**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

# РЕФЕРАТ

на тему :

**«ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА**

*Выполнила: студентка 305 гр.: Намозова У.*

*Проверил: Сайдуллаев У.Ж.*

*Самарқанд –2014*

**План**

- Принцип наименьшего действия
- Функция Лагранжа свободной частицы
- Функция Лагранжа системы частицУравнения Лагранжа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах
- Диссипативные силы

## Принцип наименьшего действия

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым **принципом Гамильтона**. Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$$L = L(q_1, q_2, \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_s, t)$$

или, в краткой записи, $L = L(q, q, t)$, причем движение системы удовлетворяет следующему условию.

Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \qquad (1)$$

имеет наименьшее возможное значение. Функция $L$ называется **функцией Лагранжа** данной системы, а интеграл (1)- **действием**.

Тот факт, что функция Лагранжа содержит только $q$ и $\dot{q}$, но не более высокие производные координат по времени, является выражением указанного выше факта, что механическое состояние полностью определяется заданием координат и скоростей. Перейдем к выводу дифференциальных уравнений, решающих задачу об определении минимума интеграла (1). Для упрощения записи формул предположим сначала, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция $q(t)$.

Пусть $q = q(t)$ есть как раз та функция, для которой $S$ имеет минимум. Это значит, что $S$ возрастает при замене $q(t)$ на любую функцию вида

$$q(t) + \delta q(t) \qquad (2)$$

где $\delta q(t)$ - функция, малая во всем интервале времени от $t_1$ до $t_1$, (ее называют *вариацией функции* $q(t)$); поскольку при $t = t_1$ и $t = t_2$ все сравниваемые функции (2) должны принимать одни и те же значения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ то должно быть

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (3)$$

Изменение $S$ при замене $q$ на $q + \delta q$ дается разностью

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot q + \delta \dot q, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)dt \; .$$

Разложение этой разности по степеням $\delta q$ и $\delta \dot q$ (в подынтегральном выражении) начинается с членов первого порядка.

Необходимым условием минимальности $S$ является обращение в нуль совокупности этих членов; ее называют первой вариацией (или просто вариацией) интеграла. Таким образом, принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)dt \tag{4}$$

или, произведи варьирование:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q \right) dt$$

Замечая, что $\delta \dot q = \frac{d}{dt}\delta q$ проинтегрируем второй член по частям и получим:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)\delta q dt = 0 \tag{5}$$

Но в силу условий (3) первый член в этом выражении исчезает. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях $\delta q$. Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0 \; .$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться $s$ различных функций $q_i(t)$

Очевидно, что мы получим тогда $s$ уравнений вида

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, s} \tag{6}$$

Это дифференциальные уравнения называются **уравнениями Лагранжа**.

Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (6) устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т. е. представляют собой уравнения движения системы. С математической точки зрения уравнения (6) составляют систему $s$ уравнений второго порядка для $s$ неизвестных функций $q_i(t)$. Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных. Для их определения тем самым полного определения движения механической системы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например, знание начальных значений всех координат и скоростей.

Пусть механическая система состоит из двух частей $A$ и $B$, каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы а качестве функции Лагранжа соответственно функции $L_A$ и $L_B$. Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, что взаимодействием между ними можно пренебречь, лагранжева функция всей системы стремится к пределу

$$\lim L = L_A + L_B \tag{7}$$

Это **свойство аддитивности функции Лагранжа** выражает собой тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.

Очевидно, что умножение функции Лагранжа механической системы на произвольную постоянную само по себе не отражается на уравнениях движения. Отсюда, казалось бы, могла вытекать существенная неопределенность: функции Лагранжа различных изолированных механических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные.

## Функция Лагранжа свободной частицы

Переходя к определению вида функции Лагранжа, начнем с простейшего случая - свободного движения одной частицы. ***В силу однородности пространства и времени*** функция Лагранжа свободной частицы не может зависеть явным образом ни от радиус-вектора частицы $\vec{r}$, ни от времени $t$, т. е. $L$ является функцией только от скорости $\vec{v}$. В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора $\vec{v}$, так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т. е. от квадрата $\vec{v}^{\,2} = v^2$:

$$L = L\left(v^2\right)$$

Вид этой функции однозначно устанавливается **принципом относительности Галилея**. В силу этого принципа функция $L\left(v^2\right)$ должна иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. С другой стороны, при переходе от одной системы отсчета к другой скорость частицы преобразуется согласно (3), так что $L\left(v^2\right)$ переходит в $L\left(\left[\vec{v}\,' + \vec{V}\right]^2\right)$. Необходимо, следовательно, чтобы последнее выражение, если и отличалось от $L\left(v'^2\right)$, то лишь на полную производную от функции координат и времени; такая производная всегда может быть опущена.

Этому требованию удовлетворяет только зависимость вида

$$L = av^2 .$$

При преобразовании $v = \vec{v}\,' + \vec{V}$ имеем:

$$L\left(v^2\right) = av^2 = a\left(\vec{v}\,' + \vec{V}\right)^2 = a\vec{v}\,'^2 + 2a\vec{v}\,'\vec{V} + \vec{V}^2 .$$

или, замечая, что $\vec{v}\,' = \dfrac{dv'}{dt}$:

$$L\left(v^2\right) = L\left(v'^2\right) + \frac{d}{dt}\left(2a\vec{r}'\vec{V} + \vec{V}^2 t\right).$$

Появляющийся лишний член действительно оказывается полной производной и может быть опущен.

Постоянную a принято обозначать как $m/2$, так что окончательно напишем **функцию Лагранжа свободно движущейся точки** в виде

$$L = \frac{mv^2}{2}.$$

Величина $m$ называется **массой материальной точки**. В силу свойства аддитивности функции Лагранжа, для системы невзаимодействующих точек имеем

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}. \tag{8}$$

Следует подчеркнуть, что лишь при учете этого свойства данное определение массы приобретает реальный смысл.

Легко видеть, что масса не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия для реального движения частицы из точки 1 пространства в точку 2 интеграл

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

имеет минимум. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от 1, а затем быстро приближается к 2, интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не мог бы иметь минимума. Полезно заметить, что

$$v^2 = \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 = \frac{d\ell^2}{dt^2} \tag{9}$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги $d\ell$ в соответствующей системе координат.

**В декартовых координатах,** например, $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, поэтому

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{10а}$$

**В цилиндрических** $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, откуда

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{10б}$$

**В сферических** $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2$ и

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin\theta^2\dot{\varphi}^2\right). \tag{10с}$$

## Функция Лагранжа системы частиц

Рассмотрим теперь систему частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими посторонними телами; такую систему называют замкнутой. Оказывается, что взаимодействие между частицами может быть описано прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (8) определенной функции координат. Обозначив эту функцию через - $U$ , напишем:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$$

($r_\alpha$ — радиус-вектор $\alpha$ -й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой системы.

Сумму

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$$

называют **кинетической энергией**, а функцию $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$ - **потенциальной энергией** системы.

## Уравнения Лагранжа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах (простейшие примеры)

Рассмотрим конкретные примеры уравнений Лагранжа в различных координатах для консервативных и гироскопических систем.

### Материальная точка в поле потенциальных сил

**1. В декартовых координатах** $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z),$$

и уравнение Лагранжа выглядит так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ или } m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ или } m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \text{ или } m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

**2. В цилиндрических координатах** $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$ и согласно (10а)

$$d\ell^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + dz^2, v^2 = \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2$$

откуда

$$L=\frac{mv^2}{2}-U(r,\varphi,z)=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-U(r,\varphi,z) \qquad (11)$$

Соответствующие уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \text{ или } m\ddot r=-\frac{\partial U}{\partial r}+mr\dot\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \text{ или } \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi)=-\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \text{ или } m\ddot z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

**3. В сферических координатах** $q_1=r, q_2=\varphi, q_3=\theta$ и согласно (10б)

$$d\ell^2=(dr)^2+\left(r\dot\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\dot\varphi\right)^2$$

откуда

$$L=\frac{m}{2}\left[\dot r^2+(r\dot\theta)^2+(r\sin\theta\dot\varphi^2\right]-U(r,\theta,\varphi) \qquad (12)$$

Если ограничиться лишь случаем центральных внешних сил, т. е. положить $U=U(r)$, то уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \text{ или } m\ddot r=mr\left(\dot\theta^2+\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)-\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \text{ или } m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right)=mr^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \text{ или } mr^2\sin^2\theta\dot\varphi=0$$

Заметим, что полученные уравнения имеют частное решение

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \dot\theta=0, mr^2\dot\varphi^2 \qquad (13)$$

r определяется из уравнения

$$m\ddot r=\frac{M^2}{mr^3}-\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (14)$$

Таким образом, движение происходит в плоскости $z=0$, зависимость $r$ от $t$ находится уравнением (14), а предпоследнее из уравнений (13) определяет зависимость угла $\varphi$ от $t$.

## <u>Электрический заряд в магнитном поле</u>

Система гироскопическая, $V=-\frac{e}{c}v\vec A$, где $\vec A(x,y,z)$ – векторный потенциал.

**1. В декартовых координатах**

$$L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+\frac{e}{c}(\dot xA_x+\dot yA_y+\dot zA_z),$$

и уравнение Лагранжа для координаты x есть

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \text{ или } m\ddot x+\frac{\partial}{\partial t}\frac{e}{c}A_x-\frac{e}{c}\left(\dot x\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot y\frac{\partial A_y}{\partial y}+\dot z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)=0$$

$$m\ddot x=\frac{e}{c}\left\{\dot y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right\}=\frac{e}{c}\left[\dot y B_z-\dot z B_y\right]$$

Аналогично уравнения Лагранжа для $y$ и $z$ есть

$$m\ddot y=\frac{e}{c}\left\{\dot z\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\dot x\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right\}=\frac{e}{c}\left[\dot z B_x-\dot x B_z\right]$$

$$m\ddot z=\frac{e}{c}\left\{\dot x\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\dot y\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right\}=\frac{e}{c}\left[\dot x B_y-\dot y B_x\right]$$

Здесь через $B_x, B_y, B_z$ обозначены компоненты вектора $rot\,\vec B$. В векторном виде уравнения записываются:

$$m\ddot{\vec r}=\frac{e}{c}[\dot{\vec r}\vec B]$$

т. е. как уравнение движения точки под действием силы Лоренца.

**2. В цилиндрических координатах**

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r\dot\varphi^2+\dot z^2)+\frac{e}{c}(\dot r A_z+r\dot\varphi A_\varphi+\dot z A_z)$$

Если ограничиться лишь случаем цилиндрически-симметричного магнитного поля, то можно положить

$$A_\rho=A_z=0,\quad A_\varphi=A(r,z,t)\ ^1$$

т. е. функция Лагранжа равна.

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r\dot\varphi^2+\dot z^2)+\frac{e}{c}r\dot\varphi A(r,z,t)$$

Соответствующие уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot r}-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \text{ или } m\ddot r-m\dot\varphi^2\rho=\frac{e}{c}\dot\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}(rA)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial t}(mr^2\dot\varphi+\frac{e}{c}rA)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot z}-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \text{ или } m\ddot z=\frac{e}{c}r\dot\varphi\frac{\partial A}{\partial z}$$

Согласно второму из последние уравнений интегралом движения является величина

---

[1] При таком выборе векторного потенциала $B_r=-\frac{\partial A}{\partial z}$, $B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)$, $B_\varphi=0$

$$m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c} rA = M = const \quad .$$

Таким образом, уравнения для определения ρ и z можно записать в виде

$$m\ddot{r} = \left(\frac{M}{mr^2} - \frac{eA}{mcr}\right) mr + \frac{e}{c}\left(\frac{M}{mr^2} - \frac{eA}{mcr}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}(rA),$$

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c} r\left(\frac{M}{mr^2} - \frac{eA}{mcr}\right)\frac{\partial A}{\partial z}.$$

## Диссипативные силы

Во многих случаях сила трения, приводящая к диссипации, т. е. рассеянию энергии, пропорциональна скорости тела,

$$\vec{F}^{(d)} = -\alpha\vec{v} \tag{15}$$

Такая зависимость может иметь место при не очень больших скоростях, так как является первым членом разложения более общей, нелинейной зависимости от скорости. Обобщая (15) для системы $N$ материальных точек, можно положить

$$\vec{F}_k^{(d)} = -(\vec{i}\alpha_k\dot{x}_k + \vec{j}\beta_k\dot{y}_k + \vec{k}\gamma_k\dot{z}_k) \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что компоненты этой силы можно представить в форме

$$X_k^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{x}_k},\ Y_k^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{y}_k},\ Z_k^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{z}_k},$$

где

$$D = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\dot{x}_k^2 + \beta_k\dot{y}_k^2 + \gamma_k\dot{z}_k^2) \tag{17}$$

называется **диссипативной функцией Рэлея**, или **функцией рассеяния**.

Таким образом, в декартовых координатах уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{x}_k},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}_k} - \frac{\partial L}{\partial y_k} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{y}_k},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}_k} - \frac{\partial L}{\partial z_k} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{z}_k}$$

Они не меняют вида и при переходе к обобщенным координатам $q_k$. Действительно, согласно и (17) обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \beta_i\dot{y}_y\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \gamma_i\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

Но согласно (17)

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k};\ \frac{\partial y_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\dot{y}_i}{\partial\dot{q}_k},\ \frac{\partial z_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\dot{z}_i}{\partial\dot{q}_k}$$

поэтому

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k} + \beta_i\dot{y}_i\frac{\partial\dot{y}_i}{\partial\dot{q}_k} + \gamma_i\dot{z}_i\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial\dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i\dot{x}_i^2 + \beta_i\dot{y}_i^2 + \gamma_i\dot{z}_i^2)$$

т. е.

$$Q_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}.$$

Следовательно, при наличии диссипации, описываемой функцией рассеяния, уравнения Лагранжа в обобщенных координатах $q_k$ имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (18)$$

Если для консервативных систем обобщенная энергия $H$ не меняется со временем, то для систем с диссипативными силами, описываемыми диссипативной функцией $D$, энергия с течением времени уменьшается. Действительно,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) = \sum_{k=1}^{3N}\left(\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{dt} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (19)$$

Если лагранжиан не зависит явно от времени, т. е., $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то согласно (19)

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \qquad (20)$$

Переходя от обобщенных координат к декартовым, правую часть (20) можно записать в виде

$$-\sum_{k=1} \alpha_k \dot{x}_k^2 + \beta_k \dot{y}_k^2 + \gamma_k \dot{z}_k^2 = -2D$$

откуда

$$\frac{dH}{dt} = -2D \qquad (21)$$

Таким образом, при наличии диссипативных сил уменьшение обобщенной энергии консервативной системы за единицу времени пропорционально удвоенной диссипативной функции.