfrac{1}{n^\sigma}$ (2)

Выделяя, как и выше, последовательные группы членов:

$$\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{2}; \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{2^2}; \underbrace{\frac{1}{9^s} + ... + \frac{1}{16^s}}_{2^3}; ... \quad \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + ... + \frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}}; ...;$$

,

с помощью (2) легко показать, что эти суммы соответственно меньше членов прогрессии $\dfrac{1}{2^\sigma}, \dfrac{1}{4^\sigma} = \dfrac{1}{(2^\sigma)^2}, \dfrac{1}{8^\sigma} = \dfrac{1}{(2^\sigma)^3}, ..., \dfrac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \dfrac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, ...$

В таком случае ясно, что какую бы частичную сумму рассматриваемого ряда ни взять, она будет меньше постоянного числа

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}}$$

следовательно, ряд сходится.

2. Теоремы сравнения рядов.

Определение 1. *Положительным рядом* или рядом с положительными членами называется такой ряд, все члены которого неотрицательны, т.е. $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где $a_n \ge 0, \forall n$

Пусть дан ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где все $a_n > 0$. Так как $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ и $a_{n+1} \ge 0$, то $S_{n+1} \ge S_n$ Это значит, что последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ частичных сумм данного ряда неубывающая: $S_1 \le S_2 \le ... \le S_n \le ...$. Для сходимости неубывающей последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, т. е. необходимо и достаточно, чтобы существовало такое M, что $s_n \le M$ для всех n. Значит, в этом и только в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ где $a_n \ge 0$, сходится.

Теорема 1. (сравнения рядов) Пусть даны два ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, члены которых неотрицательны, причем для всех n выполняется неравенство $a_n \le b_n$. Тогда, если сходится ряд (B), то сходится и ряд (A), причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (из сходимости ряда соответственно с большими членами вытекает сходимость ряда с соответственно меньшими членами).

Следствие. Если члены рядов (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ неотрицательны и для всех n выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из расходимости ряда (A) вытекает, что и ряд (B) расходится.

Пример . Выше было доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ сходится. Но при любом n имеет место неравенство $(n+1)^2 \ge n(n+1)$, то есть $\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n(n+1)}$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ тоже сходится.

Пример 2. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, а при любом n имеем $\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$ тоже расходится.

Замечание. Так как сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка, то члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ можно сравнивать лишь, начиная с некоторого места (однако если $a_n \le b_n$ лишь при $n \ge n_0$, то, вообще говоря, неравенство $S < \sigma$ может не иметь места).

Иногда удобнее применять другую теорему сравнения рядов с неотрицательными членами.

Теорема 2. (вторая теорема сравнения рядов с неотрицательными членами). Пусть все члены рядов (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ неотрицательны и пусть существует конечный предел $k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Тогда при $k \ne 0$ оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $k = 0$, то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) - расходимость ряда (B).

Пример . Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Так $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится.

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая простая теорема.

Теорема 3. Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n-1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (A)

и $\sum_{n-1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (B)

Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для n>N), выполняется неравенство: $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) или - что то же - из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении**,** мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \le b_n$ при всех значениях n= 1,2,3, ... Обозначив частные суммы рядов (A) и (B), соответственно, через A_n и B_n, будем иметь: $A_n \le B,$

Пусть ряд (B) сходится; тогда, по основной теореме суммы B_n ограничены:

$A_n \le L, \quad (L = const; \quad n = 1,2,3,...)$ В силу предыдущего неравенства, и подавно $A_n \le L,$

а это, по той же теореме, влечет за собой сходимость ряда (A).

Иногда на практике более удобна следующая теорема, вытекающая из первой:

Теорема 4. Если существует предел $\lim \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \le K \le +\infty)$

то из сходимости ряда (B), при K<+∞, вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости первого ряда, при K>0, вытекает расходимость второго. [Таким образом, при 0< K< +∞ оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.]

Доказательство. Пусть ряд (B) сходится и K<+∞. Взяв произвольное число ε>0, по самому определению предела, для достаточно больших n будем иметь $\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad$ откуда $\quad a_n < (K+\varepsilon)b_n$

Одновременно с рядом (B) будет сходиться и ряд $\sum(K+\varepsilon)b_n$ полученный умножением его членов на постоянное число K+ε. Отсюда, по предыдущей теореме, вытекает сходимость ряда (A).

Если же ряд (B) расходится и K>0, то в этом случае обратное отношение $\frac{b_n}{a_n}$ имеет конечный предел; ряд (A) должен быть расходящимся, ибо если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (B).

Наконец, приведем еще одну теорему сравнения, также представляющую собой следствие первой.

Теорема 5. Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для n>N), выполняется неравенство $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad (3)$$

то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) или - что то же - из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B).

Доказательство. Как и выше, при доказательстве теоремы 1, не умаляя общности, можно считать, что неравенство (3) справедливо для всех значений n= 1, 2, 3, ... В таком случае будем иметь: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$,

Перемножив почленно эти неравенства, получим: $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$, или $a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Пусть ряд (B) сходится; вместе с ним сходится ряд $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$, полученный умножением его членов на постоянный множитель $\frac{a_1}{b_1} \cdot A$ то где, по теореме 1, сходится и ряд (A).

Перейдем теперь к примерам установления сходимости или расходимости рядов непосредственным применением теорем сравнения.

Пример . $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \qquad (a<0).$

Если a≤1, то нарушается необходимое условие сходимости

и ряд расходится. При a>1 члены ряда оказываются меньшими членов сходящегося ряда $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$, ряд сходится (теорема 1).

Пример . $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ сходится, так как $\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n\cdot(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}$

Тогда $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}<\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, рад $\sum_{n}^{\infty}1\frac{1}{2^n}$ сходится , то отеореме 1 рад $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ будет сходится.

Пример . $\sum_{n-1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}\quad(0<x<3\pi).$

так как $2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}<x\cdot(\frac{2}{3})^n$

И ряд $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится, то это же справедливо и для данного ряда (теорема 1).

3. Признаки Коши и Даламбера.

Теорема 1. (признак Даламбера). Пусть все члены ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и пусть существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему: $D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда: если $D<1$, то ряд сходится, если $D>1$, то ряд расходится, если $D=1$, то возможна как сходимость, так и расходимость ряда.

Пример . Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n!}$. Для этого ряда имеем $a_n=\frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Значит, $D=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$

Так как $D=0<1$, то ряд сходится.

Другим признаком сходимости рядов с положительными членами, основанным на сравнении с суммой геометрической прогрессии, является так называемый радикальный признак сходимости Коши.

Теорема 2. (Признак Коши) Пусть все члены ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и пусть существует предел C=$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Тогда: а) если $C<1$, то ряд сходится; б) если $C>1$, то ряд расходится; в) если $C=1$, то возможна как сходимость, так и расходимость.

Сравнение данного ряда $\sum_{n-1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (A) с различными стандартными рядами, заведомо сходящимися или расходящимися, может быть проведено и в другой, так сказать, более организованной форме.

Возьмем для сравнения, в качестве ряда (B), с одной стороны, сходящуюся геометрическую прогрессию $\sum q^n = q + q^2 + ... + q^n + ...$ $(0 < q < 1)$, а с другой стороны - расходящуюся прогрессию $\sum 1 = 1 + 1 + ... + 1 + ...$

Сравнивая испытуемый ряд (A) с этими рядами по схеме теоремы 1, придем к следующему признаку:

Признак Коши. Составим для ряда (A) варианту $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$

Если, при достаточно больших *n*, выполняется неравенство $\mathcal{C}_n \le q$, где q — постоянное число, меньшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $\mathcal{C}_n \ge 1$, то ряд расходится.

Действительно, неравенства $\sqrt[n]{a_n \le q}$ или $\sqrt[n]{a_n \ge 1}$ равносильны, соответственно, таким: $a_n \le q^n$ или $a_n \ge 1$; остается применить теорему 1.

Чаще, однако, этот признак применяют в другой, предельной, форме: допустим, что варианта $\mathcal{C}_n$ имеет предел (конечный или нет): $\lim \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$.

Тогда при $\mathcal{C} < 1$ ряд сходится, а при ряд расходится. Если $\mathcal{C} < 1$ то возьмем положительное число ε, меньшее чем $1\text{-}\mathcal{C}$,так что и $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$. определению предела, для $n > N$ будет: $\mathcal{C}\text{-}\varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon$.

Число $\mathcal{C} + \varepsilon$ играет роль числа q в предыдущей формулировке: ряд сходится.

Если же $\mathcal{C} > 1$ (и конечно), то, взяв , $\varepsilon = \mathcal{C} - 1$, так что $\mathcal{C} - \varepsilon = 1$, для достаточно больших значений n на этот раз будем иметь $\mathcal{C}_n > 1$:ряд расходится. Аналогичный результат и при $\mathcal{C} = +\infty$.

В случае, когда $\mathcal{C} = 1$, этот признак не дает возможности судить о поведении ряда. Варианту $\mathcal{C}_n$ будем называть вариантой Коши. Если сравнение ряда (А) с указанными стандартными рядами производить по теореме 3, то придем к такому признаку:

Признак Даламбера (J. d'Alembert). *Рассмотрим для ряда (А) варианту*

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Если, при достаточно больших п, выполняется неравенство $\mathcal{D}_n \le q$, где q — постоянное число, меньшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $\mathcal{D}_n \ge 1$, то ряд расходится.

И в этом случае удобнее пользоваться предельной формой признака:

Допустим, что варианта $\mathcal{D}_n$ имеет предел {конечный или нет): $\lim \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$.

Тогда при $\mathcal{D} < 1$ ряд сходится, а при $\mathcal{D} > 1$ ряд расходится. Доказательство — такое же, как и в случае признака К о ш и. И этот признак ничего не дает, если оказывается, что $\mathcal{D} = 1$. Варианту $\mathcal{D}_n$ назовем вариантой Даламбера.

4. Признак Раабе.

В тех случаях, когда указанные простые признаки не дают ответа, приходится прибегать к более сложным признакам, основанным на сравнении испытуемого ряда уже с другими стандартными рядами, так сказать, «медленнее» сходящимися или «медленнее» расходящимися, чем прогрессия.

Мы рассмотрим здесь еще признак Раабе (J. L. Raabe); он осуществляет сравнение данного ряда (А) с гармоническими рядами - сходящимися:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \qquad (s > 1)$$ (H_s) и расходящимися:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad \text{(H)}$$

- именно с помощью теоремы 3. При этом приходится рассматривать варианту Раабе: $\Re_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$

Признак Раабе. Если, при достаточно большихn, выполняется неравенство $\Re_n \geq r,$ где *n*- постоянное число, большее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $\Re_n \leq 1,$ то ряд расходится.

Итак, пусть, при достаточно больших n, имеем: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r > 1$ или $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$

Возьмем теперь любое число s между 1 и r: r>s>1. Так как по известному предельному соотношению $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s,$ то для достаточно больших *n* будет

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r, \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n},$$ а следовательно, и $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s.$

Это неравенство можно переписать следующим образом: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$

Справа мы имеем отношение двух последовательных членов ряда применив теорему 3, убеждаемся в сходимости ряда (А).

Если же, начиная с некоторого места, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$ то отсюда сразу находим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

применив к рядам (A) и (H) теорему 3, заключаем о расходимости ряда (A).

Признак Раабе тоже применяется преимущественно в предельной форме: допустим, что варианта имеет $\mathfrak{R}_n$ предел {конечный или нет): $\lim \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}.$

Тогда при $\mathfrak{R} > 1$ ряд сходится, а при $\mathfrak{R} < 1$ ряд расходится.

Сравнивая признаки Даламбера и Раабе, видим, что последний значительно сильнее первого. Если предел $\mathfrak{D} = \lim \mathfrak{D}_n$ существует и отличен от единицы, то для $\mathfrak{R}_n = n\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_n} - 1\right)$ существует предел $\mathfrak{R}$, равный $+\infty$ при $\mathfrak{D} < 1$ и $-\infty$ при $-\infty$. Таким образом, если признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении данного ряда, то признак Раабе и подавно его дает: больше того, все такие случаи охватываются всего двумя из возможных значений $\mathfrak{R}$, именно $\pm\infty$ Все остальные значения $\mathfrak{R}$ (исключая $\mathfrak{R} = 1$), также дающие ответ на вопрос о сходимости, соответствуют, таким образом, случаям, когда признак Даламбера заведомо ответа не дает, потому что $\mathfrak{D} = 1$.

Пример. Применим признак Коши к следующим рядам: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, $\mathcal{C}_n = \frac{1}{\ln n}$, $\mathcal{C} = 0$: ряд сходится;

Пример. Приведем примеры применения признака Раабе .

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Признак Даламбера к этому ряду неприложим, ибо $\mathfrak{D}_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$. Составим варианту Раабе : $\mathfrak{R}_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}$. Так как, то $\mathfrak{R}_n = \lim \mathfrak{R}_n = \frac{3}{2} > 1$, ряд сходится.

5. Признак Куммера.

Теперь мы выведем один весьма общий признак, принадлежащий Куммеру (E. E. Kummer); его скорее можно рассматривать как общую схему для получения конкретных признаков.

Признак Куммера. Пусть $c_1, c_2, \dots c_n, \dots$

будет произвольная последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Составим для испытуемого ряда (A) варианту $\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$.

Если (для n>N) выполняется неравенство $\mathcal{K}_n \geq \delta$, где δ - постоянное положительное число, то ряд сходится. Если же (для n>N) $\mathcal{K}_n \geq 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0$ неравенство это, очевидно, можно считать выполненным при всех n. Умножив обе части этого неравенства на a_{n+1}, получим: $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta \cdot a_{n+1}$, (6) значит, $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$ или $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$.

Отсюда следует, что переменная $c_n a_n$ монотонно убывает и, следовательно, стремится к конечному пределу (так как она ограничена снизу нулем). Итак, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$ сходится, ибо сумма его п первых членов: $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}$ имеет конечный предел. Но тогда из неравенства (6), по теореме I, следует, что сходится ряд а с ним и $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$, данный ряд (A). Если же, для $n > N$, $\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$,

то имеем: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$.

Так как ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ предположен расходящимся, то, по теореме 3, расходится и испытуемый ряд (А).

В предельной форме признак Куммера выглядит так: допустим, что варианта имеет $\mathcal{K}_n$ предел (конечный или нет): $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$.

Тогда при $\mathcal{K} > 0$ ряд сходится, а при $\mathcal{K} < 0$ расходится.

Покажем теперь, как при помощи признака Куммера можно получить некоторые важные признаки сходимости как частные случаи его.

а) Положим, например, $c_n = 1$; условие, чтобы ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходился, соблюдено. Имеем: $\mathcal{K}_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1$.

Таким образом, мы пришли вновь к признаку Даламбера.

б) Положим, далее, $c_n = n$ и отметим, что ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится. Выражение $\mathcal{K}_n$ получит вид: $\mathcal{K}_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = \mathcal{R}_n - 1$.

Если варианта $\mathcal{R}_n$ стремится к пределу $\mathcal{R}$, то $\mathcal{K}_n$ стремится к пределу

$\mathcal{K} = \mathcal{R}_n - 1(\mathcal{K} = \pm\infty,$ если $\mathcal{R} = \pm\infty$. При $\mathcal{R} > 1$ имеем $\mathcal{K} < 0$, и по признаку Куммера ряд сходится; если же $\mathcal{R} < 1$, то $\mathcal{K} > 1$, так что ряд расходится. Мы вновь получили признак Раабе .

6. Признак Бертрана

Признак Бертрана(J.Bertrand). Допустим, что варианта $\mathcal{B}_n$ имеет предел (конечный или нет): $\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n$.

Тогда при ряд $\mathcal{B} > 1$ сходится, а при $\mathcal{B} < 1 -$ расходится.

Действительно, так как $\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\log e = 1$, то варианта Куммера $\mathcal{K}_n$ стремится к пределу $\mathcal{K} = \mathcal{B} - 1 (\mathcal{K} = \pm\infty$, или $\mathcal{B} = \pm\infty)$. Остается сослаться на признак Куммера.

Сопоставляя признаки Раабе и Бертрана, можно было бы повторить те же замечания, которые мы выше сделали по поводу признаков Даламбера и Раабе. Эта цепь все более и более чувствительных (но и более сложных!) признаков может быть неограниченно продолжена.

7. Признак Гаусса.

Из признаков Даламбера, Раабе и Бертрана легко может быть получен следующий признак Гаусса (C.F. Gauss).

Признак Гаусса. Допустим , жто для данного ряда (A) отношения $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может бит предоставлено в виде: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$,

где λ и μ - постоянные, *а* θ_n есть ограниченная величина: $|\theta_n| \le L$; тогда

ряд сходится, если λ>1 или если λ=1, μ>1, и расходится – если λ<1 или λ=1, $\mu \le 1$. Случаи λ⪋1 приводится к признаку Даламбера, ибо $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$ Пусть теперь λ=1; тогда $\mathfrak{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}$, $\mathfrak{R} = \mu$, и случаи λ⪋1 исчерпываются признаком Раабе. Наконец, если μ=1, то имеем: $\mathcal{B}_n = \ln n(\mathfrak{R}_n - 1) = \frac{\ln n}{n}\theta_n$.

Так как $\frac{\ln n}{n}$, как известно, стремится к нулю при и $n = \infty$, а θ_n ограничена, то $\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n = 0$, и по признаку *Бертрана* ряд расходится.

Пример. Рассмотрим так называемый гипергеометрический ряд (Гаусс):

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\chi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)} x^n =$$

$$=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+$$

$$+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)}x^3+...,$$

предполагая пока $\alpha,\ \alpha,\beta,\gamma,\chi>0$. Здесь $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x\to x,$ так что по признаку Даламбера сразу устанавливается сходимость при x<1 и расходимость при x> 1. Если же x= 1, то возьмем отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$

и, пользуясь разложениями: $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},\quad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},$

представим его в виде: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$, где $\theta-$ ограничена.

Другим примером на применение признака Гаусса может служить ряд

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+...+\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)+...\qquad (p>0)$$

который сходится при p>2 и расходится при p≤2. Здесь по формуле Тейлора

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-p}=1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(2n)+2}+\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

откуда $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$ (θ_nî ãðàí è÷åí à),

8. Интегральный признак Маклорена—Коши.

Во многих случаях члены рассматриваемых рядов не только положительны, но и монотонно стремятся к нулю. Для таких рядов вопрос о сходимости часто решается путем сравнения ряда с несобственным интегралом.

Напомним, что по определению несобственный интеграл $\int_a^x f(t)dt$ сходится, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x f(t)dt$, и равен в этом случае значению этого предела. Если функция *f(t)* всюду имеет первообразную *F(t),* то $\int_a^\infty f(t)dt = F(\infty) - F(a)$, где $F(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} F(t)$.

Таким образом, в случае существования первообразной *F(t)* для функции *f(t)* исследование сходимости $\int_a^\infty f(t)dt$ эквивалентно исследованию предела $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, при этом если предел существует и конечен, то интеграл сходится, а если предел равен $\pm\infty$ или не существует, то интеграл расходится.

Если несобственный интеграл $\int_a^\infty f(t)dt$ сходится, то для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к ∞, имеем:

$$\{x_n\} \int_a^\infty f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(t)dt .$$

В случае, когда $f(t) \ge 0$, для сходимости интеграла $\int_a^\infty f(t)dt$ достаточно существования хотя бы одной последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(t)dt < \infty$. Это вытекает из того, что при $f(t) > 0$ функция $F(x) = \int_a^\infty f(t)dt$ монотонно возрастает.

В частности, при $f(t) \geq 0$ сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(t)dt$ равносильна сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(t)dt = \int\limits_1^2 f(t)dt + \int\limits_2^3 f(t)dt + \ldots$.(1)

В самом деле, частичные суммы этого ряда имеют вид: $s_n = \int\limits_1^2 f(t)dt + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(t)dt = \int\limits_1^{n+1} f(t)dt$,

а для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_1^{n+1} f(t)dt = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$.

Сформулируем признак сходимости рядов с монотонно убывающими положительными членами.

Теорема 1. (интегральный признак Коши). Пусть функция *f(t)* задана на луче $[1;\infty)$, непрерывна, положительна, монотонно убывает и стремится к нулю, когда $t \to \infty$. Обозначим *f(n)* через ряд a_n. Тогда ряд (A): $\sum\limits_{n+1}^{\infty} a_n$, сходится в том и только том случае, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(t)dt$.

Пример . Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{n^{\alpha}}$ удовлетворяет условиям теоремы, причем $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Таким образом, для исследования сходимости ряда достаточно рассмотреть предел первообразной F(x) для функции $f(x) = \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $x \to \infty$. При $\alpha \neq 1$ $F(x) = -\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha - 1}}$

Если $0<\alpha<1$, то $\alpha-1<0$, и потому $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\infty$. В этом случае интеграл, а тем самым и ряд расходятся. Если же $\alpha>1$, то $\alpha-1>0$, и тогда $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=0$. В этом случае интеграл, а, следовательно, и ряд сходятся. Наконец, при $\alpha=1$ $F(x)=\ln x$, а так как $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, то интеграл, а, следовательно, и ряд расходятся.

Пример. Исследовать ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши. $\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}+\ldots$.

Решение. Функция $\dfrac{1}{(x+1)\cdot\ln^2(x+1)}$ при $x\geq 1$положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком. Находим:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\cdot\ln^2(x+1)}=\int_1^\infty \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Таким образом, соответствующий несобственный интеграл равен конечному числу, а именно $\dfrac{1}{\ln 2}$, т.е. он сходится, значит, и данный ряд также сходится.

Этот признак по форме отличается от всех предыдущих. Он построен на идее сопоставления ряда с интегралом и представляет собой обобщение того приема, которым мы уже пользовались для выяснения сходимости или расходимости ряда.

Пусть предложенный ряд имеет форму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n),$ (7)

где *f(n)* есть значение при x = n некоторой функции *f(x),* определенной для *x≥1*; функцию эту предположим непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Рассмотрим какую-либо первообразную функцию F(x) для f(x); так как ее производная F'(x) = f(x)>0, то F(x) возрастает вместе с x и, при $x\to+\infty$, наверное, имеет предел, конечный или нет. В первом случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(n+1)-F(n)\right] \qquad (8)$$

сходится, а во втором - расходится. С этим рядом мы и сравним испытуемый ряд.

По формуле конечных приращений, общий член ряда (8) представится в виде: $F(n+1)-F(n)=f(n+\theta) \qquad (0<\theta<1)$,

так что вследствие монотонности функции f(x) $a_{n+1}=f(n+1)<F(n+1)-F(n)<f(n)=a_n$. (9)

Таким образом, мы приходим к следующему интересному признаку (впервые найденному в геометрической форме *Маклореном,* но позабытому и лишь впоследствии вновь открытому Коши):

Интегральный признак. При сделанных предположениях ряд (7) сходится или расходится в зависимости от того, имеет ли функция $F(x)=\int f(x)dx$ при $x\to+\infty$ конечный предел или нет.

Пример. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^1+^{\sigma} n}(\sigma>0).$

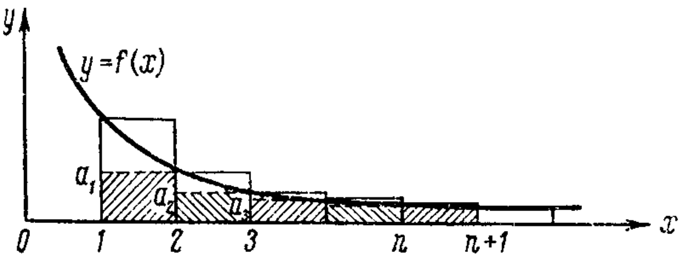
Здесь $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln^1+^{\sigma} x}$; при $x\to+\infty$ ряд сходится.

Первообразную функцию F(x) можно взять и в форме определенного интеграла $F(x)=\int_1^{\infty} f(t)dt$

Предел его при $x\to+\infty$ называют «интегралом от 1 до $+\infty$» и обозначают так: $F(+\infty)=\int_1^{+\infty} f(t)dt,$

Итак, предложенный ряд (7) сходится или расходится, смотря потому, имеет ли этот интеграл конечное значение или нет.

В такой форме интегральный признак допускает простое геометрическое истолкование, близкое к идее Маклорена. Если изобразить функцию f(x) кривой, то интеграл F(x) будет выражать площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью x и двумя ординатами; интеграл же $F(+\infty)$, в некотором смысле, можно рассматривать как выражение для площади всей бесконечно простирающейся направо фигуры под кривой. С другой же стороны, члены $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\dots$ряда выражают величины ординат



в точках $x = 1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \dots$ или, что то же, площади прямоугольников с основаниями 1 и с высотами, равными упомянутым ординатам.

Таким образом, сумма ряда есть не что иное, как сумма площадей выходящих прямоугольников, и лишь первым членом отличается от суммы площадей входящих прямоугольников. Это делает совершенно наглядным установленный выше результат: если площадь криволинейной фигуры конечна, то и подавно конечна площадь заключенной в ней ступенчатой фигуры, и предложенный ряд сходится; если же площадь криволинейной фигуры бесконечна, то бесконечна и площадь содержащей ее ступенчатой фигуры, так что в этом случае ряд расходится.

Сделаем теперь некоторые замечания относительно дальнейшего использования неравенств (9).

а) В случае существования конечного предела $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$

можно указать удобную оценку остатка предложенного ряда.

Именно, просуммировав неравенства $a_k < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$

при $k = n+1, \dots, n+m,$, получим $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m) - F(n) < \sum\limits_{k=n}^{n+m-1} a_k$.

Перейдем к пределу, увеличивая здесь до бесконечности:

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < F(+\infty)-F(n) < \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ или $F(+\infty)-F(n+1) < \sum_{k=n+1} a_k \le F(+\infty)-F(n);$ это и дает искомую оценку как сверху, так и снизу.

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}(\sigma>0)$ будет $f(x)=\frac{1}{x^{1+\sigma}}$, $F(x)=-\frac{1}{\sigma\cdot x^{\sigma}}$, $F(+\infty)=0$,

и
$$\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{t+\sigma}} \le \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n^{\sigma}}. \qquad (11)$$

б) Если же F(x) возрастает до бесконечности вместе с x, то эта функция позволяет судить о быстроте роста частичной суммы предложенного ряда. Рассмотрим неравенства $0 < f(k)-\left[F(k+1)-F(k)\right] < f(k+1)$

и, просуммировав их от $k=1$ до $k=n$, получим возрастающую, но ограниченную варианту

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-\left[F(k+1)-F(1)\right] < f(1)-f(n+1) < f(1),$$

которая стремится к конечному пределу. То же справедливо и относительно варианты $\sum_{k=1}^{n} f(k)-F(n+1)$.

Если через C обозначить ее предел, а через α_n – бесконечно малую,которой она разнится от своего предела, то придем к формуле:

$$\sum_{k=t}^{n} f(k)=F(n+1)+C+\alpha_n.$$

Например, при $f(x)=\frac{1}{x}, F(x)=\ln x,$ отсюда вновь получается формула.

9. Признак Ермакова.

Примерно ту же область применения, что и интегральный признак, имеет и своеобразный признак, предложенный В. П. Ермаковым. Формулировка его не содержит понятий интегрального исчисления.

Признак Ермакова. Предположим по-прежнему функцию $f(X)$ непрерывной, положительной и монотонно убывающей для x>1. Тогда, если для достаточно больших X скажем, для $x \ge x_0$ выполняется неравенство

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \le q < 1,$$

то ряд (7) сходится, если же для $x > x_0$ $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \ge 1$, то ряд (7) расходится.

Пусть выполняется первое неравенство. При любом будем $x \ge x_0$ иметь (подстановка $t = e^u$)

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(e^u) * e^u du \le q\int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

Отсюда

$$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \le q\left[\int_{x^0}^{x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right] \le$$

$$\le q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt - \int_{x}^{e^x} f(t)dt\right] \le q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$$

а так $e^x > x,$

в вычитаемое в последних скобках положительно. В таком случае $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \le \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt,$ прибавляя к обеим частям интеграл $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt$ получим $\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = L$, и тем более , учитывая (2)

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \le L \qquad (x \le x_0).$$

Так как с возрастанием x и интеграл возрастает, то для него существует конечный предел x →∞: $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$

и - по интегральному признаку - ряд (7) сходится.

Пусть теперь имеет место второе неравенство. Тогда

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

и - если к обеим частям прибавить интеграл $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)dt$

$$\int_{x}^{e^x} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = \gamma > 0$$

(так как, ввиду (12), $x_0 < e^{x_0}$). Определим теперь последовательность

$$x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_{n,} ...$$

полагая $x_n = e^{x_{n-1}}$; по доказанному $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt \ge \gamma$, так что $\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \ge n\gamma.$

Отсюда ясно, что

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = +\infty$$

и - по интегральному признаку - ряд (7) расходится.

Пример. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} x}, \quad (\sigma = 0)$$

В этом случае $f(x) = \dfrac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} x}$, и выражение

$$\frac{f(e^x) \cdot e + x}{f(x)} = \frac{n \cdot \ln^{1+\sigma} x}{x_\sigma} \to 0 \text{ при } \quad x \to \infty$$

так что при достаточно больших x оно становится меньшим любой правильной дроби q: ряд сходится.

§ 3. СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ.

1. Общее условие сходимости ряда.

Обратимся к вопросу о сходимости рядов, члены которых могут иметь произвольные знаки. Так как, по определению, сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots \qquad \text{(A)}$$

приводится к сходимости последовательности

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+m}, \ldots, \qquad (1)$$

составленной из частичных сумм ряда, то естественно применить к этой последовательности принцип сходимости. Из двух номеров n и n', которые в нем упоминаются, можно, не умаляя общности, считать $n' > n$ положить $n' = n + m$, где m - любое натуральное число. Если вспомнить, что

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m},$$

то принцип сходимости применительно к ряду можно перефразировать так:

Для того чтобы ряд (A) сходился, необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon>0$ отвечал такой номер N, что при $n>N$ неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполняется, каково бы ни было $m = 1,2,3, \ldots$.

Иными словами: сумма любого числа членов ряда, следующих за достаточно далеким, должна быть произвольно мала.

Если, предполагая ряд сходящимся, в неравенстве (2) взять, в частности, $m = 1$, то получим: $|a_{n+1}| < \varepsilon$ $(при \;\; n > N)$

так что $a_{n+1} \to 0$ или (что то же) $a_n \to 0$, и мы вновь приходим к известному необходимому условию сходимости ряда. Оно требует гораздо меньшего, чем принцип сходимости: необходимо, чтобы не только далекие члены, в отдельности взятые, были малы, но и сумма далеких членов, взятых в любом количестве, должна быть мала! В этом смысле поучительно вернуться к гармоническому ряду и к неравенству (1), установленному для его членов. Хотя, общий член здесь и стремится к 0, но неравенство (2) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $m = n$ не выполняется ни при одном n, и гармонический ряд расходится!

Нужно сказать, однако, что проверка выполнения приведенного общего условия сходимости ряда в конкретных случаях обычно бывает затруднительна. Поэтому представляет интерес изучение класса случаев, когда вопрос решается с помощью более простых средств.

2. Абсолютная сходимость.

Мы видели в предыдущем параграфе, что в отношении положительных рядов сходимость, по большей части, устанавливается легко, благодаря наличию ряда удобных признаков. Поэтому естественно начать с тех случаев, когда вопрос о сходимости данного ряда приводится к вопросу о сходимости положительного ряда.

Если члены ряда не все положительны, но начиная с некоторого места становятся положительными, то отбросив достаточное количество начальных членов ряда, сведем дело к исследованию положительного ряда. Если члены ряда отрицательны или, по крайней мере, с некоторого места становятся отрицательными, то мы вернемся к уже рассмотренным случаям путем изменения знаков всех членов . Таким образом, существенно новым случаем будет тот, когда среди членов ряда есть бесконечное количество как положительных, так и отрицательных членов.

Теорема. Пусть дан ряд (A) с членами произвольных знаков. Если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (A^*)$$

составленный из абсолютных величин его членов, то и данный ряд также сходится.

Доказательство сразу получается из принципа сходимости: неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|$$

показывает, что если условие сходимости выполняется для ряда (A*), то оно тем более выполняется для ряда (A).

Можно рассуждать и иначе. Из положительных членов ряда (A), перенумеровав их по порядку, составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots; \qquad \text{(P)}$$

так же поступим с отрицательными членами и составим ряд из их абсолютных величин

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \ldots + q_k + \ldots \qquad \text{(Q)}$$

Сколько бы членов того или другого ряда ни взять, все они содержатся среди членов сходящегося ряда (A*), и для всех частичных сумм P_k и Q_m выполняются неравенства $P_k \le A^*,\ \ Q_m \le A^*,$

так что оба ряда (P) и (Q) сходятся; обозначим их суммы соответственно, через P и Q.

Если взять п членов ряда (A), то в их составе окажется к положительных и m отрицательных, так что $A_n = P_k - Q_m$

Здесь номера k и m зависят от n. Если в ряде (A) как положительных, так и отрицательных членов бесчисленное множество, то при $n \to \infty$ одновременно $k \to \infty$ и $m \to \infty$.

Переходя в этом равенстве к пределу, приходим снова к заключению о сходимости ряда (A), причем его сумма оказывается равной $A = P - Q.$ (3)

Можно сказать, что при сделанных предположениях сумма данного ряда равна разности между суммой ряда, составленного из одних положительных его членов, и суммой ряда, составленного из абсолютных величин отрицательных членов. Этим мы в последующем будем пользоваться.

Если ряд (A) сходится вместе с рядом (A*), составленным из абсолютных величин его членов, то про ряд (A) говорят, что он абсолютно сходится. По доказанной теореме, одной сходимости ряда (A*) уже достаточно для абсолютной сходимости ряда (A).

Как увидим ниже, возможны случаи, когда ряд (A) сходится, а ряд (A*) - нет. Тогда ряд (A) называют *неабсолютно сходящимся.*

Для установления абсолютной сходимости ряда (A) - к положительному ряду (A*) могут быть применены все признаки сходимости, изученные в выше. Но нужно быть осторожным с признаками расходимости: если даже ряд (A*) окажется расходящимся, то ряд (A) может все же сходиться (неабс олютно). Исключение представляют только признаки Коши и Даламбера, и именно потому, что когда они констатируют расходимость ряда (А*), то это значит, что общий член $|a_n|$ ряда (А*) не стремится к нулю, а тогда и a_n к нулю не стремится, так что и ряд (А) также расходится. Поэтому упомянутые признаки могут быть перефразированы применительно к произвольному ряду. Сделаем это, например, для признака Даламбера (который преимущественно и применяется на практике):

Признак Даламбера. Пусть для варианты $\mathfrak{D}_n = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ существует определенный предел: $\mathfrak{D}^* \lim \mathfrak{D}_n{}^*$,

тогда при $\mathfrak{D}^* < 1$ данный ряд (А) абсолютно сходится, а при $\mathfrak{D}^* > 1$ он расходится.

3. Степенной ряд, его промежуток сходимости.

Определение 1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots \quad (1) \text{ или } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2).$$

Степенной ряд (1) получается из ряда (2) простой подстановкой $x - x_0 = t$. Всякий степенной ряд обязательно сходится хотя бы в одной точке. Степенной ряд (1) сходится при $x = 0$, так как сводится при этом к своему начальному члену a_0.

Частичная сумма степенного ряда является многочленом, поэтому вычисление ее значения сводится к арифметическим операциям над значениями аргументов, числом x_0 и коэффициентами ряда. При $x_0 = 0$ степенной ряд принимает вид: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

Для сходимости степенного ряда существует признак Абеля

Теорема 1. Если степенной ряд (1) сходится в точке $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом значении x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

Если же в точке x_0 степенной ряд расходится, то он расходится и при любом значении x, удовлетворяющем условию $|x| > |x_0|$.

Определение 2. Число $R = \frac{1}{L}$, где $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ или $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(-R; R)$- интервалом сходимости.

Теорема 2. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ имеет радиус сходимости $R \neq 0$, то каково бы ни было положительное число $\rho < R$, ряд будет сходиться равномерно на интервале $(-\rho; \rho)$. Иными словами, степенной ряд сходится равномерно на любом интервале, лежащем внутри его промежутка сходимости.

Теорема 3. Сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ есть непрерывная функция на промежутке его сходимости.

Теорема 4. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ имеет радиус сходимости R, то на любом промежутке $(0; x) \in (-R; R)$ этот ряд можно почленно интегрировать, т.е. $\int f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$, где $f(x)$ - есть сумма ряда.

Теорема 5. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ имеет радиус сходимости R, то его можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости $(-R; R)$: $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, где $f(x)$ - есть сумма ряда.

Рассмотрим степенной ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$, (4)

представляющий собой как бы «бесконечный многочлен», расположенный по возрастающим степеням переменной x(a_0, a_1, a_2,... здесь обозначают постоянные коэффициенты). Выше мы не раз имели дело с такими степенными рядами.

Предложим теперь себе выяснить, какой вид имеет «область сходимости» степенного ряда, т. е. множество $X = \{x\}$ тех значений переменной, для которых ряд (4) сходится. Это послужит снова важным примером применения изложенного выше.

Лемма. Если ряд (4) сходится для значения $x=\bar{x}$ отличного от *0*, то он абсолютно сходится для любого значения x, удовлетворяющего неравенству: $|x|=|\bar{x}|$.

Из сходимости ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{x}^n = a_0 = a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \ldots + a_n\bar{x}^n + \ldots$ вытекает, что его общий член стремится к 0, а следовательно, - ограничен:

$$|a_n\bar{x}^n| \le M \quad (n=0,1,2,3,\ldots). \qquad (5)$$

Возьмем теперь любое х, для которого $|x|<|\bar{x}|$, и составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (6)$$

Так как: $\quad |a_n x^n| = |a_n\bar{x}^n|\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2 \le M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$

и члены ряда (6) оказываются меньшими соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии (со знаменателем $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$):

$$M + \cdot M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| + M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2 + \ldots + M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n + \ldots,$$

то, ряд (6) сходится.

При $x=0$ сходится, очевидно, всякий ряд (4). Но есть степенные ряды, которые - помимо этого - не сходятся ни при одном значении x. Примером такого «всюду расходящегося» ряда может служить ряд $\sum_{1}^{\infty} n!x^2$, как в этом легко убедиться с помощью признака Даламбера. Подобные ряды для нас не представляют интереса.

Предположим же, что для ряда (4) вообще существуют такие отличные от 0 значения $x=\bar{x}$, при которых он сходится, и рассмотрим множество $\{|\bar{x}|\}$. Это множество может оказаться либо ограниченным сверху, либо нет.

В последнем случае, какое бы значение x ни взять, необходимо найдется такое x, что $|x|<|\bar{x}|$, а тогда, по лемме, при взятом значении x ряд (4) абсолютно сходится. Ряд оказывается «всюду сходящимся».

Пусть теперь множество $\{|\overline{x}|\}$ сверху ограничено, и R будет его точная верхняя граница. Если, $|x| > \Re$ то сразу ясно, что при этом значении x ряд (4) расходится. Возьмем теперь любое x, для которого $|x| < \Re$. По определению точной границы, необходимо найдется такое $|\overline{x}|$, что $|x| < |\overline{x}| \le \Re$; а это, по лемме, снова влечет за собой абсолютную сходимость ряда (4).

Итак, в открытом промежутке ($-\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$) ряд (4) абсолютно сходится; для $x > \Re$ и $x > -\Re$ ряд заведомо расходится, и лишь о концах промежутка $x = \pm\Re$ общего утверждения сделать нельзя - там, смотря по случаю, может иметь место и сходимость, и расходимость. Поставленная нами задача решена.

Для каждого степенного ряда вида (4), если только он не является всюду расходящимся, «область сходимости» $\mathcal{X}$ представляет собой сплошной промежуток от $-\mathcal{R}$ до $\mathcal{R}$, со включением концов или нет; промежуток этот может быть и бесконечным. Внутри промежутка, к тому оке, ряд сходится абсолютно.

4. Знакопеременные ряды.

Рассмотрим ряды с членами произвольного знака или *знакопеременные.*

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, два соседних члена которого имеют противоположные знаки, называется *знакочередующимся рядом* и обозначается $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$.

Имеет место следующий *признак Лейбница* для сходимости знакочередующихся рядов:

Теорема 1 (Лейбница). Если модули членов знакочередующегося ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то этот ряд сходится. Модуль остатка такого ряда не превосходит модуля первого члена остатка ряда и имеет тот же знак, что этот член.

Пример 1. Ряд: $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + ...$ сходится при любом $\alpha > 0$, т.к. $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, причем $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных знакопеременных рядов.

Определение 2. Ряд называется *знакопеременным,* если среди его членов имеется бесконечно много как положительных, так и отрицательных, т.е. ряд вида $a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ...$

С каждым таким рядом связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 2. Если сходится ряд (А*): $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то первый ряд называют *условно сходящимся (или неабсолютно сходящимися).*

Теорема 3. Ряд, полученный из абсолютно сходящегося ряда (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой членов, также абсолютно сходится, причем имеет ту же сумму, что и сходящийся ряд.

Теорема 4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд, составленный из членов $a_k b_i$, взятых в любом порядке. При этом сумма такого ряда равна произведению сумм данных рядов.

Теорема 5. Если ряд (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то путем перестановки его членов можно получить ряд, имеющий любую, наперед заданную, сумму, а также расходящийся ряд.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда (А): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Решение. Для ряда (А*), составленного из абсолютных величин рассматриваемого ряда, общий член $|a_n| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Применяем к ряду (А*) признак Даламбера:

$$D_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} : \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2}{(2n)! (2n+1)\cdot(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)} = \frac{n+1}{4n+2}$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1.$$

Ряд (А) сходится абсолютно.

Знакопеременными называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки. Знакопеременный ряд удобнее записывать так, чтобы знаки членов были выявлены, например

$$c_1 - c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots (c_n > 0) \qquad (7)$$

По отношению к знакопеременным рядам имеет место следующая простая теорема.

Теорема Лейбница. Если члены знакопеременного ряда (7) монотонно убывают по абсолютной величине: $c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ и стремятся к нулю: $\lim c_n = 0$,то ряд сходится.

Доказательство. Частичную сумму четного порядка C_{2m} можно написать в виде:

$$c_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

то легко усмотреть, что C_{2m} остается сверху ограниченной:

$$C_{2m} < c_1$$

В таком случае, по теореме о монотонной варианте, при безграничном возрастании т частичная сумма C_{2m} имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} C_{2m} = C,$$

Переходя к частичной сумме нечетного порядка C_{2m+1}, имеем, очевидно, $C_{2m+1} = C_{2m} + C_{2m}$. Так как общий член стремится к нулю, то и

$$\lim_{n\to\infty} C_{2m+1} = C,$$

Отсюда следует, что ***С*** и будет суммой данного ряда.

Замечание. Мы видели, что частичные суммы четного порядка C_{2m} приближаются к сумме C ряда возрастая. Написав C_{2m-1} в виде

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

легко установить, что суммы нечетного порядка стремятся к C убывая. Таким образом, всегда $C_{2m}<C<C_{2m-1}$. В частности, можно утверждать, что $0<C<c_1$.

Это позволяет дать весьма простую и удобную оценку для остатка рассматриваемого ряда (который и сам представляет собою такой же знакопеременный ряд). Именно, для $\gamma_{2m}=c_{2m+1}-c_{2m+2}+...$, очевидно, имеем:

$$0<\gamma_{2m}<c_{2m+1}\ ,$$

наоборот, для $\gamma_{2m-1}=-c_{2m}+c_{2m+1}-...=-(c_{2m}-c_{2m+1}+...)$ будет: $\gamma_{2m-1}<0$, $|\gamma_{2m-1}|<c_{2m}$.

Таким образом, во всех случаях остаток ряда лейбницевского типа имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Это замечание часто используется при приближенных вычислениях

с помощью рядов.

Пример. Простейшими примерами рядов лейбницевского типа служат ряды

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

и

$$(\acute{a})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+...$$

Сходимость обоих вытекает из доказанной теоремы.

В то же время ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся: для ряда (а) это будет гармонический ряд, для ряда же

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}+...$, расходимость которого ясна из того, что его частичная

сумма $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_{n.}$

Таким образом, мы имеем неабсолютно сходящихся рядов.

5. Преобразование Абеля.

Часто приходится иметь дело с суммами парных произведений вида

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\ldots\alpha_n\beta_n \qquad (9)$$

Во многих случаях при этом оказывается полезным следующее элементарное преобразование, указанное Абелем (N. H. Abel).

Введем в рассмотрение суммы

$$B_1=\beta_1,\ \ B_2=\beta_1+\beta_2,\quad B_2=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ldots,$$

$$B_m=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m.$$

Тогда, выражая множители β_i,- через эти суммы,

$$\beta_1=B_1,\quad \beta_2=B_1+B_2,\ \ \beta_3=B_1+B_2+B_3,\ldots,$$

$$\beta_m=B_1+B_2+\ldots+B_m.$$

сумму S можно написать в виде

$$S=\alpha_1B_1+\alpha_2(B_2-B_1)+\alpha_3(B_3-B_2)+\ldots+\alpha_m(B_m-B_{m-1}).$$

Если раскрыть скобки и иначе сгруппировать члены, то и получим окончательную формулу

$$\begin{aligned}S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i&=(\alpha_i-\alpha_2)B_1+(\alpha_2-\alpha_3)B_2+\ldots\\ \ldots+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)B_{m-1}+\alpha_mB_m&=\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_mB_m\end{aligned} \qquad (10)$$

[Если переписать ее в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_m\beta_m-\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)B_i,$$

то станет ясно, что эта формула для конечных сумм является аналогом формулы интегрирования по частям для интегралов: дифференциал здесь заменен разностью, а интеграл - суммой.]

Основываясь на формуле (10), выведем теперь следующую оценку для сумм указанного вида:

Лемма. Если множители α_i не возрастают (или не убывают), а суммы B_i все ограничены по абсолютной величине числом L:

$$|B_i| \le L \quad (i = 1, 2, 3..., m),$$

то

$$|S_i| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Действительно, так как все разности в (10) одного знака, то

$$|S_i| = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L = L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Нетрудно видеть, что если множители α_i ,- не возрастают и положительны, то оценку можно упростить:

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le L \cdot \alpha_1.$$

Этими оценками мы будем ниже не раз пользоваться по разным поводам. Сейчас мы их применим к выводу критериев сходимости, более общих, чем установленный выше критерий Лейбница.

6. Признаки Абеля и Дирихле.

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n + ..., \qquad \text{(W)}$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - две последовательности вещественных чисел. Следующие предположения относительно каждой из них в отдельности обеспечивают сходимость этого ряда.

Признак Абеля. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ..., \qquad \text{(B)}$$

сходится, а числа ап образуют монотонную и ограниченную последовательность

$$(n = 1, 2, 3, ...),$$

то ряд (W) сходится.

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда (B) в совокупности ограничены:

$$|B_n| \le M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а числа a_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю:

$$\lim a_n = 0,$$

то ряд (W) сходится.

В обоих случаях для установления сходимости ряда (W) мы прибегнем к принципу сходимости. Рассмотрим поэтому сумму

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+1} b_{n+1};$$

она имеет вид (9), если положить $\alpha = a_{n+i}$, $\beta = b_{n+i}$. Попытаемся оценить эту сумму с помощью леммы.

При предположениях Абеля, по заданному ε>0 найдется такой

номер N, что при n >N неравенство

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

будет выполняться, каково бы ни было p (принцип сходимости). Следовательно, за число L, упоминавшееся в лемме, можно принять ε. Имеем тогда при $n>N$ и m=1, 2, 3, ...:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \le \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \le 3K \cdot \varepsilon .$$

что и доказывает сходимость ряда (W).

При предположении Дирихле, по заданному ε>0 найдется такой номер N, что при $n > N$ будет

$$|a_n| < \varepsilon$$

Кроме того, очевидно,

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \le 2M \,.$$

и можно в лемме положить $L=2M$. Тогда, при $n>N$ и $m= 1, 2, 3, ...$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_b\right| \le 2M \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \le 6M \cdot \varepsilon ,$$

и сходимость ряда (W) доказана.

Замечание. Признак Абеля вытекает из признака Дирихле. Ведь из предложений Абеля следует, что a_n имеет конечный предел a. Если переписать ряд (W) в виде суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n ,$$

то второй из них сходится по предположению, а к первому применим уже признак Дирихле.

§ 4. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ.

1. Сочетательное свойство.

Понятие суммы бесконечного ряда существенно отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых (рассматриваемого в арифметике и алгебре) тем, что включает в себя предельный переход. Хотя некоторые свойства обычных сумм переносятся и на суммы бесконечных рядов, но чаще всего лишь при выполнении определенных условий, которые и подлежат изучению. В иных же случаях привычные нам свойства сумм разительным образом нарушаются, так что, вообще, в этом вопросе надлежит соблюдать осторожность.

Рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad \text{(A)}$$

и станем объединять его члены произвольным образом в группы, не меняя при этом их расположения:

$$a_1 + ... + a_n , \quad a_{n_1+1} + ... + a_{n_2} + , ... ,$$

$$a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k} + , ... ,$$

Здесь $\{n_k\}$ есть некоторая, извлеченная из натурального ряда, частичная возрастающая последовательность номеров.

Теорема. Ряд, составленный из этих сумм:

$$(a_1+\ldots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots+(a_{n_{k-1}}+\ldots+a_{n_k})+\ldots \qquad (\tilde{A})$$

всегда сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд. Иными словами: сходящийся ряд обладает сочетательным свойством.

Действительно, последовательность частичных сумм нового ряда

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k, \ldots$$

есть не что иное, как частичная последовательность

$$\tilde{A}_{n_1}, \tilde{A}_{n_2}, \ldots, \tilde{A}_{n_k}, \ldots$$

сумм исходного ряда. Этим и доказывается наше утверждение.

Мы видим пока полную аналогию с обычными суммами; но эта аналогия нарушается, если мы попытаемся применять сочетательное свойство, так сказать, в обратном порядке. Если дан сходящийся ряд (A), члены которого каждый в отдельности представляют собой сумму конечного числа слагаемых, то, опустив скобки, мы получим новый ряд (A), который может оказаться и расходящимся.

Вот простые тому примеры: ряды

$$(1-1) + (1-1) + (1-1)+\ldots =0 + 0 + 0+\ldots =0$$

и

$$1-(1-1) - (1-1)-\ldots = 1-0-0-\ldots=1,$$

очевидно, сходятся, между тем как полученный из них опусканием скобок ряд

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

будет расходящимся.

Конечно, если опустив скобки мы получим сходящийся ряд (A), то его сумма будет такой, что и у ряда (A). Это вытекает из данного выше.

При некоторых условиях можно наперед гарантировать, что ряд (A) будет сходиться. Простейшим случаем этого рода является тот, когда все слагаемые в ($\tilde{\mathbf{A}}$) внутри одних и тех же скобок будут одного знака.

Действительно, тогда при изменении *n* от n_{k-i} до n_k частичная сумма A_n будет изменяться монотонно, следовательно, будет содержаться между $A_{n_{k-1}} = \tilde{A}_{k-1}$

и $A_{n_k} = A'_k$. При достаточно большом k эти последние суммы произвольно мало разнятся от суммы A ряда (A'), следовательно, то же справедливо и относительно суммы A_n при достаточно большом и, так что $A_n \to A'$.

2. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.

Пусть дан сходящийся ряд (А), имеющий сумму А. Переставив в нем члены произвольным образом, мы получим новый ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a`_k = a`_1 + a`_2 + \ldots + a`_k + \ldots \qquad (A`)$$

Каждый член a'_k этого ряда отождествляется с определенным членом a_{n_k} исходного ряда. Возникает вопрос, сходится ли ряд (А') и - в случае сходимости - будет ли его сумма равна сумме А исходного ряда. При рассмотрении этого вопроса нам придется провести резкое различие между абсолютно и неабсолютно сходящимися рядами.

Теорема. Если ряд (А) абсолютно сходится, то ряд (А'), полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму А, что и исходный ряд. Иными словами: абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.

(а) Проведем доказательство в два приема. Предположим сначала, что ряд (А) - положительный.

Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда (А').

Так как

$$a`_1 = a_{n_1},\ a`_2 = a_{n_2},\ \ldots,\ a`_k = a_{n_k},$$

то, взяв n' большим всех номеров $n_1, n_2, \ldots, n_k$, очевидно, будем иметь $A'_k \le A_{n'}$, а следовательно, и подавно

$$A`_k \le A.$$

В таком случае (А') будет сходящимся и его сумма А' не превзойдет А:

$$A' \le A.$$

Но и ряд (А) из (А') получается перестановкой членов, поэтому аналогично:

$$A \le A'.$$

Сопоставляя полученные соотношения, придем к требуемому равенству: A'=A.

(б) Пусть теперь (A) будет произвольный абсолютно сходящийся ряд. Так как сходящийся положительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (A^*)$$

по доказанному, при любой перестановке членов останется сходящимся, то по теореме сохранит при этом свою (абсолютную) сходимость и ряд (A).

В случае абсолютной сходимости ряда (A), его сумма выражается так:

$$A = P - Q,$$

где P и Q суть суммы положительных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \qquad (P)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \qquad (Q)$$

составленных, соответственно, из положительных и абсолютных величин отрицательных членов ряда (A).

Перестановка членов в ряде (A) вызовет перестановку членов и в этих рядах, но не отразится (по доказанному) на их суммах P и Q. Следовательно, и сумма ряда (A) останется прежней.

3. Случай неабсолютно сходящихся рядов.

Обратимся теперь к рассмотрению неабсолютно сходящихся рядов и установим, что они переместительным свойством не обладают: в каждом таком ряде надлежащей перестановкой членов можно изменить его сумму или даже вовсе нарушить сходимость.

Предположим, что ряд (A) сходится, но неабсолютно. Из сходимости следует, что $\lim a_n = 0$. Что же касается рядов (P) и (Q), тогда

$$\lim_{x\to\infty} p_k - 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} q_k - 0 \qquad (2)$$

но в данном случае они оба расходятся.

Действительно, имеют место равенства

$$A_n = P_k - Q_m, \quad A^*_n = P_k + Q_m, \qquad (3)$$

если k и m означают число положительных и отрицательных членов в составе первых n членов ряда (A). Подчеркнем, что из трех номеров n, k, m один может быть взят произвольно, а другие два по нему подбираются. Из сходимости одного из рядов (P) или (Q), ввиду первого из равенств (3), вытекла бы с необходимостью и сходимость другого, а сходимость обоих, ввиду второго из этих равенств, имела бы следствием сходимость ряда (A*) - вопреки предположению!

Докажем теперь следующую замечательную теорему, принадлежащую Риману:

Теорема(*Римана.)* Если ряд (A) неабсолютно сходится, то какое бы ни взять наперед число B (конечное или равное ± ∞), можно так переставить члены в этом ряде,чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно B.

Доказательство. Остановимся на случае конечного B. Заметим, прежде всего, что из расходимости рядов (P) и (Q) в , вытекает, что и все их остатки также расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места, можно набрать столько членов, чтобы сумма превзошла любое число.

Пользуясь этим замечанием, мы следующим образом произведем перестановку членов ряда (A). Сначала возьмем столько положительных членов нашего ряда (в том порядке, в каком они в нем расположены), чтобы их сумма превзошла число B:

$$p_1 + p_2 + ... + p_k > B.$$

Вслед за ними выпишем отрицательные члены (в том порядке, в каком они расположены в данном ряде), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше B:

$$p_1 + p_2 + ... + p_k - q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} < B$$

После этого снова поместим положительные члены (из числа оставшихся) так, чтобы было

$$p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - ... - q_{m_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_n} > B$$

Затем наберем столько отрицательных членов (из числа оставшихся), чтобы было

$$p_1+\ldots+p_{k_1}-q_1-\ldots-q_{m_1}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_n}-q_{m_2+1}-\ldots-q_{m_2}<B$$

и т. д. Процесс этот мы мыслим продолженным до бесконечности; очевидно, каждый член ряда (А), и притом со своим знаком, встретится на пределенном месте.

Если всякий раз, выписывая члены p или q, набирать их не больше, чем необходимо для осуществления требуемого неравенства, то уклонение от числа В в ту или другую сторону не превзойдет по абсолютной величине последнего написанного члена. Тогда из (2) ясно, что ряд

$$\begin{gathered}(p_1+\ldots+p_{k_1})-(q_1-\ldots-q_{m_1})+\ldots\\ \ldots+(p_{k_{i-1}+1}+\ldots+p_{k_i})-(q_{m_{i-1}+1}-\ldots-q_{m_i})+\ldots\end{gathered}$$

имеет своей суммой В. В силу замечания , это останется верным и после раскрытия скобок.

Если В = + ∞, то, взяв последовательность возрастающих до бесконечности чисел B_i можно было бы набор положительных чисел подчинить ребованию, чтобы суммы последовательно становились больше B_1, B_2, B_3 и т.д., а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем, очевидно, составился бы ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$.

Установленный результат подчеркивает тот факт, что неабсолютная сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем, как абсолютная сходимость основана на быстроте убывания этих членов — и от порядка их не зависит.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы убидели в первом параграфе были раскрыты основные понятиея о бесконечных рядах с постояннимии коэффицентами, а также теоремы и практические примеры для закрепления теоретических знаний. Затем во втором параграфе раскрываюця условия сходимочти положительных рядов, и основные теоремы сравнения рядов, признаки Коши, Даламбера, Раабе, Куммера, Бертран, Гаусса, Ермакова и также интегральный признак Коши. При чём, в этом параграфе так же приводятся несколько решение примеров. Далее, в третьи параграфе раскрываюця понятия об обсолютной сходимости числовых рядов. Был рассмотрен степенной и знакочередующийся ряд с их сбойствами. В заключитеиьноси параграфе приводятся своиства сходящиая числовах рядов сочетательное и переместительное свойства обсолютно сходящихся рядов.

Таким образом мы видем,что бесконечных ряды с постоянными коэффицентами играют важнкю роль в математике. В данной работе были раскрытии основные понятия, свойства и теореми числовых рядов с постоянными коэффицентами, а так же практическое применение в решении задач и примеров. Числовые ряды, состояии из суммы посдовательностей отвечают ны многие вопросы, например, определение суммы рядов, сходимость или расходимость рядов, изучение характера поведения решения данной поставленной задачи с помощью рядов.

ЛИТЕРАТУРА

Зорич В.А.

1. Математический анализ. М.-1961 г

Ильвин В.А.,Садовничий В.А.,Сендов Б.Х.

2. Математический анализ. М.-1961 г

Кудрявцев Л.Л.

3. Курс Математи тического анализа.М.1981г,I-II части.

Дедонье Л.

4. Осноы современного анализа. М.1964г

Фихтенгольц Г.М.

5. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.1970г. I-III том.

Из интернета

Кушнир Таисья Ивановна

6. Методические рекомендации и задания для самостоятельной работы студентов по теме «Ряды»