МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-математический факультет

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Студентки IV курса группы № 08.404 р
по направлению «Общей математики»

ТЕШАБОЕВОЙ ДИЛНОЗЫ ХАСАНБОЕВНЫ

на тему: «***Булева структура и ее модели***»

Руководитель: физика-математика фанлари номзоди, доцент

Азизов Э.Ю.

Фергана 2012 г.

Выпускная квалификационная работа обсуждена и представлена к защите на заседании кафедры общей математики протокол №______

___________ 20__года .

Заведующий кафедрой Каримов Ш.Т.

Рецензенты: 1.

2.

П Л А Н

Введение

По инициативе президента И.А. Каримова в 1997 году было принято национальная программа образования. В чем говорились.

Реализуемые в стране реформы по формированию устойчивой и эффективной экономики в настоящее время дают свои положительные результаты.

Тщательная разработка руководителем государства Исломом Каримовым стратегия социально-экономического развития, точное и правильное определение путей реализации целей и задач экономических реформ создали предположены для достижения всех результатов на пути к главной цели.

Научно-техническая революция наших дней, связанная с созданием электронно-вычислительных машин, цифровой технологии, и широчайшей математизацией знания, не только расширила круг потребителей математики, но и вызвала новых математических направлений. При этом особенно бросается в глаза рост значение теории вероятностей и математической логики. Обе эти теории базируются на одной и той же аксиоматической системе: на алгебре (или структуре) Буля.

В нашей работе рассматриваем системы аксиом булевой структуры. На конкретных примерах излагаем общую схему создания математических теорий и приложений этой теории к различным задачам. Главное место в этой работе занимает алгебра высказываний, являющаяся фундаментом математической логики. В работе изложение сопровождается большим числом примеров.

Предлагаемая выпускная квалификационная работа состоит из четырех параграфов. В первом параграфе излагается определение булевой структуры и приводится основные аксиомы алгебры Буля. В основном, целью этого параграфа является упрощением систему аксиом булевой алгебры. Во второй параграфе рассматриваются одно из важных понятий булевой структуры – булевы многочлены и излагаются их свойства. В третьем параграфе исследуются иные системы аксиом булевой структуры и тем самым определяются некоторые операции алгебры Буля, как например, операция Шеффера. В четвертом параграфе рассматривается понятие решетки и изучается связь между понятиями булевой структуры и решеток.

Данную работу могут использовать специалисты интересующиеся вопросами информационной технологии, информационной безопасности и математической логики.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Алгебра множеств во много отлична от известных нам ранее алгебраических систем. Важность этой новой системы заставляет дать ей специальное название и рассматривать общие свойства алгебраических образований со сходными свойствами. По имени математика, впервые рассмотревшего алгебраические системы, подобные алгебре множеств, все эти системы обычно называют **алгебрами Буля**; мы в этой работе чаще будем употреблять в том же смысле термин булева структура, имея в виду, что речь здесь идет об определенной математической структуре, задаваемой свойственным ей набором аксиом.

Итак, булевой структурой называется структура

$$\boldsymbol{B} =< \mathfrak{B};\ +, \cdot, ^{-}, \supset >, \qquad (1.1)$$

где

$$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \ldots;\ \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota}\}; \qquad (1.1')$$

другими словами, множество элементов $\mathfrak{B}$, в котором выделены два «особых» элемента о и ι и определены две бинарные операции: + «сложение») и $\cdot$ («умножение»), одна унарная операция - («черта») и бинарное отношение ⊃ между элементами, связывающее некоторые (не обязательно любые) пары элементов, причем выполняются следующие правила (аксиомы):

А. *Свойства сложения* **Б.** *Свойства умножения*

а) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, б) $\alpha\beta = \beta\alpha$ (I)

(коммутативные законы для сложения и умножения);

а) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, б) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (II)

(Ассоциативные законы);

а) $\alpha + \alpha = \alpha$, б) $\alpha\alpha = \alpha$ (VI)

(идемпотентные законы).

В. *Правила, связывающие сложение и умножение*

а) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, б) $\alpha\beta + \gamma = (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)$ (III)

(дистрибутивные законы);

а) $\alpha + \alpha\beta = \alpha$, б) $\alpha(\alpha + \beta) = \alpha$ (VII)

(законы поглощения).

Г. *Свойства элементов* **о** *и* **ι**

а) $\alpha + o = \alpha$, б) $\alpha\iota = \alpha$; (IV)

а) $\alpha + \iota = \iota$, б) $\alpha o = o$. (V)

Е. Правила, связ Д. Свойства операции - («черта»)

$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ (IX)

(инволютивность операции -);

а) $\bar{\iota} = o$, б) $\bar{o} = \iota$. (X)

Е. Правило связывающие операции $\bar{\ }$, +, и $\cdot$

а) $\alpha + \bar{\alpha} = \iota$, б) $\alpha\bar{\alpha} = o$; (VIII)

а) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, б) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ (XI)

(правила де Моргана).

Ж. Свойства отношения $\supset$

$\alpha \supset \alpha$ (XII)

(рефлексивность);

если $\alpha \supset \beta$ и $\beta \supset \gamma$, то $\alpha \supset \gamma$ (XIII)

(транзитивность);

если $\alpha \supset \beta$ и $\beta \supset \alpha$, то $\alpha = \beta$ (XIV)

(антисимметричность);

а) $i \supset \alpha$, б) $\alpha \supset 0$. (XV)

З. Связь отношения $\supset$ со сложением и умножением

а) $\alpha + \beta \supset \alpha$, б) $\alpha \supset \alpha\beta$; (XVI)

если $\alpha \supset \beta$, то а) $\alpha + \beta = \alpha$, б) $\alpha\beta = \beta$; (XVII) а) если $\alpha \supset \beta$ и $\alpha \supset \gamma$, то $\alpha \supset \beta + \gamma$,

б) если $\beta \supset \alpha$ и $\gamma \supset \alpha$, то $\beta\gamma \supset \alpha$; (XIX)

если $\alpha \supset \beta$, то а) $\alpha + \gamma \supset \beta + \gamma$, б) $\alpha\gamma \supset \beta\gamma$; (XX)

а) $\alpha + \beta = \max[\alpha, \beta]$, б) $\alpha\beta = min\ [\alpha,\beta]$ XVIII)

И. правило, связывающее отношение $\supset$ с операцией - ,

если $\alpha \supset \beta$, то $\bar{\beta} \supset \bar{\alpha}$. (XXI)

[Во всех аксиомах α,β, γ - произвольные элементы множества $\mathfrak{B}$].

Иногда в число определяющих булеву структуру аксиом вводят еще неравенство о$\neq$ι. Ясно, что если о = ι, то в силу (IVб) и (Vб) для каждого элемента α множества $\mathfrak{B}$ имеем $\alpha = o$, т.е . наша структура сводится к единственному элементу ω (являющемуся для нее одновременно и нулевым, и единичным элементом), причем, конечно, $\omega + \omega = \omega\omega = \bar{\omega} = \omega$ (а как еще можно определить тут элементы $\omega + \omega$, $\omega\omega$ и $\bar{\omega}$?) Разумеется, при этом у нас будут выполняться все аксиомы (I) - (XXI), поскольку и левая, и правая части любого равенства или неравенства неизбежно сведутся к единственному элементу ω нашей структуры, а в силу свойств отношений = и ⊃ мы имеем $\omega = \omega$ и $\omega \supset \omega$. Ясно, что эта «тривиальная» структура Буля не представляет ни малейшего интереса, и поэтому ее стремятся исключить из числа рассматриваемых систем. Мы, однако, предпочтем просто запомнить, что равенство о = ι совместимо с аксиомами булевой структуры, но лишает эту структуру какого бы, то, ни было содержательного смысла, т.е. что внимания заслуживают исключительно структуры (1), для которых $\mathbf{o} \neq \mathbf{\iota}$ (и множество $\mathfrak{B}$ содержит более одного элемента).

Ясно, что характеризующие булеву структуру (1) основные операции +, $\cdot$ и - и основное отношение $\supset$ никакого содержательного (конструктивного) определения (или описания) не имеют: косвенным (дескриптивным) их определением являются свойства (I) – (XXI), выполняющиеся для рассматриваемых операций и отношения. Такое определение структуры (I) является, конечно, довольно громоздким: 4 типа основных отношений между элементами множества $\mathfrak{B}$; 37 аксиом. Впрочем, впоследствии мы увидим, что громоздкость определения булевой структуры частично является фиктивной – она связана с тем, что мы, не мудря, включили в число аксиом все известные нам свойства алгебры множеств, просто не задумываясь над тем, какие из них являются следствиями других.

Из определения, группы как структуры

$$\boldsymbol{G} =< \mathcal{G}; \cdot >, \tag{1.1''}$$

задаваемой тремя свойствами группового умножения – ассоциативностью, существованием единичного элемента e и существованием обратного g^{-1} для каждого $\mathrm{g} \in \mathcal{G}$ – вытекают, как известно, ряд других присущих всем группам свойств. Например, единственность единичного элемента e или возможность деления одного элемента a на другой элемент b (т.е. существование такого элемента x, что $xb = a$; этот элемент равен ab^{1-}). Аналогично этому из определения структуры Буля вытекают многие другие ее свойства. Мы здесь остановимся только на двух примерах подобного рода, первый из которых при всей своей простоте достаточно принципиален, а второй понадобится нам впоследствии.

Покажем, прежде всего, что определенные равенствами (IV) элементы $\mathbf{o}$ и $\boldsymbol{\iota}$ единственны, т.е. что если наряду с $\mathbf{o}$ существует еще один элемент $\mathbf{o}_1$, такой, что

$$\alpha + \mathrm{o}_1 = \alpha \text{ для всех } \alpha \in \mathfrak{B}, \tag{*}$$

то $\mathrm{o}_1 = o$; аналогично, если

$$\alpha\iota_1 = \alpha \text{ для всех } \alpha \in \mathfrak{B}, \tag{**}$$

то обязательно $\iota_1 = \iota$. ◀ В самом деле, так как по (IVa) и (*)

$\mathrm{o}_1 + o = \mathrm{o}_1$ и $\mathrm{o} + \mathrm{o}_1 = o$,

то в силу (1a) $\mathrm{o}_1 = \mathrm{o}$. Точно так же, поскольку из (IVб) и (**) имеем

$\iota_1\iota = \iota_1$ и $\iota\iota_1 = \iota$,

то по (IIб) $\iota_1 = \iota$.▶

Докажем теперь, что если $\alpha \supset \beta$, то существует *прямая разность* $\alpha - \beta$, т.е. такой элемент ξ, что

$\alpha = \beta + \xi$ и $\beta\xi = o$.

◀ Мы утверждаем, что

$\xi = \alpha - \beta = \alpha\bar{\beta}$.

В самом деле,

$$\beta + \xi = \beta + \alpha\bar{\beta} = \alpha\beta + \alpha\bar{\beta} = \alpha(\beta + \bar{\beta}) = \alpha\iota = \alpha$$

(см. аксиомы (XVIIб), (IIIа) и (Iб), (VIIIа), (IVб)) и

$$\beta\xi = \beta(\alpha\bar{\beta}) = \alpha(\beta\bar{\beta}) = \alpha o = o$$

((Iб) и (IIб), (VIII б), (Vб)).▶

Для каждого определения математического объекта, состоящего в указании системы аксиом, которые должны иметь место, сразу встает вопрос о непротиворечивости, полноте и независимости выбранной системы аксиом. Система аксиом называется непротиворечивой, если из этих аксиом нельзя сделать два взаимно исключающих друг друга вывода, другими словами, если в результате развития дедуктивной системы базирующейся на этой системе аксиом, мы никогда не придем к противоречию. Ясно, что внимания заслуживают только непротиворечивые системы аксиом. Непротиворечивость системы аксиом устанавливается построением модели, или интерпретации соответствующей аксиоматики, т. е. системы каких-то известных ранее объектов, между которыми можно установить отношения, подчиняющиеся всем требованиям, содержащимся в наших аксиомах. В случае булевой структуры такая модель доставляется системой множеств, где под суммой множеств их объединение, под произведением множеств – их пересечение, под элементами **o** и **ι** – пустое множество и универсальное множество, под унарной операцией «черта» - образование множества, составленного из всех элементов универсального множества, не принадлежащих данному множеству, и соотношение $\supset$ означает принадлежность одного множества другому. Эта модель доказывает, что выписанная выше система аксиом, определяющих *булеву* структуру, непротиворечива.

Система аксиом называется *полной*, если она допускает, лишь одну – единственную реализацию, точнее, если любые две модели или интерпретации этой системы аксиом по существу совпадают, изоморфны. Две модели аксиоматической системы называются *изоморфными*, если между образующими эти модели элементами можно установить взаимно-однозначное (биективное) соответствие, причем так, что каждому отношению между элементами первой модели отвечает такое же отношение между отвечающими им элементами второй модели. Другими словами, две изоморфные модели представляют собой один и тот же математический объект, только описанный на разных языках: так, изоморфны, скажем, множество векторов трехмерного пространства и множество троек чисел – координат этих векторов. Ясно, что аксиоматика алгебры Буля является *неполной*: ведь уже рассмотренные выше две модели этой аксиоматики – совокупность всевозможных множеств шахматных фигур и совокупность всевозможных множеств целых чисел – не изоморфны (ибо совокупность множеств шахматных фигур конечна, а совокупность множеств целых чисел бесконечна, и поэтому между этими двумя совокупностями множеств нельзя установить взаимно-однозначного соответствия).

Наконец, система аксиом называется *независимой*, если ни одну из аксиом этой системы нельзя вывести из других аксиом, т.е. доказать как теорему, базируясь на всех остальных аксиомах системы. Конечно, выписанная выше система аксиом алгебры Буля является *зависимой*. Так, мы уже отмечали, что идемпотентные законы (VI) является непосредственными следствиями условий (XVII) и правила (XII), а законы поглощения (VII) – следствиями тех же правил (XVII) и соотношений (XVI); поэтому нет никакой необходимости включать равенства (VI) и (VII) в систему аксиом. Аналогично отмечалось, что (XVIII а) есть не что иное, как объединение соотношений (XVIa) и (XVIIIб) – объединение (XVIб) и (XIXб). Таким образом, в список аксиом достаточно включить законы (XVIII), после чего как, (XVI) так и (XIX) станут не нужны.

Мы указывали также, что правила де Моргана (XI) и соотношения (X), (IX) и (XXI) позволяют доказать принцип двойственности, используя который можно вывести правила (Iб) – (VIIIб) и (XVб) - (XXб) из правил (Ia) – (VIIIa) и (XVa) - (XXa); поэтому первые 14 правил следует считать не аксиомами, а теоремами, поскольку их справедливость следует из остальных правил. Нетрудно обнаружить и ряд других зависимостей между аксиомами (I) – (XXI).

Остановимся подробнее на вопросе о зависимостях между отдельными аксиомами, фигурирующими в определении булевой структуры. Заметим, прежде всего, что отношение $\alpha \supset \beta$ можно не вводить в число первоначальных, неопределяемых отношений, так как его можно определить условиями (XVII):

$$\alpha + \beta = \alpha \text{ или } \alpha\beta = \beta.$$

◄ Эти последние два условия *равносильны*, что следует из того, что каждое из них эквивалентно условию $\bar{\alpha}\beta = o$. В самом деле, если $\alpha + \beta = \alpha$,

то $\bar{\alpha}(\alpha + \beta) = \bar{\alpha}\alpha = o$; но

$$\bar{\alpha}(\alpha + \beta) \underset{(\text{IIIa})}{=} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}\beta \underset{(\text{VIIIб})}{=} o + \bar{\alpha}\beta \underset{(\text{IV}a)}{=} \bar{\alpha}\beta.$$

Напротив, если $\bar{\alpha}\beta = o$, то $\bar{\alpha}\beta + \alpha = \alpha$; но

$$\bar{\alpha}\beta + \alpha \underset{(\text{IIIб})}{=} (\bar{\alpha} + \alpha)(\beta + \alpha) \underset{(\text{VIIIa})}{=} \iota(\alpha + \beta) \underset{(\text{IVб})}{=} \alpha + \beta.$$

Аналогично этому, если $\alpha\beta = \beta$, то $\bar{\alpha}\beta = \bar{\alpha}(\alpha\beta)$; но

$$\bar{\alpha}\,(\alpha\beta) \underset{(\text{IIб})}{=} (\overline{\alpha\alpha})\beta \underset{(\text{VIIIб})}{=} o\beta \underset{(\text{Va})}{=} o.$$

Обратно: если $\bar{\alpha}\beta = o$, то $\alpha\beta + \bar{\alpha}\beta = \alpha\beta$; но

$$\alpha\beta + \bar{\alpha}\beta \underset{(\text{IIIa})}{=} (\alpha + \bar{\alpha})\beta \underset{(\text{VIIIa})}{=} \iota\beta \underset{(\text{IVб})}{=} \cdot\beta.$$

[Заметим, что в процессе доказательства мы использовали коммутативность сложения и умножения.]►

Далее, из предложенного определения отношения ⊃ вытекают все его свойств (XII) – (XVI), (XVIII) –(XXI).

◄ В самом деле,

так как $\alpha+\alpha=\alpha$, то $\alpha\supset\alpha$, что доказывает (XII);

если $\alpha+\beta=\alpha$ и $\beta+\gamma=\beta$, то

$\alpha+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma\underset{(\mathrm{II}a)}{=}\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta=\alpha$, *что доказывает* (XIII);

если $\alpha+\beta=\alpha$ и $\beta+\alpha=\beta$, то в силу (Ia) $\alpha=\beta$, что доказывает (XIV)

так как в силу (Va) $\iota+\alpha=\iota$, то $\iota\supset\alpha$, что доказывает (XVa);

так как в силу (IVa) $\alpha+o=\alpha$, то $\alpha\supset o$, что доказывает (XVб);

$(\alpha+\beta)+\alpha\underset{(\mathrm{Ia,IIa})}{=}(\alpha+\alpha)+\beta\underset{(\mathrm{VIa})}{=}\alpha+\beta$, что доказывает (XVIa);

$\alpha(\alpha\beta)\underset{(\mathrm{II}б)}{=}(\alpha\alpha)\beta=\alpha\beta$, что доказывает (XVIб);

если $\alpha+\beta=\alpha$, то $(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma))\underset{(\mathrm{I}б,\mathrm{II}б)}{=}(\alpha+\beta)+(\gamma+\gamma)(\underset{(\mathrm{II}б)}{=}\alpha+\gamma$

что доказывает (XXa);

если $\alpha\beta=\beta$, то $(\alpha\gamma)(\beta\gamma)\underset{(\mathrm{I}б,\mathrm{II}б)}{=}(\alpha\beta)(\gamma\gamma)\underset{(\mathrm{VI}б)}{=}\beta\gamma$, что доказывает (XXб);

если $\mu+\alpha=\mu$ и $\mu+\beta=\mu$, то

$\mu+(\alpha+\beta)\underset{(\mathrm{VIa})}{=}(\mu+\mu)+(\alpha+\beta)\underset{(\mathrm{Ia,IIa})}{=}(\mu+\alpha)++(\mu+\beta)=\mu+\mu\underset{(\mathrm{VIa})}{=}\mu$,

что совместно с (XVIa) и (Ia) доказывает (XVIIIa) (а значит, и (XIXa));

если $\mu\alpha=\mu$ и $\mu\beta=\mu$, то $\mu(\alpha\beta)\underset{(\mathrm{VI}б)}{=}(\mu\mu)(\alpha\beta)\underset{(\mathrm{I}б,\mathrm{II}б)}{=}(\mu\alpha)(\mu\beta)=\mu\mu\underset{(\mathrm{VI}б)}{=}\mu$,

что совместно с (XVIб) и (Iб) доказывает (XVIIIб) и (XIXб);

если $\alpha+\beta=\alpha$, то, в силу (XIa), $\bar\alpha\bar\beta=\bar\alpha$, что доказывает (XXI). ►

Таким образом, можно исключить из числа основных (неопределяемых) отношений структуры B отношение ⊃, а из числа характеризующих эту структуру аксиом – аксиомы $(XII) - (XXI)$. [Аксиомы (XVII) становятся теперь определениями, а остальные аксиомы – теоремами.]

Далее потребуем, чтобы *для каждого элемента* $\alpha \in \mathfrak{B}$ *существовал такой элемент* $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}$, *что имеют место условия* (VIII). Такой элемент может быть только один. ◄ Действительно, если

$\alpha + \alpha = \iota,\ \alpha\bar{\alpha} = o$ и $\alpha + \bar{\alpha}_1 = \iota,\ \alpha\bar{\alpha}_1 = o$,

то

$$\bar{\alpha}_1 \underset{(IVб)}{=} \bar{\alpha}_1\iota = \alpha_1(\alpha + \bar{\alpha}) \underset{(IIIa)}{=} \bar{\alpha}_1\alpha + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha} = o + \bar{\alpha}_1\alpha \underset{(IVa)}{=} \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}$$

(здесь также попутно используется коммутативность сложения и умножения) и

$$\bar{\alpha} \underset{(IVб)}{=} \bar{\alpha}\iota = \bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}_1) \underset{(IIIa)}{=} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1 = o + \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1 \underset{(IVa)}{=} \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1,$$

Откуда в силу коммутативности умножения следует, что $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$. ► Поэтому далее можно принять условия (VIII) за определение операции - .

Очень важно, что из (VIII) следует все остальные свойства $(IX) - (XI)$ операции - . ◄ В самом деле,

условия (VIII) симметричны относительно α и $\bar{\alpha}$, откуда, а следует (IX);

в силу (V) $o + \iota = \iota$ и $o\iota = o$, откуда следует (X);

$$(\alpha + \beta) + \bar{\alpha}\bar{\beta} \underset{(IIIб)}{=} \left((\alpha + \beta) + \bar{\alpha}\right)\left((\alpha + \beta) + \bar{\beta}\right) \underset{(IIa)}{=} \left((\alpha + \bar{\alpha}) + \beta\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\alpha + \left(\beta + \bar{\beta}\right)\right) \underset{(VIIIa)}{=} = (\iota + \beta)(\alpha + \iota) \underset{(Va)}{=} \iota\iota \underset{(VIб)}{=} \iota$$

и

$$(\alpha + \beta)\left(\bar{\alpha}\bar{\beta}\right) \underset{(IIIa)}{=} \alpha\left(\bar{\alpha}\bar{\beta}\right) + \beta\left(\bar{\alpha}\bar{\beta}\right) \underset{(IIб)}{=} (\alpha\bar{\alpha})\bar{\beta} + \bar{\alpha}\left(\bar{\beta}\beta\right) \underset{(VIIIб)}{=} o\beta + \bar{\alpha}o \underset{(Vб)}{=}$$
$$= o + o \underset{(VIa)}{=} o$$

(здесь также используются коммутативные законы), откуда и вытекает (XIa). [$(XIб)$ вытекает из (XIa) и (IX): достаточно изменить обозначения в равенстве (XIa), заменив α на $\bar{\alpha}$ и β на $\bar{\beta}$.] ►

Таким образом, мы можем исключить из числа основных операций структуры B унарную операцию - , сохранив в числе аксиом требование разрешимости для каждого заданного $\alpha \in \mathfrak{B}$ уравнений (VIII), в которых $\bar{\alpha}$ считается неизвестным, после чего из системы аксиом исключаются аксиомы (VIII) $-$(XI).

Далее, имея уже соотношения (VIII), мы сразу получаем (V)

◄ $\alpha + \iota \underset{(\text{VIIIa})}{=} \alpha + (\alpha + \bar{\alpha}) \underset{(\text{IIa})}{=} (\alpha + \alpha) + \bar{\alpha} \underset{(\text{VIa})}{=} \alpha + \bar{\alpha} \underset{(\text{VIIIa})}{=} \iota$;

$\alpha o \underset{(\text{VIIIб})}{=} \alpha(\alpha\bar{\alpha}) \underset{(\text{IIб})}{=} (\alpha\alpha)\bar{\alpha} \underset{(\text{VIб})}{=} \alpha\bar{\alpha} \underset{(\text{VIIIб})}{=} o$. ►

Не сложнее доказываются идемпотентные законы (VI) и законы поглощения (VII):

◄ $\alpha + \alpha \underset{(\text{IVб})}{=} (\alpha + \alpha)\iota \underset{(\text{VIIIa})}{=} (\alpha + \alpha)(\alpha + \bar{\alpha}) \underset{(\text{IIIб})}{=} \alpha + \alpha\bar{\alpha} \underset{(\text{VIIIб})}{=} \alpha + o \underset{(\text{IVa})}{=} \alpha$

и

$\alpha\alpha \underset{(\text{IVa})}{=} \alpha\alpha + o \underset{(\text{VIIIб})}{=} \alpha\alpha + \alpha\bar{\alpha} \underset{(\text{IIIa})}{=} \alpha(\alpha + \bar{\alpha}) \underset{(\text{VIIIa})}{=} \alpha\iota \underset{(\text{IVб})}{=} \alpha$;

$\left(\alpha + \alpha\beta \underset{(\text{IVб})}{=} \alpha\iota + \alpha\beta \underset{(\text{IIIa})}{=} \alpha\iota + \beta\right) \underset{(\text{Va})}{=} \alpha\iota \underset{(\text{IVб})}{=} \alpha$

и

$\alpha(\alpha + \beta) \underset{(\text{IIIa})}{=} \alpha\alpha + \alpha\beta \underset{(\text{VIa})}{=} \alpha + \alpha\beta \underset{(\text{VIIa})}{=} \alpha$

(заметьте, что мы каждым раз ссылаемся лишь на соотношения, справедливость которых нами принимается или уже доказана!) ►

Наконец, также и ассоциативные законы (II), можно вывести из других аксиом, хотя это и требует чуть больших усилий. ◄ Обозначим

$(\alpha + \beta) + \gamma = \xi$; $\alpha + (\beta + \gamma) = \eta$

И докажем, что $\xi = \eta$. Для этого составим произведения $\alpha\xi$ и $\alpha\eta$:

$\alpha\xi = \alpha\big((\alpha + \beta) + \gamma\big) \underset{(\text{IIIa})}{=} \alpha(\alpha + \beta) + \alpha\gamma \underset{(\text{VIIб})}{=} \alpha + \alpha\gamma \underset{(\text{VIIa})}{=} \alpha$

и

$\alpha\eta = \alpha\big(\alpha + (\beta + \gamma)\big) \underset{(\text{VIa})}{=} (\alpha + \alpha)\big(\alpha + (\beta + \gamma)\big) \underset{(\text{IIIб})}{=} \alpha + \alpha(\beta + \gamma) \underset{(\text{VIIa})}{=} \alpha$

(ясно, что в (VIIa) можно заменить β на $\beta + \gamma$).

Далее найдем $\bar{\alpha}\xi$ и $\bar{\alpha}\eta$:

$$\bar{\alpha}\xi = \bar{\alpha}\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) \underset{(\text{IIIa})}{=} \bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\alpha}\gamma \underset{(\text{IIIa})}{=} (\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta)+\bar{\alpha}\gamma \underset{(\text{VIIIб})}{=}$$

$$= (\mathrm{o}+\bar{\alpha}\beta)+\bar{\alpha}\gamma \underset{(\text{IVa})}{=} \bar{\alpha}\beta+\bar{\alpha}\gamma \underset{(\text{IIIa})}{=} \bar{\alpha}(\beta+\gamma)$$

и

$$\bar{\alpha}\eta = \bar{\alpha}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) \underset{(\text{IIIa})}{=} \bar{\alpha}\alpha+\bar{\alpha}(\beta+\gamma) \underset{(\text{VIIIб})}{=} \mathrm{o}+\bar{\alpha}(\beta+\gamma) \underset{(\text{IVa})}{=} \bar{\alpha}(\beta+\gamma).$$

Таким образом, мы имеем

$\alpha\xi = \alpha\eta$ и $\bar{\alpha}\xi = \bar{\alpha}\eta$,

откуда следует

$$\xi \underset{(\text{IVб})}{=} \iota\xi \underset{(\text{VIIIa})}{=} (\alpha+\bar{\alpha})\xi \underset{(\text{IIIa})}{=} \alpha\xi+\bar{\alpha}\xi = \alpha\eta+\bar{\alpha}\eta \underset{(\text{IIIa})}{=} (\alpha+\bar{\alpha})\eta \underset{(\text{VIIIa})}{=} \iota\eta \underset{(\text{IVб})}{=} \eta.$$

что и требовалось доказать. После этого справедливость (IIб) может быть выведена из (IIa) стандартным приемом (принцип двойственности I): если

$\xi_1 = (\alpha\beta)\gamma$ и $\eta_1 = \alpha(\beta\gamma)$,

то

$$\bar{\xi}_1 = \overline{(\alpha\beta)\gamma} = \overline{\alpha\beta}+\bar{\gamma} = (\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\bar{\gamma}$$

и

$$\bar{\eta}_1 = \overline{\alpha(\beta\gamma)} = \bar{\alpha}+\overline{\beta\gamma} = \bar{\alpha}+(\bar{\beta}+\bar{\gamma}),$$

откуда в силу (IIa) $\bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1$. А теперь имеем

$$\xi_1 = \overline{(\bar{\xi}_1)} = \overline{(\bar{\eta}_1)} = \eta_1,$$

что и завершает доказательство ассоциативных законов. ►

Итак, правила (II), (V), (VI) и (VII) тоже можно исключить из числа аксиом булевой структуры.

Окончательно мы приходим к следующему определению:

Булевой структурой называется структура

$$\mathbf{B} = <\mathfrak{B};\ +,\ \cdot>,$$

где действующие в множестве $\mathfrak{B} = \{\alpha,\beta,\gamma,\dots;\mathrm{o},\iota\}$ бинарные операции + и · коммутативны:

$Б_1 : \alpha+\beta = \beta+\alpha,\ \ Б_1 : \alpha\beta = \beta\alpha$

и дистрибутивны одна относительно другой:

Б3 : $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, Б4 : $\alpha+\beta\gamma=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$;

далее существуют два таких элемента о, $\iota \in \mathfrak{B}$, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{B}$

Б5 : $o+\alpha=\alpha$, Б6 : $\iota\alpha=\alpha$;

Наконец, для каждого $\alpha \in \mathfrak{B}$ существует такой элемент $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}$, что

$Б_7$: $\alpha+\bar{\alpha}=\iota$, $Б_8$: $\alpha\bar{\alpha}=o$;

(в аксиомах $Б_{1\text{-}4}$, разумеется, как всегда α,β,γ - произвольные элементы множества $\mathfrak{B}$; также и в Б5-8 специально отмечается, что элемент $\alpha \in \mathfrak{B}$ – любой). При этом из Б1-8 вытекают (при оговоренном выше определении отношения $\supset$ и задаваемой Б7,8 операции -) все 37 предложений (I) – (XXI), так что новое определение структуры **B** вполне равносильно первому ее определению.

Бросается в глаза «самодвойственный» характер аксиом $Б_{1\text{-}8}$ (как, впрочем, и первоначальных аксиом (I) – (XXI)): если заменить в этих аксиомах + на $\cdot$ и наоборот, ι на о и наоборот (и $\supset$ на $\subset$ и наоборот, а операцию - сохранить всюду, где она встречается), то каждая аксиома булевой структуры переходит в новую, также справедливую (выше мы специально выписали рядом двойственные друг другу аксиомы – $Б_1$ и $Б_2$ и т.д.). А так как каждая «булева теорема» (теорема теории булевых структур) выводится из аксиом, то отсюда следует справедливость в теории булевых структур **принципа двойственности**, согласно которому каждое верное булево предложение (например, каждое тождественно выполняющееся булево равенство или неравенство) переходит при замене

$+\leftrightarrow\cdot$, $\iota\leftrightarrow o$, $— \leftrightarrow —$, $\supset — \subset$

снова в истинное предложение (выводимое из аксиом в точности как исходное предложение, однако с заменой аксиомы двойственной ей); этот принцип играет в теории булевых структур весьма важную роль.

Система $Б_{1\text{-}8}$ аксиом алгебры Буля является уже «почти независимой». Единственное дальнейшее упрощение этой системы, которое еще возможно,

- это исключение из списка аксиома одной из аксиом $Б_5$ и $Б_6$, поскольку, например, $Б_5$ может быть выведена из аксиом $Б_{1\text{-}4}$, $Б_{6\text{-}8}$ (и $Б_6$ выведена из $Б_{1\text{-}5}$и $Б_{7\text{-}8}$); система же, состоящая, скажем, из аксиом $Б_{1\text{-}5}$, $Б_{7\text{-}8}$, будет уже независимой. Впрочем, полная симметричность утверждений $Б_5$ и $Б_6$ ставит нас при желании сохранить лишь одну из этих двух аксиом. Чтобы избежать сложности, мы предпочитаем сохранять в списке аксиом булевой структуры оба предложения: и $Б_5$, и $Б_6$, что одновременно упрощает анализ этой аксиоматической системы.

◄ Для того чтобы вывести из $Б_{1\text{-}4}$ и $Б_{6\text{-}8}$ аксиому $Б_5$, заметим прежде всего, что равенство (Va), т.е. $\alpha + \iota = \iota$, может быть выведено из наших аксиом (где теперь ι определяется равенством $Б_7$) без участия $Б_5$:

$$\alpha + \iota \underset{Б_6}{=} (\alpha + \iota)\iota \underset{Б_7}{=} (\alpha + \iota)(\alpha + \bar{\alpha}) \underset{Б_4}{=} \alpha + \iota\bar{\alpha} \underset{Б_6}{=} \alpha + \bar{\alpha} \underset{Б_7}{=} \iota.$$

А теперь имеем

$$\iota + \alpha \underset{Б_1}{=} \alpha + o \underset{Б_8}{=} \alpha + (\alpha\bar{\alpha}) \underset{Б_6}{=} (\alpha\iota) + (\alpha\bar{\alpha}) \underset{Б_3}{=} \alpha(\iota + \bar{\alpha}) \underset{Б_1,(Va)}{=} \alpha\iota \underset{Б_3}{=} \iota\alpha \underset{Б_6}{=} \alpha.$$

Аналогично выводится и равенство $Б_6$ из аксиом $Б_{1\text{-}5}$ и $Б_{7\text{-}8}$.►

Независимость всех остальных аксиом устанавливается стандартным приемом: построением моделей, в которых выполняются все аксиомы из нашего списка, кроме выбранной нам. ◄ Ясно, что обе аксиомы $Б_{5\text{-}6}$ нельзя исключить из нашего списка аксиом, ибо в системе из двух всего элементов α, ω (где и роль o, и роль ι играет элемент ω) со «сложением» и «умножением»:

+	α	ω
α	ω	ω
ω	ω	ω

·	α	ω
α	ω	ω
ω	ω	ω

(1.2)

(с операциями $\alpha+\alpha=\alpha+\omega=\omega+\alpha=\varpi+\varpi=\alpha\alpha = \alpha\omega=\omega\alpha=\omega\omega=\omega$) выполняются все аксиомы $Б_{1\text{-}4}$, $Б_{7\text{-}8}$ (где $\bar{\alpha}$ и $\bar{\omega}$ можно определять как угодно!), - но не $Б_5$ и не $Б_6$.

Независимость $Б_1$ устанавливает существование структуры $< \{o, \iota\};\ +, \cdot, ^{-} >$ со следующим определением действий:

$$\begin{array}{c|cc} + & o & \iota \\ \hline o & o & \iota \\ \iota & o & \iota \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & o & \iota \\ \hline o & o & o \\ \iota & o & \iota \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|c} - & \\ \hline o & \iota \\ \iota & \iota \end{array} \tag{1.3}$$

(т.е. $o+o=\iota+o=o,\ o+\iota=\iota+\iota=\iota;\ oo=o\iota=\iota o=o, \iota\iota=\iota;\ \bar{o}+\bar{\iota}=\iota$). Здесь, очевидно, выполняются $Б_2$ и $Б_{5\text{-}8}$, в то время как $Б_1$ места не имеет (ибо $o+\iota\neq o=\iota+o$). Далее, непосредственная проврка показывает, что равенства $Б_3$ и $Б_4$ также имеют место для любых $\alpha,\beta,\gamma=o,\iota$. Так, например, $o(\iota+\iota)=o\iota=o$ и $o\iota+o\iota=o+o$ или $\iota+o\iota=\iota+o=o$ и $(\iota+o)(\iota+\iota)=o\iota=o$. Но если бы аксиома $Б_1$ была выводима из других аксиом нашей системы, то в каждой алгебраической структуре, для которой верны аксиомы $Б_{2\text{-}8}$, выполнялась бы и аксиома $Б_1$, чего, как мы видим, на самом деле нет. Аналогично с помощью структуры, «двойственной» рассмотренной нами, доказывается нзависимость аксиомы $Б_2$.

Чтобы доказать, что аксиома $Б_4$ не может быть выведена из других аксиом, достаточно рассмотреть множества из двух элементов $\mathbf{o}$ и $\boldsymbol{\iota}$, в котором следующим образом определены бинарные операции + и $\cdot$:

$$\begin{array}{c|cc} + & o & \iota \\ \hline o & o & \iota \\ \iota & \iota & o \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & o & \iota \\ \hline o & o & o \\ \iota & o & \iota \end{array} \tag{1.4}$$

(т.е. $o+o=\iota+\iota=o;\ o+\iota=\iota+o=\iota;\ oo=o\iota=\iota o=o;\ \iota\iota=\iota$). Очевидно, что для этой системы элементов выполняются аксиомы $Б_1$ и $Б_2$ (сложение и умножение коммутативно). Далее, очевидно, имеют место аксиомы $Б_5$ и $Б_6$, а также $Б_7$ и $Б_8$, где надо считать $\bar{\mathbf{o}}=\boldsymbol{\iota},\ \bar{\boldsymbol{\iota}}=\mathbf{o}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что и аксиома $Б_3$ также справедлива. Однако

$\iota+o\iota=\iota+o=\iota,$

$(\iota+o)(\iota+\iota)=\iota o=o$

т.е. аксиом $Б_4$ здесь не выполняется.

Независимость аксиомы $Б_3$ от остальных аксиом устанавливается множеством двух элементов о и ι со следующими правилами сложения и умножения:

$$\begin{array}{c|cc} + & o & \iota \\ \hline o & o & \iota \\ \iota & \iota & \iota \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & o & \iota \\ \hline o & \iota & o \\ \iota & o & \iota \end{array} \qquad (1.4')$$

Для этой алгебраической системы (где также надо положить $\bar{o} = \iota$ и $\bar{\iota} = o$) справедливы семь из выписанных выше восьми аксиом, но не аксиома $Б_3$. Наконец, независимость равенства $Б_7$ от равенств $Б_{1\text{-}6}$ и $Б_8$ следует из структуры

$< \{o, \iota\};\ +, \cdot, ^{-}\ >$, где

$$\begin{array}{c|cc} + & o & \iota \\ \hline o & o & \iota \\ \iota & \iota & \iota \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & o & \iota \\ \hline o & o & o \\ \iota & o & \iota \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|c} - & o \\ \hline o & o \\ \iota & o \end{array} \qquad (1.5)$$

а независимость $Б_8$ – из «двойственной структуры», отличающейся от (5) лишь тем, что здесь $\bar{o} = \bar{\iota} = \iota$. ▶

заметим еще, что, определив дополнительно

а) $\alpha \backslash \beta = \alpha\bar{\beta}$ и б) $\alpha * \beta = \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\beta}$ (1.6)

(разность и симметрическая разностьэлементов булевой структуры; в том случае, когда $\alpha \supset \beta$, вместо $\alpha \backslash \beta$ можно писать также $\alpha - \beta$), мы сможем перенести в «абстракную» структуру Буля все результаты. Так, для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{B}$

а) $\alpha \backslash \alpha = o$ и б) $\alpha * \alpha = o$ (1.7)

(причем $\alpha * \beta = o$, лишь если $\beta = \alpha$);

а) $\alpha \backslash o = \alpha$ и б) $\alpha * o = \alpha$ (1.8)

(причем $\alpha * \beta = \alpha$, лишь если $\beta = o$);

а) $\iota \backslash \alpha = \bar{\alpha}$ и б) $\iota * \alpha = \bar{\alpha}$ (1.9)

(а также $o \backslash \alpha = o$ и $\alpha * \bar{\alpha} = \iota$);

$\alpha * \beta = \beta * \alpha$; (1.10)

а) $(\alpha \backslash \beta) \backslash \gamma = (\alpha \backslash \gamma) \backslash \beta$ и б) $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$; (1.11) а) $(\alpha\backslash\beta)\gamma = \alpha\gamma\backslash\beta\gamma$ и б) $(\alpha * \beta)\gamma = (\alpha\gamma) * (\beta\gamma)$. (1.12)

наряду с этим справедливо тождество

$$\alpha * \beta * \alpha\beta = \alpha + \beta \tag{1.13}$$

и предложения

если $\alpha * \gamma = \beta * \gamma$, то $\alpha = \beta$; (1.14)

если $\alpha * \beta = \gamma$, то $\alpha * \gamma = \beta$.

(1.15)

В соответствии с общим определением подструктуры *подструктурой* булевой структуры (подалгеброй алгебры Буля) (1) или (1''') называется такое подмножество $\mathfrak{B}_1$ множества $\mathfrak{B}$, которое само является булевой структурой относительно заданных в нем операций +, $\cdot$ и - , т.е. которое содержит элементы ο и ι и замкнуто относительно операций +, $\cdot$ и - (скажем, если $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_1$, то и $\alpha + \beta \in \mathfrak{B}_1$). Так, например, элементы **ο** и **ι** булевой структуры всегда образуют (минимальную) ее подструктуру, поскольку- множество $\{\text{ο}, \iota\}$, очевидно, относительно всех булевых операций замкнуто:

+	ο	ι
ο	ο	ι
ι	ι	ι

$\cdot$	ο	ι
ο	ο	ο
ι	ο	ι

и

–	
ο	ι
ι	ο

(1.16)

Подструктурой структуры всех заключенных внутри квадрата I фигур является, например, алгебра заключенных внутри I *многоугольных* фигур (многоугольников, состоящих, возможно, из нескольких кусков, органиченных прямолинейными отрезками), поскольку, очевидно, объединение и пересечение двух многоугольников снова является многоугольником и дополнение $\overline{\text{M}}$ многоугольника M также можно считать многоугольником, так как граница M состоит из прямолинейных отрезков.

Аналогично подструктурой алгебры всех подмножеств бесконечного универсального множества I является система всех *конечных или коконечных* (таких, дополнение которых конечно) подмножеств I : ведь ясно, что если A конечно, то $\overline{\text{A}}$ коконечно и наоборот; пересечение двух множеств, хотя бы одно из которых конечно, будет конечно, и объединение двух множеств, хотя бы одно из которых коконечно, будет коконечно; объединение двух конечных множеств, разумеется, конечно. Отсюда в силу формулы де Моргана (XIa) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ следует, что пересечение AB двух коконечных множеств (таких, что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ конечны) коконечно. Наконец, пустое множество O можно считать конечным, а его дополнение *I* – коконечным. А вот, хотя система всех подмножества четных натуральных чисел и образует, разумеется, при обычном определении суммы, пересечения и дополнения булеву структуру, эта структура никак не будет являеться подструктурной системы всех множеств любых натуральных чисел, поскольку в этих двух булевых структурах единичные элементы *I* различны и опреция взятия дополнения имеет разный смысл.

§ 2. Булевы многочлены. Аддитивная и мультипликативная форма Булева многочлена.

Выше нам часто приходилось иметь дело с теми или иными выражениями, составленными из элементов основного множества $\mathfrak{B}$ булевой структуры при помощи бинарных операций «сложение» и «умножение» и унарной операции «черта»: так, например, большинство аксиом (I) – (XXI) утверждает равенство двух подобных выражений.

При этом, в противоположность обычной алгебре чисел (скажем, вещественных), в булевой алгебре мы не имеем операции деления (и, тем более, операции извлечения корня), в силу чего все выражения, образованные из некоторого набора элементов $\mathfrak{B}$, по строению напоминают «целые рациональные выражения» (многочлены) школьной алгебры. Мы их будем называть *булевыми многочленами*. [Еще одно отличие булевой алгебры от обычной заключается в том, что в силу идемпотентных законов (VI) здесь $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ (а не α^2) и, следовательно, также $\underbrace{\alpha \cdot \quad \alpha \cdot \ldots \quad \cdot \alpha}_{n \text{ раз}} = \alpha$ (а не α^n; запись α^2, α^3 или α^n здесь просто не имеет никакого отлично от α смысла). Аналогично $\alpha + \alpha = \alpha$ (а не 2α), а также $\underbrace{\alpha + \quad \alpha + \cdots \quad + \alpha}_{n \text{ раз}} = \alpha$ (а не $n\alpha$). Имея в виду это свойство булевой структуры, говорят, что булева алгебра – это *алгебра без степеней и коэффициентов*]. Булевыми многочленами являются, например, следующие выражения:

$$\alpha\beta, \left(\alpha + \bar{\beta} + \gamma\right)\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}, (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha),$$

$$\overline{\overline{\alpha + \beta\gamma} + \overline{\beta + \gamma\alpha} + \overline{\gamma + \alpha\beta}} \tag{2.1}$$

или

$$\alpha\beta\bar{\gamma}\delta + \bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta} + \alpha\bar{\beta}\gamma\delta + \bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}. \tag{2.1'}$$

При изучении булевых многочленов основным является вопрос об их упрощении и идентификации (выяснении, отличаются ли ли по существу друг от друга два по-разному записанных многочлена или представляют лишь разные формы одного выражения). Так, например, вовсе не очевидно, что последний из многочленов (1) совпадает с предпоследним, а второй равен **o**.

В обычной (школьной) алгебре установление совпадения или несовпадения двух целых рациональных выражений (многочленов) осуществляется с помощью приведения многочленов к стандартному («каноническому») виду: каждий многочлен $P = (x_1, \dots, x_k)$ от k переменных $x_1, \dots, x_k$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{c}_{i_1 i_2 \dots i_k} \boldsymbol{x}_1^{i_1} \boldsymbol{x}_2^{i_2} \dots \boldsymbol{x}_k^{i_k}. \tag{2.2}$$

где $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$ − отличные от нуля (числовые) коэффициенты многочлена, а $i_1, i_2, \dots i_k$ − (целых неотрицательные) степени, часть которых (или даже все) может и обращаться в нуль; наибольшая из сумм $i_1 + i_2 + \dots + i_k = N$ называется степенью многочлна P . аналогичное положение справедливо и для булевой алгебры, где выполняется следующая.

Теорема. Пусть $P = P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ − булев многочлен, зависящий от (произвольных или переменных) элементов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ факсированной структуры (1); тогда P либо тождественно (при любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$) равен о, либо P можно записать в виде

$$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2', \dots, \boldsymbol{\xi}_k', \tag{2.3}$$

где множитель ξ_i' ($i = 1, 2, \dots$, или k) в каждом члене стоящей справа суммы обозначает ξ_i или $\overline{\xi_i}$. При этом, если два многочлена $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ и $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ тождественны (т.е. совпадают при любых наборах $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathfrak{B}$), то они имеют одинаковую форму (3), а если они различны, то и формы (3) этих многочленов будут различаться.

Форма (3) булева многочлена (представление о которой может дать, например, многочлен (1') от переменных $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{B}$) называется его *совершенной нормальной аддитивной формой* (от лат. additio - сложение).

◄ Доказательство теореама совсем просто. Прежде всего, с помощью соотношений де Моргана (XI) мы можем преобразовать многочлен

$$P = P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

так, чтобы (унарная) операция - в новой его записи применялась лишь к «булевым переменным» $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, но не к их комбинациям – суммами или произведениям. Далее, воспользовавшись (первым) дистрибутивным законом (IIIa), мы можем раскрыть скобки во всех случаях, когда они означают, что для получения выражения *P* надо перемножить между собой суммы каких-то элементов ξ_i и ξ_j булевой структуры или более сложных всех таких скобок мы приведем многочлен *P* к «аддитивной» форме, представляющей собой сумму ряда членов, каждый из которых является произведением элементов $\xi_i \in \mathfrak{B}$ и выражений ξ_j.

Далее, если какой-либо член *A* полученой суммы не содержит, скажем, ни множителя ξ_1, ни множителя $\bar{\xi}_1$, то мы заменим его выражением $\mathrm{A}(\xi_1 + \bar{\xi}_1) == \mathrm{A}\xi_1 + +\mathrm{A}\overline{\xi_1}$, суммой двух членов, один из которы содержит множитель ξ_1, а второй – множитель $\bar{\xi}_1$. Таким образом, мы ожем придать *P* вид суммы, все слагаемые которой содержат (с чертой над соответствующим множителем или без нее) все переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. При этом, если какой-либо член суммы *P* содержит сразу оба множителя ξ_i и $\bar{\xi}_i$, то в силу (VIIIб), (Vб) (IVa) его можно отбросить; если же в него один и тот же множитель ξ_j входит несколько раз, то в силу (VIб) этот множитель можно сохранить лишь один раз [здесь мы учитываем, разумеется, коммутативный закон (Iб) и ассоциативный закон (IIб)]. Наконец, если полученная сумма содержит несколько одинаковых слагаемых, то в силу (VIa) из всех этих слагаемых можно оставить лищь одно. Если в результате всех этих операций в сумме *P* выпадут все члены, то мы будем иметь $P = o$; в противном случае мы приведем булев многочлен *P* к совершенной нормальной аддитивной форме (3).

Наконец, очевидно, что если два булева многочлена *P* и Q приводятся к одной и той же форме (3), то они тождественно *равны*. С другой стороны, если формы (3) двух многочленов *P* и Q не совпадают, то эти многочлены заведомо различны, т.е. при некотором выборе переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ они будут принимать разные значения. В самом деле, пусть, например, $k = 4$ и аддитивная форма (3) многочлена P содержит слагаемое

$$\xi_1,\bar{\xi}_2,\xi_3,\xi_4 \tag{2.4}$$

а форма (3) многочлена Q такого слагаемого не содеожит. Подставим теперь в P и Q следующие значения пеерменных ξ:

$$\xi_1 = \iota, \xi_2 = o, \xi_3 = \iota, \xi_4 = \iota. \tag{2.5}$$

Ясно, что член (4) суммы P при этих значениях ξ_i обратится в $\iota\iota\iota = \iota$, в то время как все другие слагаемые этой суммы будут содержать хотя бы один множитель o и, значит, в силу (Vб) будут равны o. Поэтому мы будем иметь $P(\iota, o, \iota, \iota) = \iota$. С другой строны, так как сумма. Q не содержит (4), то при подстановке в нее значений (5) все члены этой суммы обратятся в o (все они будут содержать множитель o); поэтому

$Q(\iota, o, \iota, \iota) = o \neq \iota = P(\iota, o, \iota, \iota)$. ►

Пример. Рассмотрим последний из многочленов (1):

$$P(\alpha,\beta,\gamma) = \overline{\overline{\alpha + \beta\gamma} + \overline{\beta + \gamma\alpha} + \overline{\gamma + \alpha\beta}}.$$

◄ Обозначим $\overline{\alpha + \beta\gamma} = \mathrm{A}$; $\overline{\beta + \gamma\alpha} = B$; $\overline{\gamma + \alpha\beta} = \Gamma$. В силу правила де Моргана (XIa).

$$P = \overline{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma} = \overline{(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \Gamma} = \overline{(\mathrm{A} + \mathrm{B})}\,\overline{\Gamma} = (\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}})\overline{\Gamma} = \overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma}.$$

А так как $\overline{\mathrm{A}} = \alpha + \beta\gamma$, $\overline{\mathrm{B}} = \beta + \gamma\alpha$, $\overline{\Gamma} = \gamma + \alpha\beta$, то

$$P = (\alpha + \beta\gamma)(\beta + \gamma\alpha)(\gamma + \alpha) =$$
$$= \alpha\beta\gamma + \alpha\beta(\alpha\beta) + \alpha(\gamma\alpha)\gamma + \alpha(\gamma\alpha)(\alpha\beta) + (\beta\gamma)\beta\gamma +$$
$$+(\beta\gamma)\beta(\alpha\beta) + (\beta\gamma)(\gamma\alpha)\gamma + (\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\alpha\beta) =$$
$$= \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma +$$
$$+\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(здесь мы использовали коммутативный, ассоциативный, идемпотентный законы для умножения и идемпотентный закон для сложения).

Далее

$$\alpha\beta = \alpha\beta(\gamma + \bar{\gamma}) = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma}.$$

и аналогично

$\alpha\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\bar{\beta}\gamma,\ \beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \bar{\alpha}\beta\gamma,$

так что окончательно получаем

$P = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma} + \alpha\beta\gamma + \alpha\bar{\beta}\gamma + \alpha\beta\gamma + \bar{\alpha}\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma} + \alpha\bar{\beta}\gamma +$
$+\bar{\alpha}\beta\gamma$
. ►

Наше доказательство однозначности представления булева многочлена, т.е. того, что никакой многочлен P не может иметь две разные формы (3), довтавляют одновременно простой алгоритм приведения P к виду (3), не требующий обращения к сложным преобразованиям с использованием правил де Моргана. Для простоты предположим снова, что $k = 4$, т.е. что P зависит от четырех переменных ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4.

Мы видели выше, что форма (3) многочлена P содержит слагаемое (4) в том случае, если $P(\iota, o, \iota, \iota) = \iota$, и не содержит члена (4), если $P(\iota, o, \iota, \iota) = o$. [Так как множество $\{o,\iota\}$ замкнуто относительно всех операций булевой структуры, то ясно, что если все значения переменных многочлена P равны **o** или **ι**, то и значение P может быть равно лишь или **o** или **ι**.]. Введем теперь «стандартные переменные» ω, равные **o** или **ι**; тогда форму (3) многочлена P можно будет записать так:

$$\boldsymbol{P = \sum P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)}\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_k', \qquad (2.3')$$

где в коэффициенте $P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ при произведении $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_k'$ положено

$\omega_i = \iota$

если ξ_i' равно ξ_i, и $\omega_i = o$, если ξ_i' –это $\bar{\xi}_i$. Ясно, что все коэффициенты $P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ будут равны либо **o**, либо **ι**, причем в силу (VIб) и (Iб) (а также (VIа)) члены суммы (3') с коэффициентами o можно просто отбросить, а у членов с коэффициентом ι не выписывать этот коэффициент.

Следствие 1. Если два булева многочлена P и Q, зависящие от одних и тех же переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, совпадают при подстановке вместо ξ_i

всевозможных наборов из одних только элементов о и ι, то они тождественно равны, т.е. совпадают и при любых значениях $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in \mathfrak{B}$.

◀ Утверждение о совпадении значений P и Q при подстановке вместо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ всевозможных наборов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ элементов о и ι равносильно предложению о совпадении всех коэффициентов $P(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ и $Q(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ соответственно совершеннойнормальной аддитивной формы (3') этих многочленов, т.е. тождественному равенству многочленов P и Q. ▶

Следствие 2. Булева структура **В** допускает 2^{2^k} (и только 2^{2^k}) различных многочленов от k переменных.

◀ В самом деле, совершенная нормальная форма (3') булева многочлена P состоит из 2^k слагвемых, ибо каждый из k сомножителей $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_k'$ может иметь одно из двух значений (ξ_1 или $\bar{\xi}_1$, соответственно ξ_2 или $\bar{\xi}_2, \ldots, \xi_k$ или $\bar{\xi}_k$). А так как каждый из коэффициентов $P(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ при соответствующих слагаемых может иметь одно из двух значений о или ι, то, варьируя все возможные значения коэффициентов, мы получим всего 2^{2^k} разных форм (3) (или (3')) булевых многочленов. [В часности, если все коэффициенты многочлена (3') равны о, то многочлен тождественно равен о, а если все они равны ι, то многочлен тождественно равен ι.]. Поскольку разные формы (3') соответствуют разным многочленам, то мы и приходим к выводу, что общее число разных булевых многочленов равно 2^{2^k}.▶

В частности при $k = 1$ мы имеем следующие $2^{2^1} = 4$ булева выражения (многочлена):

о, $\xi, \bar{\xi}$ и ι $(= \xi + \bar{\xi})$,

а при $k = 2$ число многочленов будет уже равно $2^{2^2} = 16$:

o, $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\bar\xi_2$,

$\bar\xi_1\xi_2$, $\bar\xi_1\ \bar\xi_2$; $\xi_1\xi_2+\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\xi_2$, $\bar\xi_1\xi_2+\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\bar\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$, $\bar\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$; $\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\xi_2+\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\xi_2+\xi_1\bar\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$, $\xi_1\bar\xi_2+\bar\xi_1\xi_2+\bar\xi_1\bar\xi_2$; $\xi_1\xi_2+\xi_1\bar\xi_2+\bar\xi_1\xi_2+\ \bar\xi_1\bar\xi_2=\iota$

. **Пример**. Обратимся снова к многочлену (6) и приведем его к каконической форме (3), использовав новый алгоритм.

◀ Мы видели, что $P=\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}=\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\bar{\Gamma}$, где $\bar{\mathrm{A}}=\alpha+\beta\gamma$; $\bar{\mathrm{B}}=\beta+\gamma\alpha$; и $\bar\Gamma=\gamma+\alpha\beta$; в силу (V6) $\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\bar{\Gamma}\neq$ o, лишь если $\bar{\mathrm{A}}\neq o$ и $\bar{\mathrm{B}}\neq o$, $\bar\Gamma\neq$ o. Но, очевидно, что если $\alpha,\beta,\gamma=o$ или ι, то $\bar{\mathrm{A}}=\alpha+\beta\gamma\neq o$, лишь если $\alpha=\iota$ или $\beta=\gamma=\iota$; аналогично $\bar{\mathrm{B}}\neq o$, если $\beta=\iota$ или $\gamma=\alpha=\iota$, и $\bar\Gamma\neq o$, если $\gamma=\iota$ или $\alpha=\beta=\iota$. Поэтому, если какие-нибудь две из переменных α,β,γ равны o, то два из выражений $\bar{\mathrm{A}},\bar{\mathrm{B}},\bar\Gamma$ тоже равны o (так, если $\alpha=\beta=o$, то $\bar{\mathrm{A}}=\bar{\mathrm{B}}=o$), а если $\alpha=\beta=\gamma=o$, то и $\bar{\mathrm{A}}=\bar{\mathrm{B}}=\bar\Gamma=o$; если же из переменных α,β,γ значение o имеет только одно, а остальные равны ι, или, тем более, если $\alpha=\beta=\gamma=\iota$, то $\bar{\mathrm{A}}=\bar{\mathrm{B}}=\bar\Gamma=\iota$ и, значит, $P=\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\bar\Gamma=\iota$. Отсюда вытекает, что

$P=\iota\alpha\beta\gamma+\iota\alpha\beta\gamma+\iota\alpha\beta\bar\gamma+\iota\bar\alpha\beta\gamma+o\bar\alpha\beta\bar\gamma+o\bar\alpha\beta\bar\gamma+o\bar\alpha\bar\beta\gamma+o\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma$,

т.е. снова результат (6"). ▶

Заметим, наконец, что каждый булев многочлен $P=P(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k)$ может быть приведен также и к *совершенной нормальной мультипликативной форме* (от лат. multiplicatio – умножения):

$$P=\prod(\xi_1'+\xi_2'+\cdots+\xi_k') \qquad (2.7).$$

где сиволы ξ_k' имеют тот же смысл, что и в (3) (или в (3')), и все сомножители в иравой части различны; такая форма многочлена также является единственной и полностью характеризует класс тождественно равных многочленов.

§ 3. ИНЫЕ АКСИОМАТИКИ БУЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Булеву структуру мы определили выше как структуру

$$\text{B} =< \mathfrak{B};\ +,\cdot,-,\supset>, \tag{3.1}$$

задаваемую 37 аксиомам (I) – (XXI) или, короче, как структуру

а) $\text{B} =< \mathfrak{B};\ +,\cdot >$, (3.1')

задаваемую 37 аксиомами $Б_{1\text{-}8}$. Однако эти определения ни какоей мере не являются единственно возможными: в научной литературе имеются десятики различных эквивалентных между собой аксиоматик, описывающих один и тот же объект – булева структуру. Так, например, поскольку в силу формулы де Моргана (XIa) произведение $\alpha\beta$ элементов булевой структуры можно свести к комбинаций + и - :

$$\alpha\beta = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \tag{3.2a}$$

то имеется много аксиоматик булевой структуры, кладущих в основу ее определения одни лишь операции + и - (или $\cdot$ и -):

б) $\text{B} =< \mathfrak{B};\ +,->$ или в) $\text{B} =< \mathfrak{B};\ \cdot,->$. (3.1')

[Заметим, что операцию - через операции + и $\cdot$ выразить нельзя – именно поэтому аксиоматика $Б_{1\text{-}8}$ специально постулирует существование отображения $\alpha \to \alpha$.] Так, например, достаточно экономным и в то же время удобным является следующее.

Определение. Булевой структурой называется структура (3.1'б) с одной бинарной операцией + («сложение») и одной унарной операцией - («черта»), определенными на множестве $\mathfrak{B} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots;\ \iota\}$ (в этом множестве выделен «единичный» элемент ι, обладающий специальными свойствами); эта структура задается следующими аксиомами:

Сложение коммутативно, ассоциативно и идемпотентно, т.е.

$Б'_1 : \alpha + \beta = \beta + \alpha;$

$Б'_2 : (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$

$Б'_3 : \alpha + \alpha = \alpha;$

кроме того,

$Б'_4$: $\alpha + \beta = \alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \bar{\beta} = \iota$ (здесь, как всегда, всюду $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{B}$ – произвольные элементы множества $\mathfrak{B}$).

Если теперь определить

$$\alpha\beta = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \tag{3.2a}$$

$$о = \bar{\iota} \tag{3.3}$$

то из аксиом $Б'_{1-4}$ можно будет вывести аксиомы $Б_{1-8}$ и наоборот.

◄ Мы уже знаем, что из $Б_{1-8}$ вытекают все предложения (I) – (XXI) в частности аксиомамы $Б'_{1-3}$; кроме того, мы видели, что из (I) – (XXI) вытекаеттакже равносильность равенства $\alpha + \beta = \alpha$ отношениями $\alpha \supset \beta$ и $\bar{\alpha}\beta = o$. Но из $\bar{\alpha}\beta = o$ вытекает $\overline{\bar{\alpha}\beta} = \bar{о}$ или $\alpha + \bar{\beta} = \iota$ –таким образом, и аксиома $Б'_4$ вытекает из $Б_{1-8}$.

Напротив, коммутативность $Б_1$ сложения требуется аксиомой $Б'_1$, а коммутативность $Б_2$ умножения следует из $Б_1$ и определения (2a):

$$\beta\alpha = \overline{\bar{\beta} + \bar{\alpha}} = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} = \alpha\beta.$$

Равенство $Б_7$ сразу следует из идемпотентности $Б'_3$ сложения и аксиомы $Б'_4$:

$Б_7$: так как $\alpha + \alpha = \alpha$, то $\alpha + \bar{\alpha} = \iota$.

Далее из $Б_7$ идемпотентности $Б'_3$ и ассоциативности $Б'_2$ сложения получаем

$$\alpha + \iota = \alpha + (\alpha + \bar{\alpha}) = (\alpha + \alpha) + \bar{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha} = \iota. \tag{Va}$$

Однако мы пока не силах установить двойственные $Б_7$ и (Va) предложения $Б_8$ и (Vб), поскольку вывод их из $Б_7$ и (Va) базируется на инволютивности (IX) операции «черта», установление которой на базе аксиом $Б'_{1-4}$ оказывается неотражиданно сложным. И вообще полное доказательство равносильности аксиоматик $Б_{1-8}$ и $Б'_{1-4}$ вовсе не просто – для того, чтобы получить его, нам придется еще немало потрудиться.

Прежде всего определим отношение - между элементами нашей алгебраической системы:

$$\alpha \supset \beta, \text{ если } \alpha + \beta = \alpha. \tag{3.4}$$

Иногда нам будет полезно иметь в виду, что в силу $Б_4$ это определение можно переписать и так:

$\alpha \supset \beta$, если $\alpha + \overline{\beta} = \iota$. (3.4а)

При этом рефлексивность (XII); транзитивность (XIII) и антисимметричность (XIV) отношения $\supset$, так же как соотношение (XVIIa), «монотонность сложения» (XXa) и родственное (X Xa) предложение (X IXa), совместно с (XVIa) записываемое в виде равенства (XVIIIa), выводятся из определения (4) в точности.

Теперь мы можемдоказать инволютивность (IX) операции «черта». В самом деле в силу $Б_7$, коммутативности $Б_1'$ сложения и определения (4а),

так как $\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha} = \iota$, то $\bar{\bar{\alpha}} \supset \alpha$. (3.5)

точно так же, заменяя α на $\bar{\alpha}$ и на $\bar{\bar{\alpha}}$, получаем

а) $\bar{\bar{\bar{\alpha}}} \supset \bar{\alpha}$ и б) $\bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}} \supset \bar{\bar{\alpha}}$. (3.6)

Но из (5) и (6б) в силу транзитивности (XIII) отношения - следует

$\bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}} \supset \alpha$, т.е. $\bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}} + \alpha = \bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}}$ и, значит, $\bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}} + \bar{\alpha} = \iota$ (3.7)

Из (7) в силу коммутативности $Б_1'$ сложения и определния (4а) вытекает

$\bar{\alpha} + \bar{\bar{\bar{\bar{\alpha}}}} = \iota$ и, значит, $\bar{\alpha} \supset \bar{\bar{\bar{\alpha}}}$. (3.8)

А неравенства (8) и (6а) в силу антисимметричности (XIV) отношения - дают

$$\bar{\bar{\bar{\alpha}}} = \bar{\alpha} \tag{3.9}$$

(наконец-то из леса неравенств выплыло содержательное равенство!).

Равенствр (9) позволяет переписать $Б_7$ так:

$\alpha + \bar{\bar{\bar{\alpha}}} = \iota$,

что в силу (4а) равносильно

$\alpha \supset \bar{\bar{\alpha}}$. (3.10)

Таким образом, мы имеем два противоположных неравенства (5) и (10), в силу (XIV) сразу приводящие нас к требуемому результату:

$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$. (IX)

Из (IX) прежде всего следует

$$\bar{o} = \iota \tag{Xб}$$

А теперь из $Б_7$ и (Va) в силу определения (2a) полкчаем соответственно

$Б_8 : \alpha\bar{\alpha} = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}}} = \overline{\bar{\alpha} + \alpha} = \overline{\alpha + \bar{\alpha}} = \bar{\iota} = o;$

и

$$\alpha o = \overline{\bar{\alpha} + \bar{o}} = \overline{\bar{\alpha} + \iota} = \bar{\iota} = o. \tag{Vб}$$

Инвалютивность (IX) операции «черта» позволяет далее установить последнее из основных свойств отношения $\supset$:

если $\alpha \supset \beta$, то $\alpha + \bar{\beta} = \iota$ или $\bar{\beta} + \bar{\bar{\alpha}} = \iota$, т.е. $\bar{\beta} \supset \bar{\alpha}$ (XXI)

Из (IX) вытекает также идемпотентность (VIб) и ассоциативность (IIб) умножения:

$$\alpha\alpha = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\alpha}} = \bar{\bar{\alpha}} = \alpha \tag{VIб}$$

(здесь использована идемпотентность $Б_3'$ сложения) и

$$(\alpha\beta)\gamma = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} \cdot \gamma = \overline{\overline{\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}} + \bar{\gamma}} = \overline{\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta}\right) + \bar{\gamma}} = \overline{\bar{\alpha} + \left(\bar{\beta} + \bar{\gamma}\right)} =$$

$$\overline{\bar{\alpha} + \overline{\overline{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}}} = \alpha \cdot \overline{\bar{\beta} + \bar{\gamma}} = \alpha(\beta\gamma) \tag{IIб}$$

(здесь работает ассоциативность $Б_2'$ сложения). Наконец из (IX) следует также двойственное определению (2a) правило де Моргана (XIб):

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \tag{XIб}$$

откуда, в свою очередь, в силу того же соотношения (IX) вытекает возможность (2б) выразить сложение через умножение:

$$\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} = \bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\beta}} = \alpha + \beta. \tag{3.2б}$$

[Заметим, чтоиз (IX) и (2a) следует также первая формула де Моргана:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\beta}}} = \overline{\alpha + \beta} \tag{XVIa}$$

– удивительно, как много плодов принесло скромное соотношение (IX)!].

Наконец, с помощью (IX) можно доказать и двойственное определению (4) предложение (XVIIб) :

если $\alpha \supset \beta$, то $\bar{\beta} \supset \bar{\alpha}$, т.е. $\bar{\beta} + \bar{\alpha} = \bar{\beta}$, откуда $\overline{\bar{\beta} + \bar{\alpha}} = \bar{\bar{\beta}} = \beta$, т.е. $\beta\alpha = \beta$ или $\alpha\beta = \beta$ (XVIIб)

(кроме (IX), здесь использованы (X XI), коммутативность Б$_2$ умножения и определения (4) и (2а)).

Очень важно заметить, что доказанные нами факты влекут за собой также справедливость утверждения двойственного аксиоме Б$'_4$:

равенство $\alpha\beta = \alpha$, т.е. $\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} = \alpha$ равносильно $\overline{\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}} = \bar{\alpha}$ или $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \bar{\alpha}$.

Но из последнего равенства следует, что $\bar{\alpha} + \bar{\bar{\beta}} = \iota$, т.е. что $\overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} = \bar{\iota}$; таким образом,

$\alpha\beta = \alpha$ равносильно $\alpha\bar{\beta} = o$ (3.11)

В частности, мы можем считать доказанными предложения:

$\alpha \subset \beta$ равносильно $\alpha\bar{\beta} = o$ (3.4б)

(двойственно определению (4а));

$\alpha\beta \subset \alpha$ (XVIб)

(двойственно (XVIа));

если $\alpha \subset \beta$, то $\alpha\gamma \subset \beta\gamma$ (XXб)

(двойственно (XXа)) и

если $\alpha \subset \beta$ и $\alpha \subset \gamma$, то $\alpha \subset \beta\gamma$ (XIXб)

(двойственно (XIXа)). Отношения (XIXб) и (XVIб) совместно можно записать так:

$\alpha\beta = \min\,[\alpha\ \ \beta]$ (XVIIIб)

Теперь уже нетрудно доказать тождества Б$_5$ и Б$_6$. В самом деле,

Б$_5$: так как $\alpha + \iota = \iota$, т.е. $\alpha + \bar{o} = \iota$, то $\alpha + o = \alpha$ и Б$_6$: так как $\bar{\alpha} + o = \bar{\alpha}$ или $\bar{\alpha} + \bar{\iota} = \bar{\alpha}$, то $\overline{\bar{\alpha} + \bar{\iota}} = \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, т.е. $\alpha\iota = \alpha$; впрочем, принцип двойственности позволяет вовсе не доказываеть тождество Б$_6$, Б$_6$).

Более сложно – но на этой стадии также уже доступно, - доказательство дистрибутивных законов Б$_3$ и Б$_4$. Заметим прежде всего, что из доказанного до сих пор почти немедленно следуют законы поглощения (VII):

так как $\alpha\beta \subset \alpha$, то $\alpha + \alpha\beta = \alpha$ (VIIа) аналогично так как $\alpha + \beta \supset \alpha$, то $\alpha(\alpha + \beta) = \alpha$ (VIIб)

впрочем, (VIIб) двойственно (VIIа) и его можно не доказываеть.

Менее очевидно нужное нам для дальнейшего тождество

$$\alpha(\bar{\alpha} + \beta) = \alpha\beta, \quad (3.12)$$

которое в силу $Б_8$ можно считать частным случаем правила $Б_3$. Для того чтобы его доказать, заетим прежде всего, что в силу правила де Моргана (XIа) и тождества (IX)

$$\bar{\alpha} + \beta = \bar{\alpha} + \bar{\bar{\beta}} = \overline{\alpha\bar{\beta}};$$

Поэтому, если обозначить левую часть (12) через ξ, то будем иметь

$$\xi = \alpha(\bar{\alpha} + \beta) = \alpha\overline{\alpha\bar{\beta}}. \quad (3.13)$$

отсюда следует, что

$$\xi\bar{\beta} = \alpha\overline{\alpha\bar{\beta}}\bar{\beta} = (\alpha\bar{\beta})\overline{\alpha\bar{\beta}} = o. \quad (3.14)$$

но в силу (11) из (14) следует

$\xi = \xi\beta$, а $\xi\beta = [\alpha(\bar{\alpha} + \beta)]\beta = \alpha[\beta(\beta + \bar{\alpha})] = \alpha\beta$ в силу правила поглощения (VIIб) (а также коммутативности и ассоциативности умножения и коммутативности сложения), чем и завершается доказательство (12).

Теперь мы уже можем перейти к основным правилам $Б_3$ и $Б_4$. Обозначим

$$\alpha(\beta + \gamma) = \eta \text{ и } \alpha\beta + \alpha\gamma = \zeta. \quad (3.15)$$

Так как в силу (XVIа) $\beta + \gamma \supset \beta$ и $\beta + \gamma \supset \gamma$, то согласно (XXб)

$$\alpha(\beta + \gamma) \supset \alpha\beta \text{ и } \alpha(\beta + \gamma) \supset \alpha\gamma; \quad (3.16)$$

поэтому в силу (XXа)

$$\alpha(\beta + \gamma) \supset \alpha\beta + \alpha\gamma, \text{ т.е. } \eta \supset \zeta. \quad (3.17)$$

Сложнее доказывается обратное неравенство

$$\eta \subset \zeta, \quad (3.17')$$

в силу (4а) равносильное

$$\eta\bar{\zeta} = o. \quad (3.18)$$

Но

$$\eta\bar{\zeta} = \alpha(\beta+\gamma)\overline{\alpha\beta+\alpha\gamma} = \alpha(\beta+\gamma)\overline{\alpha\beta}\,\overline{\alpha\gamma} = \alpha(\beta+\gamma)\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right)(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})$$
$$= (\beta+\gamma)\left[\alpha\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right)\right][\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})]$$

согласно правилам де Моргана (XI), идемпотентности (VIб), коммутативности $Б_2$ и ассоциативности (IIб) умножения. А так как $\alpha\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right) = \alpha\bar{\beta}$ и $\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}) = \alpha\bar{\gamma}$, то

$$\eta\bar{\zeta} = (\beta+\gamma)\left(\alpha\bar{\beta}\right)(\alpha\bar{\gamma}) = \alpha(\beta+\gamma)\left(\bar{\beta}\bar{\gamma}\right) = \alpha\left[(\beta+\gamma)\overline{\beta+\gamma}\right] = \alpha o = o \qquad (3.18')$$

(здесь использованы, помимо коммутативности, асссоциативности, и идемпотентности умножения, правило де Моргана (XIa) и соотношение $Б_8$), чем и завершается доказательства неравенства (17'). А из (17) и (17') в силу антисимметричности (XIV) отношения $\supset$ и вытекает дистрибутивный закон: $\eta = \zeta$, т.е. $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$.

Наконец, второй дистрибутивный закон $Б_4$ двойствен $Б_3$ и, следовательно, может быть выведен из $Б_3$ по принципу двойственности.

Итак, мы убедились, что система аксиом $Б'_{1-4}$ равносильна аксиоматике $Б_{1\text{-}8}$, а тем самым и исходной аксиоматике (I-XXI)! ►

Но и система аксиом $Б'_{1-4}$ все еще не является самой экономной из всех возможных! Эта, казалось бы, столь краткая аксиоматика (всего 4 аксиомы!) *не независима*: например, аксиому $Б'_3$ удается вывести из остальных аксиом. При этом аксиому $Б'_4$ удобно переформулировать так: $Б''_4$: равенство $\alpha+\beta = \delta+\bar{\delta}$ при любом $\delta \in \mathfrak{B}$ равносильно равенству $\alpha+\beta = \alpha$.

Такая ее формулировка избавляет нас от необходимости с самого начала фиксировать в множестве $\mathfrak{B}$ «особый» элемент ι, который теперь можно определить так: $\iota = \delta+\bar{\delta}$, где $\delta \in \mathfrak{B}$ —любое (3.19)

но даже и аксиоматику из трех предложений $Б'_1$, $Б'_2$ и $Б''_4$ можно «укоротить», заменив требования $Б'_1$ коммутативности и $Б'_2$ ассоциативности сложения одной «смешанной» аксиомой $Б''_{1,2}$, так что булеву структуру можно задавать и как структуру (1'б), удовлетворяющую всего двум аксиомам (безусловный рекорд!): $Б''_{1,2}$: $(\alpha+\beta)+\gamma=(\beta+\gamma)+\alpha$ (инвариантность «повторного сложения» относительно *циклической подстаноки*: $(\alpha,\beta,\gamma)\to(\beta,\gamma,\alpha)$) и

$Б''_4$: $\alpha+\beta=\delta+\bar{\delta}$ равносильно $\alpha+\beta=\alpha$

При этом, определяя булеву структуру как структуру (1'б), мы, конечно, как всегда, дополнительно вводим в ней бинарную операцию умножения элементов, (бинарное) отношение - и особые элементы о и ι формулами:

$\alpha\beta=\overline{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$, (3.2а)

$\alpha\supset\beta$ равносильно $\alpha+\beta=\alpha$; (3.4)

$\iota=\delta+\bar{\delta}$ (где $\delta\in\mathfrak{B}$ –любое); (3.19)

$o=\bar{\iota}$ (3.3)

Вот еще один вариант задаия булевой структуры тремя аксиомами, пожалуй, даже более простыми, чем аксиомы $Б'_1$, $Б'_2$ и $Б''_4$:

Булевой структурной называется структура (1'б), подчиняющаяся следующим аксиомам:

$Б'_1$: сложения коммутативно – для любых элементов $\alpha,\beta\in\mathfrak{B}$

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

$Б'_2$: сложение ассоциативно – любых элементов $\alpha,\beta,\gamma\in\mathfrak{B}$

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

$Б''_3$: для любых двух элементов $\alpha,\beta\in\mathfrak{B}$

$\overline{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}+\overline{\bar{\alpha}+\beta}=\alpha$.

Можно также предложить такие системы аксиом булевой структуры, в которых фигурирует лишь единственное исходное отношение элементов. Так, часто оказывается полезным то обстоятельство, что все операции булевой структуры могут быть определены с помощью бинарной операции.

$\alpha\mid\beta=\bar{\alpha}\bar{\beta}$, (3.20)

так называемой *операции Шеффера*. Если элементы основного множества $\mathfrak{B}$ булевой структуры – это множества A, B, C, …, для которых операции сложения A+B, умножения AB и дополнения $\bar{A}$ определены, то операция Шеффера A | B имеет смысл пересечения дополнений множеств A и B.

Операция Шеффера, очевидно, коммутативна:

$\alpha \mid \beta = \beta \mid \alpha$

для людых $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$. Далее из аксиом булевой структуры следует, что

$(\alpha|\beta) \mid (\alpha|\beta) = \left(\overline{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) \cdot \left(\overline{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) = \left(\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\beta}}\right)\left(\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\beta}}\right) = \alpha + \beta;$

$(\alpha|\alpha) \mid (\beta|\beta) = (\overline{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}) \cdot \left(\overline{\bar{\beta}\bar{\beta}}\right) = \left(\bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\bar{\beta}}\right) = \alpha\beta;$

$(\alpha|\alpha) = \bar{\alpha}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}.$

Таким образом, приняв за основу операцию Шеффера $\alpha \mid \beta$, мы можем определить $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ и $\bar{\alpha}$ как $(\alpha|\beta) \mid (\alpha|\beta)$, $(\alpha|\alpha) \mid (\beta|\beta)$ и $(\alpha|\alpha)$; далее, элементы ι и о и отношение $\alpha \supset \beta$ определяются равенствами $\alpha + \bar{\alpha} = \iota$, $\alpha\bar{\alpha} = o$ и условием $\alpha + \beta = \alpha$ (или $\alpha\beta = \beta$). Используя эти определения, мы можем сформулировать все аксиомы булевой структуры так, чтобы в них фигурировала единственная операция – операция Шеффера $\alpha \mid \beta$.

Роль операции Шеффера может также играть и другая бинарная операция

$$\alpha \downarrow \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \tag{3.20б}$$

(в алгебре множеств операция A ↓ B имеет смысл *объединения дополнений* множеств A и B;). Легко видеть, что

$(\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta) = (\overline{\bar{\alpha} + \bar{\alpha}}) + \left(\overline{\bar{\beta} + \bar{\beta}}\right) = \left(\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\beta}}\right) = \alpha + \beta;$

$(\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta) = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} + \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} = \bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}} + \bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}} = \alpha\beta;$

$\alpha \downarrow \alpha = \bar{\alpha} + \bar{\alpha} = \bar{\alpha};$

Поэтому операции $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ и $\bar{\alpha}$ можно опеределить в терминах операции $\alpha \downarrow \beta$.

При использовании операции Шеффера, скажем, указанные на аксиомы $Б_1'$, $Б_2'$ и $Б_3''$ примут следующий вид:

$Ш_1 : (\alpha|\beta) \mid (\alpha|\beta) = (\beta|\alpha) \mid (\beta|\alpha)$;

$Ш_2 : \{[(\alpha|\beta) \mid (\alpha|\beta)] \mid \gamma\} \mid \{[(\alpha|\beta) \mid (\alpha|\beta)] \mid \gamma\} =$

$= \{\alpha \mid [(\beta|\gamma) \mid (\beta|\gamma)]\} \mid \{\alpha \mid [(\beta|\gamma) \mid (\beta|\gamma)]\}$;

$Ш_3$: если $\alpha \mid \alpha = \mathrm{A}$, $\beta \mid \beta = \mathrm{B}$ и

$\{[(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \mid (\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \mid (\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \mid (\mathrm{A} \mid \mathrm{B})]\} \mid \{[(\mathrm{A} \mid \beta) \mid (\mathrm{A} \mid \beta) \mid (\mathrm{A} \mid \beta) \mid (\mathrm{A} \mid \beta)]\} = \Gamma$.

то $\Gamma \mid \Gamma = \alpha$.

Аксиомы $Ш_{1-3}$ имеют довольно сложную форму. Вместо них можно положить в основу определения булевой структуры три более простые аксиомы, также оперирующие с единственной операцией $\alpha \mid \beta$:

$Ш'_1 : (\alpha|\alpha) \mid (\alpha|\alpha) = \alpha$;

$Ш'_2 : \alpha \mid [\beta \mid (\beta \mid \beta)] = \alpha \mid \alpha$;

$Ш'_3 : [\alpha \mid (\beta \mid \gamma)] \mid [\alpha \mid (\beta|\gamma)] = [(\beta \mid \beta) \mid \alpha][(\gamma \mid \gamma) \mid \alpha]$.

Таким образом, булеву структуру можно определить как систему

B=<V; | >.

С одной биарной алгебраической операцией | подчиняющейся трем аксиомам $Ш'_{1-3}$.

Иногда в основу определения алгебры Буля кладут единственную тернарную операцию

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha), \tag{3.21}$$

сопоставляющую новый элемент $\{\alpha\beta\gamma\}$ с каждыми тремя элементами α, β, γ алгебры Буля. В алгебре множеств $\{\mathrm{ABC}\} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$ представляет собой *объединение попарных пересечений* множеств А, В и С, или, что то же самое, *пересечение попарных объединений* этих трех множеств.

Тернарная операция (21), очевидно, коммутативна по любым двум входящим в нее элементам:

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \{\alpha\gamma\beta\} = \{\beta\alpha\gamma\} = \{\beta\gamma\alpha\} = \{\gamma\alpha\beta\} = \{\gamma\beta\alpha\}. \tag{3.22}$$

Далее, она обладает своеобразной дистрибутивностью:

$$\{\alpha\beta\{\gamma\delta\varepsilon\}\} = \{\{\alpha\beta\gamma\}\delta\{\alpha\beta\varepsilon\}\} \tag{3.22a}$$

и (ослабленной) ассоциативностью:

$$\{\alpha\beta\{\gamma\beta\delta\}\} = \{\{\alpha\beta\gamma\}\beta\delta\}. \qquad (3.22б)$$

Наконец, для нее имеет место закон, аналогичный идемпотентным законам для сложения и умножения:

$$\{\alpha\alpha\beta\} = \alpha. \qquad (3.23а)$$

Операцию можно определить с помощью тернарной операции $\{\alpha\beta\gamma\}$ следующим условием, родственным идемпотентному закону (23а):

$$\{\alpha\bar{\alpha}\beta\} = \beta. \qquad (3.23б)$$

Так как это условие симметрично относительно элементов α и $\bar{\alpha}$, то из него, очевидно, следует

$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Далее, если фиксировать в множестве элементов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, для которых определена тернарная операция $\{\alpha\beta\gamma\}$, «особый» элемент ι и положить $\bar{\iota} = o$, можно будет определить и оновные (бинарные) операции алгебры Буля через тернарную операцию $\{\alpha\beta\gamma\}$:

а) $\alpha + \beta = \{\alpha\beta\iota\}$, б) $\alpha\beta = \{\alpha\beta o\}$. (3.24)

при этом в силу (24)

$\alpha + o = \{\alpha o \iota\} = \{\alpha\bar{\iota}\iota\} = \alpha$ и $\alpha\iota = \{\alpha\iota o\} = \{\alpha\bar{\iota}\iota\} = \alpha$;

$\alpha + \iota = \{\alpha\iota\iota\} = \iota$ и $\alpha o = \{\alpha o o\} = o$.

Определения (23б) и (24а, б) позволяют сформулировать все аксиомы алгебры Буля таким образом, чтобы в них участвовала лишь тернар ная операция $\{\alpha\beta\gamma\}$.

Существуют и многие другие способы аксиоматического определения алгебры Буля; двух из них мы коснемся ниже.

§ 4. БУЛЕВЫ СТРУКТУРЫ И РЕШЕТКИ. КОНЕЧНЫЕ БУЛЕВЫ СТРУКТУРЫ

Выше мы уже встречались с понятием решетки – математической структуры

$$\mathbf{L} = < \mathcal{L}; \supset > \tag{4.1}$$

с одним (бинарным) отношением $\supset$ между элементами основного множества $\mathcal{L}$, являющимся отношением (частичного) порядка, т.е. удовлетворяющим аксиомам: P1 : $\lambda \supset \lambda$ для всех $\lambda \supset \mathfrak{I}$ (рефлексивность отношения -); P2 : если $\lambda \supset \mu$ и $\mu \supset \lambda$, то $\lambda = \mu$ (антисимметричность); P_3 : если $\lambda \supset \mu$ и $\mu \supset \nu$, то $\lambda \supset \nu$ (*транзитивность*). В последствии вместо $\lambda \supset \mu$ мы многда будем писать $\mu \supset \lambda$; мы также будем применять привычную для отношений порядка терминологию, говоря а «неравенствах», употребляя термины «больше» и «меньше», «максимум» и «минимум» и т.д.

Чтобы структура (1) являлась решеткой, необходимо выполнение для нее наряду с аксиомами $P_{1\text{-}3}$ еще одного дополнительного условия:

P_4 : для каждых λ, $\mu \in \mathcal{L}$ существует их (строгий) максимум $\max[\lambda, \mu]$ и (строгий) $\min[\lambda, \mu]$.

Однако выполнимость в каждой булевой структуре правил (XII) –(XIV) и (XVIII) доказывает, что каждая булева структура по существующему в ней отношению - представляет собой решетку.

Итак, от понятия булевой структуры легко перейти к понятию решетки: интересно, однако, что и многие решетки могут быть сведены к булевым структурам. Чтобы доказать это пока еще достаточно неопределенное утверждение, нам придется подробнее остановиться на общих свойствах решеток.

Аксиома P_4 постулирует существование в каждой решетке двух бинарных операций $\max$ и $\min$:

$$(\lambda, \mu) \to \rho = \max[\lambda, \mu] \text{ и } (\lambda, \mu) \to \sigma = \min[\lambda, \mu]. \tag{4.2}$$

Исходя из свойств (XVIII) булевой структуры, мы условимся называть эти операции («решетчатыми») сложением и умножением, в соответствии с чем введем следующие обозначения:

$\max\,[\lambda, \mu] = \lambda + \mu$ и $\min\,[\lambda, \mu] = \lambda\mu$ (4.2')

(разумеется, (2') – это даже не определение, а просто введение новой терминологии и символики для имевшихся ранее понятий).

Докажем теперь основные свойства введенных операций: в каждой решетке для любых $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathcal{L}$

а) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$ и б) $\lambda\mu = \mu\,\lambda$ (I)

(*коммутативность* решетчатых *сложения и умножения*);

а) $(\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$ и б) $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ (II)

(*ассоциативность* этих операций, позволяющая вместо фигурирующих в равенствах (III) выражений писать просто $\lambda + \mu + \nu$ и $\lambda\mu\nu$ без скобко);

а) $\lambda + \lambda = \lambda$ и б) $\lambda\lambda = \lambda$ (VI)

(*идемпотентность*);

а) $\lambda + \lambda\mu = \lambda$ и б) $\lambda(\lambda + \mu) = \lambda$ (VII)

(законы *поглощения*).

◀ В самом деле, равенства (I) и (VI) непосредственно следуют из определений (2') решетчатого сложения и умножения. Почти столь же очевидна и виполнимость равенств (II). Так как

$\pi = (\lambda + \mu) + \nu = \max\,[\max[\lambda, \mu], \nu]$,

то, очевидно. $\pi \supset \lambda$ и $\pi \supset \mu$ (ибо $\pi \supset \max[\lambda, \mu]$), а также $\pi \supset \nu$. Последние три неравенства можно записать так:

$\pi = \mathrm{Max}\,[\lambda, \mu, \nu]$ (4.3a)

Но, более того, π –наименьший из «максимумов» $\mathrm{Max}\,[\lambda, \mu, \nu]$ элементов λ, μ и ν, ибо, если $\Pi \supset \lambda$, $\Pi \supset \mu$ и $\Pi \supset \nu$, то $\Pi \supset \max\,[\lambda, \mu]$ (в силу самого определения строгого максимума) и $\Pi \supset \nu$, т.е. (снова в силу определения понятия $\max$)

$\Pi \supset \max[\max[\lambda,\mu],\nu] = \pi.$

Поэтому π – «наименьший максимум» для λ,μ и ν или «наименьший из больших и λ,μ и ν элементов», т.е. «строгий» максимум λ,μ и ν, что, естественно записать так:

$$\pi = \max[\lambda,\mu,\nu] \tag{4.4а}$$

Точно так же доказывается: если $\pi_1 = \lambda + (\mu+\nu) = \max[\lambda,\max[\mu,\nu]]$, то

$\pi_1 = \max[\lambda,\mu,\nu] = \pi,$

чем и устанавливается равенство (IIа). Совершенно аналогично доказывается и равенство (IIб), вытекающее из того, что в естественных обозначениях

$$(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu) = \max[\lambda,\mu,\nu]. \tag{4.4б}$$

Наконец,

$\nu = \lambda + \lambda\mu = \max[\lambda,\max[\lambda,\mu]]$,

откуда следует, что $\sigma \supset \lambda$. Но так как λ⊃λ (рефлексивность Р1 отношения ⊃!) и $\lambda \supset \max[\lambda,\mu]$, то по определению операции max имеем

$\lambda \supset \max[\lambda,\max[\lambda,\mu] = \sigma.$

А два неравенства $\sigma \supset \lambda$ и $\lambda \supset \sigma$ в силу антисимметричности P_2 влекут (VIIа):

$\sigma = \lambda.$

Совершенно аналогично устанавливается и равенство (VIIб).►

Докажем еще несколько свойств решеток, касающихся связи отношения - с (решентчатыми) сложением и умножением. А именно, покажем, что в каждой L для любых λ, $\mu,\nu\in\mathfrak{I}$

а) $\lambda + \mu \supset \lambda$ и б) $\lambda \supset \lambda\mu$; (XVI)

$\lambda \supset \mu$ равносильно тому, что

а) $\lambda + \mu \supset \lambda$, б) $\lambda\mu = \mu$; (XVII)

а) если $\lambda \supset \mu$ и $\lambda \supset \nu$, то $\lambda \supset \mu + \nu$ (XIX)

б) если $\lambda \supset \nu$ и $\mu \supset \nu$, то $\lambda\mu \supset \nu$

и

если $\lambda \supset \mu$, то а) $\lambda + \nu \supset \mu + \nu$; б) $\lambda\nu \supset \mu\nu$ (XX)

(согласованность отношения $\supset$ с решетчатыми сложением и умножением).

◀ Ясно, что правила (XVI), (XVII) и (XIX) непосредственно вытекают из определений (2') (в частности, предложения (XIX) суть определения строгого максимума и минимума). А из (XVII) сразу следует и (XX): в самом деле,если $\lambda \supset \mu$, то $\lambda + \mu = \lambda$ и
$(\lambda + \nu) + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + (\nu + \nu) = (\lambda + \mu) + +\nu = \lambda + \nu$, т.е.
$\lambda + \nu \supset \mu + \nu$; совершенно так же из (XVIIб) выводится (XXб) (здесь используется коммутативность, ассоциативность решетчатых сложения и умножения). ▶

Предложения (XVII) позволяют, считая заданными операции решетчатого сложения и умножения, с их помощью ввести отношение порядка $\supset$. А это, в свою очередь, приводит к (эквивалентному исходному) определению решетки как алгебоаической структуры

$\mathbf{L} = < L;\ +,\ \cdot >$ (4.1')

с двумя бинарными алгебраическими операциями + (сложение) и $\cdot$ (сложение), удовлетворяющими следующим восьми аксиомам:

$\mathrm{P}'_{1,2}$: а) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$ и б) $\lambda\mu = \mu\lambda$

(*коммутативность*);

$\mathrm{P}'_{3,4}$: а) $(\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$ и б) $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$

(*ассоциативность*);

$\mathrm{P}'_{5,6}$: а) $\lambda + \lambda = \lambda$ и б) $\lambda\lambda = \lambda$

(*идемпотентность*);

$\mathrm{P}'_{7,8}$: а) $\lambda + \lambda\mu = \lambda$ и б) $\lambda(\lambda + \mu) = \lambda$

[Ясно, что из «самодвойственного» характера определяющих решетку аксиом следует справедливость в теории решеток *принципа двойственности*, позволяющего заменять во всех относящихся к решеткам формулах и предложениях сложение умножением и наоборот; при этом в силу двойственности определений:

а) если $\lambda \supset \mu$, то $\lambda + \mu = \mu$;

б) если $\lambda \subset \mu$, то $\lambda\mu = \lambda$ (XVII)

отношение $\supset$ по принципу двойственности заменяется на $\subset$.]

◀ В самом деле, мы видели выше, что в каждой решетке при определениях (2') выполняются все правила P'_{1-8}. С другой стороны, пусть мы имеем структуру (1'), удовлетворяющую аксиомам P'_{1-8}; введем в ней отношение - условием:$\lambda \supset \mu$ равносильно равенству $\lambda + \mu = \lambda$.

(XVIIa). Заметим прежде всего, что (XVIIa) эквивалентно определению:

$\lambda \supset \mu$ равносильно равенству $\lambda\mu = \mu$. (XVIIб)

Действительно, пусть $\lambda \supset \mu$ в смысле определения (XVIIa); тогда в силу P'_8 и $P'_{1,2}$

$$\mu = \mu(\mu + \lambda) = \mu\lambda = \lambda\mu. \quad (4.5а)$$

Обратно, если выполняется (5а), то

$$\lambda = \lambda + \lambda\mu = \lambda + \mu, \quad (4.5б)$$

что и устанавливает эквивалентность равенств (5а) и (5б).

Далее, рефлексивность $\lambda \supset \lambda$ введенного согласно (XVIIa) отношения $\supset$ следует из идемпотентности сложения; транзитивность этого отношения вытекает из ассоциативности сложения, а антисимметричность – из коммутативности сложения. Наконец, равенство

$$\lambda + \mu = \max\,[\lambda, \mu] \quad (XVIa)$$

Базируется на законах поглощения:

из $\lambda(\lambda + \mu) = \lambda$ следует $\lambda \subset \lambda + \mu$ или $\lambda + \mu \supset \lambda$

аналогично убеждаемся в том, что $\lambda + \mu \supset \mu$, так что

$$\lambda + \mu = \mathrm{Max}\,[\lambda, \mu]. \quad (4.6)$$

Пусть теперь

$\mathrm{M} = \mathrm{Max}\,[\lambda, \mu]$, т.е. $\mathrm{M} \supset \lambda$ и $\mathrm{M} \supset \mu$, или $\mathrm{M} + \lambda = \mathrm{M} + \mu = \mathrm{M}$. (4.7)

Тогда

$$M + (\lambda + \mu) = (M + \lambda) + \mu = M + \mu = M, \qquad (4.7')$$

Откуда вытекает, что

$$M \supset \lambda + \mu. \qquad (4.8)$$

Из (6), (7) и (8) следует, что

$$\lambda + \mu = \max\,[\lambda, \mu] \qquad (XVIa)$$

Аналогично устанавливается

$$\lambda\mu = \min\,[\lambda, \mu] \qquad (XVIб)$$

чем и завершается проверка выполнимости в системе (1') всех аксиом $P_{1\text{-}4}$.►

Единичным элементом (или «единицей») решетки называется ее абсолютный максимум, т.е. такой элемент ι, что

$$\iota \supset \lambda \text{ для всех } \lambda \in \mathcal{L}. \qquad (XVa)$$

Аналогично нулевым элементом («нулем») решетки называется ее абсолютный минимум – такой элемент о, что

$$o \subset \lambda \text{ для все } \lambda \in \mathcal{L}. \qquad (XVб)$$

Разумеется, из одних лишь аксиом $P_{1\text{-}4}$ еще вовсе не следует существование в решетке единичного или нулевого элемента. [Исключением являются лишь конечные решетки, для которых множество

$\mathcal{L} = \{\lambda, \mu, \nu, \dots, \xi\}$ конечно – здесь, очевидно,

$\iota = \lambda + \mu + \cdots + \xi \;\; (= \max\,[\lambda, \mu, \dots, \xi]);$

$o = \lambda\mu \dots \xi \;\; (= \min\,[\lambda, \mu, \dots, \xi]),$

откуда ясно, что $\iota \in \mathcal{L}$ и $o \in \mathcal{L}$.] Так, например, в упорядоченном по обычному включению множестве всех *конечных* подмножеств множества натуральных чисел (решетка!) существует абсолютный минимум – пустое множество *O*, но не абсолютный максимум. Множество всех (положительных и неположительных) целых (или рациональных, или вещественных) чисел, упорядоченное обычным образом, ни нулевого элемента. Но если для решетки (1) дополнительно выполняется аксиома

P_5 : среди элементов решетки имеется как единичный элемент ι, так и нулевой элемент o,то для этой решетки, очевидно,

а) $\lambda + o = \lambda$ и б) $\lambda\iota = \lambda$; (IV)

а) $\lambda + \iota = \iota$ и б) $\lambda o = o$ (V)

для всех $\lambda \in \mathcal{L}$ (правила (IV) и (V) следуют из (2') и (XV)).

Особое место среди решеток с нулем и единицей (решеток, удовлетворяющих аксиоме P_5) заимают так называемые «решетки с дополнениями». Решетка (1) называется решеткой с дополнениями, если, помимо аксиом $P_{1\text{-}5}$, для нее выполняется также и аксиом

P_6 : для каждого $\lambda \in \mathcal{L}$ существует такое $\bar{\lambda} \in \mathcal{L}$, что $\max[\lambda,\ \bar{\lambda}] = \iota$,

$\min[\lambda,\ \bar{\lambda}] = o$, или, что то же самое,

а) $\lambda + \bar{\lambda} = \iota$, б) $\lambda\bar{\lambda} = o$. (VIII)

Элемент $\bar{\lambda}$ называется *дополнением* элемента λ.

Разумеется, из одного лишь факта существования в решетке нуля **o** и единицы **ι** вовсе не вытекает наличие дополнения у каждого элемента. Что известное нам из теории булевых структур утверждение

если $\lambda \subset \mu$, то $\bar{\mu} \supset \bar{\lambda}$, (XXI)

вообще говоря, не обязано выполняться для решеток с дополнениями. Однако в силу (IV) и (V) дополнения элементов ι и o всегда единственны:

а) $\bar{\iota} = o$ и б) $\bar{o} = \iota$.

Нетрудно видеть, что во всякой всякой решетке – с нулем и единией или без них – выполняется родственное родственное дистрибутивному закону (IIIa) неравенство

$\lambda(\mu + \nu) \supset \lambda\mu + \lambda\nu$ (4.9)

◀ В самом деле в силу (XVIa) и (XIXб)

$\lambda(\mu + \nu) \supset \lambda\mu$ и $\lambda(\mu + \nu) = \lambda(\nu + \mu) \supset \lambda\nu$,

откуда

$$\lambda(\mu+\nu)=\lambda(\mu+\nu)+\lambda(\mu+\nu)\supset\lambda(\nu+\mu)+\lambda\mu=\lambda\mu+\lambda(\mu+\nu)\supset\lambda\mu+\lambda\nu.$$

►

Однако равенство (дистрибутивный закон)

$$\lambda(\mu+\nu)=\lambda\mu+\lambda\nu \qquad \text{(IIIa)}$$

в решетке может и не выполняться.

Если же в решетке имеет место дистрибутивный закон (IIIa), т.е. выполняется аксиома

Р7 : $\lambda(\mu+\nu)=\lambda\mu+\lambda\nu$ для любых λ, μ, ν$\in\mathcal{L}$,

то решетка называется *дистрибутивной*. Так, например, дистрибутивной является, скажем, решетка (не имеющая нуля и единицы) всех целых чисел с естественным их упорядочением. В самом деле, легко видеть, что

$$a\otimes(b\oplus c)=\min[a,\max[b,c]]=\begin{cases}a, & \text{если } a\le b \text{ или } a\le c\\ \max[b,c], & \text{если } a\ge b \text{ и } a\ge c\end{cases}$$

и также

$$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)=\max[\min[\mathrm{a},\mathrm{b}],\min[\mathrm{a},\mathrm{c}]]=$$

$$=\begin{cases}a, & \text{если } a\le b \text{ или } a\le c\\ \max[b,c], & \text{если } a\ge b \text{ и } a\ge c\end{cases}$$

Докажем теперь, что *во всякой дистрибутивной решетке выполняется второй дистрибутивный закон*:

$$(\lambda+\mu\nu)=(\lambda+\mu)(\lambda+\nu). \qquad \text{(IIIб)}$$

◄ Пусть аксиома $Р_7$ выполняется, т.е. имеют место обычные правила раскрытия скобок. Тогда, в силу ассоциативности сложения и законов поглощения (VII),

$$(\lambda+\mu)(\lambda+\nu)=(\lambda+\mu)\lambda+(\lambda+\mu)\nu=\lambda+[(\lambda+\mu)\nu]=(\lambda+\lambda\nu)+\mu\nu=\lambda+\mu\nu$$

►.

Наконец, заметим, что в *дистрибутивной решетке с дополнениями дополнение $\bar{\lambda}$ элемента λ всегда единственно* – ведь приведенное на аксиома доказательство этого же утверждения для булевой структуры опирается лишь на (выполняющиеся для дистрибутивных решеток с дополнениями!)

коммутативность (Iб) умножения, свойства (IV) элементов ι и o и дистрибутивность (IIIa) (а также, разумеется, на определение (VIII) дополнения). А отсюда и из симметричности определяющих дополнение равентств (VIII) уже следует, что операция взятия дополнения инволютивна:

$\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$. (IX)

Далее, правила де Моргана

а) $\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}$ и б) $\overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$ (XI)

также выполняются для таких решеток. ◄ Действительно, в силу ассоциативности сложения и умножения, свойств o и ι и дистрибутивных законов (III)

$(\lambda + \mu) + \bar{\lambda}\bar{\mu} = \iota$ и $(\lambda + \mu)(\bar{\lambda}\bar{\mu}) = o$

– откуда и вытекает правило (XIa). Наконец, из единственности дополнения, определений (XVII) отношения ⊃ и правил де Моргана (XI) вытекает соотношение (XXI).

Ясно, что аксиомы Р1-7 выполняются в любой булевой структуре, т.е. что булева структура по присущему ей отношению ⊃ является дистрибутивной *решеткой с дополнениями*. Но и обратно, как мы видели, для каждой дистрибутивной решетки с дополнениями выполняются все основные свойства (аксиомы) булевой структуры, так что *каждая дистрибутивная решетка с дополнениями одновременно является и булевой структурой*, в которой «булевы» сложение и умножение определяются равенствами (2'). Таким образом, аксиомы $P_{1\text{-}7}$ дистрибутивной решетки с дополнениями можно рассматривать как еще один вариант аксиоматики булевой структуры.

Связь булевых структур с решетками может быть использована для исчерпывающего описания конечных булевых структур, т.е. таких структур $\mathrm{B} = < \mathfrak{B};\ +,\ \cdot, \bar{\ },\ \supset >$, для которых множество $\mathfrak{B}$ является конечным. Для того чтобы разобраться в том, как могут быть устроеные такие булевы структуры, нам понадобятся некоторые новые понятия.

Условимся называть *атомами* решетки $\mathbf{L} =< L; \supset>$ с нулевым элементом **о** ее «элементы 1-го яруса», если считать, что «нулевой ярус» решетки составляет ее абсолютный минимум о; другими словами, атомы – это элементы, старшие одного лишь элемента о:

$\boldsymbol{\alpha}$ –атом, если $\alpha \neq$ о и из $\alpha \supset \beta$ следует $\beta = \alpha$ или $\beta =$ о. (4.10)

[Это определение никак не фиксирует, существует ли в решетке L также и единичный элемент **ι**; является ли L решеткой с дополнениями; является ли она дистрибутивной или нет.]. Так, например, атомами решетки (даже булевой структуры) подмножеств какого-либо универсального множества $I = \{x, y, z, \dots\}$ являются его одноэлементные подмножества $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \dots$ и т.д.

Однако если решетка имеет атомы $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots$, то

$$\alpha_i \alpha_j = f(x) = \begin{cases} \alpha_i \text{ при } i = j \\ \text{о} \text{ при } i \neq j \end{cases} \text{для всех } i, j = 1, 2, 3, \dots \qquad (4.11)$$

– ведь $\alpha_i \alpha_j \subset \alpha_i$ и $\alpha_i \alpha_j \subset \alpha_j$, т.е. при $i \neq j$ произведение $\alpha_i \alpha_j$ является элементом нулевого яруса, или нулем нашей решетки.

Пусть теперь $\alpha -$ атом решетки **L**; тогда про элемент $\lambda \supset \alpha$ этой решетки мы будем говорить, что он *роизрастает* из атом α, а атом α назовем *корнем* элемента λ.

Определение. Решетка $\mathbf{L} =< L; \supset >$ называется *атомарной*, если все ее ненулевые элементы имеют корни среди атомов этой решетки (если вся решетка произрастает из множества своих «атомов» в том смысле, в каком мы употребляли это выражение выше).

Каждая конечня решетка (решетка $\mathbf{L} =< L; \supset >$, где множество $\mathcal{L}$ конечно) с нулевым *элементом* о *является атомарной.*

◀ В самом деле, пусть $\lambda \in \mathcal{L} -$ произвольный ненулевой элемент решетки. Если λ – атом, то он является своим собственным корнем; пусть теперь λ – не атом, т.е. существует такой элемент λ_1, что

$$\lambda_1 \subset \lambda,\ \lambda_1 \neq \lambda \ \text{ и } \lambda_1 \neq o. \tag{4.12}$$

Введем временно (только для доказательство этого утверждения) отношение $>$ между элементами решетки:

$\lambda > \mu$, если $\lambda \supset \mu$ и $\lambda \neq \mu$;

это отношение очевидно,

антирефлексивно: ни для одного $\lambda \in \mathcal{L}$ не имеет место отношение $\lambda < \lambda$;

антисимметрично (в строгом смысле): нет таких $\lambda, \mu \in \mathcal{L}$, что $\lambda > \mu$ и $\mu > \lambda$;

транзитивно: если $\lambda > \mu$ и $\mu > \nu$, то $\lambda > \nu$.

Из (12) следует

$$\lambda > \lambda_1 \ (\text{и } \lambda, \lambda_1 \neq o). \tag{4.13а}$$

Точно так же, если λ_1 – не атом, то существует $\lambda_2 \in \mathcal{L}$, где

$$\lambda_1 > \lambda_2 \ (\text{и } \lambda_2 \neq o); \tag{4.13б}$$

Если λ_2 – не атом, то существует $\lambda_3 \in \mathcal{L}$, где

$$\lambda_2 > \lambda_3 \ (\text{и } \lambda_3 \neq o); \tag{4.13в}$$

и т.д. Таким образом, мы приходим к последовательности «строгих неравенств» (13 а, б, в, …), которые в силу транзитивности отношения $>$ можно свести в одну цепочку:

$$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots \ (\text{и все } \lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots \neq o). \tag{4.14}$$

Но так как в силу антирефлексивности и транзитивности отношения $>$ все элементы цепочки (14) различны, то в силу конечности числа элементов $\mathcal{L}$ эта цепочка не может быть бесконечной; следовательно, она кончается каким-либо атомом α –корнем элемента λ, т.е. все элементы решетки произрастают из ее корней.►

Для дальнейшего нам будет полезна также.

Лемма. Если атом α дистрибутивной решетки **L** является корнем суммы $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, то из α произрастает хотя бы один из элементом $\lambda_1, \ \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

◀ В самом деле, пусть α не является корнем ни одного из элементов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, т.е. не имеет места ни одно из неравенств $\lambda_1 \supset \alpha$ или ни одна из равенств $\alpha\lambda_i = \alpha$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Но так как $\alpha\lambda_i \supset \alpha$, то по определению атома $\alpha\lambda_i = o$ для всех ι. А отсюда в силу дистрибутивного закона P_7 имеем

$\alpha(\lambda_1 + \ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \alpha\lambda_1 + \ \alpha\lambda_2 + \cdots + \alpha\lambda_n = o + o + \cdots + o = o$

что, однако, противоречит условию

$\lambda_1 + \ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \alpha$ (т.е. $\alpha(\lambda_1 + \ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \alpha\alpha = \alpha$) ▶

Следствие. Пусть **L** – дистрибутивная решетка с дополнениями (т.е. булева структура – вот тут, наконец, мы переходим от решеток к к булвым структурам); тогда для любого элемента λ и любого атома α выполняется одно итолко одно из неравенств

$\lambda > \alpha$ и $\bar{\lambda} > \alpha$ (4.15)

(т.е. из α произрастает один, и только один, элемент из каждой пары взаимно дополнительных элементов λ, $\bar{\lambda}$).

◀ Так как $\lambda + \bar{\lambda} = \iota \supset \alpha$, то α является корнем суммы $\lambda + \bar{\lambda}$, т.е. в силу нашей леммы корнем хоть одного из элементов λ и $\bar{\lambda}$. При этом быть одновременно корнем и λ и $\bar{\lambda}$ атом α не может: если выполняются оба неравенства (15), то в силу монотонности (XXб) умножения

$\text{o} = \lambda\bar{\lambda} \supset \lambda\alpha \supset \alpha\alpha = \alpha,$

что, однако, противоречит определению элемента o. ▶

Рассмотрим теперь конечную (и, следовательно, атомарную) булеву структуру $\text{B} =< \mathfrak{B}; +, \cdot, ^{-}, \supset>$ (дистрибутивную решетку $\mathbf{L} =< \mathcal{L}; \supset >$ с дополнениями); число *k* атомов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ сруктуры **B** мы назовем ее *рангом*, а множество

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ – *корневым* множеством. Сопоставим каждому элементу $\lambda \in \mathfrak{B}$ множество $A_\lambda = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_l}\}$ тех атомов, которые являются корнями λ:

$$\lambda \to A_\lambda = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_l}\}. \qquad (4.16)$$

Ясно, что (16) отображение $\mathfrak{B} \to \mathcal{A}$, где A – множество всех подмножеств множества А; при этом, очевидно, $A_\iota = A$ –это все множество А (ибо ι – абсолютный максимум решетки), а $A_o = O$, где О – пустое множество.

Имеет место следующая основая.

Теорема. Отображение (16) взаимно-однозначно; оно является изоморфным отображением булевой структуры В на булеву структуру $A =< \mathcal{A}; +, \cdot, ^-, \supset >$ всевозможных подмножеств множества A.

◄Ясно, прежде всего, что (16) – это отображение $\mathfrak{B}$ на A, т.е. что в каждое подмножество $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_q}\} \in \mathcal{A}$ отображается хоть один элемент из $\mathfrak{B}$ – элемент

$$\lambda = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_q}\} \qquad (4.17)$$

В самом деле, разумеется, $\lambda \supset \alpha_{i_t}$, где $t = 1, 2, \dots$ или q. С другой стороны, если $\lambda \supset \alpha$, где $\alpha \in A$, то сумма (17) произрастает из α, откуда в силу Леммы следует, что α есть корень одного из элементов α_{i_t}. Но если $\alpha \neq \alpha_{i_t}$, то это противоречит определению атома: ведь если α_1 и α_2 – два разных атома, то $\alpha_1 \alpha_2 = o$.

Далее, пусть λ и μ – два разных элемента структуры; покажем, что $A_\lambda \neq A_\mu$. Так как $\lambda \neq \mu$ и отношение ⊃ антисимметрично, то никак не могут иметь места сразу оба отношения $\lambda \supset \mu$ и $\mu \supset \lambda$; пусть, например, не выполняется первое из них. В таком случае $\bar{\lambda}\mu \neq o$ (ибо равенство $\bar{\lambda}\mu = o$ равносильно отношению $\lambda \supset \mu$.). так как наша структура атомарна, то элемент $\bar{\lambda}\mu$ произрастает из некоторого корня α, т.е. $\bar{\lambda}\mu \supset \alpha$. Но из неравенств $\bar{\lambda} \supset \bar{\lambda}\mu \supset \alpha$ и $\mu \supset \bar{\lambda}\mu \supset \alpha$ следует, что α есть корень элемента μ и α есть корень $\bar{\lambda}$, т.е. α –не корень λ.; таким образом, $\alpha \notin \mathrm{A}_\lambda$. Поэтому при $\lambda \neq \mu$ также и $\mathrm{A}_\lambda \neq \mathrm{A}_\mu$, т.е. отображение (16) ваимнооднозначно.

Теперь мы можем записать (16) в виде явной формулы:

$$\mathrm{A}_\lambda = \left\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_q}\right\} \leftrightarrow \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_q} = \lambda. \quad (4.16')$$

Из (16') прежде всего вытекает, что если $\mathrm{A}_\lambda \supset \mathrm{A}_\mu$, то $\lambda \supset \mu$ отсюда в силу ваимнооднозначности отображения (16') следует равносильность отношений $\mathrm{A}_\lambda \supset \mathrm{A}_\mu$ и $\lambda \supset \mu$. Далее,если $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A}_\mu + \mathrm{A}_\nu$, то $\lambda = \mu + \nu$. (4.18а)

Затем из идемпотентного закона (VIб), равенства (11) и формулы (16') получаем: если $\mathrm{A}_\lambda = \left\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_q}\right\} \leftrightarrow \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_p} = \lambda$

и $\mathrm{A}_\mu = \left\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_q}\right\} \leftrightarrow \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \dots + \alpha_{j_q} = \mu$,

то $$\mathrm{A}_\lambda \mathrm{A}_\mu \leftrightarrow \left(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_p}\right)(\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \dots + \alpha_{j_q}) = \lambda\mu. \quad (4.18б)$$

Наконец, так как, очевидно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \iota \quad (4.19)$$

(ибо, как мы знаем, $A \longleftrightarrow \iota$ в силу отображения (16)), то

если $\overline{\mathrm{A}}_\lambda = \overline{\mathrm{A}}_\mu$, то $\lambda\mu = \mathrm{o}$ и $\lambda + \mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \iota$, т.е. $\mu = \bar{\lambda}$. (4.18в)

Предложения (18а – в) и устанавливают, что отображение (16) – это изоморфизм. ►

Итак, мы доказали, что каждая (конечная) булева структура B_k ранг *k* изоморфна алгебре A_k подмножеств (конечного) *k*-элементного множества; поэтому число ее элементов (называемое также *порядком,* структуры) равно 2^k. Таким образом, порядок произвольной конечной булевой структуры обязательно является целой *степенью двойки.* При этом ранг (или порядок) конечной булевой структуры полностью эту структуру характеризует, подобно тому как, скажем, конечномерное векторное пространство полностью характеризуется своей размерностью: структура ранга k или порядка 2^k изоморфна алгебре подмножеств k-элементного множества.

Ясно, что 2^k элементов конечной структуры ранга k можно разбить на k+1 «ярусов», где i-й ярус образуют элементы структуры, отвечающие i-элементным подмножествам k-элементного множества A; при этом 0-й и k-й ярусы состоят из единственного элемента o и i- соответственно, а i-й ярус содержит $C_k^i (= k!/[i!\,(k-i)!])$ элементов булувой структуры. При этом отношение ⊃ может связывать лишь (различные) элементы разных ярусов, причем «большими» оказываются элементы старшего по номеру яруса; легко также видеть, что каждый элемент i-го яруса «больше» i (и только i) элементов (i – 1)-гояруса и «меньше» $k-i$ (и только $k-i$) элементов $(i+1)$-го яруса. Однако эта наглядность и простота строения конечных булевых структур не переносится на случай бесконечных булевых структур. Правда, одна из основных теорем общей теории булевых структур утверждает *возможность реализации каждой булевой структуры в виде системы подмножеств некоторого универсального множества I*.

Основной теорема об отображении (16') кажется специфически «булевой» и далекой от всех привычных нам арифметических и алгебраических фактов и теорем; однако на самом деле она имеет глубокие аналогии в обычной арифметике. Условимся, прежде всего, называть элемент λ булевой структуры оддитивно составным, если он разбивается на сумму двух отлиных от λ слагаемых:

$\lambda = \mu + \nu$, где $\mu \neq \lambda$ и $\nu \neq \lambda$ (4.20)

и (аддитивно) простым, если единственное разложение λ в сумму различных слагаемых имеет вид $\lambda = \lambda + \mathrm{o}$ или $\lambda = \mathrm{o} + \lambda$. (4.21)

Теорема об однозначности разбиения на слагаемые. Каждая конечная булева структура **B** обладает конечным набором аддитивно простых элементов (атомов) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$; при этом любой элемент структуры однозначо разбывается на сумму простых слагаемых:

$(\lambda = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_l}$ (4.22a)

которая при $\lambda = 0$ может и не содержать ни одного слагаемого).

Обратимся теперь к принципу двойстепенности. В силу этого принципа аддитивно простым элементам (атомам) отвечают *мультипликативно простые* элементы булувой структуры, такие, что единственно возможным разложением λ в проиведение различных множителей является разложение

$\lambda = \lambda\iota = \iota\lambda$; (4.22б)

Все же другие элементы, для которых возможно разложение

$\lambda = \mu\nu$, где μ, $\nu \neq \lambda$, мы назовем (*мультипликативно*) составными.

Теорема об единственности разложения на простые множители. Каждая конечная булева структура обладает конечным набором (*мультипликативно*) простых элементов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, причем любой элемент λ структуры однозначно разлагается в произведение

$\lambda = \beta_{i_1} + \beta_{i_2} + \cdots + \beta_{i_p}$ (4.22в)

простых множителей.

Эта теорема родственна известной теорема об единственности разложения каждого натурального числа в произведение простых множителей, в силу своегозначения ранее зачастую именовавшейся «основной теоремой арифметики».

Заключение

В этой работе мы показали, что Булевы структуры можно задать более простой системой аксиом, которое определяется как в третьем параграфе. И как показано в четвертом параграфе булевы структуры можно реализовать, как упорядоченные решетки, т.е. упорядоченные решетки являются модельным булевых структур.

Данную работу можно использовать как методическое пособие для учащихся и преподавателей академических лицеев с углубленным обучении математики, на факультативных занятиях по математики и информационной технологии.

Литература

1. Каримов И.А. Узбекистан, устремленный в XXI век. – Т. «Узбекистан», 1998 г.
2. Эдельман С.Л. математическая логика. М. 1975г.
3. Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. М. 1982 г.
4. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М. 1966 г.
5. Биркгоф Г. Теория решеток. М. 1984 г.
6. Гретцер Г. Общая теория решеток. М. 1982 г.
7. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов. 1991 г.
8. Яглом И.М. Булева структура и ее модели. М. 1980 г.
9. www.google.ru
10. http://mirkning. com/knigi/nauka-ucheda/ 1181412561-buleva-struktura-nee-modeli.html.
11. http://books.tr.200.ru/v.php?id=1250833
12. http://goraknig.org/nauka-i-ucheba/?kniga=MTI 1 MDgzMw