

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Назарий механика фанидан

РЕФЕРАТ

Бажарди: Ниёзов Б. 302-гурух

Текширди: Сайдуллаев У.Ж.

Самарқанд –2014

АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТИ.

РЕЖА

1. Абсолют қаттиқ жисм кинематикаси. Бурчак тезлик

- Қаттиқ жисм.
- Қаттиқ жисм айланишида бурчак тезлик.
- Чизиқли ва бурчак тезликнинг боғлиқлиги.

2. Абсолют қаттиқ жисм динамикаси. Инерция моменти тензори

- Айланувчи жисм кинетик энергияси.
- Айланувчи жисм учун Лагранж функцияси.

3. Қаттиқ жисмнинг импульс моменти

- Импульс моменти тензори.
- Айланишдаги бурчак тезлик.

Таянч иборалар: қаттиқ жисм, "қўзғалмас" координаталар системаси, ҳаракатлар координаталар системаси, қаттиқ жисм эркинлик даражаси сони, инерция маркази, инерция марказининг илгариланма ҳаракат тезлиги, бурчак тезлик, қаттиқ жисм кинетик энергияси, айланиш кинетик энергияси, қаттиқ жисм Лагранж функцияси, инерция моментларининг тензори, инерция маркази, қаттиқ жисм импульс моменти, инерция тензори, эркин айланма ҳаракат, шар пилдиروق, пилдиروقнинг мунтазам прецессияси.

Қаттиқ жисм

Механикада ораларидаги масофа ўзгармас бўлган моддий нўқталар системасини қаттиқ жисм деб таърифлаш мумкин. Табиатда реал мавжуд бўлган системалар бу шартга тақрибан бўйсунди. Лекин одатдаги шароитларда қаттиқ жисмларнинг кўпчилиги ўз шакли ва ўлчамларини шунчалик кам ўзгартирадиларки, у ҳолда биз бирор яхлит нарса деб кўриладиган қаттиқ жисм ҳаракатининг қонунларини ўрганаётганимизда бундай ўзгаришларини назарга олмасак ҳам бўлади.

Кейинги баёнимизда биз қаттиқ жисмни моддий нўқталарнинг дискрет мажмуаси (тўплами) сифатида кураимиз. Дискрет нўқталар бўйича йиғиндисини ўз ичига олган формулалардан яхлит жисмга тегишли формулаларга ўтиш учун зарралар массаси ўрнига dV ҳажм элементидаги ρdV (ρ - масса зичлиги олинади ва жисмнинг бутун ҳажми бўйича интегралланади).

Қаттиқ жисм ҳаракатини баён этиш учун иккита координаталар системаси киритамиз: а) "қўзғалмас", яъни xyz инерциал система ва

б) ҳаракатланувчи $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ координаталар системаси. Кейинги система қаттиқ жисмга мустақам боғланган ва унинг барча ҳаракатида қатнашади деб фараз қилайлик. Бу система бошини жисмнинг инерциал марказига жойлаштириш қулайдир.

Айтайлик, $\vec{r}_0$ радиус-вектор ҳаракатланаётган система боши O нинг ҳолатини кўрсатсин. Бу система ўқларининг қўзғалмас системага нисбатан ориентацияси эса учта мустақил бурчаклар орқали берилади. Шундай қилиб, биз $\vec{r}_0$ векторнинг

учта компонентаси билан бирга ҳаммаси бўлиб олтига координатага эга бўламиз. Демак, ҳар бир қаттиқ жисм олтига эркинлик даражасига эга бўлган механикавий системадир.

Қаттиқ жисмнинг чексиз кичик ихтиёрий силжишини кўриб ўтайлик. Силжишни икки қисм йиғиндиси: ҳолида тасвирлаш мумкин. Улардан бири жисмнинг чексиз кичик параллел кўчиши бўлиб, натижада инерция бошланғич ҳолатдан охириги ҳолатга қўзғалувчи координаталар системаси ўқларининг ориентацияси ўзгармагани ҳолда ўтади. Иккинчиси инерция маркази атрофида кичик бурилишдан сўнг қаттиқ жисм охириги ҳолатга келади.

Қаттиқ жисм ихтиёрий нуқтасининг қўзғалувчи координата системасидаги радиус-векторини $\vec{r}$ билан, қўзғалмас системасидаги радиус-векторини эса $\vec{R}$ билан белгилаймиз. У ҳолда P нуқтанинг чексиз кичик $d\vec{R}$ силжиши инерция маркази билан биргаликдаги $d\vec{R}_0$ кўчиши билан инерция марказига нисбатан чексиз кичик $d\varphi$ бурчакка бурилишдаги $[d\varphi \cdot \vec{r}]$ кўчишлар йиғиндисига тенг бўлади:

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + [d\varphi \cdot \vec{r}]$$

Бу тенгламани мазкур кўчиш юз берган dt вақтга бўлиб ва

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{g}, \quad \frac{d\vec{R}_0}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \vec{\Omega} \quad (1)$$

тезликлар киритиб, улар орасидаги

$$\vec{g} = \vec{v} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] \quad (2)$$

муносабатни топамиз. v вектор қаттиқ жисм инерция марказининг тезлигидир, уни инерция марказининг илгариланма ҳаракат тезлиги деб атайдилар. $\vec{\Omega}$ вектор қаттиқ жисм айланишининг бурчак тезлиги дейилади; унинг йўналиши ($d\varphi$ йўналиши каби) айланиш ўқи йўналишига мос тушади. Шундай қилиб, жисм исталган нуқтасининг қўзғалмас координата системасига нисбатан $\vec{v}$ тезлигини жисмнинг илгариланма ҳаракат тезлиги ва айланишдаги бурчак тезлик орқали ифодалаш мумкин.

Чизиқли ва бурчак тезликнинг боғлиқлиги.

Энди қаттиқ жисм билан мустақкам боғланган координата системасининг координата боши инерция маркази O да эмас, балки O дан a масофадаги қандайдир O' нуқтада дейлик. Бу система боши O' нинг кўчиш тезлигини $\vec{v}'$ билан унинг айланиш бурчак тезлигини эса $\vec{\Omega}'$ орқали белгилаймиз.

Яна қаттиқ жисмнинг бирор P нуқтасини олайлик ва унинг O' га нисбатан радиус-векторни $\vec{r}'$ билан белгилайлик. У ҳолда $\vec{r}' = \vec{r} + a$ ва (2) га қўйиб,

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\Omega}' \cdot a] + [\vec{\Omega}' \cdot \vec{r}']$$

муносабатни оламиз. Иккинчи томондан, $\vec{v}'$ ва $\vec{\Omega}'$ нинг таърифига кўра

$$\vec{g} = \vec{v}' + [\vec{\Omega}' \cdot \vec{r}']$$

бўлиши лозим. Демак,

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}' \cdot a], \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} \quad (3)$$

яъни, жисмга боғланган координата системасининг ҳар бир берилган вақт моментидаги бурчак тезлиги мазкур системанинг танланишига борлиқ эмас экан. Барча шундай системалар берилган вақт моментида бир-бирига параллел ўқлар атрофида абсолют қиймати бўйича бир хил $\vec{\Omega}$ тезликда айланадилар.

Айланувчи жисм кинетик энергияси.

Айланувчи жисм учун Лагранж функцияси.

Қаттиқ жисм кинетик энергиясини ҳисоблаш учун жисмни моддий нуқталардан иборат дискрет система деб кўрамиз ва қуйидагини ёзамиз:

$$T = \sum \frac{m \cdot \vec{v}^2}{2}$$

бу ерда йиғинди жисмнинг барча нуқталари бўйича олинади (индексларини тушириб қолдирдик).

Бу тенгламага (2) ни қийматини қўйиб,

$$T = \sum \frac{m}{2} (\vec{v} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}])^2 = \sum \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \sum m \vec{v} [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] + \sum \frac{m}{2} [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}]^2 \quad (4)$$

$\vec{v}$ ва $\vec{\Omega}$ тезликлар қаттиқ жисмнинг барча нуқталари учун бир хил бўлганидан биринчи ҳаддаги $\frac{\vec{v}^2}{2}$ йиғинди $\sum$ белгисидаги ташқарига чиқарилади, жисм массаси $\sum m = \mu$ орқали белгилаймиз.

Иккинчи ҳадини қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m \vec{v} [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] = \sum m [\vec{v} \cdot \vec{\Omega}] \vec{r} = [\vec{v} \cdot \vec{\Omega}] \sum m \vec{r}$$

Агар ҳаракатдаги координата системасининг боши шартга кўра, инерция марказида олинган бўлса, бу ҳад нолга айланади, чунки бу ҳолда $\sum m \vec{r} = 0$.

Учинчи ҳадда кўпайтма квадрaтини очиб чиқамиз ва натижада қуйидагини топамиз:

$$T = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^2 \right\}$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисм кинетик энергиясининг биринчи ҳади илгариланма ҳадининг кинетик энергиясидир, унинг кўриниши шундайки, гўё жисмнинг тўла массаси инерция марказига тўпланган деб фараз қилиш мумкин. Иккинчи ҳади айланма ҳаракат кинетик энергиясини ифодалайди. Бу айланиш инерция марказидан ўтувчи ўқ атрофида бўлиб, у $\vec{\Omega}$ бурчак тезликка эга.

Айланиш кинетик энергиясини тензор белгиларда, яъни $\vec{r}, \vec{\Omega}$ векторларнинг x_i, Ω_i компонентлари орқали қайта ёзамиз:

$$T_{aylanish} = \frac{1}{2} \sum m [\Omega_i^2 x_\ell^2 - \Omega_i x_\ell \Omega_k x_k] = \frac{1}{2} \sum m [\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k] = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$

Бу ерда $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ айният қулланилади (δ_{ik} -бирлик тензор, унинг компонентлари $i = k$ да бирга, $i \neq k$ да нолга тенг).

$$I_{ik} = \sum m (x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (5)$$

тензор киритиб, қаттиқ жисм кинетик энергияси учун сўнгги

$$T = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \quad (6)$$

ифодани оламиз. (6) ва потенциал энергия айирмаси қаттиқ жисмнинг Лагранж функциясини беради:

$$L = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U \quad (7)$$

Умумий ҳолда, потенциал энергия қаттиқ жисм вазиятини белгиловчи олтита ўзгарувчининг функциясидир: булар инерция марказининг ўрта x, y, z координатаси ва ҳаракатланувчи координата ўқларининг қўзғалмас координаталарга нисбатан ориентациясини кўрсатувчи ўрта бурчак.

I_{ik} тензор инерция моментларининг тензори ёки, жисм инерциясининг тензори дейилади. Юқоридаги ифодага биноан, у симметрикдир, яъни

$$I_{ik} = I_{ki}$$

Унинг компонентларини ошкор кўринишда қуйидаги жадвалда келтирамиз:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Импульс моменти

(9) формулага мувофиқ агар координаталар боши инерция марказига жойлаштирилса, M момент жисм нуқталарининг инерция марказига нисбатан ҳаракатига боғлиқ бўлган "хусусий момент" ни кўрсатади.

Бошқача қилиб айтганда, $\vec{M} = \sum m(\vec{r} \cdot \vec{v})$ таърифда $\vec{v}$ ни $[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}]$ га алмаштириш лозим:

$$\vec{M} = \sum m[\vec{r}[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}]] = \sum m\{\vec{r}^2 \vec{\Omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\Omega})\}$$

ёки тензор белгилари ёрдамида

$$M_i = \sum m\{x_i^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m\{x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}$$

Ниҳоят, инерция тензорининг

$$I_{ik} = \sum m(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$

таърифини назарда тутиб,

$$M_i = I_{ik} \Omega_k \quad (10)$$

ифодани оламиз. x_1, x_2, x_3 ўқлар жисмнинг бош инерция ўқлари бўйлаб йўналган ҳолда бу формула қуйидагиларни беради:

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3 \quad (11)$$

Хусусан шар пирилдок учун (учала бош инерция моменти ўзаро мос тушган):

$$\vec{M} = \vec{I} \vec{\Omega} \quad (12)$$

яъни, момент вектори бурчак тезлиги векторига пропорционал ва у билан бир хил йўналишда бўлади.

Умумий ҳолда эса m вектор ўз йўналиши бўйича $\vec{\Omega}$ векторга мос келмайди ва фақат у ўзининг бош инерция ўқларидан бирортаси атрофида айлангандагина $\vec{M}$ ва $\vec{\Omega}$ лар бир хил йўналади.

Ҳеч қандай ташқи кучлар таъсирида бўлмаган қаттиқ жисмнинг эркин ҳаракати кўрамиз. Жисм фақат эркин айланма ҳаракат қилади деб фараз қиламиз.

Ҳар қандай ёпиқ система учун бўлгани каби эркин айланаётган жисмнинг импульс моменти ҳам ўзгармас бўлади. $\vec{M} = const$ шарт шар пилдирок учун оддий $\vec{\Omega} = const$ ифодани беради, яъни шар пилдирок эркин айланишининг умумий қўзғалмас ўқ атрофида текис айланишидир.

Пилдирокнинг x_3 симметрия ўқиға перпендикуляр бўлган x_1, x_2 бош инерция ўқлари йўналишининг ихтиёрилигидан фойдаланиб, x_2 ўқни ўзгармас $\vec{M}$ вектор ва x_3 ўқнинг оний вазияти билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр қилиб танлаймиз. У ҳолда $M_2 = 0$.

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$

формулага мувофиқ, $\Omega_2 = 0$ бўлади, яъни $\vec{M}, \vec{\Omega}$ ва пилдирок ўқи ҳар бир вақт моментида бир текисликда ётади.

Айланишдаги бурчак тезлик. Пилдирок ўқида барча нуқталар $\vec{v} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}]$ тезликларининг ҳар бир вақт моментида кўрсатилган текисликка перпендикуляр эканлиги келиб чиқади; яъни пилдирок ўқи $\vec{M}$ йўналиши атрофида текис айланади ва доиравий конус чизади (бу-пилдирокнинг мунтазам прецессияси деб аталади). Прецессия билан бир вақтда пилдирокнинг ўзи ҳам хусусий ўқи атрофида текис айланади.

Бу икки айланиш бурчак тезликларини $\vec{M}$ момент катталиги ва пилдирок ўқининг $\vec{M}$ йўналишига оғиш бурчаги θ орқали осонгина ифодалаши мумкин. Пилдирокнинг бир ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги $\vec{\Omega}$ векторининг шу ўқдаги проекцияси Ω_3 , дан иборат.

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \theta$$

Проекция тезлиги Ω_{pr} ни аниқлаш учун эса $\vec{\Omega}$ векторни параллелограмм қоидасига кўра x_3 ва $\vec{M}$ бўйлаб ташкил этувчиларга ажратиши керак. Ташкил этувчиларнинг биринчиси пилдирок ўқини кўчирмайди, шунга кўра иккинчи ташкил этувчи прецессиянинг биз излаётган бурчак тезлигини беради.

Расмдаги шаклдан $\Omega_{pr} \cdot \sin \theta = \Omega_1$ бу ерда $\Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M \sin \theta}{I_1}$, эканлигидан $\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}$.

Мустақил ишлаш учун саволлар:

- 1) Қаттиқ жисмни изохлаб беринг. (моддий нуқталар системаси, шакл ва ўлчам, яхлит дискрет, масса, ҳажм, зичлик)
- 2) Қаттиқ жисм айланишида бурчак тезлик деб нимага айтилади? (чексиз кичик силжиш, бурчак, радиус-вектор, инерция маркази)
- 3) Чизиқли ва бурчак тезликнинг боғлиқлиги кўрсатинг. (радиус-вектор, система, вақт, параллел ўқлар)
- 4) Айланувчи жисм кинетик энергиясини ёзинг. (кинетик ва потенциал энергия, Лагранж функцияси, радиус-вектор, бурчак тезлик)
- 5) Айланувчи жисм учун Лагранж функцияси нимага тенг. (инерция маркази, инерция моменти тензори)
- 6) Импульс моменти тензори нимага тенг. (импульс моменти, хусусий момент, бош инерция ўқлари, симметрия ўқи)
- 7) Айланишдаги бурчак тезлик нимага тенглигини кўрсатинг. (пилдирок ўқлари, проекция тезлиги, процессия)