

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO'LIMI**

Qo'lyozma huquqida

UDK 512:371.3

“Matematik analiz” kafedrası

ABDIYEVA SHOIRA SHUKUROVNA

**“ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI O'QITISHDA
O'QUVCHILARNING VIZUAL TAFAKKURINI SHAKLLANTIRISH
METODIKASI”**

Mutahasislik: 5A460101-Matematik tahlil

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan
DISSERTATSIYA

Himoyaga tavsiya etaman

Magistratura bo'limi boshlig'i

_____ **M.X.Esanov**

«_____» 2012 y.

“Matematik analiz” kafedrası

mudiri:

_____ **f.-m.f.d., prof. J.O.Taxirov**

Ilmiy rahbar: _____

f.-m. f.n., dots. R.M. Turgunbayev

Toshkent – 2012

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I bob. O'quvchilarda vizual takakkurni shakllantirishning pedagogik-psixologik asoslari	
1.1. Tafakkur va uning turlari.....	8
1.2. Vizual tafakkur va uning o'ziga xos xususiyatlari.....	18
1.3. Vizual tafakkurni shakllantirishda matematik masalalarning ahamiyati.....	25
 I bob bo'yicha xulosalar.....	 31
 II bob. O'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish metodikasi	
2.1. Vizual tafakkurni rivojlantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiyasi.....	32
2.2. Axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanish yo'llari.....	50
2.3. Grafikka oid masalalardan foydalanish metodikasi.....	52
 II bob bo'yicha xulosalar.....	 69
 III bob. Tajriba-sinov ishini tashkil etish va uning natijalari	
3.1. Tajriba-sinov ishining tashkil etilishi.....	70
3.2. Tajriba-sinov ishining natijalari.....	76
 III bob bo'yicha xulosalar.....	 82
 Xulosa va takliflar.....	83
Adabiyotlar ro'yhati.....	84
Ilovalar.....	88

KIRISH

Vatanimiz mustaqillikka erishgach, Prezidentimiz Islom Karimov rahnamoligida ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish, yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi.

Prezidentimiz ushbu sohaga respublikamiz mustaqillikka erishish arafasidan e'tibor qaratdilar: "Fan mustahkam bazis negizidagina samarali rivojlanishi mumkin. Shu munosabat bilan sizlarning e'tiboringizni xalq ta'limi butun sistemasini, eng avvalo, oliy maktabni isloh qilish zarurligiga qaratmoqchiman" [3, (84-85)].

Prezidentimiz ta'limning jamiyat rivojidagi o'rniga "Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq" [4, (61-62)] deya baho berdilar.

Bosib o'tilgan 20 yil mobaynida ta'lim sohasida amalga oshirilayotgan islohatlar samaralari, to'plangan tajribalar bilan keng jamoatchilikni tanishtirish maqsadida 16-17 fevral kunlari Toshkentda "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash – mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzusidagi xalqaro konferensiya katta muvaffaqiyat bilan o'tdi. Prezidentimiz ushbu konferensiyada so'zlagan nutqlarida ta'lim sohasida amalga oshirilgan ishlar, qo'lga kiritilgan yutuqlarni ta'kidlab o'tar ekanlar, kelgusida amalga oshirilishi lozim bo'lgan vazifalarni ham belgilab berdilar.

Yoshlarning bilim olishlari uchun yaratilayotgan sharoit, katta e'tibor ularga katta mas'uliyat ham yuklaydi [5].

Mavzuning dolzarbligi: Matematikani o'qitishning, xususan algebra va analiz asoslarini o'qitishning asosiy maqsadlaridan biri o'quvchi tafakkurini shakllantirish va rivojlantirishdan iborat. Axborotlar asri shu asrda muvaffaqiyatli yashash uchun insondan keng rivojlangan tafakkurni taqoza qiladi. Shu kunga

qadar o'quvchilarda mantiqiy tafakkurni rivojlantirishga katta e'tibor berilib kelindi. Lekin so'ngi yillarda boshqa tafakkur turlarini ham o'quvchilarda rivojlantirish, bu tafakkur turlari orasida uzviylikni ta'minlash masalasi dolzarb masala ekanligi pedagogik va metodik tadqiqotlarda qayd etilmoqda. Tafakkur turlaridan biri vizual tafakkur bo'lib, psixologlar tomonidan vizual tafakkur to'g'risida ko'plab ma'lumotlar to'plangan. Bu tafakkur turi matematik masalalarni, xususan analiz asoslariga oid masalalarni echishda keng tatbiqqa ega. Ammo shunday masalalar yordamida o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish va rivojlantirish masalasi kam o'rganilgan.

Tadqiqotning ishlanganlik darajasi: Kadrlar tayyorlash dasturini ro'yobga chiqarishning uchinchi-«to'plangan tajribalarni tahlil etish va umumlashtirish asosida, mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish istiqbollariga muvofiq kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish va yanada rivojlantirish» [2, (40-41)]-bosqichida o'quv-tarbiya jarayonini yangi o'quv-uslubiy majmualar, ilg'or pedagogik texnologiyalar bilan to'liq ta'minlash vazifalari belgilangan bir davrda to'plangan tajribalarni, ilmiy, ilmiy-metodik adabiyotlarda keltirilgan ilmiy xulosalarni tanqidiy o'rganib, ta'lim jarayoniga tatbiq etish yo'llarini ishlab chiqish dolzarb masala ekanligi qayd etilgan.

V.A.Dalinger [14], N.A.Reznik [26] o'zining ilmiy izlanishlarida kognitiv-vizual yondashuv va uning matematikani o'qitishdagi ahamiyatini o'rgangan. G.E.Perevalov [25], O.S.Ivashev-Musatov [17], B.G.Glagolyeva [16] larning ilmiy izlanishlarida qisman grafikka oid masalalar o'rganilgan. P.G.Satyanov [27] ilmiy ishlarida grafik mazmundagi masalalarni klassifikatsiyalagan. N.V. Shukina [41], D.A.Kartyojnikov [18] larning ilmiy ishlarida vizual tafakkurni shakllantirishga qaratilgan vositalar va ulardan ta'lim jarayonida foydalanish haqida ma'lumot berilgan.

Tadqiqot maqsadi: “Algebra va analiz asoslari” fanini o'qitishda o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish metodikasini ishlab chiqish.

Tadqiqotning maqsadini amalga oshirish uchun quyidagi vazifalar belgilandi:

1. Vizual tafakkur va uning o'ziga xos xususiyatlarini o'rganish.
2. Vizual tafakkurni shakllantirishda matematik masalalarning ahamiyatlarini ochib berish.
3. Vizual tafakkurni shakllantirishda yordam beradigan masalalarni klassifikatsiyalash.
4. Vizual tafakkurni shakllantirishda grafikka oid masalalardan foydalanish metodikasini ishlab chiqish.
5. Tajriba-sinov ishini o'tkazish.

Tadqiqot ob'yekti: Akademik litseylarda algebra va analiz asoslarini o'rganish jarayoni

Tadqiqot predmeti: Akademik litseylarda algebra va analiz asoslarini o'rganishda o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish mazmuni, metodlari, vositalari, shakllari.

Tadqiqotning ilmiy farazi: Agar vizual tafakkurni shakllantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiya qilinsa va undan matematik analiz asoslarini o'rganish jarayonida foydalanish metodikasi ishlab chiqilsa, akademik litsey o'quvchilarining vizual tafakkuri shakllanadi hamda algebra va analiz asoslarini o'rganish samaradorligi oshadi.

Tadqiqotning metodologik asosi: O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi, "Ta'lim to'g'risida"gi qonun, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi", ta'lim sohasidagi davlat siyosatining asosiy tamoyillari, mavzuga oid falsafiy, psixologik, pedagogik manbalar, bilish nazariyasi, didaktikaning asosiy qonunlari va tamoyillari, shaxsga yo'naltirilgan ta'limni amalga oshirish, ta'lim-tarbiya jarayonida zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalanish bo'yicha yaratilgan nazariyalar xizmat qiladi.

Tadqiqot metodlari: Vazifalarni hal etish va farazni tekshirish uchun quyidagi usullar foydalanildi:

- tadqiqot mavzusi bo'yicha psixologik, pedagogik va metodik adabiyotlar tahlili;
- akademik litsey matematik analiz asoslari bo'yicha dasturlar, o'qitish shakllari, metodlari va vositalari tahlili;
- akademik litsey o'quvchilari orasida tajriba-sinov, so'rovnoma va testlar o'tkazish;
- umumlashtirish, taqqoslash, tizimlashtirish;
- izlanuvchan-tasdiqlovchi, shakllantiruvchi, nazorat-tuzatish va nazorat, umumlashtiruvchi bosqichlaridan iborat pedagogik tajriba-sinov ishi;
- matematik statistika metodlari.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

- Vizual tafakkurni shakllantirishda matematik masalalarning ahamiyati ochib berildi.
- Vizual tafakkurni shakllantirishda yordam beradigan masalalar klassifikatsiyasi to'ldirildi.
- Vizual tafakkurni shakllantirishda grafikka oid masalalardan foydalanish metodikasi ishlab chiqildi.
- Vizual tafakkurni shakllantirishda axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanish yo'llari ochib berildi.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati: ushbu tadqiqot ishidan ilmiy izlanishlar olib borish, keltirilgan xulosa va tavsiyalardan hamda metodik qo'llanmadan amaliyotda akademik litsey va kasb-hunar kollejlari foydalanish mumkin.

Tadqiqotning tajriba - sinov maydoni Toshkent Davlat Agrar universiteti qoshidagi Qibray akademik litseyi.

Tadqiqotni amalga oshirish bosqichlari: tadqiqot ishi 4 bosqichda olib borildi:

1-bosqich (izlanuvchan-tasdiqlovchi) (2010-2011 yillar)da tadqiqot mavzusi bo'yicha psixologik, pedagogik va metodik adabiyotlar tahlil qilindi, ilmiy-tadqiqot ishining muammosi, maqsadi, ilmiy farazi va vazifalari belgilandi.

2-bosqich (shakllantiruvchi) 2011-2012 yillarda algebra va analiz asoslarini o'qitish metodikasi ishlab chiqildi.

3-bosqich (nazorat-tuzatish va nazorat bosqichlari) 2011-2012 yillarda tajriba-sinov va tadqiqotlar natijalari umumlashtirildi, tajriba sinov ishlariga aniqliklar kiritiladi. Ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligi tajriba-sinovda tekshirildi.

4-bosqich (umumlashtiruvchi) Tajriba-sinov ishining statistik tahlili qilinib, ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligi aniqlandi. Tegishli xulosalar chiqariladi, maqolalar tayyorlandi. Magistrlik dissertatsiya shakllantirildi.

Dissertatsiyaning tuzilishi va tarkibi: Ushbu magistrlik dissertatsiyasi kirish, uch bob, jami 8 paragraf, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar va ilovalardan iborat bo'lib, dissertatsiyaning asosiy qismi 87 betni tashkil qiladi.

Dissertatsiyaning 1-bobida o'quvchilarda vizual tafakkurni shakllantirishning pedagogik-psixologik asoslari keltirilgan. Unda matematik masalalar yordamida vizual tafakkurni shakllantirish mumkinligi yoritilgan. 2-bobida matematik masalalar va axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanib o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish metodikasi ishlab chiqilgan. 3-bobida ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligini aniqlash maqsadida qilingan tajriba-sinov ishining tashkil etilishi hamda uning natijalari yoritilgan.

I BOB. O'QUVCHILARDA VIZUAL TAKAKKURNI SHAKLLANTIRISHNING PEDAGOGIK-PSIXOLOGIK ASOSLARI

1.1. Tafakkur va uning turlari

Muayyan ijtimoiy muhitda turmush kechirayotgan odamlarning ehtiyojlari, xatti-xarakat motivlari, narsalarga qiziqishlari, intilishlari, mayllari, aqliy qobiliyatlari, hatto faoliyatlari ham turli-tumandir. Xuddi ana shu boisdan, ularning tafakkuri ham har xil xolatlarda, vaziyatlarda turlicha tarzda vujudga keladi, nomoyon bo'ladi.

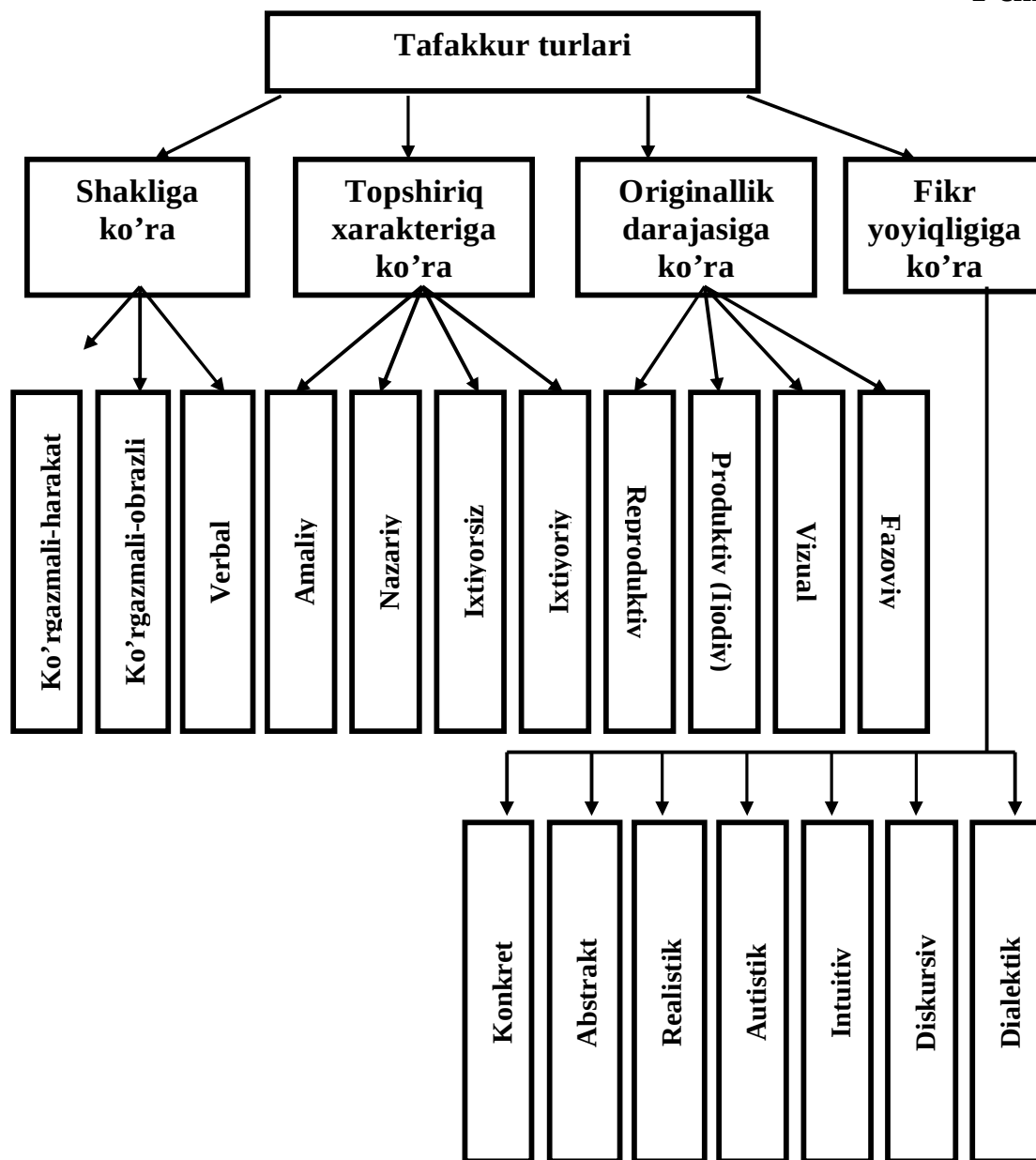
Tafakkur atrof-muhitdagi voqelikni nutq yordami bilan bavosita, umumlashgan holda aks ettiruvchi psixik jarayon, sotsial sababiy bog'lanishlarni anglashga, yangilik ochishga va prognoz qilishga yo'naltirilgan aqliy faoliyatdir.

Tafakkur jarayonining muhim xususiyatlaridan biri – nutq yordamida voqelikni aks ettirishdir. Tafakkur bilan nutqning o'zaro bog'liqligi fikr yuritish operatsiyalarining vujudga kelishini osonlashtiradi.

Tafakkurning ikkinchi muhim xususiyati bog'lanishlarni bevosita aks ettirishdir. Ushbu xususiyat tafakkurning moddiy asoslari va mehanizmlariga bevosita ta'sir qilish qudratiga ega bo'lmagan atrof-muhitdagi voqealarni aniqlash va tushuntirish imkonini yaratib beradi.

Tafakkurning uchinchi xususiyati so'z (nutq) orqali narsa va hodisalar o'rtasidagi murakkab munosabatlarni aks ettirishdan iboratdir. Insonning fikr yuritishi bir va undan ortiq so'zlarda ifodalanuvchi tushunchalar vositasida ifodalanadi. Shuning uchun odam o'ylayotganida o'z fikrini aytayotgandek, gapirayotganda esa fikr yuritayotgandek tuyuladi [40, (6-16)].

Tafakkur turli asoslarga ko'ra quyidagicha klassifikatsiya qilinadi: formasiga ko'ra, topshiriq harakteriga ko'ra, fikr yoyiqligiga ko'ra, fikrning originallik darajasiga ko'ra (1-chizma) [37, (48-50)].



Quyida keltirilgan tafakkur turlarining qisqacha ta'riflarini E. G'ozziyev muallifligidagi "Tafakkur psixologiyasi" [40, (62-78)] kitobidan foydalanib bayon qilamiz.

Ko'rgazmali-harakat tafakkur

Bola tug'ilishidan tortib, to uning bog'cha yoshigacha bo'lgan davrni amaliy faoliyatda ko'rgazmali-harakat tafakkur o'sishining asosiy pallasi deb atash mumkin. Mazkur yoshdagi inson zoti ana shu amaliy faoliyat qobig'ida aqliy

harakatlarni amalga oshiradi. Amaliy bilimlarni o'zlashtiradi, natijada ko'rgazmali-harakat tafakkur o'sa boradi. Ushbu yoshdagi kichkintoylar o'zlari o'ynayotgan narsalar, o'yinchoqlarni qo'llari bilan bevosita ushlab ko'rish orqali ular bilan tanishadilar, shuning bilan birga ularni idrok qilishga intiladilar. Idrok qilgan predmet va o'yinchoqlarini o'zaro solishtiradilar, qismlarga ajratadilar, analiz va sintez qiladilar, bo'laklarga ajratilganlarni yahlit holga keltirib birlashtiradilar. Kattalar tushuntirishiga ishonch hosil qilmasdan, ayni chog'da ularda ob'yektlarni sindirib yoki buzib bo'lsa ham ularning ichki tuzilishi bilan tanishish ishtiyoqi kuchli bo'ladi. Shu boisdan amaliy harakterdagi muammolarni hal qilishda ko'pincha "buzib-tuzatish" yo'li bilan harakat qiladilar. Ko'rgazmali-harakat tafakkur bog'cha yoshiga yetgandan so'ng bolada o'z qiymatini yo'qota boshlaydi.

Ko'rgazmali-obrazli tafakkur

Inson tomonidan bevosita idrok qilinayotgan predmetlar emas, balki faqat tasavvur qilinayotgan narsa va hodisalar haqida fikrlashdan iborat tafakkur turi ko'rgazmali-obrazli tafakkur deb ataladi. Tafakkurning mazkur ko'rinishi 4 – 7 yoshgacha bo'lgan bolalarda namoyon bo'ladi. Bog'cha yoshidagi bolalarda ko'rgazmali-harakat tafakkurning amaliy elementlari ko'rgazmali-obrazli tafakkur bosqichiga o'tgandan so'ng ham saqlanib qoladi, lekin u o'zining yetakchi rolini yo'qota boshlaydi. Ushbu yoshdagi kichkintoylar jism va predmetlar bilan tanishayotganda analitik-sintetik faoliyatidan foydalanib ish ko'rayotganda ularni qo'l bilan ushlab ko'rishga, ichki tuzilishi bilan amalda tanishishga intilmaydilar. Chunki ko'p hollarda ulardan amaliy harakat qilish talab qilinmaydi. Lekin bu ular jism va predmetlarni, ob'yektlarni aniq va to'liq idrok qilish, yaqqol tasavvur etish imkoniyatidan mustasno qilinadi degan so'z emas, albatta. Bog'cha yoshidagi bolalar ilmiy tushunchalarga ega bo'lmaganliklari uchun bilish faoliyatida asosan ko'rgazmali-obrazlarga suyanib fikr yuritadilar, mulohaza bildiradilar, hukm chiqaradilar.

Bog'cha yoshidagi bolalarda ko'rgazmali-obrazli tafakkur bevosita va batamom ularning idrok jarayonlariga bog'liq. Shuning uchun ular narsa va

hodisalarning, jism va predmetlarning ko'zga yaqqol tashlanib turuvchi alomatiga, xususiyatiga, tashqi belgisiga e'tibor qiladilar. Lekin ularning ichki bog'lanishlari, o'zaro munosabatlarini bildirib keladigan muhim, asosiy sifatlariga ahamiyat bermaydilar. Ob'yektlarning fazoda joylashgan o'rni, tashqi nomuhim belgisi ularning ko'rgazmali-obrazli tafakkurini vujudga keltiradi. Masalan, ularning nazdida odamlar bo'yining balandligi va pastligi ularning yoshini bildiradi.

Ixtiyorsiz va ixtiyoriy tafakkur

Tafakkur aktivligiga qarab ixtiyorsiz (intuitiv) va ixtiyoriy (analitik) tafakkur turlariga ajratiladi. Intuitsiya deb, mantiqiy tafakkur yordamida ko'p vaqtlar davomida hal qilinmagan aqliy vazifalarning to'satdan, kutilmaganda hal qilinib qolish jarayoniga aytiladi. Shaxsning muayyan sohadagi hayotiy yoki ilmiy tajribalariga asoslangan intellektual sezgirligidan iborat faoliyatdir.

Ko'pincha ixtiyorsiz tafakkur jarayoni mulohaza, muhokama, isbotlash, gipoteza qilish kabi formalarda namoyon bo'ladi. Matematika, fizika, kimyo, psixologiya va boshqa fanlardagi muammo va masalalarni yechish jarayonlari bunga misol bo'la oladi.

Tafakkur jarayonlari ixtiyorsiz yuz berishi ham mumkin. Lekin bu holda ular ixtiyoriy tafakkurga suyangan tarzda vujudga keladi. Jumladan, odamning amaliy, maishiy va hokazo faoliyatlarida ixtiyorsiz ravishda qator savollar paydo bo'lishi va ularga beixtiyor javoblar axtarish hollari uchrab turadi. Bunday hollarda inson fikr yurityaptimi yoki yo'qmi, buni bilish juda qiyin, va holanki u o'zicha savollarga javob topganday, shirin his-tuyg'ularni boshdan kechirayotganday bo'ladi, shuning uchun ko'pincha "tilimning uchida turipdi" degan iboralarni eshitishning guvohi bo'lamiz. Goho odamlar qandaydir matn yoki muammo, masala ustida bosh qotirib o'tirganlarida (biror narsaning bevosita ta'siri natijasida) fikr yuritish mutlaqo beixtiyor ro'y berib qoladi va ularni asosiy topshiriqni bajarishdan uzoqlashtiradi. Ba'zan amalga oshirishi maqsad qilib qo'yilgan topshiriqni ixtiyoriy ravishda bajarish jarayonimizda bu rejaga

kiritilmagan (favqulodda vujudga kelgan) ayrim vazifalarni ham bajaramiz, bu jarayon biz uchun ixtiyorsiz ravishda o'tadi.

Insoniyatning tarixiy taraqqiyoti tarixidan shu narsalar ma'lumki, yirik ilmiy kashfiyotlar ham ko'pincha huddi shunday beixtiyor fikr qilib turgan mahalda to'satdan ochilgan. Jumladan, grek olimi Arximed solishtirma og'irlik qonuni zo'r berib aqliy mehnat qilish paytida emas, balki hech kutilmagan jarayonda vannada cho'milib turgan paytida kashf etgan.

Ko'pgana psixolog va fiziolog olimlarning ta'kidlashlaricha, muammoning bunday ravishda yechilishi hech kutilmagan yuqoridagi kabi beixtiyor hal qilinishi shu kashfiyotlar olam yuzini ko'rganicha bo'lgan davr ichida oylab, yillab qilingan mehnatning yakuni, ya'ni tugallanmay qolgan tafakkur jarayonining nihoyasiga yetishdir, deb baholamoqdalar.

Abstrakt va konkret tafakkur

Tafakkur umumlashgan darajasiga ko'ra konkret va abstrakt tafakkurga ajratiladi. Fikr yuritilishi lozim bo'lgan narsa va hodisalarni idrok yoki tasavvur qilish mumkin bo'lsa, bunday tafakkur konkret tafakkur deb ataladi. U o'z navbatida yaqqol-predmetli tafakkur va yaqqol-obrazli tafakkur nomi bilan ikki turga ajratiladi. Agar fikr yuritish ob'yekti bevosita idrok qilinsa, bunday tafakkur yaqqol-predmetli tafakkur deyiladi. Fikr yuritilayotgan narsa va hodisalar faqat tasavvur qilinsa, bunday tafakkur yaqqol-obrazli tafakkur deb ataladi. Tafakkurning bu turi xotira yoki hayol tasavvuriga asoslangan holda namoyon bo'ladi.

Abstrakt tafakkur narsalarning mohiyatini aks ettiruvchi va so'zlarda ifodalovchi tushunchalarga tayanib, fikr yuritishdir. Algebra, trigonometriya, fizika, chizma geometriya, oliy matematika masalalarini yechish mahalidagi fikr yuritish, mulohaza bildirish abstrakt tafakkurga xos misollardir.

Abstrakt tafakkur konkret tafakkurdan g'oyat keng ma'no anglatishi bilan voqelikni chuqurroq bilishga olib borishi bilan farq qiladi. Shuning uchun biz yakka hukm vositasi bilan qator narsa va hodisalarga taalluqli ichki qoidalar

to'g'risida fikr yurita olamiz. Idrok va tasavvur qilish mumkin bo'lmagan narsa va hodisalar to'g'risida abstrakt tafakkur yordamida mulohaza yuritsa bo'ladi. Shu sababli jamiyat va tabiat qonunlari haqida, borliq to'g'risida, cheksizlik, sifat, miqdor, tenglik to'g'risida, g'o'zallik yuzasidan mavhum abstrakt mulohaza yuritish mumkin, xolos.

Biroq konkret tafakkur bilan abstrakt tafakkur o'zaro uzviy bog'langandagina bir butun inson tafakkurini vujudga keltiradi, chunki predmetning tashqi va ichki xususiyatlarini atroflicha ochish alohida olingan tafakkurning u yoki bu turi yordamida ifodalab berish ancha mushkuldir. Abstrakt tafakkur konkret tafakkur zahirida vujudga kelgan, uning poydevori ustida o'sgan va rivojlangan. Chunki tafakkurning genetik jihatdan kelib chiqishini analiz qilib chiqsak, konkret tafakkur amaliy tafakkur bilan parallel ravishda namoyon bo'la boshlagan, abstrakt tafakkur esa tarixiy taraqqiyotning keyingi bosqichlarida hosil bo'lgan. Shunga qaramasdan hamma vaqt har qanday konkret fikr, mulohaza abstrakt fikr, muhokama ichiga ma'lum darajada singib ketgan bo'ladi.

Abstrakt tafakkur maktab o'quvchilarida dastavval elementar shakldagi abstrakt tushunchalarga suyanagan holda rivojlanadi, so'ngra murakkab tabiiy-matematik fan asoslarini egallash jarayonida ma'lum sistemadagi abstrakt tushunchalarni o'zlashtirish evaziga yuqoriroq bosqichga ko'tariladi. Oliy maktablarda tahsil olish davomida abstrakt tafakkur o'zining eng yuqori ilmiy dialektik, nazariy bosqichiga ko'tariladi. Fan va texnikaning taraqqiyoti abstrakt tafakkurni yanada rivojlanishini taqozo etmoqda.

Nazariy va amaliy tafakkur

Tafakkur yo'nalishiga qarab nazariy va amaliy tafakkur turlariga ajratiladi. Hodisalarni izohlashga, faraz qilishga qaratilgan tafakkur nazariy tafakkur deb ataladi. Tushunchalar o'rtasidagi bog'lanishlarni, munosabatlarni, ichki bog'lanishlarni yoritib borish va shu bog'lanishlarni nazariy jihatdan fikr yuritish yo'li bilan izohlash kabi jarayonlarni nazariy tafakkur yordamida amalga oshirish mumkin. Izohlash paytida izohlanayotgan narsa va hodisalar, xossa va

xususiyatlar, jism va predmetlar, umuman butun voqelik ma'lum turkumdagi tushunchalar qatoriga kiritiladi va ularning farq qiladigan belgi va alomatlari fikran ajratib ko'rsatiladi. Bundan tashqari muayyan ob'yektlarning mohiyati, mazmuni, mavjud bo'lishlik sabablari, kelib chiqishi, taraqqiyoti, o'zgarishi, shuningdek ularning ahamiyati va funksiya hamda vazifalari izohlab beriladi.

Nazariy tafakkur jarayonlarida "Nega?", "Nima uchun?", "Nima sababdan?", "Buning o'zi nima?", "Bu hodisa yoki holatlar, yoxud tushunchalar o'rtasida qanday o'xshashlik va tafovutlar mavjud?" kabi qator savollar vujudga keladi.

Voqelikni o'zgartirishga yoki inson ehtiyojlari uchun zarur bo'lgan real narsalar yaratishga qaratilgan tafakkur turi konstruktiv, texnikaviy, tasviriy san'at singari kasb sohalarini tadqiq etadi. Voqelikni o'zlashtirish vositasi bilan real narsa va hodisalarni yaratishga yo'naltirilgan fikr yuritish amaliy tafakkur deb ataladi. U qo'yilgan nazariy va amaliy vazifalarni yangi usullar bilan hal qilish, ongimizda yangi tasavvur, tushuncha va hukmlar hosil qilish, muayyan yangi narsalar yaratish bilan bog'liq murakkab tafakkur jarayonidir. Amaliy tafakkur jarayonida ham nazariy tafakkurga o'xshash savollar tug'iladi. Amaliy tafakkur jarayonining davomi ish-harakatlarni, aqliy harakatlarni tasavvur qilishda, fikrlashda namoyon bo'ladi. Maktab hayotidan o'quvchilarning diktant, bayon yoki insho yozish jarayonini misol qilib keltirish mumkin. Talabalar faoliyatidan konspekt yozish, referat tayyorlash, kurs va diplom ishi ustida ishlash, seminarga hozirlik ko'rish, laboratoriya mashg'ulotlarida amaliy vazifalarni bajarish kabilar amaliy tafakkurga yorqin misoldir.

Realistik va autistik tafakkur

Psixologiya fanida tafakkurni realistik va autistik turlarga ajratib o'rganish holati hukm surib kelmoqda. Odatda realistik tafakkur qurshab olgan atrof-muhitni o'rganishga, aks ettirishga qaratilgan fikr yuritish bo'lib, u mantiqiy qonun va qoidalarga bevosita bo'ysunadi va ularning yordami bilan voqelikni in'ikos qiladi.

Mavjud narsa va hodisalarni aks ettirish mazkur tafakkur turining ob'yekti bo'lib hisoblanadi.

Autistik tafakkur insonning xohish va istaklarini amalga oshirish bilan uzviy bog'liq ravishda sodir bo'ladi. Amalga oshirilishi lozim bo'lgan tafakkur harakatlari faqat o'sha shaxsning o'z tilaklarini ro'yobga chiqarishga yo'naltirilgan fikr yuritishdan iborat individuallik yoki individualistik tafakkurdir.

Ijodiy tafakkur

Ijodiy tafakkur murakkab bilish faoliyatidan biri bo'lib, tadrijiy ravishda, izchil o'zaro bog'langan jarayonlardan tashkil topadi: dastavval savollar tug'iladi, vazifa aniqlanadi, masalani yechish yoki savollarga javob qidirish jarayoni vujudga keladi. Inson oldida turgan aniq vazifa yoki masala – bu bajarilishi yoki hal qilinishi zarur bo'lgan savolning ifodasidir. Namoyon bo'lgan vazifa ko'pincha ifodalanishi shart bo'lgan maqsadni ham o'zida aks ettirib keladi. Maqsad esa insonning izlanayotgan noma'lum voqelikni topishga gumon va hayajon, shubha hislardan xorij etishga qaratilgan maylidir.

Tafakkurning izlanish bosqichlarida vujudga kelgan masalaning ifodalanishi har xil darajada bo'lishi mumkin. Jumladan, voqelikni nimalari ma'lumki, nimalari yana noma'lum, ularni aniqlash, qay holatda va qaysi yo'l bilan yechilishi mumkin, uning turmush uchun qanday ahamiyati bor, singari jihatlarni aniqlashga to'g'ri keladi.

Ijodiy tafakkur ijodiy xayol bilan uzviy aloqada bo'ladi. Shuning uchun inson amaliy faoliyatida bir talay savollarga javoblarni xayol yordami bilan topadi. Jumladan, har xil taxminlar, ilmiy gipotezalar, farazlar, kashfiyotlar, texnika sohasidagi ixtirolar ham ana shu yo'sinda amalga oshadi, ya'ni xayol yordami bilan zarur natijalarga erishiladi. Shuningdek, ijodiy tafakkur jarayonida ba'zi vazifalarni hal qilish, bajarish, muhokama yuritish, mulohaza qilish, fikrlash, faraz qilish singari jarayonlar mantiqiy fikr yuritish usullari va vositalarini qo'llash yo'li bilan nihoyasiga yetkaziladi. Masalan, matematika, fizika kabi fan asoslarini o'zlashtirishda huddi shunday holat ro'y beradi.

Psixolog V.A.Krutetskiy [20, (112-115)] ijodiy tafakkurni taraqqiy etish maqsadida masalalar tipologiyasini ishlab chiqib, turli yoshdagi o'quvchilar o'quv faoliyatida sinab ko'rgan. Olingan natijalar olim tomonidan sifat va miqdor jihatdan analiz qilinib, grafik tasviri aks ettirilgan. Tipologiyaga kiritilgan masalalarni V.A.Krutetskiy turlicha nom bilan ataydi.

1. Savol aniq qilib qo'yilmagan masalalar. O'quvchining masalada berilgan matematik munosabatlarni analiz qilgandan keyin ifodalab beriladigan savolning variantlaridan biri qavs ichida ko'rsatiladi.

2. Berilganlari yetishmaydigan masalalar. Masalani aniq yechish uchun yetishmaydigan ma'lumotlar qavs ichida ko'rsatiladi.

3. Ortiqcha ma'lumotlari bo'lgan masalalar. Ortiqcha ma'lumotlar kursiv bilan beriladi.

4. Bir necha yo'l bilan yechiladigan masalalar. Bu yerda turli yo'llar bilan yechilishi mumkin bo'lgan masalalar berilgan. Masala yechishning eng oddiy, eng tejamli yo'li iloji boricha yashirilgan. Bu masalalar bir fikrlash operatsiyasidan ikkinchisiga, bir ishlash usulidan boshqasiga o'tish qobiliyatini shakllantirishga qaratilgan.

5. Mazmuni o'zgarib turadigan masalalar. Bu masalalarda ham bitta mustahkamlangan aqliy operatsiyadan boshqasiga o'tishdan iborat aqliy qobiliyat tarkib toptiriladi.

6. Isbotlashga doir masalalar. Bu masalalar yordamida mantiqiy fikrlash, isbotlash singari aqliy qobiliyat takomillashtiriladi.

7. Fikrlash, mantiqiy mulohaza yuritishga doir masalalar. Bu masalalarni yechish uchun hech qanday maxsus bilimlar talab qilinmaydi, lekin bunda ma'lum darajada ijodkorlik ko'rsatib, mantiqiy mulohaza yurita olish kerak bo'ladi. Bu masalalarning ba'zilar matematik xarakterda, boshqalari faqat mantiqiy xarakterda bo'ladi.

Demak, ijodiy tafakkur turi o'zining samaradorligi va dolzarbligi, universalligi bilan boshqa fikr yuritish jarayonlaridan farq qiladi, yangi-yangi

muammolarni o'ylab chiqishda, masalani hal qilishda zarur jarayon bo'lib, insonning bilish faoliyatida yetakchi rol o'ynaydi.

Produktiv va reproduktiv tafakkur

Psixolog Z.I.Kalmikova [40, (78-79)] o'z tadqiqotlarida tafakkurni produktiv va reproduktiv turlarga ajratib o'rgangan. Bu bo'linish sub'yekt bilimlariga fikr yuritish faoliyatida olinadigan maxsulning yangilik darajasining munosabati asos qilib olinadi. Qisqa vaqt birligi ichida yangi original fikrlar yaratish yoki muhim ilmiy, amaliy masalalarni hal qilish bilan belgilanadigan tafakkur produktiv tafakkur deyiladi. Reprodukativ tafakkur esa passiv, tayyor mulohazalarni o'zlashtirib olishga va "tayyor holda" undan foydalanishga qaratilgan insonning bilish faoliyati ko'rinishidir.

Fazoviy tafakkur.

Fazoviy tafakkur muammosi psixolog B.G.Anan'yev [40, (78-79)] va uning shogirdlari tomonidan tadqiq qilingan bo'lib, keyinchalik bu muammo yuzasidan taniqli psixolog I.S.Yakimanskiy [36, (15-25)] intensiv ilmiy-tadqiqot ishlarini olib borgan. Fazoviy tafakkur deganda narsa va hodisalarning fazoda ratsional joylashishi, zamon va makon munosabatlarini, murakkab bog'lanishlarini adekvat (to'g'ri) ravishda aks ettirishdan iborat fikr yuritish jarayoni tushuniladi. U insonning fazoviy tasavvurlari, xotira va xayol tasavvurlari bilan uzviy bog'liq holda namoyon bo'ladi.

1.2. Vizual tafakkur va uning o'ziga xos xususiyatlari

Ta'lim tizimi oldiga uning mazmunini takomillashtirish, yangi shakllar, metodlar va o'qitish vositalari hamda o'quv jarayonida ularni qo'llashning maxsus usullarini topish muammosi qo'yilgan. Bunday ta'lim vositalaridan biri ta'limiy ahamiyati katta bo'lgan va zamonaviy talablarga javob beruvchi ko'rgazmalilik hisoblanadi. Ko'rgazmalilik tamoyilini amalga oshirish muammosi alohida ahamiyatga ega. Uning asosida bugungi kunda matematikaning rivojlantiruvchi funksiyalarining ma'lum yo'nalishlaridan biri bo'lgan o'quvchilarning vizual tafakkur zaxiralarini rivojlantirish va qo'llash yotadi.

Ko'rgazmali axborot og'zaki axborotdan ko'ra, ahamiyatliroq va unumliroqdir. Ko'rish mexanizmining axborotni qabul qilish qobiliyati, eshitishnikidan ko'ra ancha yuqoridir. Bu esa, o'z navbatida, ko'rish tizimiga, inson qabul qiladigan axborotning qariyb 80 foizini etkazish imkoniyatini beradi. Undan tashqari, ko'rgazmali axborot bir vaqtning o'zida beriladi. Shuning uchun axborotni qabul qilish va eslashga og'zaki axborotdan ko'ra kam vaqt talab etadi. Ko'rgazmali axborot ishlatilganda, taassurot hosil qilish jarayoni og'zaki bayondagiga ko'ra o'rtacha 5-6 marta tezroq kechadi. Insonning ko'rgazmali axborotdan ta'sirlanishi, og'zaki axborotdan ko'ra ancha yuqori bo'ladi. Ko'pchilik hollarda u oxirgisini o'tkazib yuboradi. Ko'rgazmali axborotni qayta takrorlash oson va aniqroqdir. Odamning ko'rgazmali axborotga ishonchi, og'zaki axborodan ko'ra yuqori bo'ladi. Shuning uchun "yuz bor eshitgandan ko'ra, bir bor ko'rmoq afzalroqdir" deb bejiz aytilmagan .

Shu bilan birga, ko'rgazmali axborotda, qabul qilish va eslash unumi, uni ko'rsatilishi orasidagi muddatning uzoqligiga bog'liq bo'lmaydi, og'zaki axborotning o'zlashtirilishi esa bunga bog'liq bo'ladi. O'zni kelib yana bir muhim tavsilotni qayd etish lozim: simvolli-ko'rgazmali axborotni qabul etish, o'qitish samarasini oshiradi. Shuning uchun o'quv-ilmiy adabiyotidan va kompyuter

texnikasi vositasida olinadigan axborotni ko'paytirishga shart-sharoit yaratish zarur. Bu esa, o'qitishni individuallashtirish zarurligini ko'rsatadi.

Grafik (ko'zga ko'rinuvchi) axborot miyaning o'ng yarim shari imkoniyatlarini faollashtiradi. Grafik tasvirlar ma'lumotlarni faol idrok qilish va tushunib o'zlashtirishga imkon beruvchi muhim vositalardan biri [11, (41-43)].

O'quvchilarni matematikaga o'qitish amaliyoti shuni ko'rsatadiki, o'quvchining asosiy tayanchi mantiqiy tafakkurdir, ya'ni bosh miyaning chap yarimsharlari ishiga tayanadi: boshqacha qilib aytganda, ta'limda chap "yarimshar ishi" o'z o'rniga egadir.

Psixologik tadqiqotlardan ma'lumki, 80% axborotni inson ko'rish kanali orqali oladi. Matematika sohasi haqida gapirsak, buyuk K.Gausning quyidagi so'zlarini keltirish mumkin: "Matematika nafaqat quloq (eshitish) bilan, balki ko'z (ko'rish) bilan o'rganiladigan fandir" [14].

Psixologlar va fiziologlar tomonidan shu tasdiqlanganki, chap yarimsharlar verbal-simvolik (вербально-символический) funksiyalarga moslashgan, o'ng yarimsharlarda esa fazoviy-sintetik funksiyalarga moslashgan [13, (34-36)].

Matematika o'qituvchisi ishida formal-mantiqiy (формально-логический) vositalarga, belgilar sistemasiga tayanishga katta e'tibor beriladi.

Demak, quyidagicha muammo o'rta qo'yiladi: "matematikani ham chap, ham o'ng yarimsharlar ishiga muvofiqlashtirgan holda ya'ni mantiqiy va ko'rgazmali- obrazli tafakkurning ongli muvofiqlashishi asosida tashkil etilishi uchun uni qanday o'qitish kerak?".

Hozirgi kunda vizual tafakkur, ya'ni R.Arnxeym [9, (54-55)] yozishicha: "Vizual (ko'rish) jarayonlari ta'siridagi tafakkur" ma'nosini anglatuvchi "ko'ruv-ko'rgazmali" (зрительно-наглядное) atamasi keng tarqalgan.

Vizual tafakkur – bu shunday faoliyat bo'lib, u obrazlarni yaratishni, ular ustida amal bajarishni, obrazlarni ixtiyoriy yoki berilgan yo'nalishda qayta qurishni, obrazni qurishda turli hisob sistemalaridan foydalanish, obrazda inson o'ziga muhim bo'lgan turli alomat va xossalarini ajratishni ta'minlaydi.

V.P.Zinchenko va N.Yu.Vergilislar vizual tafakkur tushunchasini quyidagicha ta'riflaydi (aniqlaydi): "Vizual tafakkur – bu mahsuloti yangi obrozlarning tug'ilishi, ma'lum bir ma'noni tashuvchi va bilimlarni ko'rinadigan bo'lishini ta'minlovchi yangi vizual shakllarni yaratishdan iborat inson faoliyatidir" [39, (13-17)].

N.A.Reznik taqdim etgan vizual o'quv muhiti – axborotlarni uzatishning va yangi tipdagi o'quv muhitini tuzishning yangi yo'llarini yaratish shaxsning pedagogik-psixologik xususiyatlarini hisobga olib, chap yarim shar ustunligini susaytiradi va bosh miya yarim sharlarining balanslashgan rivojlanishini ta'minlaydi. Matematikani o'qitishda faqatgina chap miya yarim shari ishiga tayanish uni zo'riqtiradi va tez charchashiga olib keladi. Buning oldini olish uchun matematik ta'limda ko'proq o'ng yarim shar ishiga tayanish ya'ni ko'proq ko'rgazmalilikka ahamiyatni ham qaratish yahshi samara beradi [26].

Biz matematikani o'qitish jarayonini vizual tafakkurning potensial imkoniyatlarini maksimal tarzda qo'llashga imkon beruvchi bilim, ko'nikma va malakalarni shakllanishiga kognitiv-vizual yondashuv asosida tuzishni taklif etamiz. Ushbu yondashuvning markaziy holatlaridan biri ko'rgazmalilikning bilish funksiyasini keng va maqsadga yo'naltirilgan tarzda qo'llashdir.

O'quvchilarni matematikani o'rganish jarayonida kognitiv-vizual yondashuvni amalga oshirish vizual o'quv muhitiga – o'quvchilarning vizual tafakkuri zaxiralarini qo'llashga katta e'tibor beriladigan ta'lim sharoitlari majmuiga diqqatni qaratishga yordam beradi. Bu sharoitlar an'anaviy ko'rgazmali vositalar bilan birgalikda ko'rish organi ishini faollashtiruvchi maxsus vosita va usullarni ham talab etadi.

Kognitiv-vizual yondashuvning xususiyatlaridan biri shundaki, u o'quvchilarning individual xususiyatlarini, xususan bosh miyaning chap va o'ng yarimsharlari ishining o'ziga xosligini hisobga oladi. Bugungi kunda bosh miyaning o'ng yarimsharlarning funksional assimetriyasi haqidagi va ayniqsa,

bu assimetriyani matematikani o'qitishning amaliyotida hisobga olish muammosi yanada dolzarb bo'lib qolmoqda [14].

1981 yilda amerikalik nevrolog Sperry tomonidan bosh miyaning funksional assimetriasining ochilishi o'quvchilar obrazli tafakkurini rivojlantirish yo'nalishlaridagi matematik ta'lim tizimiga qaratilgan eskirgan qarashlarni qayta baholash va tuzatish kiritish zaruratiga olib keldi [13, (43-48)].

Bosh miya yarim sharlari assimetriyasi nazariyasi oxirgi o'n yillikda o'zining rivojlanish bosqichiga o'tib, nazariy va amaliy bilimlar to'plandi. Olimlarning klinik tadqiqotlariga ko'ra, na chap va na o'ng yarim shar bir-biridan ustunlikka ega bo'la olmaydi. Ular juftlikda ishlaydi va faqat normal psixik faoliyatni ta'minlaydi. Lekin, inson psixikasini tuzilishida ularning funksional roli turlicha [18, (37-38)].

O'quv jarayonini tahlili ko'rsatdiki, T.P.Kalinovskiy [18, (43-45)] qayd qilishicha, asosiy o'rgatiladigan guruh o'quvchilarida chap yarim shar ishi malakasi ustun bo'lishiga yo'naltirilgan, o'ng yarim shar ishi yaxshi natijani ko'rsatmaydi.

Matematikani o'qitishda teng darajada sifat jihatidan farq qiluvchi inson tafakkurining turli jihatlaridan foydalanish zarur. A.G.Mordkovich barcha maktab matematikasiga oid ikkita shiorni ifodalagan. U kamroq rasmiylikka, kamroq chap yarimsharga tayanishni va ko'proq geometrik illyustratsiyalarga, ko'rgazmalilikka, yumshoq modellarga, ko'proq o'ng yarimsharga tayanishni aytib o'tadi [23].

Vizuallashtirishning bosh tamoyili bo'lib, kognitiv grafika xizmat qilib, maqsadi o'zida tafakkurning simvolik va geometrik yo'llarini birlashtirib, bilimlarni kombinatsiyalangan kognitiv modellarni yaratishda ifodalash va bilish jarayonini faollashtirishga imkon berishdan iborat.

Kognitiv grafikaning tarkibiy tuzilmasi bo'lib, rangli bajarilgan, kognitiv-grafika o'quv elementlari (rasmlar bloki) xizmat qiladi. Shuning uchun rasmlar, uning asosiy bosh elementi hisoblanadilar. Bu esa:

Birinchidan, o'quvchining ko'rish va fazoviy fikrlash qobiliyatini rivojlantiradi, ya'ni o'rganish jarayoniga miyaning tasviri o'ng yarim shari boy imkoniyatlari qo'shiladi.

Ikkinchidan, o'quv materialini mazmunini o'zida zich joylashtirib ravshan ko'rsatuvchi surat (rasm), o'quvchida tizimli bilim shakllanishiga yordam beradi.

Uchinchidan, rangli suratlar, o'quv axborot materialini qabul qilish va eslash samarasini oshiradi hamda o'quvchilarni estetik tarbiyalash vositasi bo'lib xizmat qiladi [11, (41-43)].

Lekin vizual axborotlardan foydalanganda "o'ng yarimshar og'ishi" dan boshqa chegaralarga olib kelmasligi kerak, shuningdek verbal ma'lumotlardan foydalanish, o'qitish jarayonida ham vizual, ham verbal ma'lumotlarni ifodalash yo'llari haqida oqilona birlashtirib optimallashtirish kerak.

Ta'lim jarayonida ko'rgazmalilik vositali va vositasiz funksiyalarni bajaradi. Vositasiz funksiyalarga: bilish, o'quvchilar faoliyatini boshqarish, izohlash, estetik, vositasiz munozara kiradi. Vositali funksiyalar quyidagilarni o'z ichiga oladi: o'quvchilar diqqatini maqsadli yo'naltirish, o'quv materialini o'quvchilarga tushuntirish va takrorlash, amaliy yo'nalganlikni amalga oshirish.

M.I.Bashmakov va N.A.Reznik darsda ko'rgazmalilikdan foydalanishni quyidagicha ta'kidlaydi: "Har bir o'qituvchi darsda ko'rgazmali materiallar – formulalar va doskadagi chizmalar, ekrandagi sxema va rasmlar, devorda jadval va plakatlar, o'quvchi qo'lidagi namunalar va modellardan foydalanadi. Bunda o'qituvchining birinchi maqsadi, o'quvchiga ularni ko'rsatishdan iborat. Bu maqsadga erishish oson" [12, (4-8)].

Matematikani vizuallashtirishga urinish uni yanada ko'rgazmaliroq qiladi va bunga allaqachon kirishilgan. Qadimgi matematiklar eng elementar algebraik ayniyat va teoemalarni geometrik ko'rinishda ifodalashga urinishgan. Matematikani vizuallashtirish tarafdorlari sifatida Leonard Eyler, Bernxard Riman, David Gilbert kabilar chiqishgan.

Ko'rgazmali obrazlarsiz o'quvchilarning bilimlari mazmunsiz bo'lib qoladi va bu rasmiylikka olib keladi. Umuman, shuni ta'kidlash kerakki, matematik obyektlarni ko'rgazmali interpretatsiyalash (izohlash, sharxlash) albatta tartib bilan bo'lishi kerak.

Matematik ta'limda agarda o'quvchi faoliyatida matematik tushunchalarni faoliyat usullarini egallashda mahsulдор natijalar olish uchun, ko'rgazmalilikning rivojlantiruvchi funksiyasini kuchaytirish uchun uning vizual tafakkur funksiyalarini jalb etadigan metodik ta'minotini topish mumkin bo'lsa, ko'rgazmalilik ta'moyilini amalga oshirish muammosi mutloq yangi yechimlarga ega bo'lishi mumkin.

Didaktik jihatdan, matematikani o'qitishda ko'rgazmalilikdan foydalanish uni yordamchi illustrativ vositadan o'quvchilarda matematikani rivojlantiruvchi yetakchi mahsulдор metodik vositaga aylantirishi mumkin.

Obrazlar tili ko'rgazmalilikning abstrakt matematik tushunchalarni o'rganishdagi asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi. Abstrakt matematik tushunchalar turli tushunchalar va xulosalarni ongli tahlil qilish, ularni xotirada mustahkamlash va jonlantirish imkoniyatini beradi.

Matematikani o'qitish jarayonida bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirishda kognitiv-vizual yondashuvning bosh g'oyasi – ko'rgazmalilikning bilish funksiyasidan keng va maqsadli foydalanish. Kognitiv-vizual yondashuv “matematik-ko'ruv” ni tarbiyalashga yo'naltirilgan. Vizual mahoratni to'plash uchun vizuallashgan maxsus masalalar foydali.

Quyida V.A. Dalinger [14] tomonidan vizual masala, vizual qidiruv tushunchalariga berilgan ta'riflarni keltiramiz.

Vizual masala deb, biz masala shartida, javobida oshkor va oshkormas holda ishtirok etadigan, masala yechish metodini beradigan masalaga aytamiz.

Vizuallashgan vazifalar o'quvchilarning o'quv imkoniyatlari amaliy faoliyatining ma'lum bir xususiyatlari haqida ma'lumot olishga yordam beradi va shu orqali o'quv va shaxsiy ahamiyatga ega bo'lgan sifatlarni tashxis qilish uchun

vosita vazifasini ham bajaradi, shuningdek, matematik ta'limdagi kognitiv-vizual yondashuvni amalga oshirishning asosiy vositalaridan hisoblanadi.

Vizual qidiruv – bu izlangan ob'yektning qiymati yoki xossalarini ko'ra olish va vizual-mantiqiy yuklamalarni eltuvchi yangi vizual shakllar va obrazlarning tug'ilish jarayoni. Bunday jarayonning dastlabki vaziyati, o'quvchilarga ma'lum vizual obrazlar, struktura va axborotlarning elementlari, ular orasidagi vizual ko'riladigan aloqalar zaxiralarini tayyorlash. Vizuallashgan masala vizual qidiruv malakasini shakllantirish vositasi sifatida xizmat qiladi.

Matematik masalalarni yechishda aniq yoki noaniq obrazlardan foydalanish mumkin, lekin boshqa hollarda bu masalani yechish yo'llarini qidirishga olib keladi.

1.3. Vizual tafakkurni shakllantirishda matematik masalalarning ahamiyati

Matematik masalalarni yechishda grafiklardan, chizmalardan, jadvallardan, sxemalardan foydalanish vizual tafakkurni shakllantirishga xizmat qiluvchi vositalardir. Matematik masalalarni yechishda chizmalar, grafiklardan foydalanish masala shartini aniq tushunib olishga imkon beradi. Shu bilan birga masala yechish metodini to'g'ri tanlab olishga imkon beradi. Masala shartida berilgan vaziyatni chizmalar, grafiklarda aniq ko'rish imkonini mavjud va shu orqali masalani yechish yo'lini qidirib topish ma'lum darajada osonlashadi. Chunki ko'rinib turgan vaziyatga baho berish uni chizmalarsiz faqat matndan iborat qismini o'qib, xulosa chiqarishdan ko'ra ancha osonroqdir.

Chizmalar, grafiklar teorema isbotini bermaydi, biroq o'quvchiga teoremani oson va tushunarli bo'lishida, xotirasida uzoq vaqt saqlanib turishida muhim ahamiyatga ega.

Quyida parametrغا bog'liq masalani yechishda grafiklardan foydalanilgan.

Masala. a ning har bir qiymati uchun $x^3 - 3x^2 - a = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari sonini aniqlang.

Yechish. $x^3 - 3x^2 = a$ tenglamani ikkita $y_1 = x^3 - 3x^2$ va $y_2 = a$ funksiya sifatida qaraymiz (1-rasm). $y_1 = x^3 - 3x^2$ funksiyanı tekshiramiz:

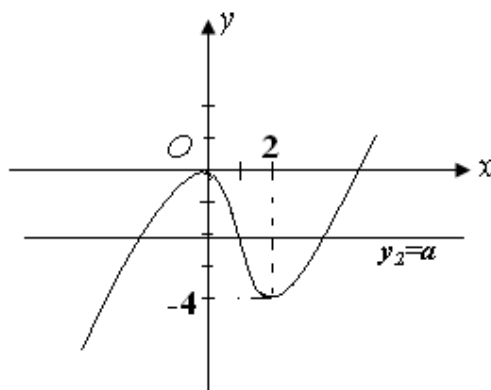
$$y_1' = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$$

$$y_1' = 0, \quad 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$$y_1(0) = 0, y_1(2) = -4$$



1-rasm

Olingan natijalar asosida y_1 funksiya grafigini chizamiz. Grafikdan ko'rish mumkinki, $y_2 = a$ funksiya grafigi uchun $a \in (-4; 0)$ bo'lsa, u holda $y_2 = a$ funksiya grafigi y_1 funksiya grafigini 3 ta nuqtada kesib o'tadi. Demak, $a \in (-4; 0)$ bo'lgan holda tenglama uchta haqiqiy ildizga ega.

Agar $a=0$, $a=-4$ bo'lsa, u holda $y_2 = a$ funksiya grafigi y_1 funksiya grafigini ikkita nuqtada kesib o'tadi. Demak, $a=0$, $a=-4$ bo'lsa, tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega.

Agar $a>0$, $a<-4$ bo'lsa, u holda $y_2 = a$ va y_1 funksiya grafiklari bitta nuqtada kesishadi. Demak, $a>0$, $a<-4$ bo'lsa, tenglama bitta haqiqiy ildizga ega.

Javob: $a \in (-4; 0)$ da tenglama uchta, $a=0$, $a=-4$ bo'lganda ikkita, $a>0$, $a<-4$ bo'lganda bitta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Yuqoridagi masala qiyin ko'rinsada, uni yechishda grafikdan foydalansh, tez va oson yechim topish imkonini beradi.

Nostandart tenglama va tengsizliklarni yechishda ham funksiya grafiklaridan foydalanish samarali usul hisoblanadi.

Matematikadan mavzulashtirilgan testlar to'plamidagi [21, (160-164)] maxsus yo'l bilan yechiladigan masalalar bo'limida ana shunday nostandart tenglama va tengsizliklar keltirilgan. Bunday masalalarni yechishda grafikdan foydalanish masalaning yechimini tez va oson topish imkonini beradi.

Masala (125. 01-9-43).

Ushbu $x^2 + 8 = \log_2(x+1) + 6x$ tenglamaning nechta ildizi bor?

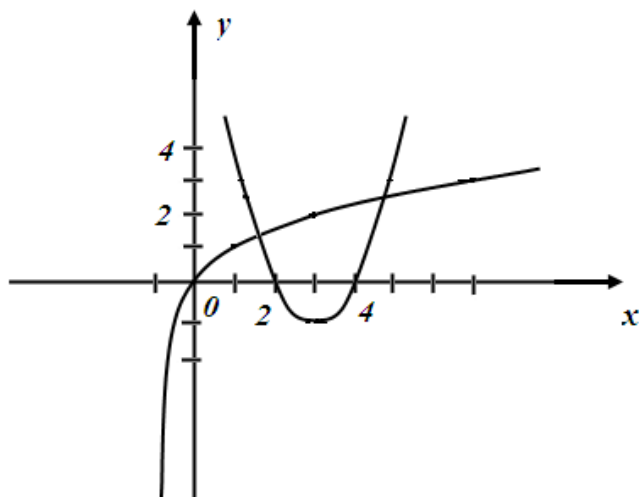
Yechish: $x^2 - 6x + 8 = \log_2(x+1)$ tenglamani ikkita funksiya sifatida qarab,

$y_1 = x^2 - 6x + 8$ va $y_2 = \log_2(x+1)$ funksiya grafiklarini chizamiz (2-rasm).

Grafiklardan ko'rinadiki, y_1 va y_2 funksiya grafiklari ikkita nuqtada kesishadi.

Demakki, tenglamaning ikkita ildizi bor.

Javob: Berilgan tenglama ikkita ildizga ega.

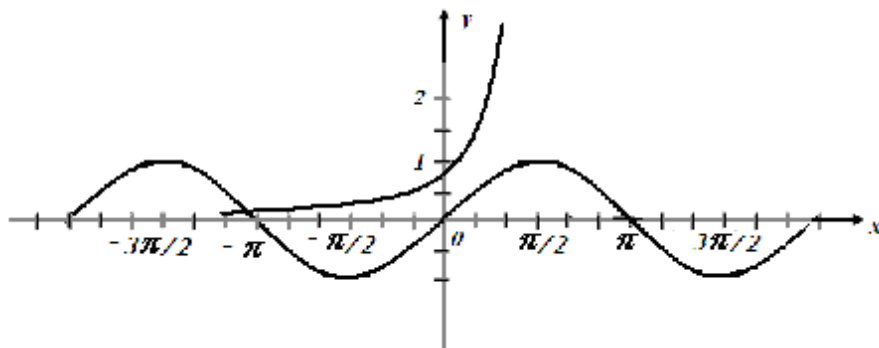


2-rasm

Masala (128. 01-12-10).

$2^x + 0,5 = |\sin x|$ tenglamaning manfiy yechimlari nechta?

Yechish: Bu tenglamaning ikkala tarafidagi ifodalarni $y_1 = 2^x + 0,5$ va $y_2 = |\sin x|$ funksiyalar sifatida qarab, ularning grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizamiz. Ikkala funksiya grafiklarining Ox o'qidan chapda kesishish nuqtalarini qaraymiz (3-rasm).



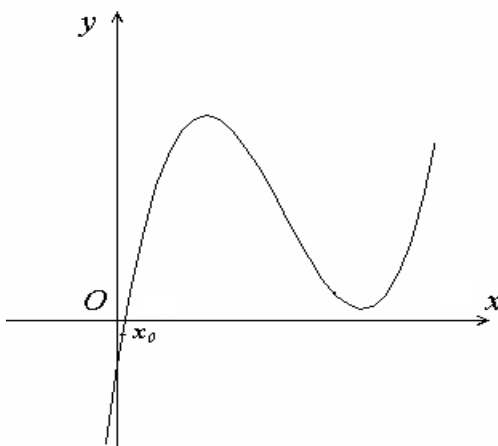
3-rasm

Grafikdan ko'rish mumkinki, ikkita funksiya grafiklari Ox o'qining chap qismida cheksiz ko'p nuqtalarda kesishadi.

Javob: Berilgan tenglamaning manfiy yechimlari cheksiz ko'p.

Bizga ma'lumki, kvadrat tenglamaning ildizi, ildizlarining ishorasi uning D diskriminanti ishorasi va koeffitsiyentlariga bog'liq. Shunday masalani kubik tenglama ildizlari uchun ham ko'rib chiqish mumkin. Bu masalani yechishda ham grafikdan foydalanish yechish usulini topishga yordam beradi. Masalan, $a > 0$ va $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tenglama musbat yagona ildizga ega bo'lsa, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funksiya grafigi quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin: bu grafiklardan quyidagi farazni shakllantirishimiz mumkin: agar $a > 0$ va $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tenglama musbat yagona ildizga ega bo'lsa, u holda $f(0) = d < 0$, funksiya ekstremumga ega emas yoki ekstremumga ega bo'lsa, funksiya ekstremum qiymatlari ko'paytmasi musbat bo'ladi (4-rasm). Ushbu farazni aniqlashtirib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Teorema. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a > 0$) kub tenglama yagona haqiqiy ildizga ega bo'lishi uchun $b^2 - 3ac \leq 0$, $d < 0$ yoki $b^2 - 4ac > 0$, $d < 0$ va $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funksiya ekstremum qiymatlari ko'paytmasi musbat bo'lishi zarur va yetarli [30].

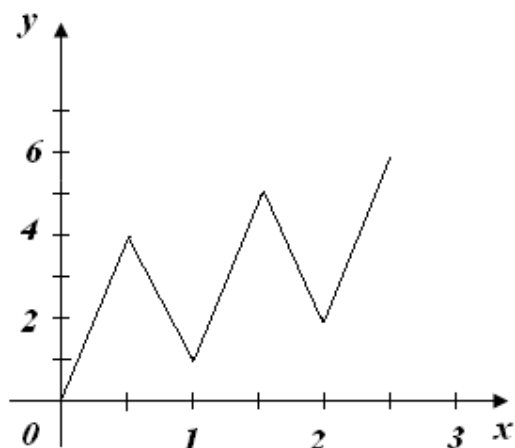


4-rasm

Matnli masalalarni yechishda grafiklardan foydalanish masala yechishni “ko’rgazmali” bo’lishiga yordam beradi. Quyidagi ba’zi matnli masalalarni yechishda grafiklardan foydalanish maqsadga muvofiq bo’ladi.

Masala.

Kapalak qurti daraxtga chiqib bormoqda. Sutkaning birinchi yarmida u 4 m balandlikka ko’tariladi, sutkaning ikkinchi yarmida 3 m pastga tushadi. Kapalak qurtining joylashish balandligining harakat vaqtiga bog’liqlik grafigini chizing, uning analitik ifodasini toping. Harakat tezligini doimiy deb qarang.



5-rasm

Yechish. Absissalar o’qiga x vaqtini (sutkalarda) belgilab chiqamiz, ordinatalar o’qiga daraxtning asosidan kapalak qurtigacha bo’lgan y masofani (metrlarda) belgilab chiqamiz (5-rasm).

Masala shartiga ko’ra, $x=0$ da $y=0$, $x=0,5$ da $y=4$ m. Sutkaning birinchi yarmida kapalak qurti tekis ko’tariladi,

shu sababli uning $0 \leq x \leq 0,5$ dagi grafigi to’g’ri chiziq kesmasidan iborat bo’ladi. Xuddi shunga o’xshash $x=1$ da $y=1$ va kapalak qurti tekis pastga tushadi,

$0,5 < x \leq 1$ da grafik kesmadan iborat bo'ladi. Grafikni shu usulda chizish murakkablik tug'dirmaydi.

Endi shu funksiyaning analitik ifodasini yozamiz: $0 \leq x \leq 0,5$ kesmada funksiya $y=8x$ formula bilan aniqlanishi ravshan; $0,5 < x \leq 1$ oraliqda funksiyaning ifodalovchi formulani topish uni $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. k va b larni $x=0,5$ da $y=4$ va $x=1$ da $y=1$ shartlardan foydalanib topamiz. Natijada $0,5 < x \leq 1$ da $y=-6x+7$ formulaga ega bo'lamiz. Shunday davom ettirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y = \begin{cases} 8x, & \text{agar } 0 \leq x \leq 0,5, \\ -6x+7, & \text{agar } 0,5 < x \leq 1, \\ 8x-7, & \text{agar } 1 < x \leq 1,5, \\ -6x+14, & \text{agar } 1,5 < x \leq 2, \\ 8x-14, & \text{agar } 2 < x \leq 2,5. \end{cases}$$

Shu formula yordamida kapalak qurtining istalgan vaqt davomida joylashgan balandligini aniqlash mumkin.

Bunday masalalar [33] maqolada ishlab ko'rsatilgan.

Shunday qilib, o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirishda maxsus tanlangan matematik masalalardan foydalanish mumkin.

I bob bo'yicha xulosalar

1. Tafakkurning ta'rifi, turlari va uning o'ziga xos xususiyatlari ko'rib chiqildi.
2. Tafakkur turlaridan biri vizual tafakkur va uning o'ziga xos xususiyatlari yoritib berildi: Ma'lumki, matematikani, xususan algebra va analiz asoslarini o'qitishda mantiqiy operatsiyalarni bajarishga moslashgan chap yarim shari ishiga tayaniladi. Faqatgina bu yarim sharga tayanish uning zo'riqishiga olib keladi. Ko'rgazmali axborot esa insonning o'ng yarim shari ishini faollashtiradi. Bu esa ta'limda har ikkala yarim sharni muvofiqlashgan holda ishlashini ta'minlaydi. Og'zaki axborotdan ko'ra grafik axborot inson xotirasida uzoq muddat saqlanadi va uni eslashga og'zaki axborotdan ko'ra kamroq vaqt sarflanadi.
3. Vizual tafakkurni shakllantirishda matematik masalalarning ahamiyati misol va masalalarni yechish orqali ochib berildi: matematik masalalarni yechishda chizmalar, grafiklardan foydalanish masala yechimini tez, oson, qulay usulda, inson miyasini turli mantiqiy operatsiyalarni bajarishdan chalg'itgan holda topish imkonini beradi.

II BOB. ANALIZ ASOSLARINI O'QITISHDA O'QUVCHILARNING VIZUAL TAFAKKURINI SHAKLLANTIRISH METODIKASI

2.1. Vizual tafakkurni rivojlantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiyasi

P.G. Satyanov [28] grafikka oid masalalarni sinflarga bo'lish kerak degan fikrga keladi. Masala tiplarining har biri uchun **birinchi harf** masala sharti qaysi tilda ifodalanganligini, **ikkinchi harf** masala javobi qaysi tilda ifodalanishi kerakligini bildiradi.

P.G. Satyanov grafikka oid masalalarni quyidagicha klassifikatsiyalashni taklif qiladi. **OG**-og'zaki ifoda – grafik tasvir; **GO**-grafik tasvir – og'zaki ifoda; **AG**-analitik ifoda – grafik tasvir; **GA**-grafik tasvir – analitik ifoda; **GG**-grafik tasvir – grafik tasvir; **AA**-analitik ifoda – analitik ifoda.

Quyida ko'rgazmali masalalarga namunalar keltiramiz.

1.OG. 1-masala. Agar $f(x)$ funksiya $x=4$ nuqtada limiti mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigini sxematik chizing. Agar $f(x)$ funksiya $x=4$ nuqtada limiti mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiya grafigini sxematik chizing.

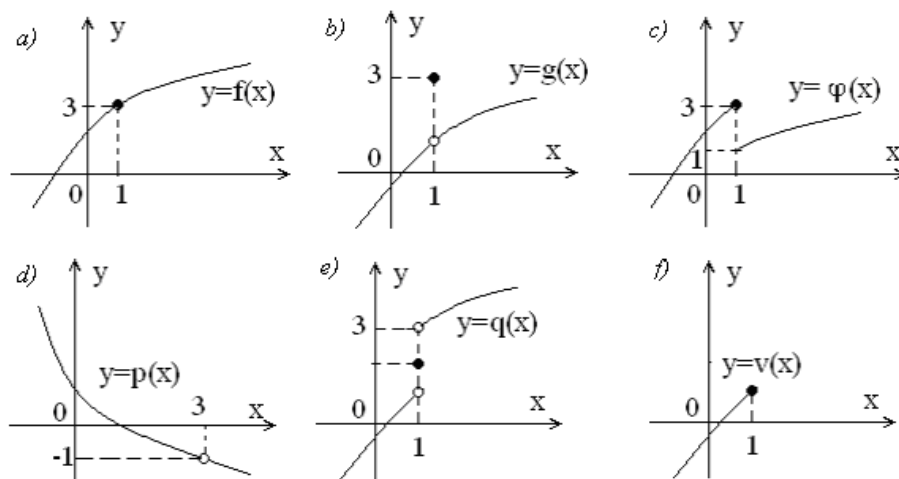
2-masala. Quyidagilar asosida kvadrat funksiya grafigini tiklang. (1-jadval).

Bu yerda **D** – kvadrat tenglama diskriminanti; a, b, c – koeffitsientlari; x_1 va x_2 – ildizlari.

1-jadval

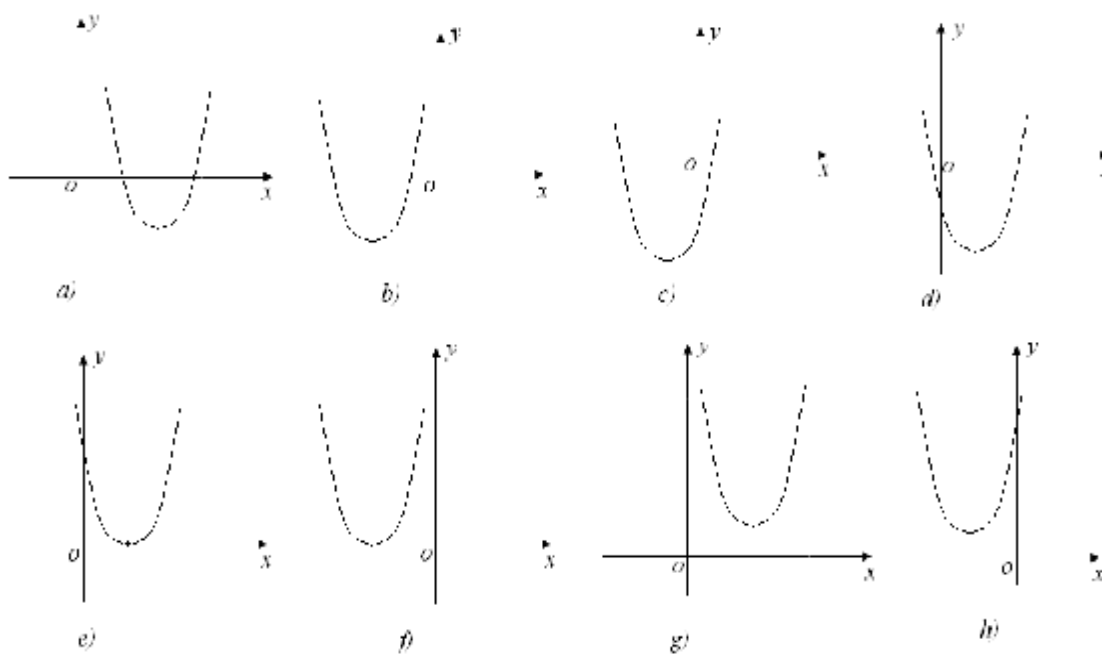
1) $D < 0$ $a > 0, b < 0, c > 0$ $\{x_1; x_2\} \in \emptyset$	5) $D > 0$ $a > 0, b < 0, c > 0$ $x_1 > 0, x_2 > 0$	9) $D > 0$ $a < 0, b < 0, c < 0$ $x_1 > 0, x_2 > 0$	13) $D = 0$ $a < 0, b > 0, c < 0$ $x_1 = x_2 > 0$
2) $D = 0$ $a > 0, b < 0, c > 0$ $x_1 = x_2 > 0$	6) $D > 0$ $a > 0, b > 0, c < 0$ $x_1 < 0, x_2 > 0$	10) $D > 0$ $a < 0, b > 0, c > 0$ $x_1 < 0, x_2 > 0$	14) $D = 0$ $a < 0, b < 0, c < 0$ $x_1 = x_2 < 0$
3) $D < 0$ $a > 0, b > 0, c > 0$ $\{x_1; x_2\} \in \emptyset$	7) $D > 0$ $a > 0, b > 0, c > 0$ $x_1 < 0, x_2 < 0$	11) $D > 0$ $a < 0, b > 0, c < 0$ $x_1 < 0, x_2 < 0$	15) $D < 0$ $a < 0, b > 0, c < 0$ $\{x_1; x_2\} \in \emptyset$
4) $D = 0$ $a > 0, b > 0, c > 0$ $x_1 = x_2 < 0$	8) $D > 0$ $a > 0, b < 0, c < 0$ $x_1 < 0, x_2 > 0$	12) $D > 0$ $a < 0, b < 0, c > 0$ $x_1 < 0, x_2 > 0$	16) $D < 0$ $a < 0, b < 0, c < 0$ $\{x_1; x_2\} \in \emptyset$

2.GO. 1-masala. 1-rasmda funksiya grafiklari berilgan. Har bir funksiya uchun uning $x=1$ nuqtada limiti mavjudligini aniqlang, agar mavjud bo'lsa, u nimaga teng?

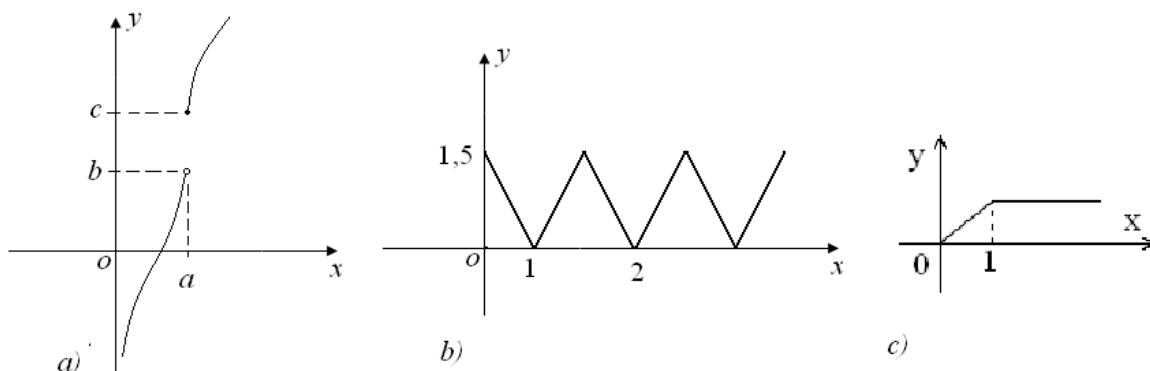


1-rasm

2-masala. Kvadrat funksiya grafigi bo'yicha uning a , b , c koeffisientlari va D diskriminanti ishoralarini hamda agar ildizlari mavjud bo'lsa, x_1 va x_2 ildizlari ishorasini aniqlang.

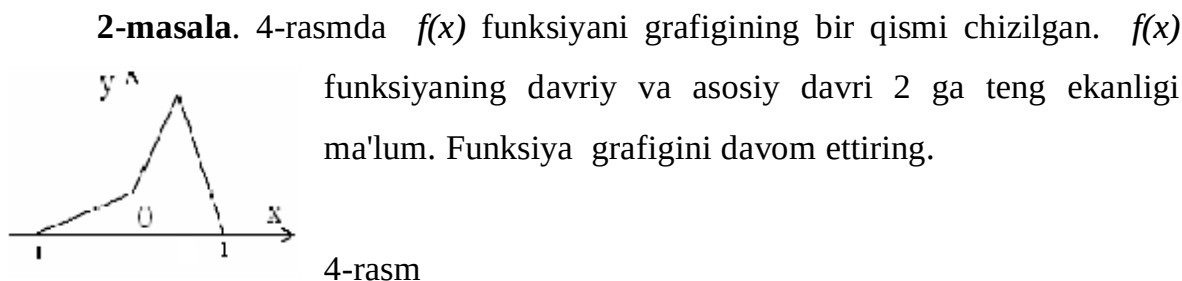


2-rasm



3-rasm

3.GG. 1-masala. 3-rasmda $f(x)$ funksiyani grafigining bir qismi chizilgan. Agar a) $f(x)$ funksiya juft, b) $f(x)$ funksiya toq bo'lsa, u holda $x < 0$ uchun $f(x)$ funksiya grafigini chizing.



4-rasm

4.AG. 1-masala. $y = x^2$ parabola andazasi yordamida funksiyaning grafigini yasang.

a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y = -x^2 + 1$ d) $y = (x + 2)^2 + 1$

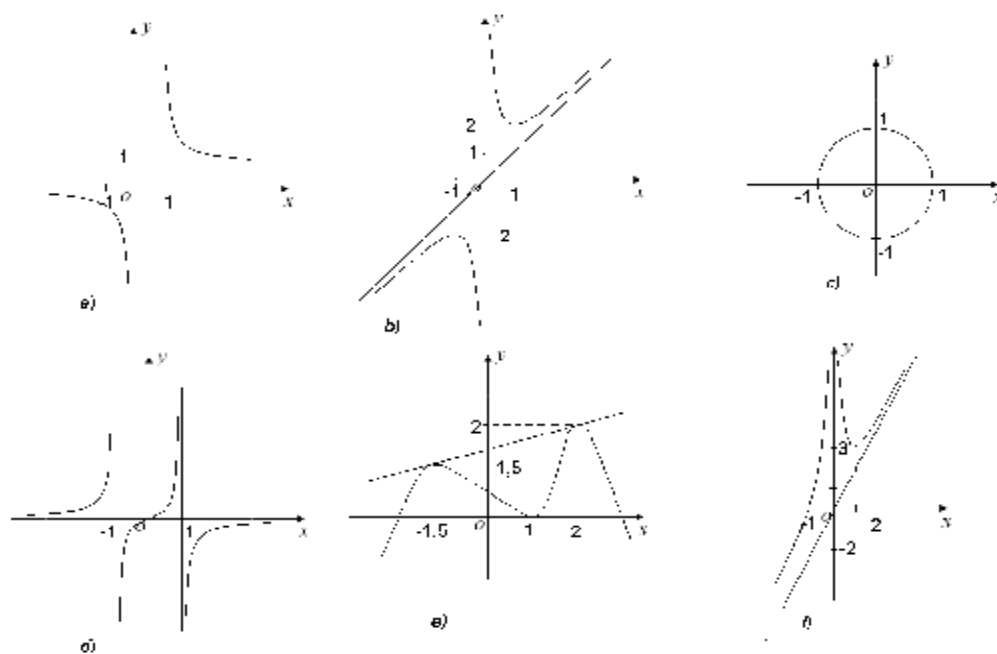
2-masala. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping va ulardan foydalanib funksiya grafiklarini chizing.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$; b) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$; d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

3-masala. Funksiyalarni o'sish-kamayishga tekshiring va grafiklarini sxematik tasvirlang.

1) $y = x^5 - 3x^3 - 5$ 2) $y = 2e^x$ 3) $y = 5x^5 - 15x^2 + 36x - 1$

5. GA. 5-rasmda tasvirlanganlarning qaysilari funksiyaning asimptotalari bo'la oladi. Ularni ko'rsating va tenglamasini tuzing.



5-rasm

6. AA. 1-masala. Funksiya grafigining asimptotalarini toping.

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; b) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; d) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

2-masala. $y = 2x^2$ paraboladan uni:

a) Ox o`qi bo`yicha 3 birlik o`ngga siljitish;

b) Oy o`qi bo`ylab 4 birlik yuqoriga siljitish natijasida hosil bo`lgan parabolaning tenglamasini tuzing.

Biz grafikka oid masalalarni tahlil qilib, ularning yana bir tipini ajratdik. Bu 7-tip AO ya'ni analitik – og`zaki bo`lib, bunda asosan berilgan analitik ifoda grafik ko`rinishda tasvirlanib, so`ngra og`zaki javob beriladi.

Quyida 7-tipga doir masalalardan namunalar keltiramiz.

7. AO. 1-masala. $y = 2x^2$ paraboladan uni:

a) Ox o`qi bo`yicha 3 birlik o`ngga siljitish;

b) Oy o`qi bo`ylab 4 birlik yuqoriga siljitish

c) Ox o`qi bo`yicha 2 birlik chapga va Oy o`qi bo`yicha bir birlik pastga siljitish;

d) Ox o`qi bo`yicha 1,5 birlik o`ngga va keyin Oy o`qi bo`yicha 3,5 birlik yuqoriga siljitish natijasida parabola qanday o`zgaradi (vaziyatda bo`ladi)?

2-masala. x ning qanday qiymatida funksiya eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo`lishini aniqlang.

$$\text{a) } y = x^2 - 6x + 13 \quad \text{b) } y = x^2 - 2x - 4 \quad \text{c) } y = -x^2 + 4x + 3$$

3-masala. a ning har bir qiymati uchun $x^3 - 3x^2 - a = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari sonini aniqlang.

4-masala. $y = x^2 + 2x - 3$ parabola va $y = kx + 1$ to`g`ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzining eng kichik qiymatini toping.

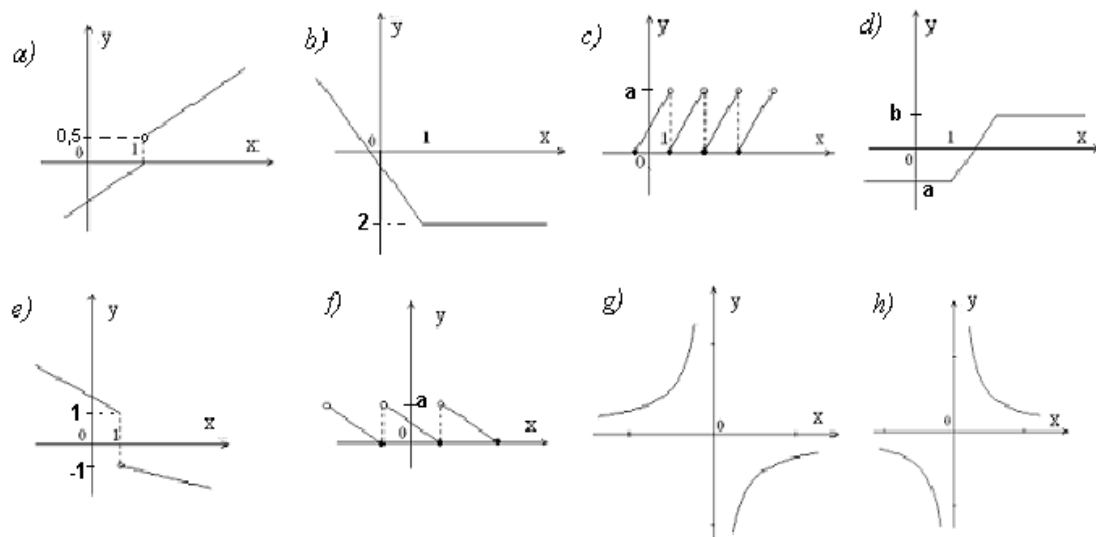
“Matematik analizning asosiy tushunchalarini o`qitishda grafikka oid masalalardan foydalanish” nomli metodik qo`llanmada [34] matematik analizning funksiya, uning aniqlanish va qiymatlar sohasi, teskari funksiya, juft va toq funksiyalar, davriy funksiyalar, monoton funksiyalar, funksiyaning limiti, uzluksizlik, uzilish nuqtalari, hosila, qavariqlik va ikkinchi tartibli hosila, boshlang`ich funksiya va integral mavzularidagi grafikka oid masalalar keltirilgan. Quyida shulardan ayrim namunalar keltiramiz.

Funksiya

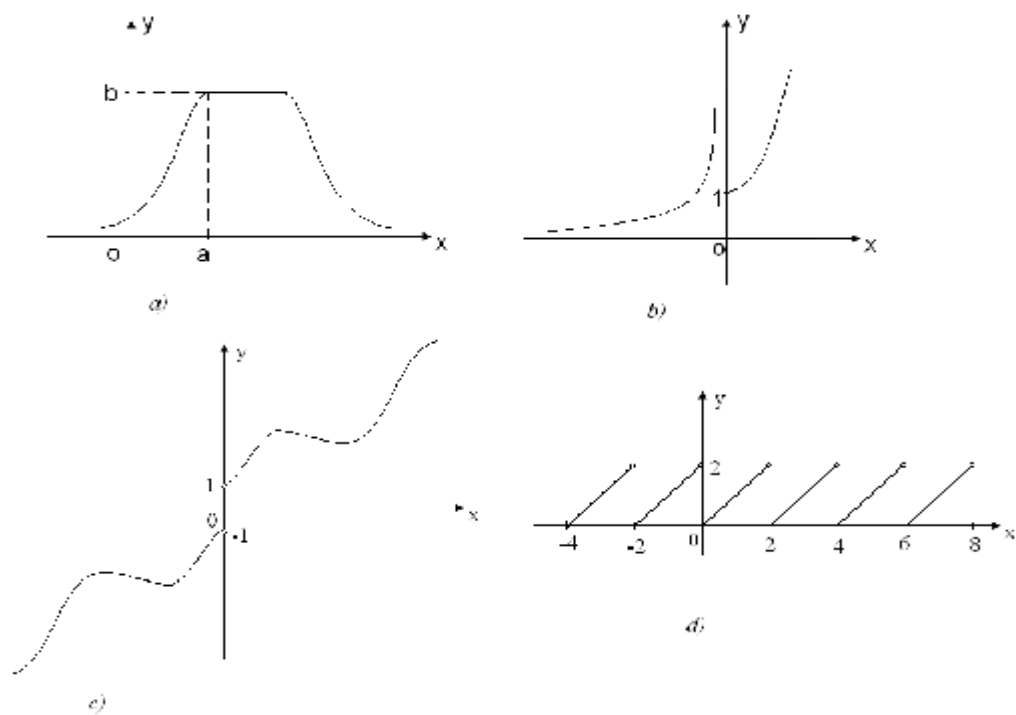
1. (OG). Koordinatalar tekisligida quyidagi xossaga ega bo`lgan A chiziq (figura)ni chizing: a) A biror  $y=f(x)$  funksiyaning grafigi bo`lsin; b) A biror $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo`lmasin; c) A biror  $x=g(y)$  funksiyaning grafigi bo`lsin; d) A biror $x=g(y)$ funksiyaning grafigi bo`lmasin; e) A bir vaqtda  $y=f(x)$  va  $x=g(y)$  funksiyalarning grafigi bo`lsin; f) A bir vaqtda $y=f(x)$ va $x=g(y)$ funksiyalarning grafigi bo`lmasin.

2. (GO). Quyidagi 6-, 7-, 8- va 9-rasmda berilgan funksiyalar uchun aniqlanish sohasi $D(f)$ va qiymatlar to`plamini $E(f)$ toping.

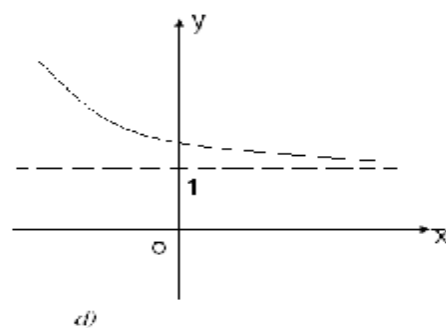
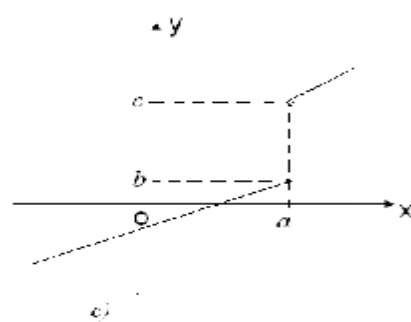
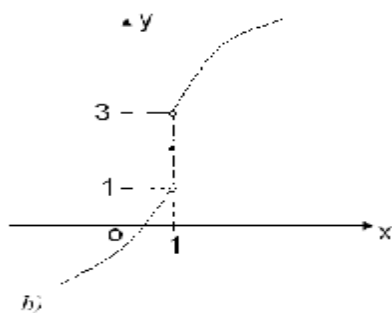
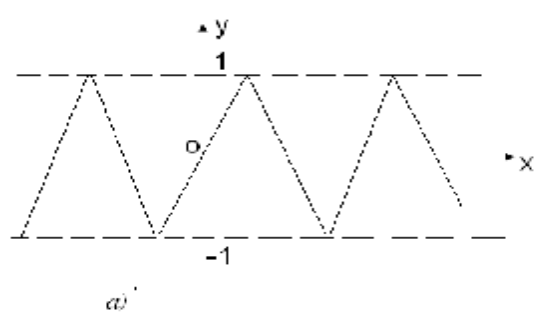
Eslatma. 9- rasmdagi funksiya 6-, 7- va 8-rasmdagi funksiyalarga karaganda biroz murakkab. 9- rasmdagi funksiyalar mavzuni yanada mustaxkamlash uchun tavsiya etiladi.



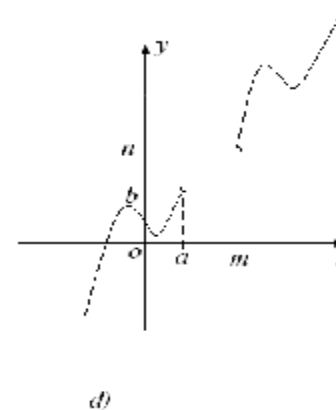
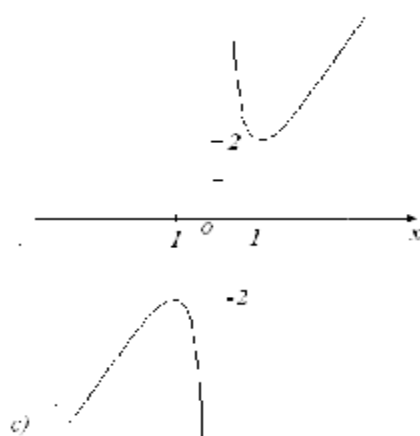
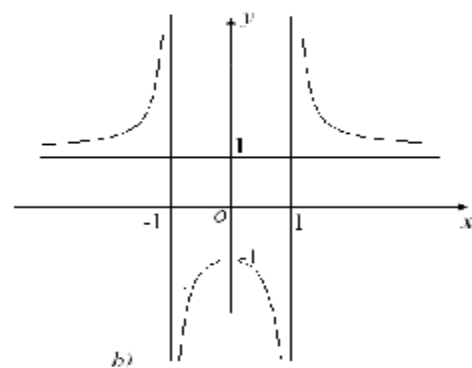
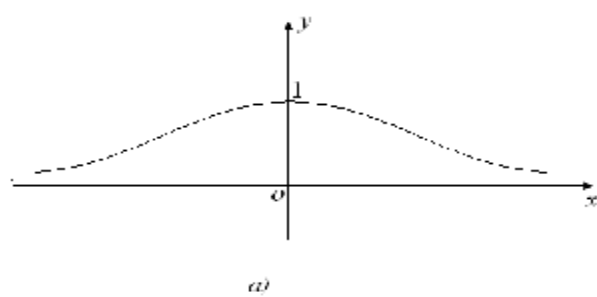
6-rasm



7-rasm



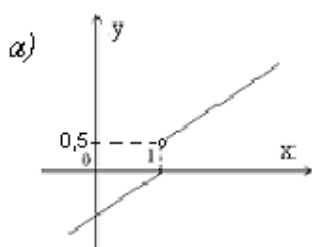
8-rasm



9-rasm

Namuna. Ushbu rasmdagi funksiyaning aniqlanish sohasini Ox o'qidan qidiramiz uni topish uchun grafikning Ox o'qidagi proeksiyasini qaraymiz. Grafik Ox o'qni to'liq qoplaydi. Demak, funksiya Ox o'qning barcha nuqtalarda aniqlangan.

Bunday ko'rinishdagi grafikning funksiyasini bo'laklarga ajratilgan funksiya ya'ni $y = \begin{cases} f(x), \text{ agar } x > 1 \text{ bo'lsa,} \\ g(x), \text{ agar } x \leq 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi sifatida



tasavvur etish mumkin. Bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya aniqlanish sohalarini birlashtiramiz. U holda funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Qiymatlar sohasini Oy o'qidan qidiramiz. Grafikning Oy o'qdagi proeksiyasini qaraymiz. Ko'ramizki, funksiya grafigi $(0; 0,5]$ oraliqda tasvirlanmagan. Demak, funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f) = (-\infty; 0] \cup (0,5; +\infty)$ bo'ladi.

3. (OG). Ox va Oy o'qlarda $X=[a;b]$ va $Y=[c;d]$ kesmalar berilgan. $X=D(f)$, $Y=E(f)$ bo'ladigan $f(x)$ funksiyani grafik usulda bering.

4. (OG). Quyidagi 1-jadvalda berilganlar asosida funksiya grafigini tiklang.

1-jadval

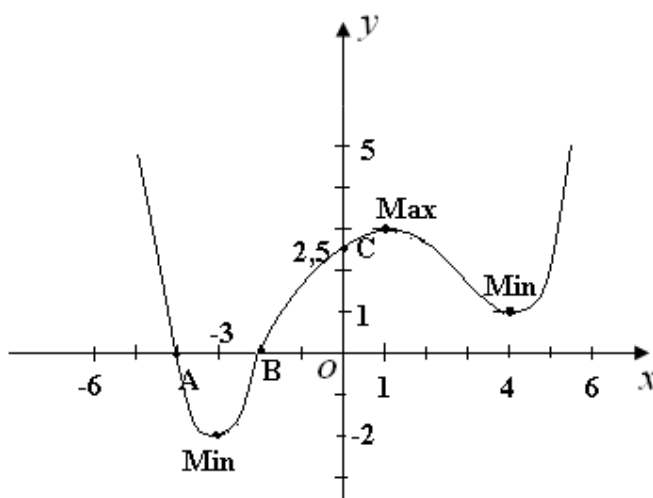
№	Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
1.	$[-6;6]$	$[-2;5]$	A(-4;0) B(-2;0)	C(0;2,5)	D(1;3)	E(-3;-2) F(4;1)
2.	$[-5;4]$	$[0;6]$	O(0;0)	—	P(-2;2)	O(0;0)
3.	$[-4;4]$	$[-3;6]$	A(-4;0) B(-1;0) C(2,5;0)	D(0;-2)	E(-2;2)	F(1;-3)
4.	$[-5;3]$	$[0;5]$	A(-3;0)	B(0;4,5)	C(1;5)	D(-3;2)

5.	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$	—	A(0;-5)	B(-1;-4) $(-\infty; 1)$ da	C(3;4) $(1; +\infty)$ da
6.	$(-\infty; +\infty)$	$(0; 1]$	—	A(0;1)	B(0;1)	—

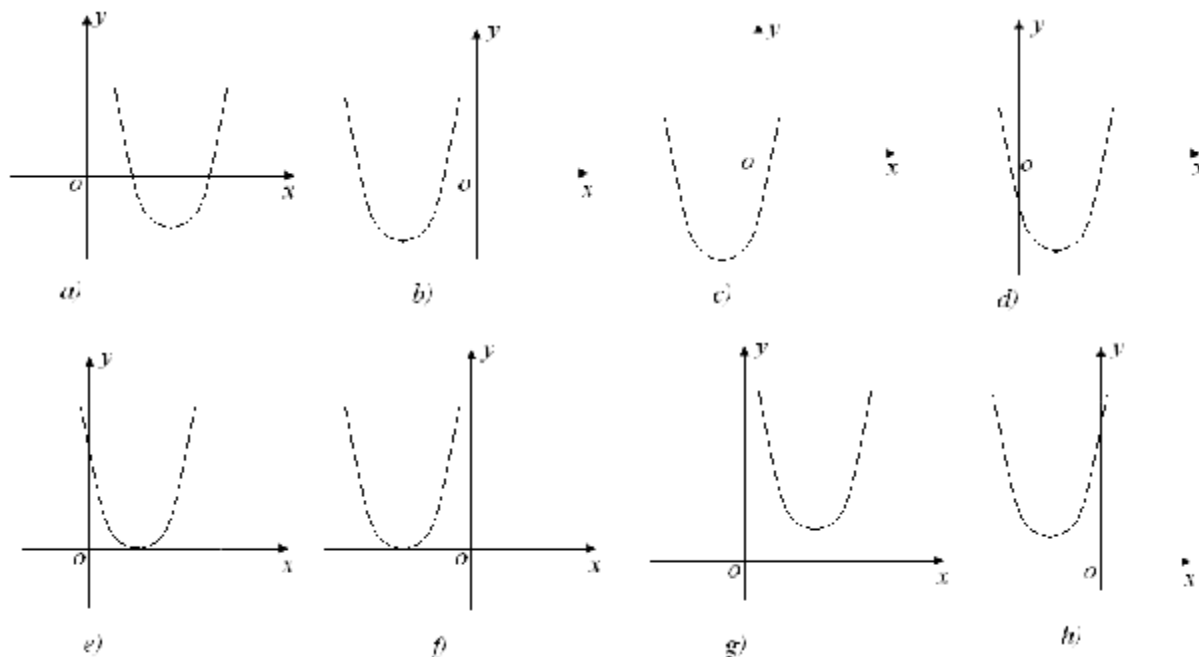
Namuna. №1 dagi masalani qarasak,

- 1) Aniqlanish sohasini Ox dan [-6;6] kesmalarni ajratib olamiz.
- 2) Qiymatlar sohasini Oy o'qdan [-2;5] kesmalarni ajratib olamiz.
- 3) Funksiyaning Ox o'q bilan kesishish nuqtalarini belgilab olamiz. Bu nuqtalar Ox o'qning o'zida joylashadi ya'ni A(-4;0) B(-2;0) nuqtalarni belgilaymiz.
- 4) Endi Oy o'q bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz. Bu nuqtalar Oy o'qning o'zida joylashadi ya'ni C(0;2,5) nuqtalarni belgilab olamiz.
- 5) Funksiya $x=1$ nuqtadagi qiymatida ya'ni $f(1)=3$ da o'zining lokal maksimum qiymatiga erishadi. Bu D(1;3) nuqtani **Max** deb belgilaymiz.
- 6) Funksiya $x=-3$ va $x=4$ nuqtalardagi qiymatida ya'ni $f(-3)=-2$ va $f(4)=1$ larda lokal minimum qiymatlariga erishadi. Bu E(-3;-2) va F(4;1) nuqtalarni **Min** deb belgilab olamiz.

Demak, barcha nuqtalarni belgilab oldik. Endi ularni tutashtirib chiqamiz.



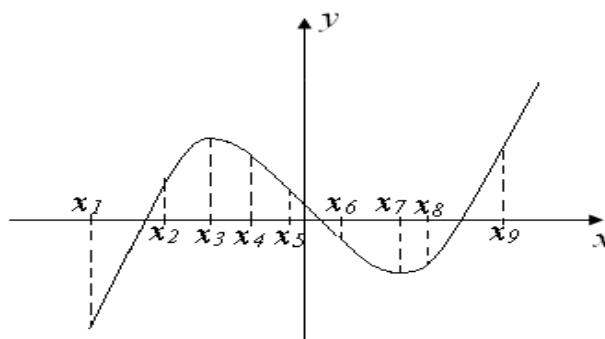
5. (GO). Kvadrat funksiya grafigi bo'yicha uning **a**, **b**, **c** koefitsientlari va **D** diskriminanti ishoralarini hamda agar ildizlari mavjud bo'lsa, x_1 va x_2 ildizlari ishorasini aniqlang (10-rasm).



10- rasm

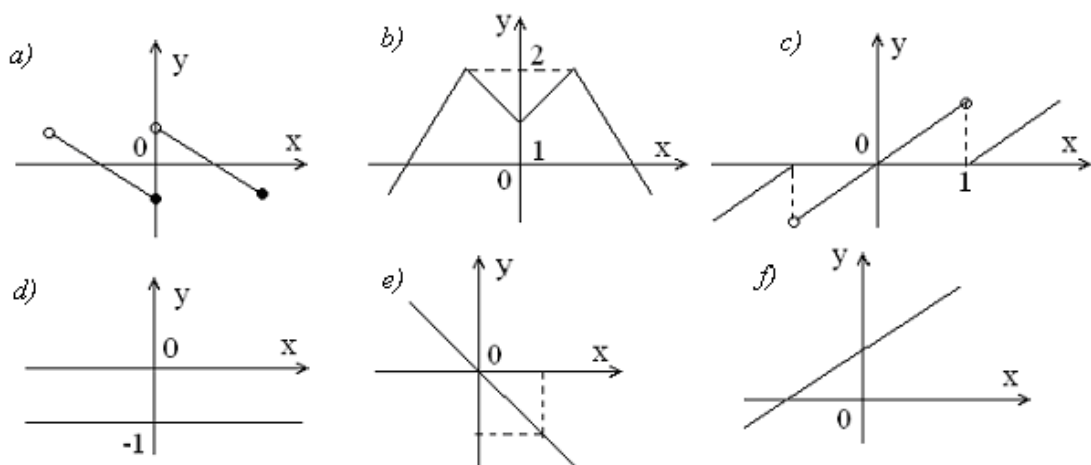
6. (GO). 11-rasmdagi funksiya grafigining berilgan nuqtalardagi qiymatlarini taqqoslang.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) x_1 va x_2 | f) x_3 va x_7 |
| b) x_2 va x_3 | d) x_7 va x_8 |
| c) x_1 va x_3 | h) x_1 va x_9 |
| d) x_2 va x_4 | j) x_6 va x_8 |
| e) x_5 va x_6 | |



11-rasm

7. (GO). Grafiklari 10-rasmda tasvirlangan funksiyalar ichida a) juft, b) toq, c) toq ham emas, juft ham emas (umumiy ko'rinishdagi) funksiyalarni ko'rsating. Toq va juft funksiya ta'riflariga asoslangan holda javobingizni asoslang.



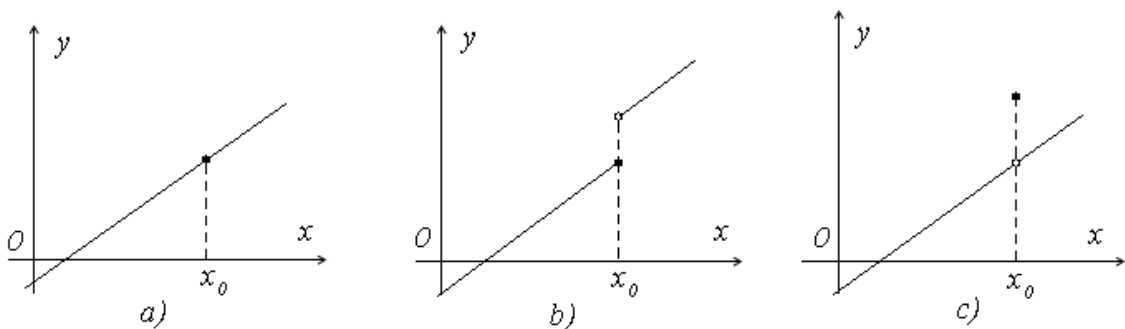
12-rasm

Funksiyaning limiti. Uzlüksizlik.

Funksiya limiti va uzluksizligiga doir masalalardan AL va KHK lari matematika kurslarida foydalanish mumkin.

Bu ikki tushunchani o'quvchilarga tanishtirish uchun quyidagi savol bilan boshlash mumkin:

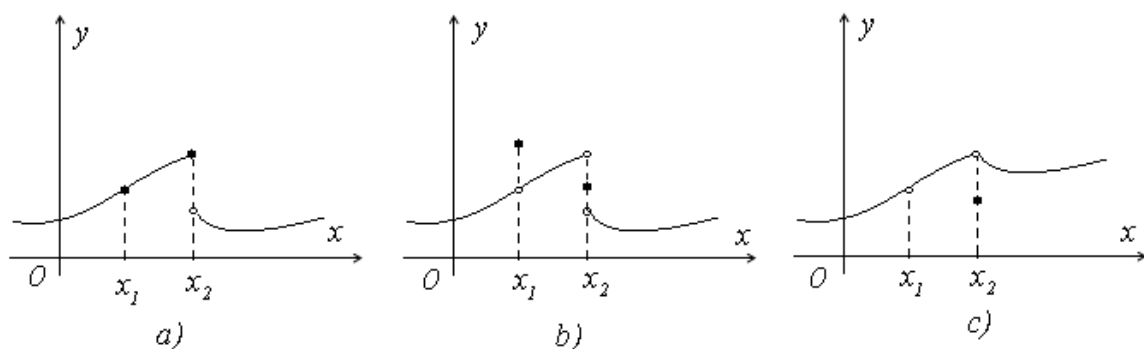
8. (GO). 13-rasmdagi a) va b) funksiyalarning grafigi bir-biridan qanday farq qiladi? b) grafikning $x=x_0$ nuqtadagi holati haqida nimani aytish mumkin? a) va c) grafiklarning $x=x_0$ nuqtasidachi?



13-rasm

9. (GO). 14-rasmda tasvirlangan grafiklarning qaysi nuqtalarida funksiya limitga ega emas? Uzilishga egami? ("c" grafikdagi x_1 nuqtada funksiya aniqlanmagan; bu yerda limit va uzluksizlik tushunchalarini aniqlashtirish o'rinli:

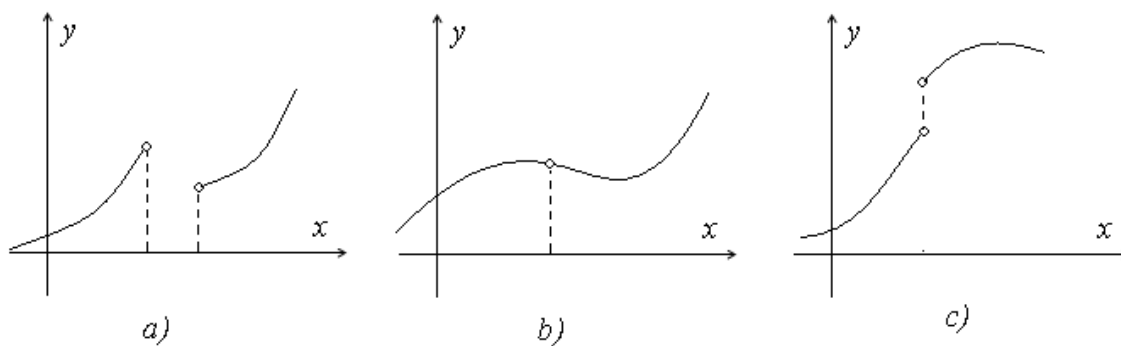
x_0 nuqtada limit mavjud bo'lishi uchun $f(x_0)$ ning qiymati ahamiyatga ega emas; uzluksiz bo'lishi uchun bu qiymat aniqlangan bo'lishi kerak.



14-rasm

10. (OG). Berilgan nuqtalarda aniqlangan va quyidagi nuqtalarda uzilishga ega bo'lgan funksiyalarning grafigini chizing. a) $x=0$ b) $x=1$ va $x=-1$ c) ixtiyoriy 3 nuqtada d) barcha nuqtalar to'plamida.

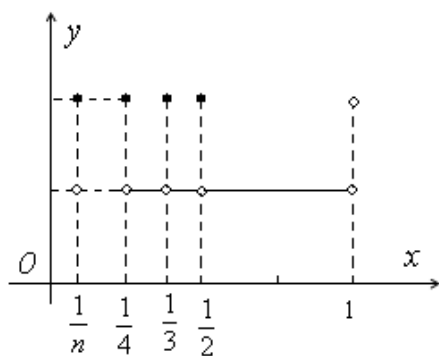
11. (GG). 15-rasmدا tasvirlangan funksiya grafiklarini barcha nuqtalarda aniqlangan va uzluksiz funksiya grafiklari bilan to'ldiring. (agarda bir necha yo'llari mavjud bo'lsa). Barcha hollarda bu bo'lishi mumkinmi?



15-rasm

Endi qiyinroq masalalarga to'xtalamiz:

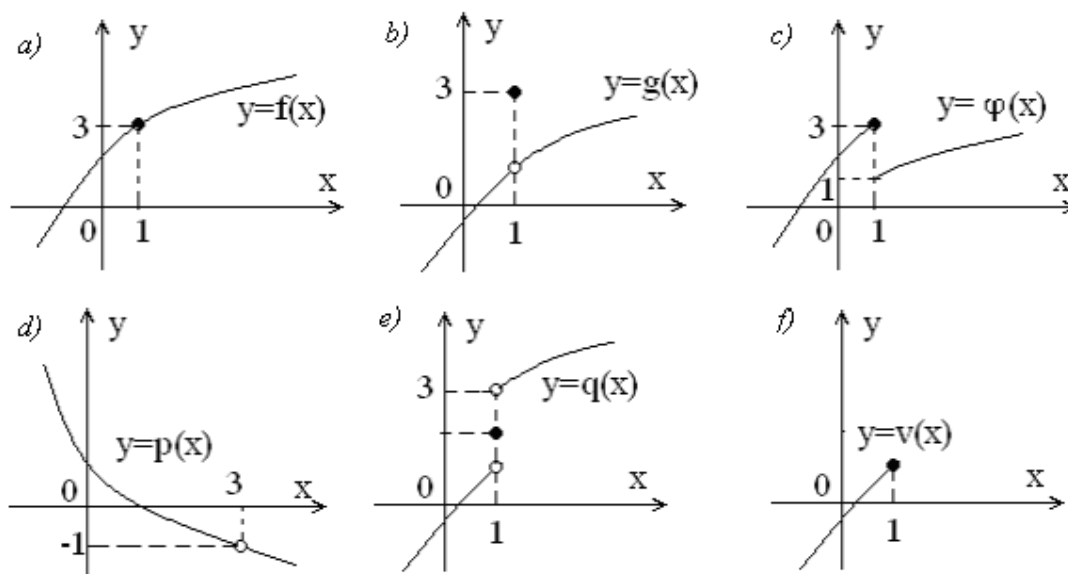
12. (OA). $x \in (0;1]$ ning barcha nuqtalarida aniqlangan va bu oraliqda cheksiz ko'p nuqtalarda uzilishga ega bo'lgan funksiyaning o'yab toping. (Aytish mumkinki, $x_n = 1/n$, $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ ning barcha nuqtalarida uzilishga ega; 16-rasmدا mumkin bo'lgan javob berilgan.)



$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{agar } x \neq \frac{1}{n}, \\ b, & \text{agar } x = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (0 < x < 1, n = 2, 3, 4, \dots)$$

16-rasm

13. (GO). 17-rasmda funksiya grafiklari berilgan. Har bir funksiya uchun uning $x=1$ nuqtada limiti mavjudligini aniqlang, agar mavjud bo'lsa, u nimaga teng?

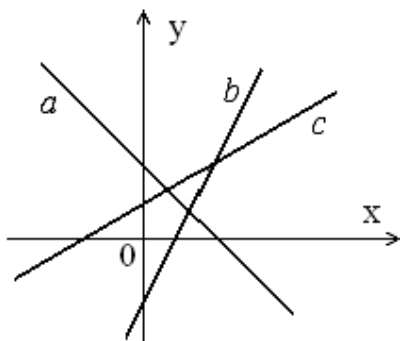


17-rasm

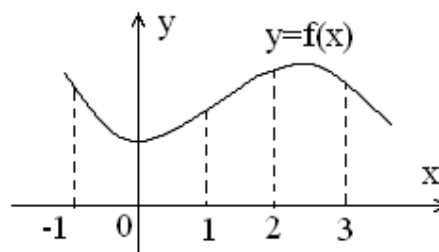
Hosila

14. (GO). To'g'ri chiziq grafiklariga ko'ra uning burchak koeffitsientini toping. (18-rasm)

15. (GO). $f(x)$ funksiyaning grafigidan foydalanib (19-rasm) $x=-2; 0; 2; 4; 6$ nuqtalarda $f'(x)$ ni toping.



18-rasm

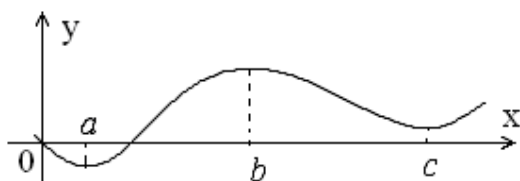


19-rasm

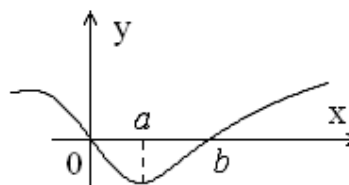
16. (OG). Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiya grafigini sxematik ravishda chizing: a) barcha $x \in D(f)$ uchun $f'(x)=0$ va $f(0)=2$; b) barcha $x \in D(f)$ uchun $f'(x)=2$, va $f(0)=-1$; c) barcha $x \in D(f)$ uchun $f'(x)=-2$, va $f(0)=1$.

a) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$; b) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)>0$; c) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)<0$.

17. (GO). $y=f(x)$ funksiya grafik usulda berilgan (20-rasm). Shu funksiya hosilasining grafigini sxematik ravishda chizing.



20-rasm

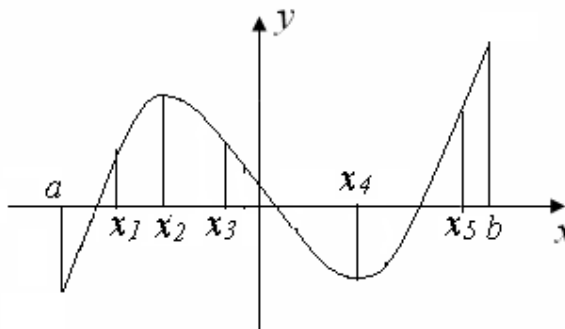


21-rasm

18. (GG). Hosilasining grafigi 21-rasmda berilgan funksiyaning grafik usulda tasvirlang.

19. (GO). Funksiya hosilasining berilgan nuqtalardagi qiymatlarini taqqoslang (22-rasm).

a) x_1 va x_2 ; b) x_1 va x_3 ; c) x_2 va x_4 ; d) x_3 va x_5 .



22-rasm

Ko'rsatma. Berilgan nuqtalardgi funksiya hosilasining qiymatlarini taqqoslash uchun berilgan nuqtadan shu funksiya grafigiga urinma o'tkazamiz va bu urinmaning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchakning tangenslarini taqqoslaymiz.

Qavariqlik va ikkinchi tartibli hosila

20. (OG). Sonlar o'qida aniqlangan qavariq va a) o'suvchi; b) kamayuvchi funksiya grafigini chizing.

(Bu mashq shuni ko'rsatadiki, berilgan funksiyaning monotonligi va qavariqligi tushunchalari bir-biri bilan bog'liq emas: funksiyaning qavariqligi funksiya hosilasining o'sishi va kamayishi bilan bog'liq, funksiyaning o'zi bilan emas).

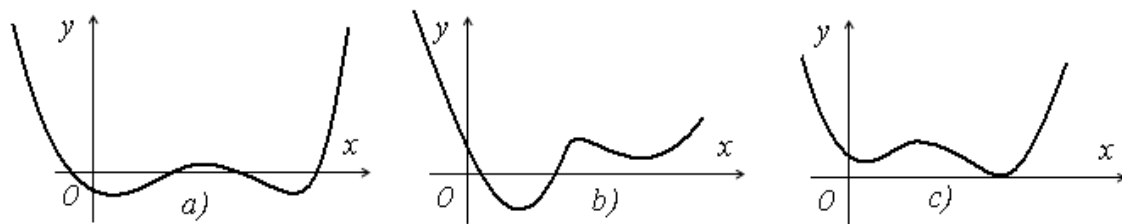
21. (OG). a) ikkita; b) uchta burilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya grafigini chizing.

22. (OA). Cheksiz ko'p burilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiyaning o'ylab toping.

Funksiyaning botiqlik, qavariqlik oraliqlarini, burilish nuqtalarini aniqlashning standart usullarini va ularga doir standart masalalarni [] darslikdan topish mumkin.

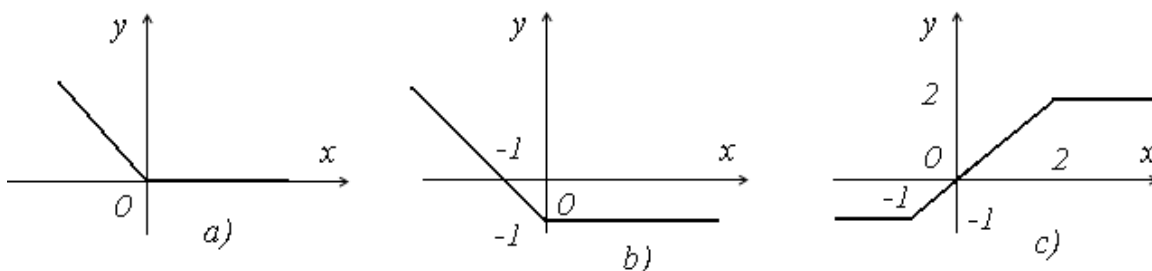
Boshlang'ich funksiya va integral

23. (GO). f funksiyaning grafigi berilgan (23-rasm). Bu funksiya boshlang'ichining o'sish va kamayish oraliqlarini ko'rsating.



23-rasm

24. (GG). $f(x)$ funksiya grafigi berilgan (24-rasm). $f(x)$ funksiya boshlang'ichining $(0;0)$ nuqta orqali o'tuvchi grafigini chizing.



24-rasm

25. (AG). Funksiya grafigini chizing.

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0, \\ -1, & \text{agar } x < 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

$\text{sign} x$ funksiyaning qaralayotgan boshlang'ichi va grafigi $(-\infty; 0)$ va $(0; \infty)$ oraliqlarda bo'lib, barcha sonlar o'qida boshlang'ichga ega emasligini ko'rsating.

26. (AG). $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ oraliqda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyaning

barcha mumkin bo'lgan boshlang'ichlarining grafigini chizing va formulasini yozing. (shuni ta'kidlab o'tamizki, bu cheksiz intervallarning har birida doimiy sonni olish mumkin, shuning uchun boshlang'ichning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x > 0, \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

27. (AO). a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ funksiya grafiklarini

chizib, ular yordamida a va b ning qanday qiymatlarida $\int_a^b f(x)dx$ integralni qarash mumkinligini aniqlang.

Izoh: Ko'p o'quvchilar ikkilanmasdan quyidagicha hisoblaydilar:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2.$$

Quyida biz AO ya'ni analitik-og'zaki tipiga doir masalalar keltirdik [15, (5-16)].

Parametrga bog'liq masalalar

1. a parametrning qanday qiymatlarida $y = ax^2 - (a+4)x + a+2$ kvadrat uchhad x ning barcha qiymatlarida manfiy bo'ladi? ($a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$)
2. a parametrning qanday qiymatlarida $y = (a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ kvadrat uchhad manfiy qiymatlar qabul qilmaydi? ($(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$).
3. a parametrning qanday qiymatlarida $y = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$ parabola Ox o'qi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'ladi? ($(-\frac{16}{7}; -1) \cup (-1; 0)$).
4. a parametrning qanday qiymatlarida $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a^2 - a = 0$ tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi? ($a=1$)
5. a parametrning qanday qiymatlarida $y = x^2 + 2(a+1)x = 9a - 5$ kvadrat uchhadni to'la kvadrat ko'rinishida ifodalash mumkin? ($a=1$; $a=6$).

6. a parametrning qanday qiymatlarida $y = ax^2 - 3x + 5 - a$ kvadrat uchhad musbat bo'ladi? $(0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}; 5)$.
7. a parametrning qanday qiymatlarida $y = ax^2 + (a - 3)x + a$ kvadrat uchhadning grafigi Ox o'qining musbat qismi bilan umumiy nuqtaga ega bo'ladi? $(0; 1]$.
8. a parametrning qanday qiymatlarida $(a - 1)x^2 + ax + 1 = 0$ tenglamaning ildizlari manfiy bo'ladi? $(a > 1)$.
9. t ning qanday qiymatlarida $y = (x - 4t)^2 + t^2 + 10t + 21$ parabola uchining abssissasi musbat, ordinatasi esa manfiy bo'ladi?
10. a ning qanday qiymatlarida $y = ax^2 + 3x - 5$ funksiya $x = -3,75$ nuqtada eng kichik qiymatga ega bo'ladi?
11. $y = (x + 3)(x^2 + x + 1)$ funksiya grafigining Oy o'q bilan kesishish nuqtasi ordinatasini toping.
12. k ning qanday qiymatlarida $y = 9x^2 - 12x - 35k$ parabola abssissalar o'qi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'ladi?

Yuqorida keltirilgan masalalarni yechishda funksiya grafiklaridan foydalanish masalaning yechimini oson topish imkonini beradi. Bunday masalalarni yechishdan oldin [36, (19-22)] dagi 1.5, 1.6 – masalalarni yechish o'quvchilarda kvadrat funksiya grafigi haqida kengroq tushuncha hosil qilish imkonini beradi.

2.2. Vizual tafakkurni shakllantirishda axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanish yo'llari

Matematika darslarini o'qitishda axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanish uchun avvalambor ma'lumotlarni sistemalashtirishni, umumlashtirishni taqozo qiladi. Buning uchun asosan chizmalar, grafiklar, jadvallar, sxemalardan foydalanish asosiy vazifa hisoblanadi.

Biz o'quvchilarda vizual tafakkurni rivojlanishiga yordam beruvchi ko'rgazmali-obrazli vositalarni ko'rib chiqamiz. Bunday vositalarga jadvallar (ma'lumot, illyustrativ, umumlashtiruvchi, ko'chirma, kombinatsiyalangan), sxemalar (strukturaviy-mantiqiy, ob'yektga yo'naltirilgan, informatsion, klassifikatsion), chizmalar, rasmlar kiradi.

Jadvallar va sxemalardan ta'lim jarayonida foydalanish mavzuni universal vositaga aylantirib, taqdim etilayotgan materialni oson o'zlashtirish imkonini beradi.

Jadvalning qo'llanilishi ma'lumotni strukturalashtirish, butun matnga qaraganda inson tomonidan ancha yahshi tushunib yetishga imkon beradi. A.Ya.Sukar o'z tadqiqotlarida jadvallarni ma'lumotli, illyustrativ, kombinatsiyalangan turlarga bo'lgan. Ma'lumotli jadvallar matematika kursi mavzulari bo'yicha ma'lumot materiallaridan iborat bo'ladi. Ular kerakli ma'lumotlarni tezroq eslashga, formulalar orasidagi bog'lanishni yahshi tushunishga yordam beradi.

Illyustrativ jadvallar matematik tushunchalarni tushuntirib berish uchun, amaliyotda qo'llash uchun, masala yechish algoritmi, formulasi, metodlarini qo'llanilishini ko'rsatish uchun mo'ljallangan.

Jadvallardan foydalanish ta'lim oluvchiga quyidagi imkoniyatlarni beradi:

- O'rganilayotgan materialni chuqur anglab yetish;
- O'rganilayotgan materialni oson eslash;
- Javob berishda aniq va savodli bayon qilish;

- Olingan bilimlarni sistemalashtirish.

Jadval ko'rgazmali-obrazli vosita hisoblanib, o'quvchilarda ko'nikma va malakalarni sistemalashtirish, analiz, sintez, umumlashtirish, konkretlashtirish imkonini beradi.

Katta hajmdagi materialni idrok qilish, tushunib yetish va qayta ishlashda ma'lumotlarni mazmunli bog'lanishlarga ajratish, strukturalashtirish zaruratini tug'diradi. O'quv materialini sxematik namoyish etilishi ta'lim jarayonining asosiy didaktik prinsiplariga mos keluvchi ko'rgazmalilik hisoblanadi. Bunday sxemalardan har biri o'rganilayotgan materialni aniq strukturalangan formada (shaklda) namoyish etadi, mavzuning alohida savollari mazmunini grafiklar, chizmalar, sxemalar va boshqalar ko'rinishida tasvirlaydi [41, (76-83)].

N.A.Reznik fikricha, ma'lumot sxemalari zaruriy bilimlarni tiklash va umumlashtirish uchun mo'ljallangan [26, (18-20)].

Chizmalar, grafiklar, jadvallar, sxemalardan dars jarayonida foydalanishda kompyuter texnologiyasining qo'llanilishi ko'rgazmalilik prinsipining tatbiqini kengaytiradi, ma'lumotlarning matnli hajmini kichraytiradi, ko'zga ko'rinadigan ma'lumotlar hajmini kattalashtiradi. Xususan, chizmalar, grafiklar, jadvallar, sxemalarni ko'rsatishda Power Point dasturidan foydalanish o'quvchilarda vizual tafakkurni shakllantirishda zamonaviy usullardan biri hisoblanadi.

Algebra va analiz asoslarini o'qitishda tushuncha, ta'rif va teoremlarni sxemalar, jadvalalar, rasmlar orqali sistemalashtirilgan holda ko'rsatish vizual tafakkurni rivojlantirishga xizmat qiluvchi vositalardan biri hisoblanadi. Shunday sxemalar, jadvallarni ilovalar bo'limida ko'rishingiz mumkin.

2.3. Grafikka oid masalalardan foydalanish metodikasi

Yuqorida keltirilgan grafikka oid masalalardan dars jarayonida foydalanish bo'yicha quyida metodik tavsiyalar va dars ishlanmalari keltirilgan.

[34, (15-27)] dagi 1.1-1.22 masalalardan akademik litseyning "Funksiya va grafiklar" mavzularini o'qitishda, ya'ni kvadrat funksiya grafigi, funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o'sishi va kamayishi, funksiyaning juftligi va toqligi, davriy funksiyalar, teskari funksiya mavzularini o'qitishda foydalanish mumkin. Funksiyaning aniqlanish sohasi mavzusi tushuntirilganda [34, (15-19)] dagi 1.2, 1.3, 1.4 masalalardan foydalanishni taklif qilamiz. Bunday masalalar grafiklarni o'qish bilan bog'liq bo'lib, bunda funksiya grafigi orqali uning aniqlanish sohasini topish talab qilinadi. 1.5, 1.6, 1.7 masalalar kvadrat funksiya grafigi mavzusida, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 masalalar funksiyaning o'sishi va kamayishi mavzusida, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 masalalar funksiyaning juftligi va toqligi mavzusi o'tilganda, 1.16, 1.17 masalalardan chegaralangan funksiya mavzusi o'tilganda, 1.18, 1.19, 1.20 masalalardan davriy funksiya mavzusi o'tilganda, 1.21, 1.22 masalalardan teskari funksiya mavzusi o'tilganda foydalanish mumkin. Bundan maqsad-funksiyani tekshirish uchun beriladigan ta'riflarning mazmunini ochib berishga yordam berish. Bunda ikki turdagi masalalar taklif qilinadi. Birinchi turdagi masalalarda grafiklar to'plami berilib, ta'riflardan foydalanib berilgan xossaga ega bo'lgan funksiyalarni ajratish talab qilinadi, ya'ni bunda o'quvchidan grafiklarni o'qish talab qilinadi. Ikkinchi turdagi masalalarda bunga teskari masala, ya'ni u yoki bu xossaga ega bo'lgan funksiyalar grafiklari eskizini chizish talab qilinadi. Birinchi turdagi masalalar sinfda og'zaki bajarishga mo'ljallangan. Shu sababli bunday funksiya grafiklarining chizmasi sinf taxtasida, yoki slaydlarda tayyorlangan bo'lishi maqsadga muvofiq. O'quvchilarga u yoki bu xossaga ega bo'lgan funksiyalarni ko'rsatish talab qilinadi. Bu turdagi masalalardagi grafiklar o'qituvchi tomonidan o'zgartirilishi, to'ldirilishi mumkin.

Ikkinchi turdagi masalalar yozma bajarishga mo'ljallangan. O'quvchilarga talab qilingan funksiya grafiklarni mustaqil chizish talab qilinadi.

Bunday masalalarni o'quv jarayoniga kiritish metodikasi quyidagicha bo'lishi mumkin:

- 1) Yangi tushunchani ta'riflash;
- 2) Ta'rifni ishlashini ko'rsatish;
- 3) Yangi tushunchaning geometrik ma'nosini berish;
- 4) Proyektor orqali chizilgan grafiklarni ko'rsatish, berilgan xossaga ega bo'lgan funksiyalarni ajratish;
- 5) Proyektor orqali ko'rsatilgan grafiklar asosida, yangi masalani - berilgan xossaga ega bo'lgan va ega bo'lmagan funksiyalar grafiklarini chizishni taklif qilish.

Tajriba grafik masalalarni o'quv jarayonida yuqoridagi metodika asosida foydalanish ko'proq vaqt sarflashga, lekin yaxshi samara berishini ko'rsatmoqda. Zamonaviy axborot texnologiyalardan foydalanish vaqtni tejashga imkon beradi. Agar o'quvchi mustaqil ravishda berilgan xossaga ega bo'lgan yoki ega bo'lmagan funksiya grafikini chizishni uddalasa, u holda o'quvchi tomonidan material tushunilganligi haqida to'g'ri ma'lumot beradi (formal eslab qolishning oldi olinadi).

Funksiya limiti va uzluksizligiga doir masalalardan akademik litsey matematika kurslarida foydalanish mumkin.

Bu bandda taklif qilinayotgan masalalardan "Hosila" va "Hosilaning tatbiqi" mavzularini o'tishda foydalanish mumkin. Hosilani o'rganish uning geometrik ma'nosini aniqlashdan boshlanadi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga aytiladi. Shunday qilib, hosila tushunchasi ko'rgazmali geometrik obraz bilan, hosilaning mavjudligi esa funksiya grafigiga urinma o'tkazish mumkinligi bilan bog'lanadi. Ya'ni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega

bo'lishi uchun funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada (Oy o'qiga parallel bo'lmagan) urinmaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Shundan keyin limitga asoslangan hosilaning umumiy ta'rifi beriladi, bunda limit hosilani hisoblash usuli sifatida qaraladi.

3.1-3.6 masalalar hosilaning geometrik ma'nosini o'rganish davrida og'zaki va yozma ishlashga mo'ljallangan. Funksiyaning grafigiga ko'ra funksiyaning nuqtadagi hosilasini taqriban topish, yoki ma'lum xossalarga ega bo'lgan funksiya grafigini chizish taklif qilinadi.

3.7-3.23 masalalar funksiya xossalarini hosila yordamida tekshirishni o'rganishda og'zaki va yozma bajarish uchun beriladi. Bu masalalarning ko'pchiligida funksiyaning o'zi emas, balki funksiya hosilasining grafigi berilib, noma'lum funksiyaning ba'zi xossalarini tiklash taklif qilinadi. Shuningdek funksiyaning tekshirishda ishlatiladigan ta'riflar va xossalarga oid masalalar ham mavjud.

Bu guruhdagi masalalarni o'quv jarayoniga kiritish sodda va tabiiydir. Ta'rif yoki alomat kiritilib, uning geometrik illyustratsiyasi berilgandan so'ng quyidagi ikki masala ketma-ket qo'yiladi va hal kilinadi: a) funksiya yoki uning hosilasi grafigi yordamida biror faktni aniqlash; 2) berilgan shartlarga, xususan hosilaga ko'ra funksiya grafigini tasvirlash.

Mavzu: Funksiya tushunchasi, aniqlanish va qiymatlar sohasi va berilish usullari

(AL larning aniq fanlar yo'nalishlari uchun) (2 soat)

Reja:

1. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar.
2. Argument va funksiya. Misollar.
3. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi. Misollar yechish.
4. Funksiyaning berilish usullari. Misollar. Misollar yechish.

1. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar

Turmushda, fanda, texnikada va amaliy faoliyatimizda mazmun jihatidan turlicha bo'lgan miqdorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi; masalan: hajm, og'irlik, harorat, elektr tokining kuchi, tezlik, og'irlik kuchi va h.k. Har bir miqdorni o'lchash natijasida biror son, ya'ni shu miqdorning son qiymati hosil bo'ladi.

Matematikada mazmuniga mutlaqo bog'liq bo'lmagan miqdorlar qaraladi, faqat ularning son qiymatlari va bu son qiymatlarning o'zgarish xarakteri e'tiborga olinadi.

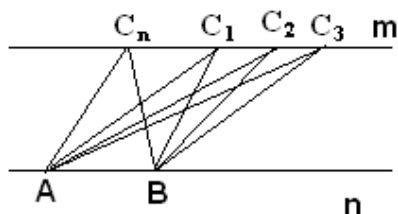
Matematikada qaraladigan miqdorlar o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlarga bo'linadi.

Agar berilgan masaladagi miqdor shu masalaning shartlarida o'zining son qiymatini o'zgarta olsa, u o'zgaruvchi miqdor deyiladi.

Miqdorlarni lotin alifbosining harflari bilan belgilash qabul qilingan: o'zgarmas miqdorlarni a, b, c harflari bilan, o'zgaruvchi miqdorlar $x, y, z, \dots$ harflari bilan belgilanadi.

Adabiyotlarda o'zgarmas miqdorlar $y = x + C$, $C = \text{const}$ deb ham belgilanadi.

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar ta'rifidan bir miqdorning o'zi har bir masalaning shartiga qarab, bir masalada o'zgaruvchi, ikkinchi masalada o'zgarmas miqdor bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi.



1-chizma

Misol. $n \parallel m$ to'g'ri chiziqlar va uchlari bu chiziqlarda yotgan ABC uchburchakni qaraylik (1-chizma).

Uchburchakning C uchi AB tomonlariga parallel holda n yo'g'ri chiziq bo'ylab o'ngga siljisin. U holda

uchburchakning AB asosi, balandligi, yuzi va burchaklari yig'indisi o'zgarmas bo'ladi. Uning AC_n, BC_n tomonlari, perimetri, burchaklari o'zgaruvchi bo'ladi.

2. Argument va funksiya

Ta'rif.

Agar x o'zgaruvchi miqdorning har bir ko'rilayotgan qiymatiga biror qonun yoki qoida asosida y o'zgaruvchi miqdorning aniq qiymatlari mos qo'yilsa, u holda x va y o'zgaruvchi miqdorlar orasida funksional bog'lanish bor deyiladi. Bu holda x – erkli o'zgaruvchi, y – erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Misollar.

1. Bir yo'la 2 m kenglikdagi polosani haydab borayotgan traktor haydaydigan yer miqdori y traktor bosib o'tgan yo'l x ning funksiyasidir:

$$y=2x.$$

2. Har qanday kvadratning yuzi (y) uning tomoni (x) ning funksiyasidir:

$$y=x^2.$$

3. Aylana uzunligi (y) uning radiusi (x) ning funksiyasidir:

$$y = 2\pi \cdot x.$$

Shunday qilib, agar argument x orqali va funksiya y orqali belgilansa, u holda bu ikki o'zgaruvchi miqdorni bir-biriga bog'laydigan formula yoki tenglama x va y orasidagi funksional bog'lanishni ifodalaydi.

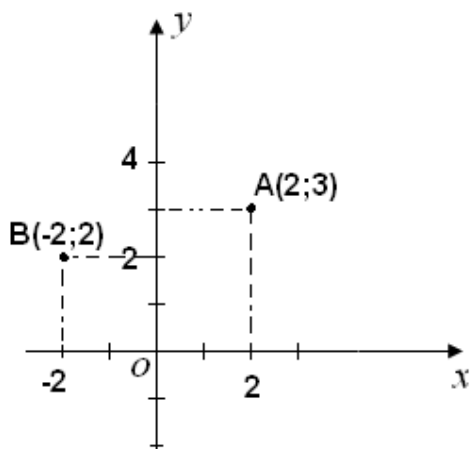
3. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi

Funksiya tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning qat'iy ta'rifi quyidagicha.

Ta'rif.

Bizga X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. X to'plamdagi har bir x elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdagi aniq bitta y element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya berilgan deyiladi va $y=f(x)$ ko'rinishida yoziladi.

Misol. 1. Koordinatalar tekisligini qaraylik (2-rasm). Ox o'qdagi har bir nuqtaga Oy o'qdagi biror nuqta albatta mos keladi.



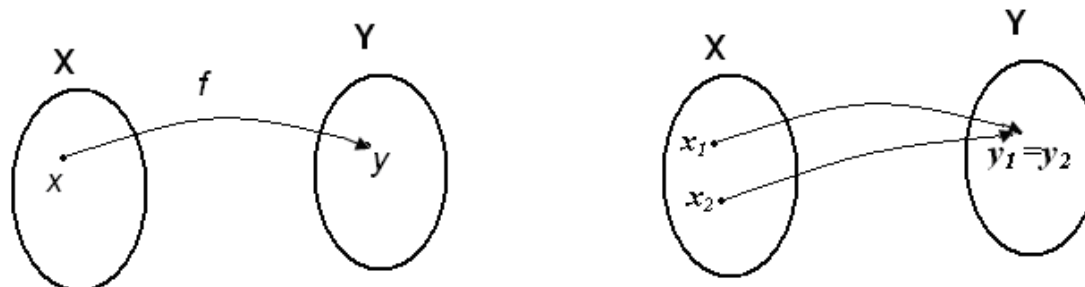
2. Agar institutga hujjat topshirgan abieturientlar to'plamini X to'plam desak, bu to'plamda hech qanday natijani ko'ra olmaymiz. Axir, barcha abieturientlarni ham

institut qabul qila olmaydi. Demak, X to'plamning o'zi bizga xulosa chiqarish imkonini bermaydi, shuning uchun boshqa to'plamni qarash kerak bo'lar ekan. Natijalarni ko'rish uchun bizga X to'plamni biror f qoida bo'yicha Y to'plamdagi aksini ko'rish yakuniy xulosa chiqarish imkonini beradi. Abieturientlarning bilimlarini sonlarda taqqoslab ko'rish kerak. Sonlarni taqqoslash mumkin va oson, abieturientlarni ko'rinishi yoki boshqa jihati bilan taqqoslay olmaymiz.

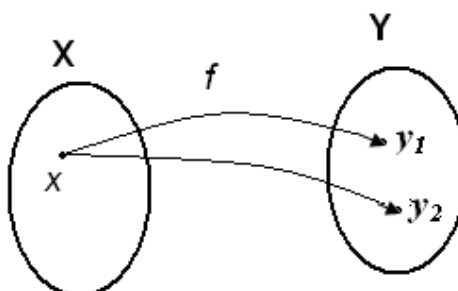
Demak, buning uchun imtixon asosida abieturientlarning Y to'plamdagi to'plagan ballarini tartiblash va eng yuqori ball to'plaganlarni institutga qabul qilish mumkin.

3. Bir vaqtning o'zida ikkita odam bitta mashinani haydab ketishi yoki ularning har biri bittadan avtomashina haydashi mumkin. Biroq bir vaqtning o'zida bitta odam ikkita mashinani haydashi mumkin emas. Shu holatlarda funktsiyani quyidagicha tasvirlash mumkin.

Aynan shuning uchun ham biz funktsiyani o'rganamiz.
Quyidagi ikkita holatda funktsiya mavjud bo'ladi.



Bu funktsiya holda funktsiya mavjud emas



Ta’rif. Argument x ning X to’plamdan qabul qila oladigan barcha qiymatlar to’plami f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ orqali belgilanadi.

$\{f(x) | x \in D(f)\}$ to’plam f funksiyaning qiymatlar sohasi deb ataladi va $E(f)$ orqali belgilanadi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishda funksiyaning grafigini chizib ko’rsatish hamda grafik asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini topish o’quvchilarda funksiya haqida kengroq tasavvur hosil qilish imkonini beradi.

Misollar.1. Ushbu funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = 2x - x^2$

Yechish. a) $x-1 \neq 0$ ya’ni maxraj nolga teng bo’lishi mumkin emas. Bundan $x \neq 1$. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ dan iborat.

2. Ushbu funksiyalarning qiymatlar sohasini toping.

a) $y = x^2 - 2x + 5$ b) $y = 3$

Yechish. a) $y = x^2 - 2x + 5$ funksiyaning qiymatlar sohasini topishda kvadrat funksiyaning grafigi parabola ekanligini e’tiborga olib, $a=1>0$ bo’lgani uchun parabola tarmoqlari yuqoriga qaragan. Shuning uchun endi parabolaning uchini topamiz:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \quad y(x_0) = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

Demak, berilgan funksiyaning qiymatlar sohasi $[4; +\infty)$.

b) $y = 3$

Qiymatlar sohasi: $\{3\}$.

Misollar yechish.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

$$1.1. f(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$1.2. f(x) = \frac{3x}{x-3,4}$$

$$1.3. f(x) = \frac{4x-1}{3x-2}$$

$$1.4. f(x) = \frac{4x}{(x-1)(x-2)}$$

$$1.5. f(x) = \frac{4x^2-1}{x^2-7x+12}$$

$$1.6. f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

2. Funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

$$2.1. y=1$$

$$2.2. y = x^2$$

$$2.3. y = -x^2$$

$$2.4. y = x^2 - 1$$

$$2.5. y = 3x^2 - 6x + 1$$

$$2.6. y = \frac{5}{x-2}$$

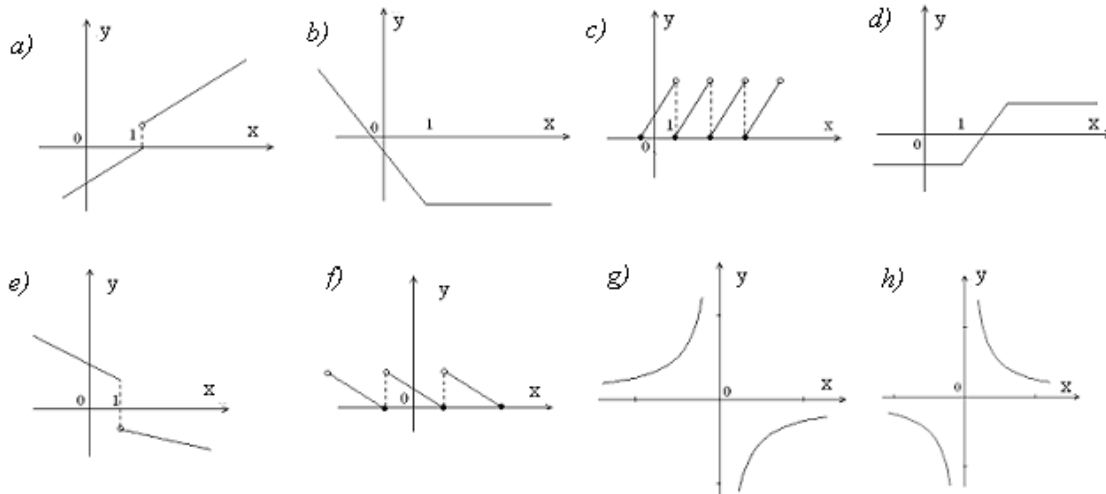
$$2.7. y = \frac{x}{x+1}$$

$$2.8. y = \frac{2}{x^2+2}$$

$$2.9. y = \sqrt{x-2} + 3$$

Yuqoridagi mashqlar bajarib ko'rsatilgandan so'ng, o'quvchilardan quyidagi masalalarni yechish talab qilinadi. Bu masalalar funksiya grafigi asosida uning aniqlanish va qiymatlar sohasini topish talab etilib, o'qituvchining yordami bilan munozara asosida og'zaki yechiladi. 2-mashqda aksincha, aniqlanish va qiymatlar sohasi bo'yicha funksiya grafigini tiklash talab qilinadi va bu masala yozma bajariladi.

1. Quyidagi 1-rasmda berilgan funksiyalar uchun aniqlanish sohasi $D(f)$ va qiymatlar to'plamini $E(f)$ топинг.



1-pacm

2. Ox va Oy o'qlarda $X=[a;b]$ va $Y=[c;d]$ kesmalar berilgan. $X=D(f)$ $Y=E(f)$ bo'ladigan $f(x)$ funksiyani grafik usulda bering.

a) $X=[-7;7]$, $Y=[-2;6]$

b) $X=(-\infty; \infty) \setminus \{1\}$, $Y=[-6;6]$

Bu mashqlar munozara asosida hal qilingandan so'ng, o'quvchilarning har biriga tarqatma material beriladi. Bu tarqatma vositalarida funksiya grafiklari berilgan bo'lib, o'quvchilardan funksiya grafiklari asosida uning aniqlanish va qiymatlar sohasini topish hamda aniqlanish va qiymatlar sohasi, shuningdek xossalari berilgan holda funksiya grafigini tiklash talab qilinadi. Bu vazifa uchun 7-10 daqiqa beriladi.

4. Funksiyaning berilish usullari.

Funksiya 3 xil usulda beriladi:

1. analitik usul.
2. grafik usul.
3. jadval usuli.

1. Analitik usul. Funksiya bilan argument orasidagi moslik ko'pincha biror matematik ifoda orqali beriladi. Matematik ifodada x argument va sonlar ustida qaysi amallarni qanday tartibda bajarilishi ko'rsatilgan bo'lib, bu amallarni bajarish natijasida funksiyaning mos qiymatlarini hosil qilish mumkin,

Bu holda $y=f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan deb aytiladi. Agar $y=f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, y ga nisbatan yechilgan bo'lsa, u holda tenglikning o'ng tomonidagi ifoda funksiyaning analitik ifodasi deyiladi.

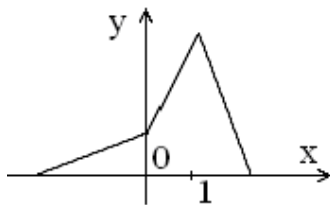
Misol. 1) $y = 5x^3 - 1$ 2) $y = \frac{3x-2}{2x^2+5}$

2. Grafik usul. $y=f(x)$ fnksiya biror X sohada berilgan bo'lsin.

Ta'rif. xOy koordinatalar tekisligida absissasi, ordinatasi $f(x)$ lardan iborat bo'lgan nuqtalar to'plami shu funksiyaning grafigi deyiladi.

Grafikdagi nuqtaning absissalar o'qidagi proyeksiyasi argument qiymatiga, ordinatalar o'qidagi proyeksiyasi esa funksiya qiymatiga mos keladi.

Misol.



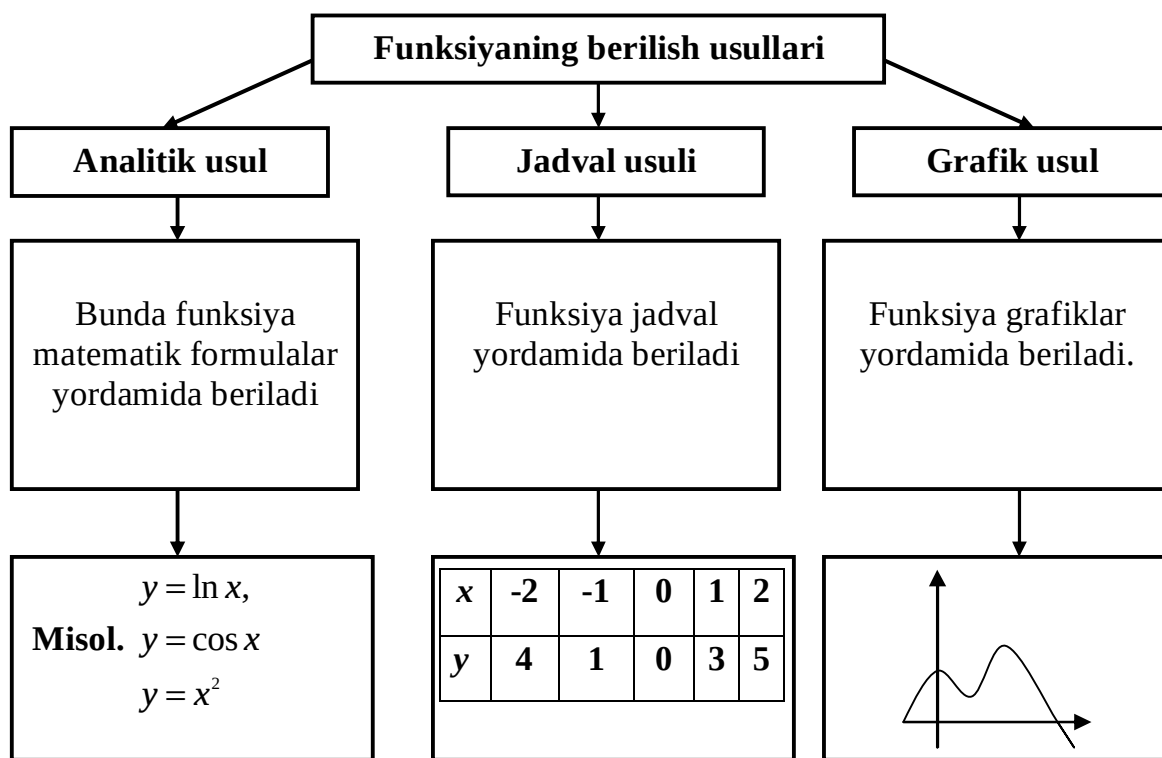
3. Jadval usuli.

Funksiyaning jadval bilan berilishi jadval usuli hisoblanadi. Bunda har bir argumentga mos qiymatlar jadvalda berilgan bo'ladi.

Misol.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	9	11
y	-5	7	3	4	5	6	5	10	11	15	17

Funksiyaning berilish usullari quyidagi holatda sxemalar orqali berilishi maqsadga muvofiq bo'ladi.



Misollar yechish.

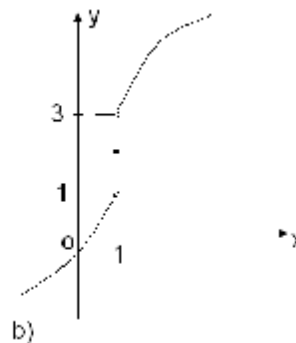
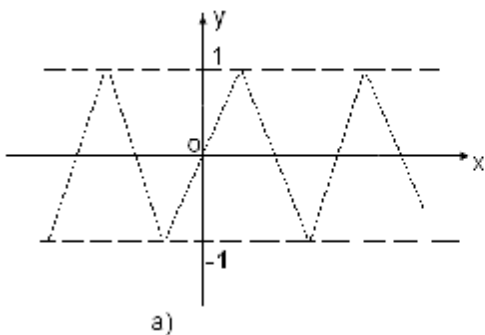
3. Analitik usulda berilgan funktsiyani jadval va grafik usulda tasvirlang.

3.1. $y = \frac{1}{x}$ 3.2. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ 3.3. $y = x^2 - 6x + 5$ 3.4. $y = 1 - 4x^2$

3.5. $y = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funktsiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

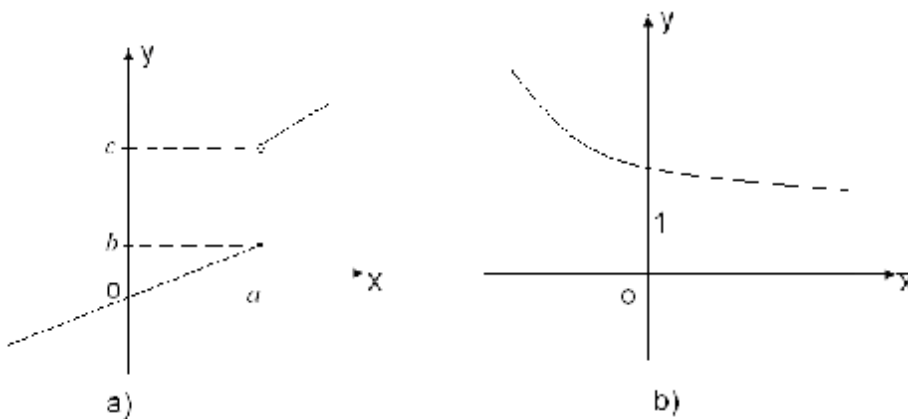


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$[-6;6]$	$[-2;5]$	A(-4;0) B(-2;0)	C(0;2,5)	1, $f(1)=3$	-3, $f(-3)=-2$ 4, $f(4)=1$

2-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

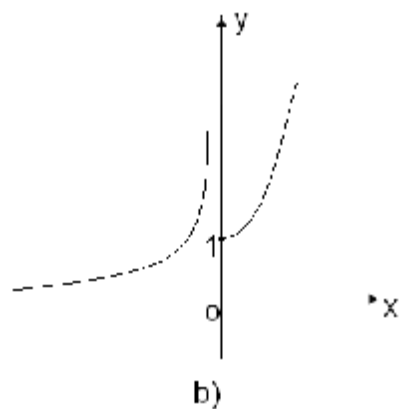
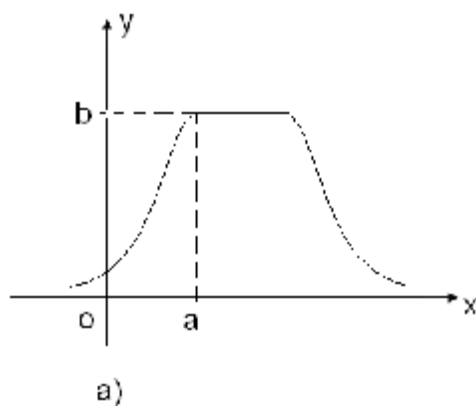


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$[-5;4]$	$[0;6]$	O(0;0)	—	-2, $f(-2)=2$	0, $f(0)=0$

3-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

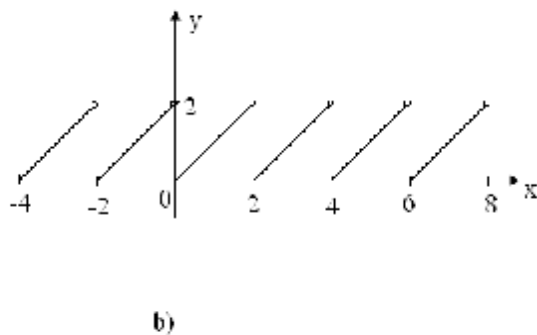
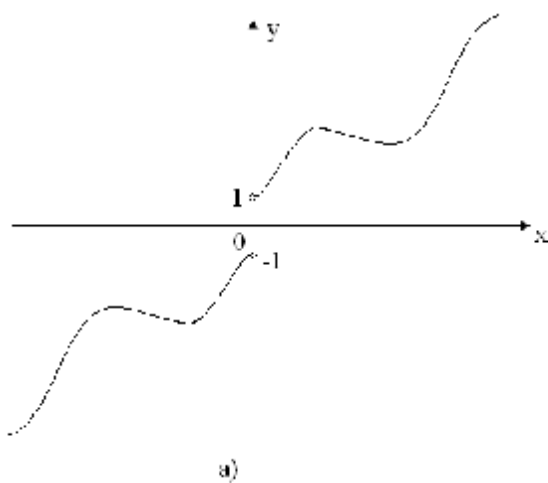


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$[-4;4]$	$[-3;6]$	A(-4;0) B(-1;0) C(2,5;0)	D(0;-2)	-2, $f(-2)=2$	1, $f(1)=-3$

4-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

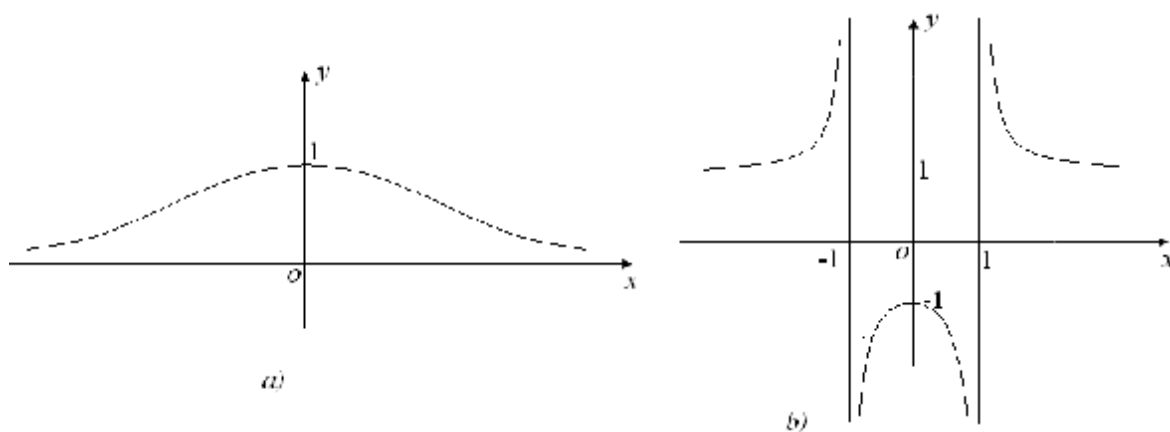


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$[-5;3]$	$[0;5]$	$A(-3;0)$	$C(0;4,5)$	$1, f(1)=5$	$-3, f(-3)=2$

5-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

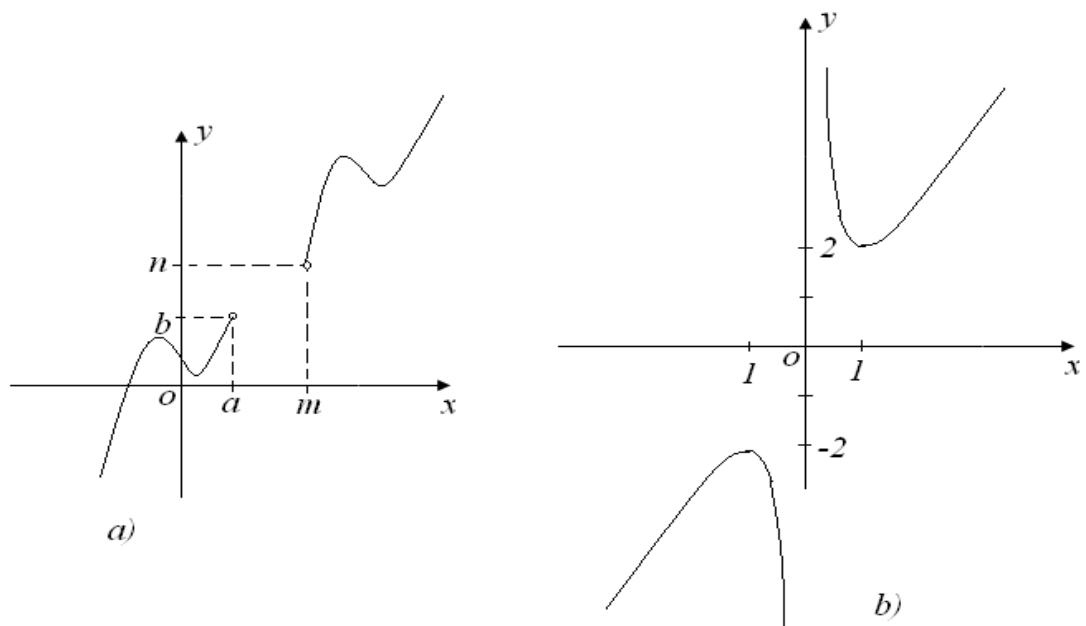


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$	—	$A(0; -5)$	$-1, f(-1)=-4$	$3, f(3)=4$

6-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

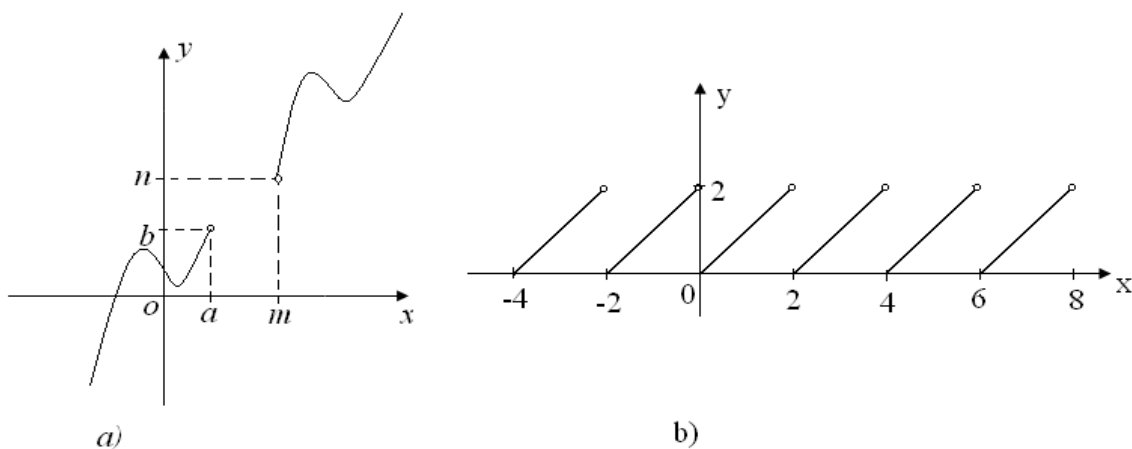


2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$(-\infty; +\infty)$	$(0; 1]$	–	$A(0; 1)$	0, $f(0)=1$	–

7-variant

1. Rasmda berilgan funksiya grafigi asosida funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.



2. Quyidagilar asosida funksiya grafigini tiklang.

Aniqlanish sohasi	Qiymatlar sohasi	Ox o'q bilan kesishish nuqtalari	Oy o'q bilan kesishish nuqtalari	Maksimum nuqtalari	Minimum nuqtalari
$(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$	–	A(0;-1)	0, $f(0)=-1$	–

Adabiyotlar

1. A.A. Abduhamidov va b. Algebra va analiz asoslari. 1-qism. Akademik litseylar uchun darslik.
2. B. Abdalimov, Sh. Solihov. Oliy matematika qisqa kursi. O'quv qo'llanma. Toshkent. O'qituvchi. 1981.
3. A.G'. Hikmatov, T.T. Turdiyev. Matematik analiz.T.: O'qituvchi. 1980.

Darsning texnologik xaritasi

Mavzu	Funksiya tushunchasi, aniqlanish va qiymatlar sohasi va berilish usullari.
Maqsad va vazifalar	Funksiya haqida tushuncha berish, funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini o'rgatishda ko'rgazmali-illyustrativ darajada o'zlashtirishni tashkil etish uchun grafikka oid masalalardan foydalanish Ta'limiy: Funksiya tushunchasi, uning aniqlanish va qiymatlar sohasini grafik masalalardan foydalanib tushuntirish hamda analitik usulda va grafik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini topishga o'rgatish. Tarbiyaviy: O'quvchilarda sabr-toqat va chidamlilikni shakllantirish; Fikrni matematik ketma-ketlikda bayon qilishga o'rgatish; Rivojlantiruvchi: O'quvchilarda grafikka oid masalalardan foydalanib, vizual tafakkurini rivojlantirish.
O'quv jarayonining mazmuni	Asosiy tushunchalar: funksiya, funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi, funksiyaning berilish

	usullari.
O'quv jarayonini amalga oshirish texnologiyalari	Metod: munozara, aqliy hujum Forma: ma'ruza. Vosita: Darslik, doska, tarqatma materiallar, kompyuter, proyektor. Usul: og'zaki va yozma. Nazorat: savol- javoblar va yozma. Baxolash: 5 ballik tizimda javoblar baholanadi.
Kutiladigan natijalar	O'qituvchi uchun: O'z ustida ko'proq ishlash va matematik masalalarni ko'proq grafik asosida yondoshish. O'quvchi uchun: Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasining geometrik ma'nosini grafiklarda ko'ra olish.
Kelgusi rejalar	O'qituvchi uchun: Grafik asosida funksiya mavzusini tushuntirishda turli metodlarni qo'llash samadorligini oshirish. O'quvchi uchun: Funksiya grafigi asosida funksiya haqida kengroq ma'lumot olish ko'nikmasini hosil qilish.

II bob bo'yicha xulosalar

1. Vizual tafakkurni rivojlantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiya qilindi va akademik litsey matematika kursida foydalanish mumkin bo'lgan grafikka oid masalalar to'plandi.
2. Vizual tafakkurni rivojlantirishda axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanishda chizmalar, grafiklar, jadvallar, sxemalarni ko'rsatishda slaydlardan foydalanish ko'rib chiqildi.
3. Akademik litsey matematika kursida grafikka oid masalalalardan dars jarayonida foydalanish metodikasi yoritildi.

III BOB. TAJRIBA-SINOV ISHINI TASHKIL ETISH VA UNING NATIJALARI

3.1. Tajriba-sinov ishining tashkil etilishi

Tajriba-sinov ishini tashkil etish va uni o'tkazishda agar vizual tafakkurni shakllantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiya qilinsa va undan algebra va analiz asoslarini o'rganish jarayonida foydalanish metodikasi ishlab chiqilsa, akademik litsey o'quvchilarining vizual tafakkuri shakllanadi hamda algebra va analiz asoslarini o'rganish samaradorligi oshadi degan farazdan kelib chiqdik.

Tadqiqot maqsadi algebra va analiz asoslarini o'qitishda o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish metodikasini samaraliligini eksperimental tekshirishdan iborat.

Tajriba-sinov ishlari 4 bosqichda Toshkent Davlat Agrar Universiteti qoshidagi Qibray akademik litseyi aniq fanlar yo'nalishining 2-kurslarida o'tkazildi.

Tajriba-sinov ishlarining 1-bosqichida quyidagilar aniqlandi:

- 1) Akademik litseylar uchun algebra va analiz asoslari darsligida vizual tafakkurni shakllantirishga qaratilgan masalalar tahlili;
- 2) Algebra va analiz asoslarini o'qitish jarayoni.
- 3) Akademik litseyning aniq fanlar yo'nalishidagi 204- va 206- guruhlaridan dastlabki nazorat ishlari olindi. Nazorat ishi quyidagicha ikkita variantdan iborat bo'ldi.

1-variant

1. Tengsizliklarni oraliqlar usulida yeching.

a) $(x - 2)(x - 5)(x - 12) > 0$

b) $x(x + 1)(x + 5) > 0$

2. $y = x^2 - 4x + 3$ funksiya grafigini chizing.

a) Shu grafikdan $x^2 - 4x + 3 = 0$ tenglama ildizlarini ko'rsating. Diskriminant ishorasini aniqlang.

b) Grafik asosida $x^2 - 4x + 3 > 0$ tengsizlik yechimini toping.

3. Tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 = y - 4 \\ y^2 = x + 10 \end{cases}$$

2-variant

1. Tengsizliklarni oraliqlar usulida yeching.

a) $(x + 7)(x + 1)(x - 4) < 0$

b) $(x + 48)(x - 37)(x - 42) > 0$

2. $y = x^2 - 3x + 2$ funksiya grafigini chizing.

a) Shu grafikdan $x^2 - 3x + 2 = 0$ tenglama ildizlarini ko'rsating. Diskriminant ishorasini aniqlang.

b) Grafik asosida $x^2 - 3x + 2 > 0$ tengsizlik yechimini toping.

3. Tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$$

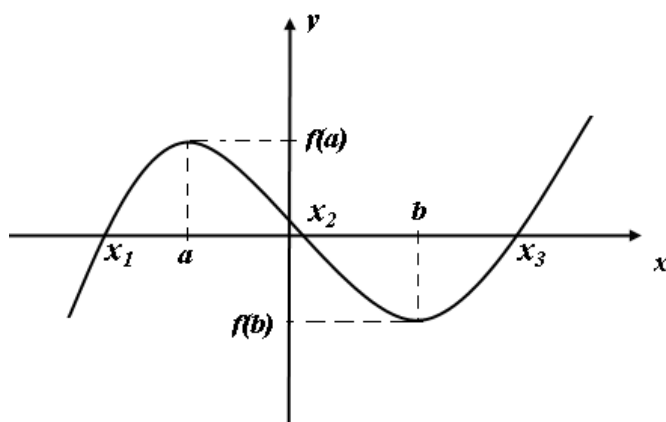
b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Tajriba-sinov ishlarining 2-bosqichida tajriba guruhiga algebra va analiz asoslarini o'qitish jarayonida dars davomida vizual tafakkurni shakllantirishga qaratilgan vositalardan foydalanilib olib borildi.

Tajriba-sinov ishlarining 3-bosqichida ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligini aniqlash naqsadida nazorat ishlari olindi va tahlil qilindi. Nazorat ishi savollari quyidagilardan iborat:

I variant

1. $f(x)$ funksiya grafigi berilgan (1-rasm). Shu funksiya grafigi asosida
 - a) Funksiyaning nollarini ko'rsating.
 - b) Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
 - c) Funksiyaning juft, toqligini aniqlang.
 - d) Funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini aniqlang.
 - e) Funksiya teskarilanuvchimi?
 - f) Funksiya davriymi?
 - g) Funksiyaning $[x_1; x_3]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlang.



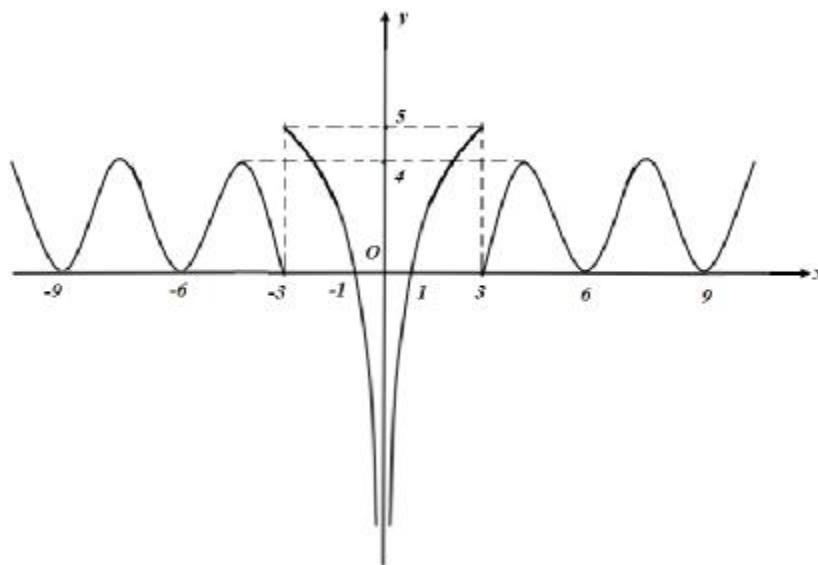
1-rasm

2. $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$ tenglama ildizlari sonini aniqlang.
3. $x^2 + 6x + 45 \leq \log_9 x$ tengsizlikni yeching.
4. $|\log_2 x| = -x + 4$ tenglamaning nechta ildizi bor?

II variant

1. $f(x)$ funksiya grafigi berilgan (2-rasm). Shu funksiya grafigi asosida
 - a) Funksiyaning nollarini ko'rsating.
 - b) Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
 - c) Funksiyaning juft, toqligini aniqlang.
 - d) Funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini aniqlang.

- e) Funksiya teskarilanuvchimi?
- f) Funksiya davriymi?
- g) Funksiyaning $[0; 9]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlang.



2-rasm

2. $\sin x = x^2 - x + 0,5$ tenglama $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada nechta ildizga ega.
3. $|x^2 - 3x + 6| = 9a$ tenglama a ning qanday qiymatlarida 3 ta haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi?
4. $|\log_5 x| = -x + 5$ tenglamaning nechta ildizi bor?

Ishlab chiqilgan metodikaning o'quvchilar tomonidan qanday baholanganligini bilish maqsadida anketa so'rovnoma o'tkazildi. So'rovnoma savollari quyidagilardan iborat bo'ldi:

“Grafikka oid masalalardan dars jarayonida foydalanish”

ANKETASI

1. Dars jarayonida grafikka oid masalalardan foydalanib dars o'tish kerak deb hisoblaysizmi? Nima uchun? _____

2. Sizga dars jarayonida taklif etilgan grafikka oid masalalarni ilgari ham ko'rganmisiz? Ko'rgan bo'lsangiz qayerda? _____

3. Grafikka oid masalalarni yechish yuzasidan ko'rsatmalar va namunalar ko'rsatish kerak deb hisoblaysizmi? Nima uchun?_____

4. Grafikka oid masalalar o'tilayotgan mavzuni sizga tushunarli bo'lishidagi ahamiyatini qanday baholaysiz?_____

5. Grafikka oid masalalardan foydalanib o'tilgan darslar "funksiya haqidagi tushuncha va tasavvurimni kengaytirishga xizmat qildi" deb hisoblaysizmi? Nima uchun?_____

6. Grafikka oid masalalardan foydalanib sizga dars mavzusi tushuntirildi. Keyinchalik aynan shu mavzuni esga olganingizda mavzuning qaysi qismi yoki qanday elementlari yodingizga tushadi?_____

7. Grafikka oid masalalarni dars jarayonida echib bordingiz. Aytingchi, siz o'zingiz uchun bundan nima oldingiz va sizning bunday masalalar yuzasidan fikringiz._____

8. Siz foydalanayotgan adabiyotda bunday tipdagi grafikka oid masalalarni uchratdingizmi?_____

9. Siz foydalanayotgan adabiyotda “Funktsiya, uning aniqlanish va qiymatlar sohasi” mavzusi sizga kengroq va to’liq ma’lumot olishingiz uchun yetarli deb hisoblaysizmi? Nima uchun? _____

10. Sizningcha, adabiyotlarda aynan mana shunday grafikka oid masalalar bo’lishi kerak deb hisoblaysizmi? Nima uchun? _____

Tajriba-sinov ishlarining 4-umumlashtiruvchi bosqichida tajriba-sinov ishidan oldingi va keyingi nazorat ishlarining statistik tahlili qilindi.

3.2. Tajriba-sinov ishining natijalari

A.U.Abduhamidov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanovlar muallifligidagi akademik litseylar uchun algebra va matematik analiz asoslari [6, (289-347)] darsligida vizual tafakkurni shakllantirishga qaratilgan masalalarning berilishi yuzasidan tahlil qilib chiqaylik.

[6, (289-304)] ning 1-qismida Funksiyalar bobidagi 1-§ Sonli funksiyalar deb nomlangan. Bu paragrafda funksiya, uning aniqlanish va qiymatlar sohasi haqidagi ta'rifni mukammal deb bo'lmaydi, chunonchi sonli funksiya haqida o'quvchi aniq tasavvurga ega bo'lishga qiynaladi. Odatda o'quvchi funksiyaning aniqlanish sohasini funksiya analitik usulda berilganda topa oladi, biroq funksiyaning grafigi asosida uning aniqlanish va qiymatlar sohasini topishga qiynaladi. Ammo, o'quvchi funksiyaning qiymatlar sohasini analitik usulda berilganda ham topishga qiynaladi. Grafik asosida berilganda funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini grafikdan ko'rsatib bera olishi uchun funksiya grafigiga oid masalalardan qo'shish kerak.

Aytish mumkinki, [6, (289-304)] dagi qaralayotgan paragrafda grafikka oid masalalar uchramaydi. Bu esa yuqoridagi kamchiliklarni keltirib chiqaradi.

[6, (321-347)] adabiyotning 1-qismida 3-§ Funksiyalarni tekshirish deb nomlangan bo'lib, undagi "Juft va toq funksiyalar" mavzusida simmetrik to'plam, juft va toq funksiya ta'rif, ularning koordinata tekisligidagi joylashuvi haqida ma'lumot berilgan. Biroq bu ma'lumotlar asosida funksiyaning grafigi chizmada ko'rsatilgan emas yoki shunga doir grafikka oid mashqlar keltirilmagan. Shuning uchun ham kitobxonda funksiyaning juftligi va toqligi haqida yetarli tushuncha va tasavvur hosil bo'lmaydi.

"Davriy funksiya" va "Teskari funksiya" mavzularida ham shunday holatlarni kuzatish mumkin. [6, (289-347)] dagi asosiy masalalar analitik usulda berilgan funksiya grafigini yasashdan iborat. Bunday masalalar o'quvchilarni masalalarga faqat bir tomonlama yondashib qolishiga sabab bo'ladi.

[6, (143-176)] ning 2-qismidagi IV bobi ‘Funksiyaning limiti va uzluksizligi” deb nomlangan. Bundagi asosiy masalalar standart vaziyatdagi ya’ni funksiyaning limitini topish bilan bog’liq masalalardir. O’quvchilar funksiya limitini topishni uddalaydi, funksiyaning limiti qaralayotgan nuqta atrofidagi grafigini tasvirlashga qiynaladi, grafikdan foydalanib, funksiya limiti haqida fikr yurita olmaydi.

Kitobdagi ba’zi masalalarni yechishda kitobxon qiyinchiliklarga duch keladi. Chunki o’sha masalalarni yechish usuli kitobda yetarlicha berilmagan.

Tajriba-sinov ishining 2-bosqichida o’quvchilardan olingan sinov ishi avval o’tilgan mavzular bo’yicha bo’lib, masalani grafikdan foydalanib yechish so’raldi. Natijalarga ko’ra, masalalarni o’quvchilar grafikdan emas, balki funksiyaning xossalaridan foydalanib analitik usulda yechishga urinishgan. Biroq masalalarni to’liq yecha olishmagan. Bundan aytish mumkinki, o’quvchilar grafiklarni ishlatmaydi, negaki uni to’liq tasavvur etishga qiynaladi. Shu bilan birga analitik usulni ham to’liq bilishmaydi. Ularni ko’proq grafik bilan ishlashga o’rgatish kerak. Shunda ikkilanmasdan grafikdan funksiyaning xossalarini aytib bera oladi.

Olingan nazorat ishlarining statistik tahlilini qilish uchun quyidagi farazlardan foydalanamiz.

Nolinchi faraz (N_0): ishlab chiqilgan metodika algebra va analiz asoslarini o’qitish jarayonida o’quvchilarning visual tafakkurini rivojlantirmaydi.

Muqobil faraz (N_1): ishlab chiqilgan metodika algebra va analiz asoslarini o’qitish jarayonida o’quvchilarning visual tafakkurini rivojlantiradi.

Dastlabki nazorat ishlari bo’yicha tajriba va sinov guruhlarida 24 nafardan o’quvchi qatnashdi va samaradorlik quyidagicha bo’ldi:

1-jadval

	quyi	o’rta	yuqori
Sinov guruhi	7	11	6
Nazorat guruhi	10	9	5

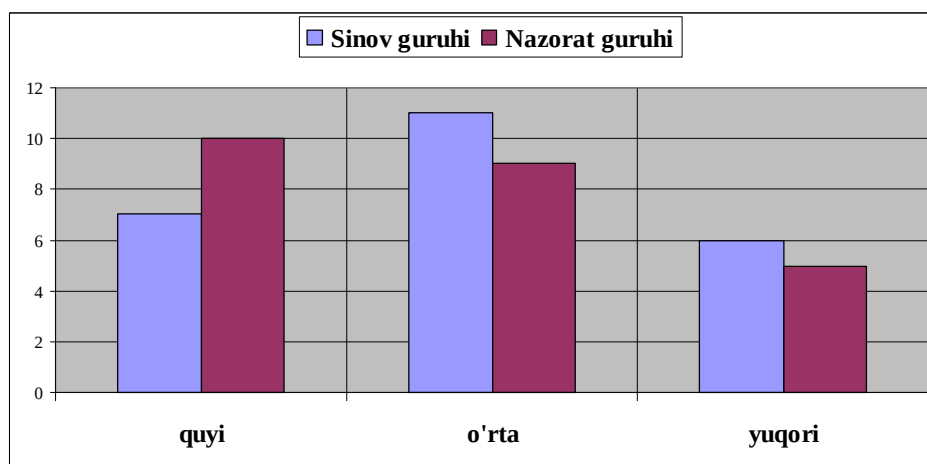
Endi tajriba-sinov ishidan oldingi nazorat ishining statistik tahlilini hisoblaymiz. Buni amalga oshirishda o'zgaruvchi $L=3$ (o'zlashtirish uchta "quyi", "o'rta" va "yuqori" darajalar bo'yicha ajratilgan) tartib shkalasi bo'yicha χ^2 bir jinslilik kriteriyasidan foydalanamiz [24, (43-51)]. Uni hisoblash formulasi quyidagicha:

$$c^2 = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^L \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M} \right)^2}{n_i + m_i} \quad (1)$$

Bu yerda: $N=24$ ta – sinov guruhidagi o'quvchilar soni, n_i - sinov guruhidagi mos baholangan o'quvchilar soni $n_1 = 7$, $n_2 = 11$, $n_3 = 6$.

$M=24$ – nazorat guruhidagi o'quvchilar soni, m_i - nazorat guruhidagi mos baholangan o'quvchilar soni $m_1 = 10$, $m_2 = 9$, $m_3 = 5$.

(1) formulaga ko'ra $c^2 = 0,82$ ga teng. [24, (43-51)] dagi jadval bilan topilgan qiymatni taqqoslaymiz: $c_{0,05}^2 = 5,99 > c^2 = 0,82$ bo'lganligi uchun sinov va nazorat guruhlaridagi o'zlashtirish darajalari o'zaro teng.



Tajriba-sinov ishlarining 3-bosqichida algebra va analiz asoslarini o'qitishda o'quvchilarda vizual tafakkurini shakllantirishga yordam beruvchi masalalar, ularni yechish bo'yicha namuna va ko'rsatmalar berish hamda axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanish orqali o'qitish metodikasi ishlab chiqildi.

Tajriba-sinov ishlarining 3-bosqichida ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligini tekshirish maqsadida olingan 4-bosqichdagi nazorat ishlarining natijalari quyidagicha:

2-jadval

	quyi	o'rta	yuqori
Sinov guruhi	4	5	15
Nazorat guruhi	8	10	6

O'quvchilarning tajriba-sinov ishidan keyingi ishlab chiqilgan metodikaning samaradorligini aniqlash maqsadida olingan nazorat ishlari bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichini nazorat qilishda quyidagicha namunaviy mezonlar belgilandi:

Yuqori daraja	Masalani yechishda funksiya grafigiga doir nazariy ma'lumotlardan foydalanilgan. Funksiya grafigi asosida masala yechimini topa olgan. Analitik usulda yoki matnli masalani grafikda tasvirlay olgan.
O'rta daraja	Masalani yechishda funksiya grafigiga doir nazariy ma'lumotlardan foydalanilgan. Funksiya grafigi asosida masala yechimini qisman topa olgan. Analitik usulda yoki matnli masalani grafikda to'liq tasvirlay olmagan.
Quyi daraja	Masalani yechishda funksiya grafigiga doir nazariy ma'lumotlardan qisman foydalanilgan. Funksiya grafigi asosida masala yechimini topishda xatoliklarga yo'l qo'ygan. Analitik usulda yoki matnli masalani grafikda tasvirlashda kamchiliklar uchraydi.

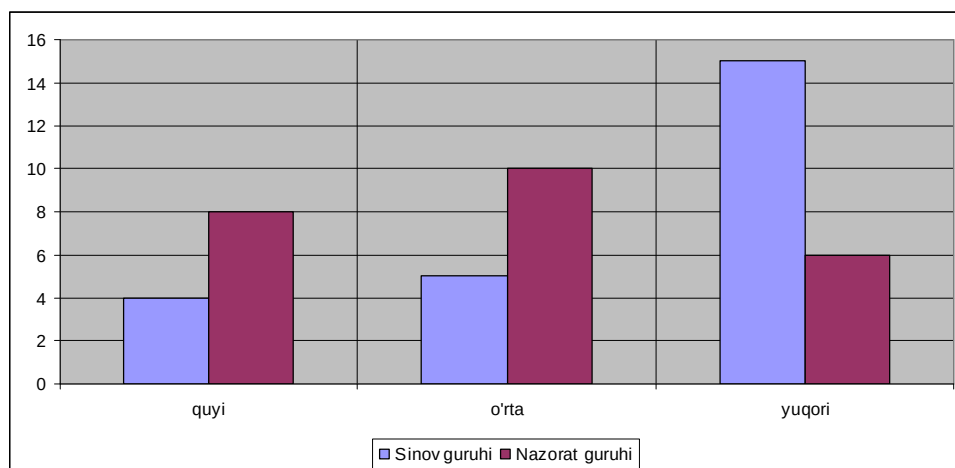
Tajriba-sinov ishidan keyingi nazorat ishlarining statistik tahlilini hisoblaymiz.

Tajriba-sinov ishidan keyingi nazorat ishlarida $N=24$ ta – sinov guruhidagi o'quvchilar soni, n_i - sinov guruhidagi mos baholangan o'quvchilar soni $n_1 = 4$,

$n_2 = 5$, $n_3 = 15$. $M = 24$ – nazorat guruhidagi o'quvchilar soni, m_i – nazorat guruhidagi mos baholangan o'quvchilar soni $m_1 = 8$, $m_2 = 10$, $m_3 = 6$.

(1) formulaga ko'ra $c^2 = 6,85$ ga teng. [24] dagi jadval bilan topilgan qiymatni taqqoslaymiz: $c_{0,05}^2 = 5,99 < c^2 = 6,85$ bo'lganligi uchun sinov va nazorat guruhlaridagi o'zlashtirish darajalari 0,95 aniqlikda farq qiladi.

Demak, N_0 faraz rad etilib, N_1 faraz qabul qilindi ya'ni ishlab chiqilgan metodika o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantiradi.



O'quvchilardan olingan anketa so'rovnomasi natijalari quyidagicha bo'ldi: grafikka oid masalalardan foydalanib dars o'tilganda o'quvchilar funksiyani grafik tasviri orqali uni aniq tushunishi, grafik orqali funksiyani to'la-to'kis o'rganish mumkinligini, misol va masala yechish jarayonini osonlashtirishi, ko'rgan narsasini ko'proq eslab qolishini, ba'zi o'quvchilar o'zlarining funksiya grafigini yasash bo'yicha bilimlari mukammal emasligini, grafik bilan ishlash oson ekanligini bildirishgan. Shu bilan birga grafikka oid masalalarni yechish yuzasidan namuna va ko'rsatmalar berish kerak ekan. Chunki bunday tipdagi grafikka oid masalalar adabiyotlarda kam berilgan hamda ularni yechish bo'yicha namuna va ko'rsatmalar keltirilmagan. Shuning uchun ham odatda, bunday masalalarni yechishga dars jarayonida katta e'tibor qaratilmaydi. Ko'rsatma va namunalar berilganda o'quvchilar o'zlari bilmagan ma'lumotlarini o'rganib olish imkoniyati tug'iladi.

Anketa so'rovnomasi tahlili yana shuni ko'rsatdiki, o'quvchilar o'zlari foydalanayotgan adabiyotlarida grafikka oid masalalar kam berilganini qayd qilishgan hamda bunday masalalar o'zlari uchun foydali ekanligini va bu masalalar ko'proq berilishi kerakligini ham bildirishgan.

III bob bo'yicha xulosalar

Tajriba-sinov ishining natijalaridan quyidagi xulosani aytish mumkin:

1. Algebra va analiz asoslarini o'qitishda o'quvchilarning vizual tafakkurlarini shakllantirish yo'llari: matematik masalalarni yechishda grafiklardan, grafikka oid masalalardan, jadvallar, chizmalar, sxemalardan foydalanishda axborot kommunikatsion texnologiyasini qo'llash o'quvchilarning vizual tafakkuri shakllanishiga xizmat qiladi.
2. Tajriba-sinov ishi natijalariga ko'ra, o'quvchilarning vizual tafakkuri shakllanganligi statistik tahlil yordamida isbotlandi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Tadqiqot jarayonida vizual tafakkurni shakllantirishga yordam beradigan masalalar klassifikatsiya qilinsa va undan matematik analiz asoslarini o'rganish jarayonida foydalanish metodikasi ishlab chiqilsa, akademik litsey o'quvchilarining vizual tafakkuri shakllanadi hamda algebra va analiz asoslarini o'rganish samaradorligi oshishiga olib kelishi haqidagi faraz tasdiqlandi.

Tadqiqot ishiga qo'yilgan masalalar hal qilindi va quyidagi natijalar hamda xulosalar olindi:

1. Vizual tafakkur tushunchasi, uning matematikani o'qitishdagi o'ziga xos xususiyatlari ko'rsatib berildi.
2. Vizual tafakkurni matematik masalalarni yechish orqali shakllantirish mumkinligi ochib berildi. Bunda matematik masalalarni yechishda grafiklardan foydalanish tez va oson yechim topish imkonini beradi.
3. Matematik analizning asosiy tushunchalarini o'qitishda vizual tafakkurni shakllantirishga yordam beruvchi grafikka oid masalalar to'plandi, ularning klassifikatsiya to'ldirildi va amaliyotga tatbiq qilindi.
4. Matematik analizning asosiy tushunchalarini o'qitishda grafikka oid masalalardan va axborot kommunikatsion texnologiyasidan foydalanib, o'quvchilarda vizual tafakkurni shakllantirish metodikasi ishlab chiqildi.

Shunday qilib, qo'yilgan vazifalar amalga oshirildi, faraz isbotlandi. O'tkazilgan tadqiqot natijalaridan kelgusida algebra va analiz asoslarini o'qitishda o'quvchilarning vizual tafakkurini shakllantirish maqsadida olib boriladigan izlanishlarda foydalanish mumkin.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasidan AL va KXX o'quvchilari va o'qituvchilari hamda Oliy o'quv yurtlarining talabalari foydalanishlari mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni. //Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.: Sharq, 1997. – 64 b.
2. O'zbekiston Respublikasining Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. //Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.: Sharq, 1997. – 61 b.
3. Karimov I.A. O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida, Toshkent. "O'zbekiston" – 2011. 440 b.
4. Karimov I.A. Yuksak ma'naviyat engilmas kuch, Toshkent. "Ma'naviyat" – 2008. 175 b.
5. Karimov I.A. "Barkamol avlod mamlakatimizni rivojlantirishda hal qiluvchi kuch". 16-17 fevral kunlari Toshkentda o'tkazilgan "Yuksak bilimli va intellectual rivojlangan avlodni tarbiyalash mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzusidagi xalqaro konferensiyada so'zlagan nutq. "Toshkent oqshomi" gazetasi. 20-fevral.
6. Abduxamidov A.A., Nasimov H.A., Nosirov U.M., Husanov J.H. Algebra va matematik analiz asoslari. 1- va 2- qismlar. Akademik litseylar uchun darslik. T.:O'qituvchi. 2001.
7. Akademik litseylarning aniq fanlar yo'nalishidagi tarmoq ta'lim standart iva chuqurlashtirilgan fanlar o'quv: Matematika. Fizika. Ona tili va adabiyoti. Rus tili va adabiyoti. Xorijiy til. O'zbek tili. Informatika / tahrir hay'ati: J.X.Husanov va boshq.- T.- 2005.-192b.
8. Арнхейм, Р. Искусство и визуальное восприятие. -М.: Прогресс, 1974.-392 с.
9. Арнхейм, Р. Визуальное мышление. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. -М.: Изд-во МГУ, 1981. - С. 97-107.

10. Abdiyeva Sh. Sh. Maktab algebra kursida uzluksizlik tushunchasini kiritish haqida/Fanning dolzarb muammolari yosh olimlar nigohida. Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. Toshkent 2012 yil, 326-328 betlar.
11. Avliyoqulov A. Kasb-hunar kollejlarda modulli o'qitish texnologiyalari. Toshkent. O'qituvchi. 2007.
12. Башмаков М.И., Резник Н.А. Развитие визуального мышления на уроках математики // Математика в школе. -1991.-№1.-С. 4-8.
13. Брагина, Н.Н., Доброхотова Т.А. Функциональные асимметрии человека. - М.: Медицина, 1981. - 288 с.
14. Далингер, В.А. Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике. Электронный научный журнал « Вестник» (Омского государственного педагогического университета). Выпуск 2006. www.omsk.edu.
15. Ефимов Е.А., Коломиец Л.В. Задачи с параметрами. Учебное пособие. Самара 2006. стр 64.
16. Глагольева Б.Г., Денищева Л.О., Сорокин Б.В. Из опыта введения понятий непрерывности и предела функции//Математика в школе. 1978.№4, стр.43-52.
17. Ивашев-Мусатов О.С., Наглядность в математическом анализе// Математике в школе. 1998. №6. стр. 18-21
18. Картёжников Д.А. Визуальная учебная среда как условие развития математической компетентности студентов экономических специальностей. Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 .-Омск. 2007. 190с.
19. Колмогоров А.Н. ва бошқалар, Алгебра ва анализ асослари. 10-11-синф. Уқитувчи. 1994 йил.
20. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. - М. Просвещение, 1968. - 432 с.
21. Matematika. Mavzulashtirilgan testlar to'plami (1996-2007). Manbalari va javoblari bilan. "Buxoro" nashriyoti – 2007.

22. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. М.: Мнемозина. 2001.
23. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения элементов математического анализа в общеобразовательной школе// Математике в школе. 2002. №9. Стр. 2-12
24. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях. М.: МЗ-Пресс, 2004. – 67с.
25. Перевалов Г.Е. Задачи на графики//Математика в школе. 1991. №2. стр.16-21.
26. Резник Н.А. Технология визуального мышления// Технологическая поддержка продуктивного обучения. М.: 2000. с.68-82
27. Сатьянов П.Г. Методика использования задач графического содержания в обучении началам математического анализа в школе: автореф.дис. ...канд.пед.наук. – Ленинград, 1984.-16 с.
28. Сатьянов П.Г. Задачи графического содержания при обучении алгебре и началам анализа/ Математика в школе, 1987. -№1. – С 56-60.
29. Turgunbayev R.M. Matematika o‘qitish muammolari//Ta’lim muammolari, 2005y.№1-4, 45-46 b.
30. Turgunbayev R.M., Abdiyeva Sh. Kub tenglama ildizlariga doir masalalar//FMI, 2008, №2. 60-63 b.
31. Turgunbayev R.M., Abdiyeva Sh. Matematika darslarida vizual tavakkurni rivojlantirish haqida/ Akademik litsey va kasb xunar kollejlari fizika-matematika fanlarini o‘qitishni takomillashtirish istiqbollari. 5 – an’anviy respublika ilmiy – amaliy konferensiyasi materiallari to‘plami. 1-qism 47-49 b.
32. Turgunbayev R.M., Bakirov T. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi tushunchalarini ta’riflash haqida// FMI, 2009, №5. 24-31b.
33. Turgunbayev R.M., Abdiyeva Sh. Matnli masalalar yechishda grafiklardan foydalanish// FMI, 2009, №4. 65-67b.

34. R.M.Turgunbayev, Sh.Sh.Abdiyeva. Matematik analizning asosiy tushunchalarini o'qitishda grafikka oid masalalardan foydalanish (metodik qo'llanma). Toshkent, 2011. 54b.
35. Vafaev R. va boshq. Algebra va analiz asoslari: Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanmasi. -T.:O'qituvchi,-2001.-368b.
36. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. - М.: Педагогика, 1980. — 240 с.
37. Юнусова Д.И. Узлуксиз таълим тизими математика ўқитувчисини тайёрлашнинг назарий асослари. Т.: Фан ва технология. 2008,- 162б.
38. Земляков А.Н. Наглядность при введении основных понятий математического анализа. /Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе. Сб.статей. Сост. Е.Г.Глаголева, О.С.Ивашев-Мусатов. М.: Просвещение. 1980. -256с. 147-164с.
39. Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю. Формирование зрительного образа. Исследование деятельности зрительной системы. - М.: Изд-во МГУ, 1969.-106 с.
40. Ғозиев Э. Тафаккур психологияси. Тошкент. Ўқитувчи, 1990.
41. Щукина Н.В. Наглядность как средство управления учебно— познавательной деятельностью студентов при обучении математическому анализу. Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 .-Омск. 2005. 206с.