



**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ФИЗИКА- МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИК ТАҲЛИЛ КАФЕДРАСИ**



А.Сафаров

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Маърузалар матни

(1-курс математика бўлими талабалари учун, I-семестр)

ТЕРМИЗ-2013

Сафаров А. Алгебра ва сонлар назарияси. Маърузалар матнлари. I-қисм. Термиз. 2013 йил. 87бет.

Ушбу ўқув қўлланмаси 5130100-математика таълими йўналиши ўқув дастури асосида ёзилган бўлиб тўпламлар ва акслантиришлар, бинар муносабатлар, алгебраик амал аниқланган тўпламлар, матрицалар ва детерминантлар ҳамда уларнинг чизиқли тенгламалар системасини ечишга тадбиқлари мисоллар асосида баён қилинган. Амалдаги режада 1-семестрда маъруза учун тахминан 32 соат ажратилгани учун қўлланмадаги материалларнинг тахминан 30 фоизини мустақил таълимга ажратиш мумкин.

Такризчилар:

ф.м.ф.д., профессор И.Аллаков
ф.м.ф.д., профессор М.Мирсобуров

©. Маърузалар матнлари Термиз давлат университети физика- математика факультети ишчи кенгаши (27.08.2013. 1-сонли баённома) ва математик анализ кафедраси йиғилиши (27.08.2013. 1-сонли баённома) томонидан муҳокама этилиб маъқулланган ҳамда фойдаланиш учун тавсия этилган.

Мундарижа

1. 1-маъруза. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Тўпламлар алгебраси....	4
2. 2-3*-маъруза. Акслантиришлар ва уларнинг хоссалари.....	8
3. 4-маъруза. Бинар муносабатлар ва уларнинг хоссалари	12
4. 5-маъруза. Эквивалентлик ва тартиб муносабатлари	15
5. 6,7*-маъруза. Натурал сонлар системаси. Математик индукция методи. Бирлашмалар. Ньютон биноми.....	19
6. 8-маъруза. Алгебраик амал аниқланган тўпламлар ва алгебралар.....	26
7. 9,10*-маъруза. Группалар , қисм группалар ва уларнинг хоссалари...	30
8. 11- маъруза. Чизиқли тенгламалар системаси ва тўғри бурчакли матрицалар.....	36
9. 12-маъруза. n -ўлчовли арифметик фазо. Чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган векторлар системалари.....	40
10. 13-маъруза. Векторлар системасининг ранги ва базиси.....	45
11. 14 -15*- маъруза. Матрицалар ва чизиқли тенгламалар системасининг ранги	49
12. 16- маъруза. Чизиқли тенгламалар системасини номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули (Гаусс усули) билан ечиш.....	54
13. 17-маъруза. 2 ва 3-тартибли детерминантлар. Ўрнига қўйишлар группаси.....	57
14. 18-маъруза. n –тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари.....	63
15. 19-маъруза. Минорлар ва алгебраик тўлдирувчилар.....	66
16. 20-маъруза. Детерминантларни сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиш.....	70
17. 21-маъруза. Матрицанинг рангини унинг минорларидан фойдаланиб ҳисоблаш	75
18. 22-маъруза. Тескари матрица.....	80
19. АДАБИЁТЛАР.....	86

1-МАЪРУЗА

МАВЗУ: ТЎПЛАМЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР. ТЎПЛАМЛАР АЛГЕБРАСИ.

РЕЖА:

1. Тўплам тушунчаси ва унга мисоллар.
2. Қисм тўпламлар ва уларга мисоллар.
3. Тўпламлар устида бажариладиган амаллар.
4. Тўпламлар устида бажариладиган амалларнинг хоссалари.
5. Бўш ва универсал тўпламлар. Тўлдирувчи тўплам.
6. Тўпламлар устида бажариладиган амалларни Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида ифодалаш.

АДАБИЁТЛАР [1, 2] .

1.Тўплам математиканинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, у математика фанига немис математиги Георг Кантор (1845-1918) томонидан киритилган. Тўплам тушунчаси энг содда тушунчалардан бири бўлгани учун ўнга таъриф берилмайди. Одатда объектларни (предметларни) биргаликда олиб қараганимизда тўплам тушунчасига келамиз. Лекин бу юзаки қараш бўлиб айрим олинган бирта элементнинг ўзини ҳам тўплам деб қараш мумкин.

Тўпламларни биз латин алфавитининг бош ҳарфлари $A, B, C, D, \dots$ билан, тўпламни ташкил этувчи объектларни (яъни тўпламнинг элементларини) эса латин алфавитининг кичик ҳарфлари $a, b, c, d, \dots$ лар билан белгилаймиз. a элементнинг A тўпламга тегишли эканлигини $a \in A$ кўринишда b элементнинг A тўпламга тегишли эмас эканлигини эса $b \notin A$ кўринишда белгилаймиз. A тўплам a, b, c, d, e элементлардан ташкил топган бўлса, у $A = \{ a, b, c, d, e \}$ кўринишда белгиланади.

Агар қаралаётган тўпламдаги элементлар сони чекли бўлса, бу тўпламга *чекли тўплам*, акс ҳолда, яъни тўпламдаги элементлар сони чексиз кўп бўлса, бу тўпламга *чексиз тўплам* дейилади.

Масалан: $A = \{ a, b, c, 1, 2 \}$, B - Ўзбекистондаги талабалар тўплами, C - Ер юзидаги сут эмизувчи ҳайвонлар тўплами. Бу A, B, C тўпламлар чекли тўпламлардир.

$N = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \}$ - натурал сонлар тўплами,

$Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots \}$ - бутун сонлар тўплами,

$Z_m = \{ 0, \pm m, \pm 2m, \dots \}$ - m га қаррали бутун сонлар тўплами.

Бу N, Z, Z_m - тўпламлар чексиз тўпламларга мисол бўлади.

2. Агар A ва B тўпламлар берилган бўлиб, A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламга тегишли бўлса, A тўпламни B тўпламнинг *қисм тўплами* дейилади ва $A \subset B$ кўринишда белгиланади. Агарда $A \subset B$ бўлиб B да A га кирмаган элемент мавжуд бўлса, A га B нинг *хос қисми* дейилади.

Масалан. $A = \{a, b, c, d, e\}$ ва $B = \{a, b, c, d, e, f, l, 1, 2\}$ бўлса, $A \subset B$. Шунингдек $N \subset Z$.

Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламда ва аксинча B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда мавжуд бўлса, у ҳолда бундай тўпламларга *ўзаро тенг тўпламлар* дейилади ва $A = B$ кўринишда белгиланади.

Демак, $A = B$ бўлиши $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабатларга тенг кучлидир. Тўпламларнинг тегишли бўлишлилик муносабати қуйидаги хоссаларга эга:

- 1). $A \subset A$ (рефлексивлик хоссаси);
- 2). $A \subset B$ ва $B \subset A$ дан $A = B$ келиб чиқади (антисимметриклик хоссаси);
- 3). $A \subset B$ ва $B \subset C$ дан $A \subset C$ келиб чиқади (транзитивлик хоссаси).

Бу хоссалар бевосита таърифдан келиб чиқади.

3. Энди берилган A ва B тўпламлардан янги тўпламларни ҳосил қилиш амалларни кўриб чиқамиз.

A ва B тўпламларнинг барча элементларидан тузилган C тўпламга A ва B *тўпламларнинг бирлашмаси* дейилади ва $A \cup B$ кўринишда белгиланади. Демак, $C = A \cup B$. Масалан: $A = \{a, b, c, 1, 2\}$ ва $B = \{b, d, 2\}$ бўлса, $A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2\}$ бўлади. Бунда A ва B тўпламларнинг иккаласида ҳам мавжуд бўлган элементлар бирлашмада бир марта олинади.

A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган C тўпламга A ва B *тўпламларнинг кесишмаси* дейилади ва $A \cap B$ кўринишда белгиланади. Демак, $C = A \cap B$. Масалан юқорида берилган тўпламлар учун $A \cap B = \{b, 2\}$.

A тўпламдан B тўпламнинг *айирмаси* деб A нинг B га кирмаган элементларидан тузилган тўпламга айтилади ва A / B кўринишда белгиланади. Юқоридаги олган мисолимизда $A / B = \{1, a, c\}$ ва $B / A = \{d\}$. Бундан $A / B \neq B / A$ эканлиги келиб чиқади.

Тўпламларнинг айирмаси билан бирга уларнинг *симметрик айирмаси* деб аталувчи $A \Delta B = (A / B) \cup (B / A)$ билан аниқланувчи тўплам ҳам қаралади.

A ва B тўпламларнинг элементларидан тузилган барча мумкин бўлган (a, b) кўринишдаги жуфтликлар тўпламига A ва B тўпламларнинг *тўғри (Декарт) кўпайтмаси* дейилади ва $A \times B$ кўринишда белгиланади. (a, b) жуфтликда $a \in A$ ва $b \in B$. Демак, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Масалан: $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$ бўлса,

$AXB=\{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}$ бўлади.

4. Тўпламлар устидаги амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

- 1). $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ — идемпотентлик;
- 2). $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — коммутативлик;
- 3). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ — ассоциативлик;
- 4). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивлик;
- 5). Агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $A \cup B = B$ ва $A \cap B = A$ бўлади.

Биз фақат 4) нинг биринчисини исботлаш билан чегараланамиз.

а). $x \in A \cup (B \cap C)$ бўлсин, у ҳолда $x \in A$ ёки $x \in B \cap C$. Фараз этайлик $x \in A$ бўлсин. У ҳолда $x \in A \cup B$ ва $x \in A \cup C$. Демак, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Энди $x \in B \cap C$ бўлсин. У ҳолда $x \in B$ ва $x \in C$. Демак, $x \in A \cup B$ ва $x \in A \cup C$.

Шунинг учун ҳам $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Шундай қилиб,

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1)$$

б). $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ бўлса, у ҳолда $x \in A \cup B$ ва $x \in A \cup C$. Бундан $x \in A$ ёки $x \in B$ ва $x \in C$. Агар $x \in A$ бўлса, у ҳолда $x \in A \cup (B \cap C)$ бўлади. Агарда $x \in B$ ва $x \in C$ бўлса, $x \in B \cap C$ бўлади ва шунинг учун ҳам $x \in A \cup (B \cap C)$. Демак,

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C). \quad (2)$$

(1) ва (2) дан исботланиши талаб этилган тенглик келиб чиқади.

5. Тўпламлар назариясида *бўш тўплам* ва *универсал тўплам* деб аталувчи тўпламлар муҳим аҳамиятга эга. Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўпламга *бўш тўплам* дейилади ва $\emptyset$ кўринишда белгиланади.

Масалан: 1). Аудиториядаги дарахтлар тўплами; 2). $x+1=0$ тенгламанинг натурал сонлардаги ечимлари тўплами; 3). Ўзбекистон ҳудудидаги океанлар (уммонлар) тўплами ва бошқалар бўш тўпламга мисол бўлади.

Қаралаётган бирорта тўпламнинг ҳам қисм тўплами деб қаралмайдиган тўпламга *универсал тўплам* дейилади ва U ҳарфи билан белгиланади.

Ихтиёрий A тўплам учун $A \subset U$ бўлгани сабабли $A \cup U = U$, $A \cap U = A$, шунингдек $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ бўлади.

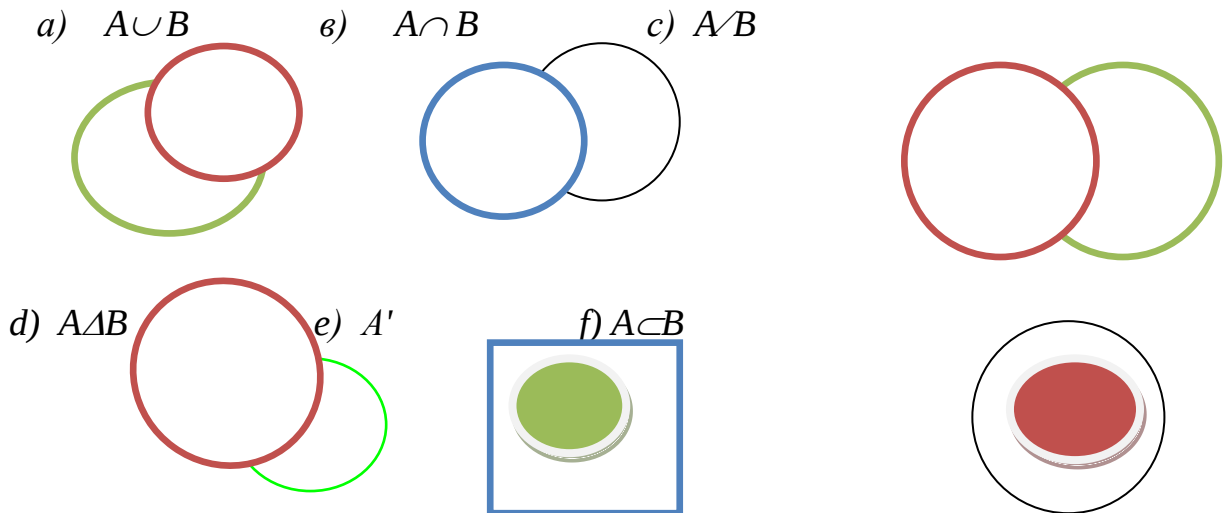
$U \setminus A$ тўпламга A нинг *тўлдирувчиси* (яъни *тўлдирувчи тўплами*) дейилади ва A' билан белгиланади.

Шунингдек, $A \subset B$ бўлса, $B \setminus A$ тўпламга A ни B гача *тўлдирувчи тўплам* дейилади ва $C_A B = B \setminus A$ кўринишда белгиланади. Осонлик билан кўриш

мумкинки $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \emptyset$, $(A')' = A$ ва агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $B' \subset A'$ бўлади.

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ - тўпламлар учун де Морган қонунлари ўринли.

6. Тўпламлар ва улар устида амалларни диаграммалар ёрдамида ифодалаш кулай. Бунинг учун A тўплам бирор доира ичидаги элементлардан тузилган деб қараймиз. У ҳолда кўриб ўтилган амаллар қуйидагича тасвирланади:



Мавзунини мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Тўпламнинг характеристик хоссаси деганда нимани тушунасиш?
2. Қисм тўплам деб қандай тўпламларга айтилади?
3. Чекли ва чексиз тўпламларга мисоллар келтиринг.
4. Тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси деб нимага айтилади?
5. Берилган A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб нимага айтилади?
6. Тўпламларнинг Декарт (тўғри) кўпайтмаси деб нимага айтилади?
7. Бўш ва универсал тўпламга таъриф беринг.
8. Тўлдирувчи тўплам деб қандай тўпламга айтилади?
9. $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ ва $B = \{2, b, d\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap B$ ва $A \times B$ ларни топинг.
10. Тўпламлар устида амалларни Эйлер Венн доиралари ёрдамида ифодаланг.
11. Тўпламнинг қуввати деб нимага айтилади?
12. Санокли ва саноксиз тўпламларга таъриф беринг, мисоллар келтиринг.

2-3*-МАЪРУЗА

МАВЗУ: АКСЛАНТИРИШЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

РЕЖА:

1. Акслантиришлар таърифи ва мисоллар.

2. Сюръектив, инъектив ва биъектив акслантиришлар.
 3. Акслантиришлар композицияси.
 4. Тескарланувчи акслантиришлар.
- Адабиётлар [1,2].

Фараз этайлик бизга A ва B бўш бўлмаган тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф: Агар бир f қоидага мувофиқ A тўпламнинг ҳар бир $x \in A$ элементига B тўпламнинг бирор y элементи мос қўйилган бўлса, бу f қоидага *акс эттириш* дейилади ва $f : A \rightarrow B$ ёки $y = f(x)$ кўринишида белгиланади.

Бунда $f(x) \in B$ га $x \in A$ элементининг *образи (акси)*, x га эса $y = f(x)$ B элементининг *прообрази (асли)* деб аталади. A тўплам f акс эттиришнинг *аниқланиш соҳаси*, B тўплам эса *қийматлар тўплами* дейилади.

$f : A \rightarrow B$ акслантиришда $\forall x \in A$ ягона $f(x) \in B$ образга эга, лекин B нинг исталган элементи ҳар доим ҳам аслига эга бўлавериши, аслига эга бўлганда ҳам у ягона бўлиши шарт эмас.

Мисоллар: A – одамлар тўплами, B – мусбат рационал сонлар тўплами бўлсин. $f : A \rightarrow B$ акслантириш ҳар бир одамга унинг сантиметрларда ҳисобланган бўйини мос қўйсин. У ҳолда $f : A \rightarrow B$ одамлар тўпламини рационал сонлар тўпламига акслантиради. Ҳар бир одамга ягона узунлик мос келади, лекин 1500 см мос келувчи одам мавжуд эмас, шунингдек 175 см га мос келувчи одамлар ягона эмас.

2. $f : x \rightarrow x^2$ акслантириш барча ҳақиқий сонлар тўплами R ни бўлмаган манфий ҳақиқий сонлар тўплами R^+ га акслантиради. $f : A \rightarrow B$ акслантиришдаги A тўпламнинг *образини* $f(A)$ билан белгилаймиз. У ҳолда $f(A) \subseteq B$ бўлади ва бизнинг мисолимизда $f(R) = R^+$ бўлади.

Агарда $f : A \rightarrow B$ акс эттириш учун $\exists b_0 \in B$ элемент мавжуд бўлиб $\forall x \in A, f(x) = b_0$ тенглик ўринли бўлса, f га *ўзгармас акслантириш* (функция) дейилади.

2-таъриф: Агар $f : A \rightarrow B$ ва $g : A \rightarrow B$ акс эттиришлар берилган бўлиб $\forall x \in A$ учун $f(x) = g(x)$ ўринли бўлса, бу акс эттиришларни *тенг дейилади* ва $f = g$ кўринишда белгиланади.

Берилган A тўпламни B тўпламга акслантирувчи барча акслантиришлар тўпламини B^A орқали белгилаймиз. $A_1 \subset A$ бўлсин. У ҳолда $x \in A_1$ $f_1(x) = f(x)$ тенглик билан аниқланган $f_1 : A_1 \rightarrow B$ *акс эттиришга* f нинг *торайиши* f эса f_1 нинг *кенгайиши (давоми)* дейилади.

Масалан: R даги $f(x) = \sqrt{|x|}$ ($f: x \rightarrow \sqrt{|x|}$) акслантириш R^+ даги $f(x) = \sqrt{x}$ ($f: x \rightarrow \sqrt{x}$) нинг давомидир.

3-таъриф. Агар $f: A \rightarrow B$ акс эттиришда ҳар бир $y \in B$ элемент A тўпламда камида битта аслга эга бўлса бундай акс эттириш (сюръекция) *сюръектив акс эттириш* дейилади.

4-таъриф. Агар $f: A \rightarrow B$ акс эттиришда ҳар бир $y \in B$ биттадан ортиқ аслга эга бўлмаса (яъни $f(x_1) = f(x_2)$ дан $x_1 = x_2$ келиб чиқса), бундай акс эттириш (*инъекция*) *инъектив акс эттириш* дейилади.

5-таъриф. Бир вақтда ҳам сюръектив ва ҳам инъектив бўлган $f: A \rightarrow B$ акслантириш *биекция* (ўзаро бир қийматли акслантириш) дейилади.

Мисоллар: 1) $f: R \rightarrow R$ $f(x) = x^2$ акс эттириш сюръектив ҳам, инъектив ҳам эмас. Чунки манфий сонлар бирорта ҳам аслга эга эмас.

2) $f_1: R \rightarrow R^+$ ни қарасак сюръектив бўлади ($f_1(x) = x^2$).

3) $f_2: R^+ \rightarrow R$ ($f_2(x) = x^2$) инъектив бўлади.

4) $f_3: R^+ \rightarrow R^+$ ($f_3(x) = x^2$) ни қарасак биектив акслантириш бўлади.

Ихтиёрий 2 та $f: A \rightarrow B$ ва $g: B \rightarrow C$ акс эттиришлар берилган бўлсин.

6-таъриф. Ҳар бир $x \in A$ учун $p(x) = g(f(x))$ тенглик билан аниқланувчи $p: A \rightarrow C$ акс эттиришга f ва g акс эттиришларнинг *композицияси* (суперпозицияси, кўпайтмаси) дейилади ва $p = g \cdot f$ билан белгиланади.

Агарда $A = B = C$ бўлса, $gf: A \rightarrow A$ билан бирга $fg: A \rightarrow A$ композицияни ҳам қараш мумкин. Бунда умуман айтганда $gf \neq fg$ бўлади.

Масалан: $f: R \rightarrow R$, $f: x \rightarrow x^2$ ($f(x) = x^2$);

$g: R \rightarrow R$, $g: x \rightarrow x+1$ ($g(x) = x+1$)

бўлса, у ҳолда $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$ ва $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ бўлади.

Демак $gf \neq fg$.

1-теорема. Ҳар қандай $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ акс эттиришлар учун $h(gf) = (hg)f$ тенглик ўринли.

Исботи. Ҳақиқатдан ҳам $h(gf)(x) = h(gf(x)) = h(g(f(x)))$ ва $(hg)f(x) = h(g(f(x)))$. Бу тенгликларнинг чап томонлари тенглиги уларнинг ўнг томонларининг тенглигидан келиб чиқади. Бу теорема акс эттиришнинг *ассоциативлик хоссасини* исботлайди.

$\forall x \in A$ учун $e(x) = x$ тенглик билан аниқланган $e = e_A: A \rightarrow A$ акс эттиришга A тўпламнинг *айни акслантириши* дейилади (ёки бирлик акс эттириш ҳам деб юритилади).

Тушунарлики, ҳар қандай A тўплам учун $e_A : A \rightarrow A$ – акс эттириш биъекциядир. Шунингдек агар $f : A \rightarrow B$ бўлса, $f e_A = e_A f = f$ бўлади.

7-таъриф. Агар $f : A \rightarrow B$ акс эттириш учун $\exists g : B \rightarrow A$ акс эттириш мавжуд бўлсаки $gf = e_A$ ва $fg = e_B$ тенгликлар ўринли бўлса, бундай f акс эттириш *тескариланувчи*, g га эса f нинг тескарисидейилади.

Таърифдан кўринадики, бу ҳолда g ҳам тескариланувчи ва f га g нинг тескарисидейилади.

2-теорема. Агар f акс эттиришнинг тескарисидейла мавжуд бўлса у ягонадир.

Исботи. Фараз этайлик $g : B \rightarrow A$, $h : B \rightarrow A$ лар $f : A \rightarrow B$ га тескари бўлсин, яъни $gf = e_A$, $hf = e_A$, $fg = e_B$, $fh = e_B$. У ҳолда $h(fg) = h \cdot e_B = h$ ва $h(fg) = (hf) \cdot g = e_A \cdot g = g$ лардан $h = g$ келиб чиқади.

Бундан кейин f га тескари акс эттиришни f^{-1} билан белгилаймиз.

3-теорема. Акс эттиришнинг тескариланувчидейлиши учун унинг биъекциядейлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурийлиги. $f : A \rightarrow B$ тескариланувчидей $g : B \rightarrow A$, унинг тескарисидей бўлсин, у ҳолда $fg = e_B$, $gf = e_A$ ва $\forall y \in B$ учун $f(g(y)) = (fg)y = e_B y = y$. Бундан $g(y) \in A$ элемент y элементнинг асли эканлиги келиб чиқади. Демак f сюръекция. Энди агар бирор $x_1, x_2 \in A$ элементлар учун $f(x_1) = f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $x_1 = e_A(x_1) = gf(x_1) = gf(x_2) = (gf)x_2 = e_A x_2 = x_2$ бўлади, яъни f инъекция, шундай қилиб f биъекция экан.

Етарли эканлиги. Фараз этайлик $f : A \rightarrow B$ биъекция бўлсин. У ҳолда ҳар бир $y \in B$ учун ягона асл мавжуд. Бундан $g(y) \in A$ элемент y нинг асли эканлиги келиб чиқади, яъни $g : B \rightarrow A$ акс эттириш $f : A \rightarrow B$ га тескари.

Мисоллар: 1) Агар $a \in R$ ва $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y : R \rightarrow R$ $f(x) = ax$ функция биъекция. Унинг тескарисидей $g : R \rightarrow R$, $g(y) = \frac{y}{a} \left(= \frac{f(x)}{a} = \frac{ax}{a} = x \right)$ дан иборат.

2). Ихтиёрий $b \in R$ учун $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x + b$ функция ҳам биъекция. Унинг тескарисидей $g : R \rightarrow R$, $g(y) = y - b$.

3) Агар $a, b \in R$ ва $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$ функция биъекция ва унинг тескарисидей $g : R \rightarrow R$, $g(y) = \frac{y - b}{a}$.

4-теорема. Агар $f: A \rightarrow B$ ва $g: B \rightarrow C$ биъекциялар бўлса, уларнинг композицияси $gf: A \rightarrow C$ ҳам биъекция бўлади ва $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Исботи. f ва g лар биъекция бўлгани учун $f^{-1}: B \rightarrow A$ ва $g^{-1}: C \rightarrow B$ лар мавжуд ва демак $f^{-1}g^{-1}: C \rightarrow A$ композицияси ҳам мавжуд.

Композициянинг ассосативлигига асосан

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(f \cdot f^{-1})g^{-1} = (ge)g^{-1} = g \cdot g^{-1} = e \text{ ва} \\ (f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1} \cdot g)f = f^{-1} \cdot (ef) = f^{-1} \cdot f = e.$$

Булардан gf тескариланувчи ва $(gf)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$ юқорида исботланган 3-теоремага асосан gf биъекция.

8-таъриф. $f: A \rightarrow A$ биекцияга A тўпламнинг ўзгариши (алмаштириши) дейилади. A тўпламнинг барча ўзгартиришини G_A билан белгилаймиз.

9-таъриф. G_A тўпламнинг H қисм тўплами қуйидаги шартларни қаноатлантирса унга ўзгартиришлар гуруҳи дейилади.

$$g_1) \forall f, g \in H \text{ учун } fg \in H \text{ ва } gf \in H;$$

$$g_2) A \text{ тўпламнинг бирлик ўзгартирувчиси } e_A \text{ ҳам } H \text{ га тегишли.}$$

$$g_3) \forall f \in H \text{ учун } f^{-1} \in H.$$

3 ва 4 теоремалардан G_A тўпламнинг ўзи ҳам ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилиш келиб чиқади.

Мисоллар. 1) R тўпламдаги $f(x) = ax (a \in R, a \neq 0)$ кўринишдаги барча функциялар тўплами H ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилади.

Ҳақиқатан ҳам:

$$a) f_a(x) = ax, f_b(x) = bx \text{ бўлса } (f_a f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = abx, (f_b f_a)(x) = \\ = bax = abx, f_a \cdot f_b \in H \text{ ва } f_b \cdot f_a \in H;$$

$$b) e_R(x) = f_1 \cdot x = x, f_1 = e_R \in H$$

$$c) f_a^{-1}(x) = a^{-1}x, \text{ демак } f_a^{-1} \in H.$$

2). R тўпламдаги $g_a(x) = x + a (a \in R)$ кўринишдаги барча функциялардан иборат тўплам P ҳам ўзгартиришлар гуруҳини ҳосил қилади.

$$a) g_a(x) = x + a, g_b(x) = x + b \text{ тўлса,}$$

$$(g_a g_b)(x) = g_a(g_b(x)) = g_a(x + b) = x + a + b \text{ ва}$$

$$g_b g_a(x) = g_b(g_a(x)) = g_b(x + a) = x + a + b, \text{ яъни } g_a g_b \in P \text{ ва } g_b g_a \in P \text{ ва}$$

$$g_a g_b = g_b g_a = g_{a+b} \in P. \text{ в) } e_R = g_0 \in P; \text{ с) } g_a^{-1}(x) = x - a, \text{ демак } g_a^{-1} = g_{-a} \in P.$$

Шундай қилиб P ўзгартиришлар гуруҳи бўлади.

Мавзунини мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Акслантириш деб нимага айтилади?
2. Сюръектив акслантиришга таъриф беринг ва унга мисоллар келтиринг.
3. Инъектив акслантиришга таъриф беринг ва унга мисоллар келтиринг.
4. Биектив акслантиришга таъриф беринг ва унга мисоллар келтиринг.
5. Айни акслантириш деб қандай акслантиришга айтилади?
6. Акс эттиришнинг торайиши, кенгайиши деганда нимани тушунасиш?
7. Акслантиришлар композицияси деб қандай акслантиришга айтилади?
8. Тескариланувчи акслантириш деб қандай акслантиришга айтилади?
9. Тескариланувчи акслантириш бўлишликнинг зарурий ва етарли шартини айтинг.
10. Ўзгартиришлар гуруҳи деб нимага айтилади?

4-МАЪРУЗА

МАВЗУ: БИНАР МУНОСАБАТЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ РЕЖА:

1. Таърифи ва мисоллар.
 2. Хоссалари.
 3. Эквивалентлик муносабати ва унга мисоллар.
 4. Инвариант акс эттиришлар.
- Адабиётлар[1, 2, 3].

1. Ихтиёрий A тўплам берилган бўлсин $A^2 = A \times A$ тўпламнинг ихтиёрий P қисм тўплами A тўпламдаги *бинар муносабат* дейилади. Агар $(x, y) \in P$ бўлса x ва y элементлар P бинар муносабатда дейилади ва xPy каби ёзилади.

Демак, бинар муносабатлар бу икки объект орасидаги муносабатдир. Бинар муносабатлар билан бирга *унар*, *тернар* ва умуман *n-нар* муносабатлар ҳам ўрганилади. Унар муносабат бу битта объектнинг хоссасини ифодалайди, тернар муносабат бу учта объект орасидаги *n-нар* муносабат эса *n* та объект орасидаги муносабатдир.

Мисоллар. 1). Ҳақиқий сонлар тўпламидаги x ва y сонларнинг тенглиги муносабати бинар муносабат бўлади. Бу муносабат $R^2 = R \times R$ текисликдаги $y = x$ тўғри чизиқ нуқталари билан берилади.

2). R тўпламдаги $x \neq y$ муносабат бинар бўлиб y $R^2 = R \times R$ текисликдаги $y = x$ тўғри чизиқдан ташқарисидаги нуқталар билан берилади.

3). R да y сонинг x сонидан катта эканлиги ($y > x$ ёки $x < y$) R^2 да $y = x$ тўғри чизиқдан юқорида ётган нуқталар тўплами учун бажарилади (рост).

4). Тўпламларнинг тенглик $A = B$, тенг эмаслик $A \neq B$, қисм тўплам бўлишлик $A \subseteq B$ муносабатлари ҳам бинар муносабатга мисол бўлади.

5). Текисликдаги тўғри чизиқларнинг параллеллик $e_1 \parallel e_2$ ва перпендикулярлик муносабати $e_1 \perp e_2$ муносабатлари ҳам бинар муносабатга мисол бўлади.

б). Бир тенгламалар системасининг иккинчи системанинг натижаси бўлишлик муносабати $((1) \rightarrow (2))$ ва бир тенгламалар системасининг иккинчисига тенг кучли (эквивалент) бўлиш муносабатлари ҳам бинар муносабатга мисол бўлади.

2. Хоссалари:

1⁰. Агар $\forall a \in A$ учун aRa рост бўлса, бундай R муносабатга A тўпламдаги *рефлексив муносабат* дейилади.

Агарда aRa муносабат ўринли бўлмаган $a \in A$ мавжуд бўлса, яъни A даги баъзи $a \in A$ учун aRa ўринли, баъзилари учун ўринли бўлмаса R га *рефлексив бўлмаган муносабат* дейилади.

2⁰. Агар aRb муносабатнинг ўринли эканлигидан bRa нинг ҳам ўринли эканлиги келиб чиқса R бинар муносабатга *симметрик муносабат* дейилади. aRb ўринли бўлган a, b лар учун bRa ўринли бўлмаса, R *антисимметрик муносабат* дейилади (яъни aRb ва $bRa \Rightarrow a = b$ келиб чиқса). Агарда aRb ва bRa муносабатлар ҳаттоки $a = b$ бўлганда ҳам бажарилмаса, бундай муносабатга *асимметрик муносабат* деб аталади.

3⁰. Агарда A тўпламдаги $a, b, c \in A$ элементлар учун aRb ва bRc ларнинг рост эканлигидан aRc нинг рост эканлиги келиб чиқса бундай R муносабатга A тўпламдаги *транзитив муносабат* дейилади.

A тўпламдаги рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатга шу тўпламдаги *эквивалентлик муносабати* дейилади ва $a \approx b$ кўринишда белгиланади.

Мисоллар. 1. Ҳақиқий сонлар тўпламидаги "=" тенглик муносабати.

2. Тўпламларнинг тенглиги муносабати.

3. Тенгламалар системасидаги тенг кучлилиқ муносабати.

4. Функцияларнинг тенглиги муносабати.

5. A тўпламда H ўзгартиришлар гуруҳи берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг $a, b \in A$ элементлари учун $h(a) = b$ тенгликни қаноатлантирувчи $h \in H$ биъектив акслантириш мавжуд бўлса, бу a ва b элементларни H эквивалент дейилади ва $a \overset{H}{\approx} b$ кўринишда белгиланади. Бу H эквивалентлик муносабати ҳам эквивалентлик муносабати бўлади. Чунки $\forall a \in A$ ва $e_A \in H$ учун $e_A(a) = a$ яъни $a \overset{H}{\approx} a$ ($e_A \in H$) (рефлексив). Агарда $a \overset{H}{\approx} b$ бўлса $b \overset{H}{\approx} a$ бўладт, чунки $h \in H$, $h(a) = b$ биъекция бўлгани учун h нинг тескараси $h^{-1} \in H$ ҳам мавжуд ва $a = h^{-1}(b)$ бўлади (симметриклик). Шунингдек агар $a \overset{H}{\approx} b$ ва $b \overset{H}{\approx} c$ бўлса, у ҳолда $a \overset{H}{\approx} c$ бажарилади $h(a) = b$, $g(b) = c$ дан $g(h(a)) = c \rightarrow$

$(g \cdot h)(a) = c$ ёки $g(h) = \varphi$ деб белгилаб олсак $\varphi(a) = c$ бажарилади. Демак H эквивалентлик муносабат бўлади.

A тўплам бирор усул билан синфларга бўлинган бўлсин: $B = \{A_t, t \in T\}$, $A = \bigcup_{t \in T} A_t$, $t \in T$ бу бўлинма ёрдамида A тўпламда эквивалентлик муносабатини кўрсатамиз. Агар $x, y \in A$ элементлар B бўлинмадаги бир синфга тегишли бўлса, уларни B бўлинмага нисбатан эквивалент деймиз ва $x \approx y$ шаклда ёзамиз. Бу эквивалентлик рефлексив, симметриклик ва транзитивлик шартларини қаноатлантиради.

Ихтиёрий A тўпламда ҳар қандай эквивалентлик муносабатини шундай ҳосил қилишимиз мумкинлигини кўрсатамиз. A тўпламда бирор " $\approx$ " эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. $\forall x \in A$ учун x да эквивалент бўлган барча $g \in A$ элементлар тўпламини $\bar{x}$ билан белгилаймиз. Энди $\forall y \in A/\bar{x}$ олиб $y \approx b \in (A/\bar{x})$ элементларни $\bar{y}$ синфга кўрсатамиз. У ҳолда $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Энди $z \in A/(\bar{x} \cup \bar{y})$ ни олиб шу жараёни давом эттираемиз. Бунинг натижасида чекли ёки чексиз сондаги ўзаро кесишмайдиган $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ синфларга эга бўламиз ва $A = \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z} \cup \dots$ тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб A тўпламни синфларга бўлиш ва эквивалентлик муносабатлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

$A/\approx = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots\}$ тўпламга *фактор тўплам* дейилади. A тўпламда бирор R эквивалентлик муносабати берилган ва C эса бирор тўплам бўлсин. $f: A \rightarrow C$ ни қараймиз. Агар A тўпламнинг элементларининг бирор f хоссаси учун $a \overset{P}{\approx} b$, $a, b \in A$ даги $f(a) = f(b)$ келиб чиқса, бундай акс эттириш R *инвариант* дейилади.

Хусусий ҳолда, агар A тўпламдаги эквивалентлик муносабати A тўпламдаги бирор H ўзгартиришлар гуруҳи ҳосил қилган H эквивалентлик бўлса, H инвариант акс эттириш $f: A \rightarrow C$ га қуйидагича таъриф берилади. Агар $\forall h \in H$ ва $x \in A$ учун $f(x) = f(h(x))$ тенглик ўринли бўлса, бундай $f: A \rightarrow C$ акс эттиришга H инвариант акс эттириш дейилади.

R инвариант акс эттиришнинг қуйидаги хоссаси муҳимдир. Агар $a_1, a_2 \in A$ лар учун $f(a_1) \neq f(a_2)$ бўлса, улар R эквивалентлик бўлмайди. Шундай қилиб R инвариантларни R эквивалент синфларни фарқ қилиш воситаси сифатида муҳимдир. Агар R инвариантлар тизими $F = \{f_\tau, \tau \in T\}$ қуйидаги шартни қаноатлантирса унга *тўла* дейилади: ҳар қандай R эквивалент бўлмаган $a_1, a_2 \in A$ элементлар учун шундай R инвариант мавжуд бўлсаки, $f \in F$ $f(a_1) \neq f(a_2)$ муносабат бажарилади.

Мавзунини мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Бинар муносабат деб қандай муносабатга айтилади?

2. Бинар муносабатлар қандай хоссаларга эга?
3. Бинар муносабатларга мисоллар келтириб хоссаларини изоҳланг.
4. Эквивалентлик муносабати деб қандай муносабатга айтилади?
5. Эквивалент муносабати бўйича тўпламни қандай қилиб синфларга ажратиш мумкин?
6. Фактор-тўплам деб нимага айтилади?
7. Берилган тўпламни берилган эквивалентлик муносабати бўйича ўзаро кесишмайдиган синфларнинг тўғри йиғиндисига ёйишга мисол келтиринг.

5 - МАЪРУЗА

Мавзу: ЭКВИВАЛЕНТЛИК ВА ТАРТИБ МУНОСАБАТЛАРИ

РЕЖА:

1. Эквивалентлик муносабати ва унга мисоллар.
2. Эквивалентлик синфлари фактор-тўплам.
3. Тартиб муносабати ва унга мисоллар.
4. Қисман ва тўла тартибланган тўпламлар.

АДАБИЁТЛАР [1,2].

1- *таъриф*. A тўпламда аниқланган R бинар муносабат рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, у ҳолда бундай муносабатга A тўпламдаги *эквивалентлик муносабати* дейилади.

Эквивалентлик муносабати $\sim$ ёки $\equiv$ символлар билан белгиланади.

Масалан: 1). Ихтиёрий бўш бўлмаган A тўпламда аниқланган айнан тенглик “ $\equiv$ ” муносабати;

2). Текисликдаги тўғри чизиклар тўпламида аниқланган параллеллик муносабати;

3). Учбурчаклар тўпламида аниқланган ўхшашлик муносабати;

4). Фазодаги геометрик фигураларнинг тенгдошлик муносабати ва бошқалар.

Берилган A тўпламни унда аниқланган R муносабат бўйича эквивалентлик синфларига ажратиш мумкин. Бунинг учун қуйидагича йўл тутилади. A тўпламдаги Ихтиёрий бир a элементни олиб aRx шартни қаноатлантирувчи барча $x \in A$ элементларни бирта C_a синфга киритамиз. Энди $A \setminus C_a = \emptyset$ бўлса, жараён шу жойда тўхтайдди. Агарда $A \setminus C_a \neq \emptyset$ бўлса, $b \in (A \setminus C_a)$ ни оламиз. Тушунарлики бу ҳолда $b \in A$ ва $b \notin C_a$. Энди барча $y \in (A \setminus C_a)$, bRy шартни қаноатлантирувчи y элементларни иккинчи бир C_b синфга киритамиз. Агар энди $(A \setminus C_a) \setminus C_b = \emptyset$ бўлса, жараёни шу жойда тўхтатамиз.

Агарда $(A \setminus C_a) \setminus C_b \neq \emptyset$ бўлса, $c \in (A \setminus C_a) \setminus C_b$ ни олиб cRz шартни қаноатлантирувчи барча z элементларни бирта C_c синфга киритамиз ва ҳоказо давом этамиз. Тушунарлики, агар A чекли бўлса, чекли қадамдан кейин чекли сондаги $C_a, C_b, \dots, C_m$ синфларга, агарда A чексиз тўплам бўлса, чекли ёки

чексиз сондаги C_a , C_b , синфларга эга бўламиз. Бу синфларга *эквивалентлик синфлари* дейилади.

Синфларнинг ҳосил қилинишига кўра $a \neq b$ бўлса, $C_a \cap C_b = \emptyset$ бўлиб

$$A = C_a \cup C_b \cup \dots \quad (1)$$

бўлади. (1) га A тўпламнинг ўзаро кесишмайдиган қисм тўпламлар бирлашмасига ёйилмаси дейилади. Бу ҳолда A тўплами эквивалентлик синфларига бўлакланган (*факторизацияланган*) деб ҳам юритилади.

Масалан: 1). Z - бутун сонлар тўпламидаги бўлиниш муносабати $(x-y)/m$ ни олайлик (бу ерда $m > 0$). Тушунарлики, бу муносабат бутун сонлар тўпламидаги эквивалентлик муносабати бўлади, чунки:

а) $\forall x \in Z$, $(x-x)/m$;

б) $\forall x, y \in Z$ лар $(x-y)/m$ дан $(y-x)/m$ нинг бажарилиши келиб чиқади;

с) $x, y, z \in Z$ лар учун $(x-y)/m$ ва $(y-z)/m$ ларнинг ўринли эканлигидан $(x-z)/m$ нинг ўринли эканлиги келиб чиқади, яъни қаралаётган муносабат бутун сонлар тўпламидаги рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатдир.

Энди шу муносабат бўйича Z ни эквивалентлик синфларига ажратайлик.

Агар $x = mq + k$ ва $y = mt + k$ бўлсагина $(x-y)/m$ бўлади. Бу ерда $k=0,1,2,\dots,m-1$ бўлгани учун бу синфлар қуйидагича бўлади.

..., $-3m$, $-2m$, $-m$, 0 , m , $2m$, $3m$, ...; $\{mq\} = C_0$

..., $-3m+1$, $-2m+1$, $-m+1$, 1 , $m+1$, $2m+1$, $3m+1$, ...; $\{mq+1\} = C_1$

..., $-3m+2$, $-2m+2$, $-m+2$, 2 , $m+2$, $2m+2$, $3m+2$, ...; $\{mq+2\} = C_2$

.....

..., $-2m-1$, $-m-1$, -1 , $m-1$, $2m-1$, $3m-1$, $4m-1$, ...; $\{mq+m-1\} = C_{m-1}$

Шундай қилиб, $Z = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m-1}$.

C_i нинг ҳар бир элементига шу *синфнинг чегирмаси* дейилади. (1) даги эквивалентлик синфлар тўплами $\{C_a, C_b, C_c, \dots\}$ га *фактор-тўплам* дейилади ва A/R кўринишда белгиланади. Демак, $A/R = \{C_a, C_b, C_c, \dots\}$.

Юқорида келтирилган мисолимизда фактор-тўплам $Z = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}\}$ бўлиб ўнга m модули бўйича чегирмалар синфлари тўплами дейилади.

Агар m модули бўйича чегирмалар синфларининг ҳар биридан биртадан чегирма олиб система тузсак ҳосил бўлган системага m модули бўйича чегирмаларнинг тўла системаси дейилади. Масалан, $\{0,1,2,\dots,m-1\}$.

Агарда m модули бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан m билан ўзаро тубларини олиб система тузсак ҳосил бўлган системага m модули бўйича чегирмаларнинг келтирилган системаси дейилади. Масалан: $m=6$ бўлса, $\{1,5\}$.

2). N - натурал сонлар тўпламини қаралаётган соннинг туб ёки (мураккаб) туб эмаслиги бўйича факторизациялаш мумкин.

3). Барча кўпбурчаклар тўплами M ни кўпбурчак томонлари сони бўйича эквивалент синфларга ажратиш мумкин.

4). Тўртбурчаклар тўпламида эквивалентлик муносабатини томонларнинг параллеллик тушунчаси сифатида киритсак, учта синф: паралеллограммлар, трапециялар ва ҳеч қандай икки томони параллел бўлмаган тўртбурчакларга эга бўламиз.

Математика ва унинг тадбиқларида тартиб муносабати деб аталувчи муносабат муҳим аҳамиятга эга. Икки сонни миқдори бўйича, одамларнинг ёшлари бўйича, китобларни жавонда теририлиши бўйича таққослаганда биз тартиб муносабатга дуч келамиз.

2-таъриф. A тўпландаги антисимметрик ва транзитив муносабат шу тўпландаги *тартиб муносабати* дейилади.

Тартиб муносабати киритилган тўпламларга *тартибланган тўпламлар* дейилади.

Агар A тўпланда аниқланган ρ тартиб муносабати рефлексив бўлса, ўнга *қатъий эмас тартиб муносабати*, агар антирефлексив бўлса эса *қатъий тартиб муносабати* дейилади.

3-таъриф. A тўпланда аниқланган ρ тартиб муносабати *боғланган* бўлса, яъни A нинг ихтиёрий x, y элементлари учун $x\rho y$ ёки $x=y$ ёки $y\rho x$ муносабатлардан бири, фақат бири бажарилса, ρ га *чизикли тартиб муносабати* дейилади.

Чизикли бўлмаган тартиб муносабати одатда *қисман тартибланганлик муносабати* деб юритилади.

Мисоллар. 1). Сонлар тўпламида аниқланган кичик эмаслик ($\geq$) муносабати қисман тартиб муносабати бўлади.

2). Натурал сонлар тўпламида аниқланган қолдиқсиз бўлиш муносабати ҳам қисман тартиб муносабати бўлади.

3). Бутун сонлар тўпламида аниқланган қолдиқсиз бўлиниш муносабати эса тартиб муносабати эмас, чунки a/b ва b/a дан $a=b$ келиб чиқмайди.

4-таъриф. қисман тартибланган A тўпламнинг a элементи учун $a \leq x$ ($x \leq a$) муносабат A тўпландаги барча x лар учун бажарилса, a га A тўпламнинг *энг кичик элементи (энг катта)* дейилади.

Қисман тартибланган тўпламлар умуман олганда энг кичик ёки энг катта элементга эга бўлмаслиги мумкин. Тартиб муносабати одатда $\langle$ орқали белгиланади.

Мисоллар.

1). Миқдорлари бўйича тартибланган ҳақиқий сонлар тўплами энг катта ва энг кичик элементларга эга эмас.

2). Манфиймас ҳақиқий сонлар тўплами энг кичик элемент 0 га эга, лекин энг катта элементга эга эмас.

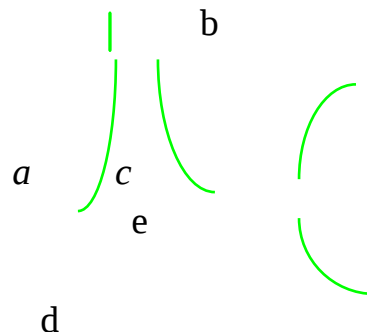
3). Натурал сонлар тўплами бўлиниш муносабати бўйича энг кичик элемент 1 га эга, лекин энг катта элемент мавжуд эмас.

5-таъриф. Агар қисман тартибланган A тўпламнинг a элементида катъий катта (катъий кичик) бўлган элементлари бўлмаса, a га A тўпламнинг *максимал (минимал) элементи* дейилади.

Қисман тартибланган тўплам бир қанча максимал ёки минимал элементларга эга бўлиши мумкин.

Мисоллар.

1). Ушбу графикларда стрелка учига элемент “стрелка” бошланишидаги элемент дан “катта” деб олайлик. b, f лар максимал элементлар; a, c, d лар эса минимал элементлардир.



2). $A = N \setminus \{1\}$ тўпламдаги ихтиёрий a ва b лар учун $b \nless a$ (b элемент a нинг бўлувчиси) $b \less a$ каби ёзилади. Бундай ҳолда барча туб сонлар минимал элементларни ташкил қилган ҳолда энг кичик элемент эса мавжуд эмас.

6-таъриф. Агар чизикли тартибланган A тўпламнинг ихтиёрий B -қисм тўплами доимо энг кичик элементга эга бўлса, бундай тўпламга *тўла тартибланган тўплам* дейилади.

Масалан. Натурал сонлар тўплами тўла тартибланган тўпламга мисол бўлади. Шунинг ҳам таъкидлаш керакки, умуман олганда берилган тўпламда тартиб тушунчасини бир неча усуллар билан киритиш мумкин.

Масалан, натурал сонлар тўпламида 1) $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ -табiiй тартиб;
2) $\{\dots, n, \dots, 2, 1\}$ -тескари тартиб.

$N \subset Q$ - рационал сонлар тўпламида ҳам тартиб муносабатини турлича аниқлаш мумкин.

Мавзунини мустаҳкамлаш учун саволлар

- 1). A -тўпламдаги рефлексив, антирефлексив, рефлексивмас муносабатларга таъриф беринг.
- 2). Бутун сонлар тўпламидаги бирор рефлексив муносабатга мисол келтиринг.
- 3). Симметрик муносабат (симметрикмас, антисимметрик) деб қандай муносабатга айтилади?
- 4). Транзитив муносабат деб қандай муносабатга айтилади?
- 5). Эквивалентлик муносабати деб қандай муносабатга?
- 6). A тўплам унда аниқланган R эквивалентлик муносабати бўйича қандай

қилиб синфларга ажратилади?

7). Тартиб муносабати деб қандай муносабатга айтилади?

8). Эквивалентлик ва тартиб муносабатларига мисоллар келтиринг.

6,7*- МАЪРУЗА

МАВЗУ: НАТУРАЛ СОНЛАР СИСТЕМАСИ. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ МЕТОДИ. БИРЛАШМАЛАР. НЬЮТОН БИНОМИ РЕЖА:

1. Натурал сонлар системасини аксиоматик аниқлаш .
2. Математик индукция принципи.
3. Бирлашмалар. Ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, группалашлар.
4. Ньютон биноми формуласи.

Адабиётлар [1, 2] .

Сонли системаларни ўрганишнинг икки усули конструктив ва аксиоматик усуллари мавжуд. Бу иккала усул ҳам тўплам тушунчасига асосланган бўлиб, дастлаб натурал кейин бутун, рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар системалари қаралади.

Конструктив усулнинг моҳияти шундан иборатки, янги қуриладиган система аввалдан маълум бўлган тушунчалар ёрдамида баён этилади. Масалан, натурал сонлар системаси учун бошданғич тушунча тўплам ҳисобланса, бутун сонлар системаси учун бошланғич тушунча натурал сонлардир ва ҳоказо. (Конструктив усулга натурал сонларни чекли тўпламларнинг қуввати сифатида киритишни мисол қилиб олиш мумкин).

Сонлар системасини аксиоматик усулда қуришда эса ҳар бир системанинг асосий хоссалари, аксиомалар ёрдамида берилади.

Биз қуйида натурал сонлар системасини аксиоматик усулда аниқлашни қараб чиқамиз. Бунинг учун асосий бошланғич муносабат сифатида “*b элемент a элементдан бевосита кейин келади*” муносабатни ва шу муносабат ўринли бўлган аксиомалар системасини оламиз.

1-таъриф. Бирор бўш бўлмаган N тўпламнинг a ва b элементлари учун “*b элемент a элементдан бевосита кейин келади*” муносабати ўринли бўлиб, мазкур тўплам элементлари учун қуйидаги 4 та аксиома бажарилса, у ҳолда N тўпламнинг элементларига *натурал сонлар* дейилади.

1) *ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайдиган 1 сони мавжуд. (Агар a дан бевосита кейин келадиган элементни a' десак, бу аксиомага кўра $a' \neq 1$).*

2) исталган a натурал сонидан бевосита кейин келувчи ягона a' натурал сони мавжуд, яъни $\forall a, b \in N$ учун $a=b \leftrightarrow a'=b'$, .

3) 1 сонидан бошқа ҳар бир натурал сон бирта ва фақат бирта натурал сондан кейин келади, яъни агар $a'=b' \leftrightarrow a=b, \forall a, b \in N$.

4) агар натурал сонлар тўпламининг исталган M қисм тўплами :

а) 1 ни ўз ичига олса;

б) ихтиёрий $a \in M$ дан, $a' \in M$ эканлиги келиб чиқса, M қисм тўплам N натурал сонлар тўплами билан устма- уст тушади, яъни $M \subseteq N$ ($1 \in M$) ва $(a \in M \rightarrow a' \in M) \rightarrow M=N$.

Бу аксиомага индукция аксиомаси дейилади. Юқоридаги аксиомалар системаси дастлаб италян математиги Пеано (1858-1932) томонидан киритилгани учун, уларни *Пеано аксиомалари* дейилади.

Индукция аксиомасининг моҳияти қуйидагича: $\forall n \in N$ учун $A(n) \rightarrow B(n)$ теоремани исботлаганда аввал унинг ростлиги $n=1$ да кўрсатилади. Сўнгра теоремани $n=k$ учун ўринли деб олиб $n=k+1$ бўлганда теореманинг рост эканлиги исботланади. Шундан кейин теорема исталган n натурал сони учун тўғри деб ҳисобланади. Энди шу усулнинг тўғри эканлигини исботлаймиз.

Теорема. (Математик индукция принципи). Агар бирор $B(n)$ тасдиқ $n=1$ учун рост бўлиб, унинг $n=k$ да ростлигидан $n=k+1$ да рост эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $B(n)$ тасдиқ исталган n натурал сони учун ҳам ўринли бўлади.

Исботи. Фараз этайлик, $M \subset N$ тўплам $B(n)$ тасдиқ ўринли бўлган тўплам бўлсин. У ҳолда теорема шартига кўра $1 \in M$ ва $1'+2 \in M, 2'+3 \in M, \dots$. Демак, индукция аксиомасига кўра $M=N$.

Мисоллар.

$$1. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$

тенгликнинг барча натурал сонлар учун ўринли эканлигини исботлайлик.

$n=1$ да (1) дан $1^2 = (1/6)1(1+1)(2 \cdot 1+1) \rightarrow 1=1$ ни ҳосил қиламиз, яъни $n=1$ да (1) тенглик ўринли.

Фараз этайлик $n=k$ да берилган тенглик ўринли бўлсин, яъни

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (2)$$

Биз берилган тенгликнинг $n=k+1$ учун ўринли эканлигини, яъни

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (3)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам (2) га кўра

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

яъни (3) тенглик ўринли. Демак, юқорида исботланган теоремага кўра (1) тенглик ихтиёрий n натурал сони учун ўринли.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ эканлигини исботланг. (Бу мустақил бажариш үчүн уйга вазифа).

Чекли сондаги элементлардан маълум тартибда олиб тузилган гуруҳларга *бирикмалар* дейилади.

Бирикмалар 3 турга: *ўринлаштириш*, *ўрин алмаштириш* ва *группалаш*ларга бўлинади.

1. *Ўринлаштиришлар*. m элементдан n тадан ($1 \leq n \leq m$) тузилган ўринлаштиришлар деб бир-биридан камида бирта элементи билан ёки элементларининг жойлашиш тартиби билан фарқ қилувчи бирикмаларга айтилади. m элементдан n тадан тузилган ўринлаштиришлар сонини A_m^n билан белгилаймиз. Бу грекча “Arrangement” (ўринлаштириш) сўзининг бош ҳарфидан олинган.

Мисол. a, b, c учта элементдан 1 тадан тузилган ўринлаштиришлар a, b, c ; уларнинг сони $A_3^1 = 3$; 3 элементдан 2 та тузилган ўринлаштиришлар: ab, ac, bc, ba, ca, cb ; буларнинг сони $A_3^2 = 6$. 3 элементдан 3 та тузилган ўринлаштиришлар: $abc, bac, bca, acb, cab, cba$; буларнинг сони ҳам $A_3^3 = 6$. Умуман,

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) \quad (4)$$

Эканлигини кўрсатиш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам агар $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ элементлар берилган бўлса, улардан 1 тадан тузилган ўринлаштиришлар $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ бўлиб, уларнинг сони $A_m^1 = m$ га тенг.

m элементдан 2 та тузилган ўринлаштиришларни ҳосил қилиш учун m элементдан 1та тузилган ўринлаштиришларни ёзиб олиб, уларнинг ҳар бирининг ёнига қолган $m-1$ та элементни ёзиб чиқиш кифоя:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 a_2, & a_1 a_3, & \dots, & a_1 a_{m-1}, & a_1 a_m \\ a_2 a_1, & a_2 a_3, & \dots, & a_2 a_{m-1}, & a_2 a_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m a_1, & a_m a_2, & \dots, & a_m a_{m-2}, & a_m a_{m-1} \end{array}$$

бунда m та сатр ва $m-1$ та устун бор. Демак, $A_m^2 = m(m-1)$. Энди m элементдан 3 тадан тузилган ўринлаштиришларни ҳосил қилиш учун m элементдан 2 тадан $m(m-1)$ та ўринлаштиришларни ёзиб олиб уларнинг ҳар бирининг ёнига қолган $m-2$ та элементларни ёзиб чиқамиз:

[illegible]

Бу ерда $m(m-1)$ та сатр ва $m-2$ та устун бор. Демак, $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Бу жараённи n марта такрорлаб (4) формулани ҳосил қиламиз.

Мисол: $A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2. Ўрин алмаштиришлар. m та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар деб ҳар бирида m та элемент бўлиб, бир-биридан фақат элементларининг жойлашиш тартиби билангина фарқ қилувчи бирикмаларга айтилади.

m та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони P_m (permutation) сўзининг бош ҳарфи билан белгиланади.

Таърифга кўра

$$P_m = A_m^m = (m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m! \quad (5)$$

Шунингдек $A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))$.

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{P_m}{P_{m-n}},$$

$$\text{я́ни} \quad A_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n}} \quad . \quad (6)$$

3. *Группалашлар.* m элементдан n тадан тузилган группалашлар деб ҳар бирида n та элемент бўлиб, бир-биридан камида бирта элементи билан фарқ қилувчи бирикмаларга айтилади.

m элементдан n тадан тўзилган группалашлар сони $\tilde{N}_m^n$ (combination сўзининг бош ҳарфи) билан белгиланади. Таърифдан $\tilde{N}_m^n P_n = A_m^n$. Бундан

$$\tilde{N}_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \quad (7)$$

Демак,

$$\tilde{N}_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} . \quad (8)$$

(6) ва (7) дан

$$\tilde{N}_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_n} . \quad (9)$$

(9) дан (5) га кўра

$$\tilde{N}_m^n = \frac{m!}{n! (m-n)!} . \quad (10)$$

Хоссалари :

$$1^0. \quad \tilde{N}_m^n = \tilde{N}_m^{m-n} .$$

Ҳақиқатдан ҳам (9) $\tilde{N}_m^{m-n} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_n} = C_m^n .$

$$2^0. \quad \tilde{N}_m^n + \tilde{N}_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1} .$$

Исботи.

$$\begin{aligned} \tilde{N}_m^n + \tilde{N}_m^{n+1} &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))(m-n)}{n!(n+1)} = \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} \left(1 + \frac{(m-n)}{n+1} \right) = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))(m+1)}{(n+1)!} = \tilde{N}_{m+1}^{n+1} \end{aligned}$$

Биз $\tilde{N}_m^0 = 1$ деб белгилаб оламиз.

Ньютон биноми. Бизга ўрта мактаблардан маълумки

$$\begin{aligned} a+b &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 . \end{aligned}$$

Энди $(a+b)^n$ ни ҳам шу тарзда езиш мумкин эканлигини исботлаймиз, яъни ушбу тенглик ўринли:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n . \quad (11)$$

Бу формулани исботлаш учун, аввало қуйидаги тенгликнинг ихтиёрий натурал сон n учун ўринли эканлигини кўрсатамиз:

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\dots(a+b_n) = a^n + s_1 a^{n-1} + s_2 a^{n-2} + s_3 a^{n-3} + \dots + s_n, \quad (12)$$

бу ерда

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ s_2 &= b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n \\ s_3 &= b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \dots + b_{n-2} b_{n-1} b_n \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

$$s_n = b_1 b_2 \cdots b_n .$$

(12) -тенглик $n=1$ да ўринли $(a+b_1)^1=(a+b_1)$. Энди фараз қилайлик (12) тенглик $n>1$ учун ўринли бўлсин. Биз унинг $n+1$ учун ҳам ўринли эканлигини исботлаймиз. (12) нинг иккала томонини $(a+b_{n+1})$ га кўпайтирамиз. У ҳолда

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\dots(a+b_n)(a+b_{n+1}) = a^{n+1} + S_1a^n + S_2a^{n-1} + S_3a^{n-2} + \dots + S_na + S_{n+1},$$

бу ерда

$$S_1 = s_1 + b_{n+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1}$$

$$S_2 = s_2 + s_1 b_{n+1} = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_n b_{n+1}$$

$$S_3 = s_3 + s_2 b_{n+1} = b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \dots + b_{n-1} b_n b_{n+1}$$

$$S_n = b_1 b_2 \dots b_n + \dots + b_2 b_3 \dots b_{n+1}$$

$$S_{n+1} = b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} .$$

Демак (12) формула ихтиёрий n натурал сони учун ўринлидир.

Агар (12) да $b_1 = b_2 = \dots = b_n = b$ деб олсак :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n \quad (13)$$

Бунда (8) формуладан фойдалансак (11) келиб чиқади .

(13) ни қўйидагича ёзиш мумкин :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n \quad (14)$$

Маълумки $C_n^p = C_n^{n-p}$ бўлгани учун Ньютон биноми формуласидаги бошдан ва охиридан бир хил узокликда турган ҳадларнинг коэффицентлари (биномиал коэффицентлар) тенгдир.

Агар (14) да $a=b=1$ деб олсак : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$;

агарда $a=1$, $b=-1$ деб олсак: $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$ ёки
 бундан $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots$,
 яъни жуфт ўриндаги биномиал коэффициентлар йиғиндиси тоқ ўринда
 турган биномиал коэффициентлар йиғиндисига тенг.

Мисоллар :

$(a+b)^0 = 1$	1									
$a+b = a+b$	1	1								
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1	2	1							
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1	3	3	1						
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1	4	6	4	1					
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$		1	5	10	10	5	1			

Бу ёйилмалардаги биномиал коэффицентларни *Паскал учбурчаги* деб аталувчи ўнг томонда келтирилган учбурчак ёрдамида аниқлаш мумкин.

Мавзуни мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Пеано аксиомаларини айтинг.
2. Математик индукция методининг моҳияти ҳақида гапириб беринг.
3. Теоремалар ва уларни исботлаш усуллари ҳақида нималарни биласиз?
4. Бирлашмалар қандай турларга бўлинади?
5. m элементдан n тадан ($1 \leq n \leq m$) тўзилган ўринлаштиришларга таъриф беринг.
6. m элементдан тўзилган ўрин алмаштиришларга таъриф беринг ва уларнинг сонини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
7. m элементдан n тадан ($1 \leq n \leq m$) тўзилган группалашлар деб нимага айтилади?
8. Ньютон биноми формуласини ёзинг.
9. Биномиал коэффицентлар қандай хоссаларга эга?
10. Паскал учбурчаги ва биномиал коэффицентлар орасида қандай боғланиш бор?

8-МАЪРУЗА

МАВЗУ: АЛГЕБРАИК АМАЛ АНИҚЛАНГАН ТЎПЛАМЛАР ВА АЛГЕБРАЛАР

РЕЖА:

1. Бинар, n -ар алгебраик амаллар. Алгебра тушунчаси.
2. Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари .
3. Нейтрал элементлар .
4. Регуляр элементлар .
5. Симметрик элементлар .
6. Алгебраик амалга нисбатан ёпиқ тўплам. Мисоллар.
7. Амалларнинг аддитив ва мультипликатив ёзуви.

АДАБИЁТЛАР [1 ,2].

Ҳозирги замон алгебраси тўплам ва унинг элементлари учун аниқланган алгебраик амаллар ва уларнинг хоссаларини ўрганади. Фараз этайлик бизга бўш бўлмаган A тўплам берилган бўлсин.

1- *таъриф*. $A \times A$ тўғри кўпайтмани A тўпламга мос қўювчи $\alpha : A \times A \rightarrow A$ акслантиришга A тўпламда аниқланган *бинар алгебраик амал* дейилади.

Таърифга асосан (a,b) , $(a,b \in A)$ тартибланган жуфтликка $c \in A$ элемент мос келгани ҳолда (b,a) га c элемент мос келмасдан бошқа бир $d \in A$ элемент ҳам мос келиши мумкин. α акслантириш ёрдамида $a \times b \in A \times A$ жуфтликка $c \in A$ элементнинг мос қўйилиши $\alpha(a,b)=c$, $(a,b)\alpha=c$, $a\alpha b=c$ кўринишларда белгиланади. Одатда кўпчилик ҳолларда бинар алгебраик амалларни белгилаш учун махсус $*$, $+$, $\perp$, $\top$, ... белгилар ҳам ишлатилади. Мактаб математика курсидан маълум бўлган арифметик қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳам бинар алгебраик амалларга мисол бўла олади.

2-таъриф. Агар $A^n = A \times A \times \dots \times A$ декарт кўпайтманинг ҳар бир $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементига A тўпламнинг ягона a_{n+1} элементи мос қўйилган бўлса, A тўпламда *ранги n га тенг бўлган* (n ўринли, n -ар) *алгебраик амал* аниқланган дейилади.

n -ар алгебраик амални α билан белгиласак $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{n+1}$. Баъзи ҳолларда $a_{n+1} \notin A$ бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда қаралаётган α алгебраик амал A тўпламдаги *қисмий алгебраик амал* деб юритилади.

Алгебраик амаллар ноль, бир, икки, уч, ... ўринли бўлиши мумкин. Улар мос равишда нулар, унар, бинар, тернар, ..., n -ар алгебраик амал дейилади.

1). A тўпламнинг исталган элементини алоҳида олиш — нулар алгебраик амалдир.

2). $P(M)$ - M тўпламнинг барча қисм тўпламлари тўплами бўлсин. Ҳар бир $A \in P(M)$ тўпламга унинг тўлдирувчиси $A' = M \setminus A$ ни мос қўювчи акслантириш унар алгебраик амалга мисол бўлади.

3). Натурал сонлар тўпламидаги айириш амали қисмий алгебраик амалга мисол бўлади.

4). Бутун сонлар тўпламидаги бўлиш амали ҳам бутун сонлар тўпламидаги қисмий алгебраик амалдир.

5). n та натурал сонлар $a_1, a_2, \dots, a_n$ га уларнинг энг катта умумий бўлувчиси d ни мос қўювчи амал n -ар алгебраик амалдир.

Бирта A тўпламда аниқланган барча алгебраик амаллар $f_1, f_2, \dots, f_s$ бўлсин.

3-таъриф. Бўш бўлмаган A тўплам ва унда аниқланган алгебраик амаллар тўплами Ω дан тўзилган $\langle A; \Omega \rangle$ жуфтликка *алгебра* дейилади.

Агар Ω даги амаллар сони чекли бўлса, улар санаб кўрсатилади, яъни $\langle A; f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ кўринишда ёзилади. $A = \langle A; \Omega \rangle$ бўлса, A тўпламга A алгебранинг *асосий тўплами*, Ω га эса *асосий амаллар тўплами* дейилади. f алгебраик амалнинг *ранги* $r(f)$ кўринишда белгиланади. $(r(f_1), r(f_2), \dots, r(f_s))$ га

$\langle A; f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ алгебранинг *типи* дейилади.

Масалан, $\langle N; +, \cdot \rangle$, $(2, 2, 0)$ типли

$\langle Z; +, -, \cdot, \rangle$, (2,2,2) типли
 $\langle P(M); \cup, \cap, ' \rangle$, (2,2,1) типли алгебрадир.

Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари. Фараз этайлик, $\perp$ ва $\top$ лар A тўпламдаги ихтиёрий бинар алгебраик амаллар бўлсинлар.

Агарда A тўпламнинг ихтиёрий a, b элементлари коммутатив учун $a \perp b = b \perp a$ тенглик ўринли бўлса, $\perp$ амални A тўпламдаги *коммутатив алгебраик амал* дейилади.

Агар A тўпламнинг ихтиёрий $a, b, c \in A$ элементлари учун $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ тенглик бажарилса, $\top$ алгебраик амалга A тўпламдаги *ассоциатив бинар алгебраик амал* дейилади.

Агар A тўпламнинг ихтиёрий $a, b, c \in A$ элементлари учун $(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$ тенглик ўринли бўлса, $\top$ алгебраик амал $\perp$ амалга нисбатан *дистрибутив алгебраик амал* дейилади.

Агар $\perp$ амал ассоциатив бўлса, $(a \perp b) \perp c$ ёки $a \perp (b \perp c)$ ёзувда қавсларни тушириб қолдириш мумкин.

Мисоллар. 1). Сонлар тўпламлари N, Z, Q, R даги арифметик қўшиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив ва ассоциативдир. Шунингдек, бу тўпламларда кўпайтириш қўшишга нисбатан дистрибутив ҳам $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$, лекин қўшиш кўпайтиришга нисбатан дистрибутив эмас: $(c \cdot a) + b \neq (c+b) \cdot (a+b)$.

2). Z даги айириш амали ва даражага кўтариш амаллари коммутатив эмас:

$$a-b \neq b-a; \quad a^b \neq b^a.$$

Бу айириш ва даражага кўтариш амаллари ассоциатив ҳам эмас.

3). $P(M)$ тўпламда аниқланган $\cup, \cap$ амаллари коммутатив, ассоциатив ва ҳар бири иккинчисига нисбатан дистрибутив ҳамдир.

Нейтрал элементлар. $\top$ A тўпламда аниқланган бинар алгебраик амал бўлсин. Агар A тўпламнинг ихтиёрий $a \in A$ учун A да $a \top e = a$ ($e \top a = a$) шартни қаноатлантирувчи e элемент мавжуд бўлса, e га ўнг (чап) *нейтрал элемент* дейилади.

Агарда $\forall a \in A$ учун $a \top e = e \top a$ бўлса, у ҳолда e га *нейтрал элемент* дейилади.

1-теорема. Агар $\top$ бинар алгебраик амалга нисбатан нейтрал элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.

Ҳақиқатдан ҳам агар e ва e' ларни нейтрал элементлар десак: $a \top e = e \top a = a$ ва $a \top e' = e' \top a = a$ бўлиши керак. У ҳолда $e = e' \top e = e'$.

Натижа. Агар $\top$ амалга нисбатан нейтрал элемент мавжуд бўлса, барча ўнг ва чап нейтрал элементлар шу нейтрал элемент билан устма-уст тушади.

Мисоллар. 1). Z, Q, R сонлар тўпламларида қўшишга нисбатан нейтрал элемент 0 сонидир. Бу тўпламларда кўпайтиришга нисбатан нейтрал элемент 1 сонидир.

N -натурал сон тўпламида қўшишга нисбатан нейтрал элемент мавжуд эмас, кўпайтиришга нисбатан эса 1 дир.

2). $P(M)$ тўпламидаги $\cup$ амалга нисбатан нейтрал элемент $\emptyset$ бўш тўплам; $\cap$ амалга нисбатан нейтрал элемент эса U - универсал тўплам бўлади.

Регуляр элементлар. Агар $a \in A$ элемент ихтиёрий $b, c \in A$ элементлар учун $aTb = aTc$ ($bTa = cTa$) тенгликлан $b=c$ келиб чиқса, a га T амалга нисбатан A тўпламдаги ўнг *регуляр (чап регуляр) элемент* дейилади.

Агар $a \in A$ элемент T амалга нисбатан чап ва ўнг регуляр элемент бўлса, у ҳолда ўнга *регуляр элемент* дейилади.

Шундай қилиб, агар a регуляр элемент бўлса $aTb = aTc$ тенгликни a га қисқартириш мумкин.

Мисоллар: 1). Ҳар бир бутун сон қўшиш амалига нисбатан регулярдир.

2). Нолдан фарқли ҳар бир бутун сон кўпайтиришга нисбатан регуляр. 0 эса регуляр эмас.

3). N тўпламда даражага кўтариш $a^x = a^y \rightarrow x=y$ ($a>1$) хоссага эга бўлгани учун 1 дан бошқа барча элементлар бу амалга нисбатан ўнгдан регуляр ва $x^a = y^a$ бўлгани учун N нинг барча элементлари чапдан регулярдир.

2- теорема. Агар a ва b элементлар ассоциатив бинар T амалга нисбатан регуляр бўлсалар, уларнинг композицияси aTb ҳам T амалга нисбатан регуляр бўлади.

Исботи. a ва b лар регуляр бўлгани учун $aTc = aTd$ дан $c=d$ ва $bTc = bTd$ дан $c=d$ келиб чиқади. Энди фараз этайлик, c ва d элементлар $(aTb)Tc = (aTb)Td$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда T нинг ассоциативлигидан $(aTb)Tc = aT(bTc)$ ва $(aTb)Td = aT(bTd)$. Буларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун ўнг томонлари ҳам тенг бўлиши керак:

$aT(bTc) = aT(bTd) \rightarrow bTc = bTd \rightarrow c=d$. Демак, $a \in A$ элемент элемент ўнгдан регуляр экан. Чапдан регулярлиги ҳам шу усулда кўрсатилади.

Симметрик элементлар. Фараз этайлик, T A тўпламдаги нейтрал элементга эга бўлган бинар алгебраик амал бўлсин. $a \in A$ элемент учун $aTu = e$, ($uTa = e$) шартларни қаноатлантирувчи $u \in A$ элементга a элементга нисбатан ўнг (чап) *симметрик элемент* дейилади.

Агарда, $aTa' = a'Ta = e$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда элемент a элементга *симметрик элемент* дейилади.

Мисоллар. 1). Z тўпламда қўшиш амалига нисбатан a элементга симметрик элемент $-a$ бўлади.

2). R тўпламда кўпайтириш амалига нисбатан a ($a \neq 0$) элементга симметрик элемент $1/a$ бўлади. 0 учун эса бу ҳолда симметрик элемент мавжуд эмас.

3-теорема. Ассоциатив T амалга нисбатан a элементга симметрик элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.

Исботи. Фараз этайлик, u, v лар a га симметрик элементлар бўлсин. У ҳолда $aTu = uTa = e$ ва $aTv = vTa = e$. T амалнинг ассоциатив эканлигидан $u = uTe = uT(aTv) = (uTa)Tv = eTv = v$.

Натижа. Агар a га T амалга нисбатан симметрик элемент a' мавжуд бўлса, у ҳолда a элементнинг барча ўнг ва чап симметрик элементлари a' га тенг бўлади.

4-теорема. Агар a ва b элементлар учун ассоциатив T амалга нисбатан симметрик a' ва b' элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда aTb га симметрик элемент ҳам мавжуд ва у $b'Ta'$ дан иборат бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $(aTb)T(b'Ta') = ((aTb)Tb')Ta' = (aT(bTb'))Ta' = (aTe)Ta' = aTa'Te$.

Натижа. Агар a элемент учун ассоциатив T амалга нисбатан симметрик элемент a' мавжуд бўлса, a элемент T амалга нисбатан регуляр элемент бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $aTa' = a'Ta = e$ бўлиб, $aTb = aTc$ бўлсин. У ҳолда $a'T(aTb) = a'T(aTc)$ ёки $(a'Ta)Tb = (a'Ta)Tc$ бундан эса $eTb = eTc \rightarrow b = c$.

Фараз этайлик, A тўпламда T - бинар амал аниқланган бўлсин ва $B \subset A$ бўлсин. Агарда $a, b \in B$, $aTb \in B$ бўлса, у ҳолда B тўпламга T амалга нисбатан *ётиқ тўплам* дейилади.

4-теоремадан келиб чиқадики, ассоциатив бинар амал T га нисбатан симметрик элементга эга бўлган барча элементлар тўплами T амалга нисбатан ёпиқдир. $B \subset A$ бўлса, A да аниқланган T амал, B да бирор T' бинар алгебраик амални аниқлайди: $aT'b = aTb$, $\forall a, b \in B$.

Бу ҳолда T амалга B тўпламда аниқланган T' амалнинг A даги давоми дейилади.

Агарда T амал у ёки бу маънода арифметик қўшиш (кўпайтириш) амали билан боғлиқ бўлса, ўнга *аддитив (мультипликатив) алгебраик амал* дейилади ва $+$ ($\cdot$) билан белгиланади. Бу ҳолда нейтрал элементга ноль 0 (1 бирлик) элемент, симметрик элементга эса қарама-қарши (тескари) элемент дейилади.

Мавзунини мустаҳкамлаш учун саволлар

- 1). Алгебраик амал тушунчаси. Мисоллар.
- 2). Коммутатив ва ассоциатив алгебраик амаллар.
- 3). Нейтрал элемент деб қандай элементга айтилади?
- 4). Симметрик элемент деб қандай элементга айтилади?
- 5). Ярим группага таъриф беринг.
- 6). Умумлашган ассоциативлик қонунини тушунтиринг.

9,10*- МАЪРУЗА

МАВЗУ: ГРУППАЛАР, ҚИСМ ГРУППАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

РЕЖА:

1. Қисм группалар. Мисоллар.
2. Группалар ва уларга мисоллар.
3. Группаларнинг содда хоссалари.
4. Умумлашган ассоциатив қонуни .
5. Гомоморф ва изоморф группалар.

АДАБИЁТЛАР [1,2,3]

Фараз этайлик, бизга битта бинар T ва унар $*$ алгебраик амал аниқланган G бўш бўлмаган тўплам берилган бўлсин. Агарда G тўпламнинг элементлари унда аниқланган T амалга нисбатан ассоциативлик қонунига бўйсинса, яъни:

- 1). $\forall a, b, c \in G \rightarrow (a T b) T c = a T (b T c)$ тенгликни қаноатлантирса, $\langle G; T \rangle$ алгебрага T амалга нисбатан *ярим группа* дейилади.

Агар $\langle G; T, * \rangle$ - ярим группа

- 2). $\forall a \in G, \exists e \in G, a T e = e T a = a;$
- 3). $\forall a \in G, \exists a' \in G, a T a' = a' T a = e;$

шартларни қаноатлантирса, $\langle G; T, * \rangle$ га T амалга нисбатан *группа* дейилади. e га $G = \langle G; T, * \rangle$ группанинг *нейтрал элементи*, a' га эса a элементга *симметрик элемент* дейилади.

Агарда $G = \langle G; T, * \rangle$ группанинг элементлари

- 4). $\forall a, b \in G \rightarrow a T b = b T a$ шартни қаноатлантирса, G га *коммутатив группа ёки Абел группаси* дейилади.

Нейтрал элементга эга бўлган ярим группага *моноид* дейилади.

Агар $M \subset G$ бўлиб $\langle M; T, * \rangle$ группа бўлса, бу группага $G = \langle G; T, * \rangle$ группанинг *қисм группаси* дейилади.

1-теорема. Агар $G = \langle G; T, * \rangle$ группа бўлса, унинг ихтиёрий қисм тўплами M нинг T амалга нисбатан қисм группа бўлиши учун:

- 1). $\forall h, h' \in M, h T h' \in M;$

$$2). \forall h, \in M, \quad h^{-1} \in M$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурий шарт. $\langle M; \top, * \rangle$ группа бўлсин, у ҳолда 1) ва 2) шартларнинг бажарилиши группа таърифидан бевосита келиб чиқади.

Етарли шарти. 1) ва 2) шартлар бажарилсин. У ҳолда $M \subset G$ қисм тўпламнинг G нинг қисм группаси бўлишини кўрсатамиз. Шартга кўра $\forall h, h' \in M$ учун $h \top h' \in M$, яъни M тўплам $\top$ амалга нисбатан ёпиқдир ва $h, h', h'' \in M$ лар учун $h \top (h' \top h'') = (h \top h') \top h''$ ўринли, чунки $h, h', h'' \in M \subset G$. 2) ва 1) шартлардан $h \top h^{-1} = e \in M$.

Демак, 1), 2), 3) шартлар бажарилади ва $\langle M; \top, * \rangle$ - группа, яъни G нинг қисм группаси.

Мисоллар . 1. N -натурал сонлар тўпламини арифметик қўшиш амалига нисбатан текширайлик. Маълумки, $\forall n, m \in N, \quad m+n \in N$.

$$1). \forall m, n, l \in N, \quad m+(n+l) = (m+n)+l \quad \text{бажарилади.}$$

$$2). \forall m, \exists e \in N, \quad m+e = e+m = m, \quad e=0 \notin N, \quad \text{яъни бу шарт бажарилмайди.}$$

Демак, $N = \langle N; + \rangle$ ярим группа экан.

Энди шу тўпламни кўпайтиришга нисбатан текширайлик. $\forall m, n \in N \rightarrow m \cdot n \in N$.

$$1). \forall m, n, e \in N, \quad m \cdot (n \cdot e) = (m \cdot n) \cdot e \quad \text{бажарилади.}$$

$$2). \forall m \in N, \quad \exists e=1 \in N, \quad m \cdot 1 = 1 \cdot m = m \quad \text{бажарилади.}$$

$$3). \forall m \in N, \quad \exists m' \in N, \quad m \cdot m' = m' \cdot m = 1 \quad \text{бўлиши керак.}$$

$m' = 1/m \notin N$. Демак, бу шарт бажарилмайди. Шундай қилиб $N = \langle N, \cdot \rangle$ моноид бўлар экан.

2. Барча бутун сонлар тўплами Z қўшиш амалига нисбатан группа бўлади. $Z = \langle Z; + \rangle$ да a га тескари элемент $(-a)$ ҳамда нейтрал элемент 0 бўлади. $Z = \langle Z; + \rangle$ га бутун сонларнинг аддитив группаси дейилади.

Энди Z ни кўпайтиришга нисбатан қарасак, $Z = \langle Z; + \rangle$ моноид бўлади, чунки $a \neq 0$ га (тескари) симметрик элемент $a^{-1} = 1/a \notin Z$.

3. Барча рационал сонлар тўплами Q қўшишга нисбатан аддитив Абел группаси $Q = \langle Q; + \rangle$ бўлади. Агар $Q_1 = Q \setminus \{0\}$ тўпламни қарасак, $Q_1 = \langle Q_1; \cdot \rangle$ ҳам мультипликатив группа бўлади.

4. Ҳақиқий сонлар тўпламини қарасак, у ҳолда $R = \langle R; + \rangle$ аддитив Абел группаси; $R_1 = \langle R_1; \cdot \rangle$ эса мультипликатив Абел группаси бўлади. Бу ерда $R_1 = R \setminus \{0\}$.

5. $m > 0$ модули бўйича чегирмалар синфлари $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}\} = Z / mZ$ тўпламида қўшиш амалини

$$C_i + C_j = \begin{cases} C_{i+j}, & \text{агарда } 0 \leq i+j \leq m-1 \\ C_{i+j-m}, & \text{агарда } i+j \geq m \end{cases}$$

тенглик билан аниқласак, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = \langle \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}; + \rangle$ аддитив Абел группаси бўлади. Бунда нейтрал элемент C_0 ; C_i элементга қарама қарши элемент C_{m-i} синф бўлади, чунки $C_i + C_{m-i} = C_m = C_0$.

6. $m=6$ модул бўйича чегирмалар синфлари тўплами $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} = \{ C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \}$ дан иборат бўлади.

+	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_5	C_0	C_1	C_2	C_3
C_5	C_5	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4

Бу жадвалдан фойдаланиб группа таърифидаги 1), 2), 3), 4), шартларнинг бажарилишини осонлик билан текшириш мумкин.

$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} = \langle \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}; + \rangle$ -аддитив абель группаси.

7). $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ тўпланда кўпайтириш амалини

$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} C_{ij}, & \text{агарда } 0 \leq ij \leq m-1 \text{ булса} \\ C_r, & \text{агарда } ij \geq m \text{ ва } ij = mq + r \text{ булса} \end{cases}$$

тенглик билан аниқласак. $\langle \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}; \cdot \rangle$ -мультипликатив моноид бўлади. Бунда нейтрал элемент C_1 бўлади, ассоциативлик қонуни бажарилади, лекин ихтиёрий C_i учун $C_i \cdot C_j = C_1$ шартни қаноатлантирувчи C_j элемент мавжуд эмас.

Масалан, $m=6$ да $C_3 \cdot C_0 = C_0$, $C_3 \cdot C_1 = C_3$, $C_3 \cdot C_2 = C_0$, $C_3 \cdot C_3 = C_3$, $C_3 \cdot C_4 = C_0$, $C_3 \cdot C_5 = C_3$, яъни $C_3 \cdot C_j = C_1$ тенгликни қаноатлантирувчи C_j синф мавжуд эмас.

8). $M=\{1,-1\}$ тўпламнинг арифметик кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлишлигини исботланг.

9). $a+b\sqrt{3}$ кўринишдаги сонлар тўпламини $a, b \in R$ бўлганда кўпайтириш ва қўшиш амалларига нисбатан группа бўлиш ёки бўлмаслигини текширинг.

ГРУППАНИНГ ХОССАЛАРИ

1°. Ихтиёрий группада нейтрал элемент бир қийматли аниқланади ва группанинг исталган элементи учун ягона тескари (симметрик) элемент мавжуд бўлади. Биз бу хоссани илгари умумий ҳолда исботлаган эдик.

2°. Ҳар қандай мультипликатив гурппада бўлиш муносабати ўринли, яъни исталган a ва b элементлар учун шундай x, y элементлар топиладики, $ax=b, ya=b$ тенгламалар ягона ечимга эга.

Исботи. $ax=b$ тенгламани чап томондан a^{-1} га кўпайтирсак, $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$ ёки $(a^{-1}a)x = a^{-1}b \rightarrow ex = a^{-1}b \rightarrow x = a^{-1}b$ га эга бўламиз. $x = a^{-1}b$ билан бирга c ҳам $ax=b$ тенгламанинг ечими бўлса, y ҳолда $c=e \cdot c = (a^{-1} \cdot a)c = a^{-1}(ac)$; бу ерда $ac=b$ бўлгани учун $c = a^{-1}b$, яъни $c=x$.

3°. Исталган гурппанинг элементлари регуляри элементлардир. Ҳақиқатан ҳам $aTb = aTc \rightarrow b=c$ ва $bTa = cTa \rightarrow b=c$ келиб чиқади. Гурппанинг элементларига симметрик a' элемент мавжуд бўлгани учун $a'T(aTb) = a'T(aTc) \rightarrow (a'Ta)Tb = (a'Ta)Tc \rightarrow eTb = eTc$ $b=c$. Кейинги тенглик ҳам шунинг сингари исботланади.

4°. $\langle G, T \rangle$ -гурппанинг ихтиёрий n та элементи шу гурппада аниқланган алгебраик амал T га нисбатан ассоциативдир.

Исботи. Исботни ёзувда соддалик учун кўпайтириш амалига нисбатан олиб борамиз.

1) $n=1,2$ да исботнинг ҳожати йўқ;

$n=3$ да эса гурппа таърифидаги 1)-шартда берилган.

Фараз этайлик, $n=k$ да теорема ўринли бўлсин, яъни n та кўпайтувчининг кўпайтмаси қавсларни қўйиш тартибига боғлиқ бўлмасин. У ҳолда $a_1 a_2 \dots a_k = \prod_{i=1}^k a_i$ деб ёза оламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини a_{k+1} га кўпайтирсак,

$$(a_1 a_2 \dots a_k) \cdot a_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \cdot a_{k+1} = \prod_{i=1}^l a_i \prod_{i=l+1}^k a_i \cdot a_{k+1}.$$

Энди $\prod_{i=1}^l a_i$ ва $\prod_{i=l+1}^k a_i$ лардаги кўпайтувчилар сони k дан кичик шунинг учун бу кўпайтувчилар учун хосса ўринли.

Энди $\prod_{i=1}^l a_i, \prod_{i=l+1}^k a_i, a_{k+1}$ ҳадлар учун (уларни 3та элемент деб) ассоциативлик

қонунини қўлласак $\prod_{i=1}^l a_i \prod_{i=l+1}^k a_i \cdot a_{k+1}$ ифодага ва демак $(a_1 a_2 \dots a_k) \cdot a_{k+1}$ ифодада ҳам унинг қиймати қавсларни қўйиш тартибига боғлиқ эмас деган хулосага келамиз.

5°. $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ элементларининг кўпайтмасига тескари бўлган элемент $a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ бўлади. (Текширинг). $a \cdot a \dots a = a^n$ деб белгилаймиз, $a^0 = e$.

6°. Агар $a \in G$ бўлса, y ҳолда $a^n \in G, n \in \mathbb{N}$ бўлади.

ГРУППАЛАРНИНГ ГОМОМОРФЛИГИ

Фараз этайлик , $G = \langle G; \cdot, {}^{-1} \rangle$ ва $H = \langle H; *, {}^{-1} \rangle$ -мультипликатив группалар берилган бўлсин. Агар G ни H га акслантирувчи h акслантириш асосий амалларни сақласа , яъни

$$1) \quad \forall a, b \in G \text{ учун } h(a \cdot b) = h(a) * h(b) ,$$

$$2) \quad \forall a \in G, \quad h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$$

шартлар бажарилса, h га *гомоморф акслантириш* , G ва H группаларга эса *гомоморф* (ўхшаш) *группалар* дейилади. Агар $h: G \rightarrow H$ гомоморф акслантириш бўлиб G ни H га (устига) ўтказса h га *эпиморф акслантириш* дейилади .

Агар $h: G \rightarrow H$ акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиб, асосий амалларни сақласа бундай акслантиришга *изоморф акслантириш* дейилади (хоссалари бир хил). Бу ҳолда G ва H группаларга *изоморф группалар* дейилади ва $G \cong H$ кўринишда ёзилади.

G ни G га (устига) акслантирувчи изоморф h акслантиришга *автоморфизм* дейилади.

1-теорема . Агар $h: G \rightarrow H$ акслантириш G даги бинар амал $\cdot$ ни сақласа, яъни $\forall a, b \in G, \quad h(a \cdot b) = h(a) * h(b)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда h G группанинг бирлик e элементи H группанинг бирлик элементига ўтказди ва $h: G \rightarrow H$ гомоморф акслантириш бўлади.

Исботи . Фараз этайлик , $e \in G$ нинг бир элементи бўлсин ва у h акслантиришда $e' \in H$ элементга утсин , яъни $e' = h(e) \in H$. e' нинг H учун бирлик элемент эканлигини кўрсатамиз . 1) га асосан

$h(e \cdot e) = h(e) * h(e) = e' * e'$, иккинчи томондан $e' = h(e) = h(e \cdot e)$. Демак, $e' * e' = e'$, яъни $e' \in H$ бирлик элемент. h нинг гомоморф акслантириш эканлигини кўрсатиш учун 2) шартни қаноатлантиришни кўрсатиш етарли.

Фараз этайлик , $\forall a \in G$ бўлсин. У ҳолда G группа бўлгани учун

$\exists a^{-1} \in G$ ва $a \cdot a^{-1} = e \in G$. (1) га асосан бундан $h(a \cdot a^{-1}) = h(a) * h(a^{-1}) = h(e) = e' \in H$. Демак, $\forall a \in G, \quad h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$, яъни $h(a)$ га тескари элемент.

Группалар тўпламидаги изоморфлик муносабати эквивалентлик муносабатидир (текшириб кўринг) .

Мисоллар. 1. Q^* -барча нолдан фарқли рационал сонлар тўплами ва $Q^* = \langle Q^*; \cdot, {}^{-1} \rangle$ эса рационал сонларнинг мультипликатив группаси бўлсин. $Q^+ = \langle Q^+; \cdot, {}^{-1} \rangle$ -мусбат рационал сонларнинг мультипликатив группаси бўлсин. У ҳолда $h(a) = |a|$, $h: Q^* \rightarrow Q^+$ (яъни $h: a \rightarrow |a|$) гомоморф акслантириш бўлади.

Бунда a_{ij} лар коэффициентлар (сонлар), $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумлар, $b_1, b_2, \dots, b_m$ лар озод ҳадлар дейилади. a_{ij} коэффициентда биринчи индекс i тенгламанинг номерини, иккинчи индекс j эса номалумнинг номерини билдиради. Агар (1)да $b_1, b_2, \dots, b_m$ лардан бирортаси нолдан фарқли бўлса, (1) га бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси, агар $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ бўлса, (1) га бир жинсли чизикли тенгламалар системаси дейилади. (1) ни қисқача

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (2)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

n та ҳақиқий сондан тузилган тартибланган n -лик $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ га n -ўлчовли арифметик вектор дейилали.

(2) нинг *ечими* деганда унинг ҳар бир тенгламасини тўғри тенгликка айлантирувчи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонларга айтилади.

(1) -системани вектор тушунчасидан фойдаланиб қуйидагича ёзиш мумкин.

(1)

нинг номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган вектор устунларини

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

деб белгилаб олсак, (1) дан

$$A^{(1)} x_1 + A^{(2)} x_2 + \dots + A^{(n)} x_n = b \quad (3)$$

ни ҳосил қиламиз. (Маълумки векторни сонга кўпайтириш учун унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилади).

Агар (1) система ечимга эга бўлса, бундай системага *биргаликдаги система*, ечимга эга бўлмаса *биргаликда бўлмаган система* дейилади. Агар (1) система фақат битта ечимга эга бўлса, ўнга *аниқ система*, чексиз кўп ечимга эга бўлса, (1) га *аниқмас система* дейилади. (Тушунарлики, (1) система ечимга эга бўлса, у ягона ечимга эга ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади). М: а) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6$ система ечимга $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ эга эмас; $5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$

$$\begin{array}{ll} б) \quad 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6 & \text{система ягона ечим } (1, 1, 1) \\ \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 & \text{га эга;} \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 & \end{array}$$

$$в) \quad x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4$$

система чексиз кўп ечимга эга .

Тушунарлики бир жинсли чизиqli тенгламалар системаси доимо $(0,0,...,0)$ ечимга эга. Бу ечим унинг тривиаль ечими дейилади ва унинг нолдан фарqli ечимларга эга бўлиш шартлари текширилади. (2) система билан бирга

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n = d_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (4)$$

система ҳам берилган бўлсин. Агар (2)-системанинг ҳар бир ечими (4)-система ечими бўлса, (4)-система (2) -системанинг *натижаси* дейилади.

Агар (2) нинг ечимлари тўпламини A , (4) нинг ечимлари тўпламини эса B деб белгиласак, $A \subseteq B$ бўлади.

Агар (4)-система (2)-системанинг натижаси, (2)- система эса (4)-системанинг натижаси бўлса, у ҳолда (2) ва (4) системаларга *ўзаро эквивалентлик* системалар дейилади.

Ушбу алмаштиришларга (1)-чизиqli тенгламалар системасидаги *элементар алмаштиришлар* дейилади.

1). (1) системадаги бирор (масалан, k -тенгламани) тенгламанинг икки томонини $\alpha \neq 0$ сонига кўпайтириш;

2). Системадаги ихтиёрий 2 та тенгламанинг ўринларини алмаштириш;

3). Системанинг 2та тенгламасини мос равишда $\alpha \neq 0$ ва $\beta \neq 0$ сонларига кўпайтириб натижаларини қўшиш;

4). Барча коэффициентлари ва озод ҳади ноллардан иборат (агар шундай тенгламалар мавжуд бўлса) тенгламаларни ташлаб юбориш.

Теорема. Элементлар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган система дастлабки системага тенг кучли системадир.

Исботи. Ҳақиқатдан ҳам, агар қаралаётган система (1) системадан 2) ва 4) элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинган бўлса, уларнинг эк-вивалент эканлиги таърифдан бевосита келиб чиқади.

Фараз этайлик, (1) системанинг бирорта тенгламаси, масалан, i -тенгламаси $\alpha \neq 0$ сонига кўпайтирилиб, янги система ҳосил қилинган бўлсин. Бу системадаги i -тенгламадан бошқа тенгламалар (1)-системадаги тенгламалар билан бир хил, шунинг учун ҳам (1)нинг ихтиёрий $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ечимини олиб, унинг янги системадаги i -тенглама $\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \dots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i$ ни қаноатлантиришини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатдан ҳам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (1) нинг ечими бўлгани учун $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ дан $\alpha a_{i1}\alpha_1 + \alpha a_{i2}\alpha_2 + \dots + \alpha a_{in}\alpha_n = \alpha(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) = \alpha b_i$ келиб чиқади.

Энди агарда янги системадаги i -тенглама (1)даги i -тенглама $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ни α га j -тенгламани эса β га кўпайтириб натижани ҳадлаб қўшиш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда

юкридаги сингари мулоҳаза юритиб $\alpha(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) + \beta(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n) = \alpha b_i + \beta b_j$, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$ ларга асосан $(\alpha a_{i1} + \beta a_{j1})\alpha_1 + (\alpha a_{i2} + \beta a_{j2})\alpha_2 + \dots + (\alpha a_{in} + \beta a_{jn})\alpha_n = \alpha b_i + \beta b_j$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб теорема тўла исботланди.

Мисоллар : 1.
$$\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases} \quad (1) \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + 4y = -2 \end{cases} \quad (2)$$

(1) ечими $(1; -3/4)$; (2) бу чексиз кўп ечимга эга.

Демак, (2) система (1) системанинг натижаси.

2.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

системаларнинг иккаласи ҳам аниқмас системалар бўлиб уларнинг ечимлари тўпламлари устма-уст тушади. (1) системадаги 1-тенгламадан 2-тенгламани айирсак, (2)-системадаги 3-тенглама; қўшсак, 2-тенглама ҳосил бўлади. (1)-системадаги 2-тенгламани 2га кўпайтириб 1-тенгламага қўшсак, (2)-системанинг 1-тенгламаси ҳосил бўлади.

Ушбу (1)-системанинг номаълумлари коэффицентларидан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвалга (1) системанинг матрицаси дейилади.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

жадвалга эса (1)-системанинг кенгайтирилган матрица дейилади.

a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... элементлар жойлашган диагоналга *бош диагональ* дейилади. a_{1n} , $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, ... элементлар жойлашган диагоналга эса *иккинчи диагональ* дейилади. Агар $m = n$ бўлса, A га n -тартибли *квадрат матрица* дейилади. матрицага *бирлик матрица* дейилади.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицадаги элементар алмаштиришлар деб қуйидагиларга айтилади.

- 1). Иккита сатрининг (устунининг) ўрнини алмаштиришга;
- 2). Бирор сатридаги (устунидаги) барча элементларни нолдан фарқли сонга кўпайтиришга;
- 3). Бирор сатри (устуни) даги барча элементларни нолдан фарқли сонга кўпайтириб, иккинчи бир сатр (устун) элементларига кўшишга.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- а). n та номалумли m та чизиқли тенгламалардан тузилган системани ёзинг.
- б). Қандай чизиқли тенгламалар системасига биргаликдаги система дейилади?
- в). Аниқ ва аниқмас, зиддиятли системалар деб қандай системаларга айтилади?
- г). Матрица деганда нимани тушунасиш?
- е). Эквивалент (тенг кучли) чизиқли тенгламалар системалари деб қандай системаларга айтилади?
- ж). Чизиқли тенгламалар системасидаги элементар алмаштиришлар деб нимага айтилади?
- з). Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси деб қандай системага айтилади?

12-МАЪРУЗА

МАВЗУ : n -ЎЛЧОВЛИ АРИФМЕТИК ФАЗО. ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНГАН ВА ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНМАГАН ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАЛАРИ.

РЕЖА:

1. n -ўлчовли арифметик фазонинг таърифи;
2. n -ўлчовли арифметик фазонинг хоссалари;
3. Чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган векторлар системалари;
4. Чизиқли боғланмаган векторлар системаларининг хоссалари;

АДАБИЁТЛАР [1,2,3].

1. n та тартибланган ҳақиқий сонлар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дан тузилган $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -ликка n -ўлчовли вектор деб айтилади ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларни векторнинг координаталари дейилади.

Барча мумкин бўлган n -ўлчовли векторлар тўпламини R^n билан белгилаймиз. R^n даги $a=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $b=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ элементларнинг тенглиги, йиғиндисини ва R дан олинган λ сонига кўпайтмасини қуйидагича аниқлаймиз:

- 1). $(a=b) \Leftrightarrow (\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \dots, \alpha_n=\beta_n)$;

2). $a+b = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$;

3). $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$. Тушунарлики, у ҳолда $\forall a, b \in R^n$ учун $a \cdot b \in R^n$ ҳамда $\forall \lambda \in R, a \in R^n$ учун $\lambda a \in R^n$ бажарилади. λ сонига кўпайтириш амали R^n даги унар алгебраик амал бўлиб, уни биз ёзувда қулайлик учун ω_λ билан белгилаймиз. $(0, 0, \dots, 0)$ вектор *нол вектор* дейилади ва $\mathbf{0}$ билан белгиланади.

2) га асосан $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a$ бўлгани учун $\mathbf{0}$ вектор қўшиш амалига нисбатан нейтрал элемент бўлади.

$(-1)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ векторга $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ га *қарама-қарши вектор* дейилади. $a + (-1)a = \mathbf{0}$ бўлгани учун $(-1)a = -a$ билан белгиланади.

1- *таъриф*. R^n тўпламга унда аниқланган қўшиш ва сонга кўпайтириш амалига нисбатан (яъни $\langle R^n; +, \omega_\lambda \rangle$ алгебрага n -ўлчовли векторларнинг арифметик фазоси (ёки қисқача n -ўлчовли *арифметик фазо*) дейилади. Биз уни R^n билан белгилаймиз.

Векторларни қўшиш ва λ сонга кўпайтириш амалларига арифметик фазонинг *асосий амаллари* дейилади.

2. $R^n = \langle R^n; +, \omega_\lambda \rangle$ фазонинг асосий амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\langle R^n; +, \omega_\lambda \rangle$ - алгебра аддитив Абель группаси.

2°. Сонга кўпайтириш амали ассоциатив: яъни

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall a \in R^n \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a).$$

3°. Сонга кўпайтириш қўшиш амалига нисбатан дистрибутив:

$$\forall \alpha \in R, \forall a, b \in R^n \rightarrow \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b.$$

4°. Векторга кўпайтириш сонларни қўшишга нисбатан дистрибутив, яъни $\forall \alpha, \beta \in R, \forall a \in R^n \rightarrow (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$.

5°. $\forall a \in R^n \rightarrow 1 \cdot a = a$. хоссаларнинг ўринли эканлигига бевосита текшириб кўриш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Уни биз талабаларга ҳавола қиламиз.

$\langle R^n; +, \cdot \rangle$ -группага R^n -арифметик фазонинг аддитив группаси дейилади.

3. Бизга $R^n = V$ фазонинг $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлари системаси берилган бўлсин. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$, ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R$) ифодага

$a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системасининг *чизиқли комбинацияси* дейилади. Бу ердаги $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларга *чизиқли комбинациянинг коэффициентлари* дейилади. Агар коэффициентлардан бирортаси нолдан фарқли бўлса, тривиал бўлмаган, акс ҳолда, яъни барча коэффициентлар нолга тенг бўлса, тривиал чизиқли комбинация дейилади.

$a_1, a_2, \dots, a_m$ векторларнинг барча мумкин бўлган чизикли комбинацияларидан тузилган L тўпламга шу векторларнинг чизикли қобиғи дейилади.

Демак, $L=L(a_1, a_2, \dots, a_m)=\{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R\}$.

Осонлик билан кўриш мумкинки, чизикли қобик векторларни қўшиш, айириш ва λ сонига кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқдир.

2- таъриф. Агар ҳеч бўлмаганда бирортаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ сонлари мавжуд бўлиб

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \quad (1)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (2)$$

векторлар системаси чизикли боғланган дейилади. Агарда (1) тенглик фақат ва фақат λ_1 қ λ_2 қ. . . қ λ_m қ 0 бўлгандагина бажарилса, (2) векторлар системасига чизикли боғланмаган система дейилади.

Масалан: $e_1=(1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n=(0, 0, 0, \dots, 1)$ бирлик векторлар системаси чизикли боғланмагандир. Ҳақиқатдан ҳам, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ дан $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$ ёки $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ келиб чиқади.

4. Х о с с а л а р и .

1°. Нол вектор ёки ўзаро пропорционал векторлар қатнашган ҳар қандай векторлар системаси чизикли боғлангандир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $0, a_2, \dots, a_m$ векторлар системаси берилган бўлса, у ҳолда $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ деб олсак, $\lambda_1 0 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ тенглик ўринли бўлади. $a_1 = \lambda a_2$ бўлса ($\lambda \neq 0$), ҳам шундай исботланади.

2°. $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($a_1 \neq 0$) векторлар системаси чизикли боғланган бўлиши учун ундаги бирорта векторнинг қолган векторнинг чизикли комбинациясидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($a_1 \neq 0$) система чизикли боғланган бўлсин. У ҳолда

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \quad (3)$$

тенглик бажарилади ва бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларнинг ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли. Масалан, $\lambda_k \neq 0$ ва k шу шартни қаноатлантирувчи энг катта индекс бўлсин. Бу ерда $k > 1$, акс ҳолда, $\lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ деб олсак, $\lambda_1 a_1 = 0$ дан $\lambda_1 = 0$ келиб чиқади. (3) ни a_k га нисбатан ечсак: $a_k = (-\lambda_1 / \lambda_k) a_1 + (-\lambda_2 / \lambda_k) a_2 + \dots + (-\lambda_{k-1} / \lambda_k) a_{k-1} + (-\lambda_{k+1} / \lambda_k) a_{k+1} + \dots + (-\lambda_m / \lambda_k) a_m$ ёки $\lambda'_s = (-\lambda_s / \lambda_k)$ деб белгилаб олсак, $a_k = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \dots + \lambda'_{k-1} a_{k-1}$ га эга бўламиз.

Етарли шарти. Фараз этайлик $a_s = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1} + \lambda_{s+1} a_{s+1} + \dots + \lambda_m a_m$ бўлсин. У ҳолда бу тенгликни $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1} + \lambda_s a_s + \lambda_{s+1} a_{s+1} + \dots + \lambda_m a_m = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\lambda_s = -1 \neq 0$ бўлгани учун $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системаси чизикли боғлангандир.

3°. Агар берилган системанинг бирор қисмий системаси чизикли боғланган бўлса, шу системанинг ўзи ҳам чизикли боғланган бўлади.

Исботи. $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системалари чизикли боғланган бўлиб $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ системанинг қисми бўлсин. У ҳолда ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ сонлари мавжуд бўлиб $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ бўлади. Бундан $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + 0 a_{k+1} + \dots + 0 a_m = 0$ ва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0$ сонларининг ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли.

Демак, таърифга асосан $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ векторлар системаси чизикли боғланган.

Натижа. Агар берилган векторлар системаси чизикли боғланмаган бўлса, унинг ихтиёрий қисмий системаси ҳам чизикли боғланмагандир.

4°. Агар $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системаси чизикли боғланмаган бўлиб

$$a_1, a_2, \dots, a_m, v \quad (4)$$

система чизикли боғланган бўлса, у ҳолда v вектор

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (5)$$

системадаги векторлар орқали ягона усулда чизикли ифодаланади.

Исботи. (4) система чизикли боғланган бўлганлиги сабабли ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda$ сонлари мавжуд бўлиб

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda v = 0 \quad (6)$$

тенглик бажарилади. Бу ерда ерда $\lambda \neq 0$, акс ҳолда (6)дан $a_1 \lambda_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ тенглик $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларнинг бирортаси нолдан фарқли бўлганда бажарилиши керак. Бу эса (5) нинг чизикли эрки эканлигига зиддир. (6) ни v га нисбатан ечиб

$$v = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \dots + \lambda'_m a_m \quad (7)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди ягоналигини исботлайлик (7) билан бирга $v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_m a_m$ бўлса, у ҳолда $(\lambda'_1 - \mu_1) a_1 + (\lambda'_2 - \mu_2) a_2 + \dots + (\lambda'_m - \mu_m) a_m = 0$ бўлади. (5) система чизикли эрки бўлгани учун $\lambda'_1 - \mu_1 = 0, \lambda'_2 - \mu_2 = 0, \dots, \lambda'_m - \mu_m = 0$ ёки $\lambda'_1 = \mu_1, \lambda'_2 = \mu_2, \dots, \lambda'_m = \mu_m$ бўлади.

5°. Агар $a \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ ва $b_1, b_2, \dots, b_m \in L(c_1, c_2, \dots, c_s)$ бўлса, $a \in L(c_1, c_2, \dots, c_s)$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $a \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ дан

$a_n - \beta_n a_{n+1}$ векторлар системаси чизикли боғланган, ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сонлари мавжуд бўлиб $\lambda_1 (a_1 - \beta_1 a_{n+1}) + \lambda_2 (a_2 - \beta_2 a_{n+1}) + \dots + \lambda_n (a_n - \beta_n a_{n+1}) = 0$ тенглик бажарилади ёки бундан $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0$ ҳосил бўлади. Бу ерда $\lambda_{n+1} = -(\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_n \beta_n)$. Шундай қилиб $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ векторлар чизикли боғланган. Теорема исбот бўлди.

Натижалар. 1). Агар $a_1, a_2, \dots, a_k \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ бўлиб, $k > m$ бўлса $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системаси чизикли боғланган бўлади.

2). Агар $a_1, a_2, \dots, a_k \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ бўлиб $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системаси чизикли боғланмаган бўлса, $k \leq m$ бўлади.

3). n ўлчовли арифметик фазодаги ҳар қандай $n+1$ та ва ундан ортиқ векторлардан тузилган система чизикли боғлангандир.

Бу 3- натижа ҳар қандай n ўлчовли вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ни бирлик векторлар орқали ифодалаш мумкин эканлигидан, яъни

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \in L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ эканлигидан келиб чиқади.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- 1). 1 ва 2 ўлчовли арифметик фазоларга мисоллар келтиринг.
- 2). n ўлчовли арифметик фазо деганда нимани тушунасиш?
- 3). 3 ўлчовли арифметик фазога мисоллар келтиринг.
- 4). Чизикли боғланган векторлар системасига таъриф беринг.
- 5). Чизикли боғланмаган векторлар системасига таъриф беринг.

13 -МАЪРУЗА

МАВЗУ: ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНING РАНГИ ВА БАЗИСИ

РЕЖА:

1. Векторларнинг эквивалент системалари .
2. Векторлар системасидаги элемент алмаштиришлар .
3. Чекли сондаги векторлар системасининг базиси .
4. Чекли сондаги векторлар системасининг ранги.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3,].

n - ўлчовли арифметик фазо R^n даги векторлар $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ва $T = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ системалари берилган бўлсин . Агар S системадаги ҳар бир векторни T системасидаги векторларнинг чизикли комбинацияси кўринишида ва аксинча T системадаги ҳар бир векторни S системалаги векторларнинг чизикли комбинацияси кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, S

ва T векторлар системаларига эквивалент векторлар системалари дейилади ва

$S \sim T$ кўринишда ёзилади. $\sim$ муносабат бинар муносабат бўлиб, рефлексив ($S \sim S$), симметрик ($S \sim T \rightarrow T \sim S$) ва транзитив ($S \sim T$ ва $T \sim L \rightarrow S \sim L$) лик хоссаларига бўйсунди, яъни эквивалентлик муносабати бўлади.

Хоссалари. 1°. Иккита системанинг эквивалент бўлиши учун уларнинг чизиқли қобикларининг тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. $S \sim T$ бўлсин, $L(S) = L(T)$ эканлигини кўрсатамиз. $S \sim T \rightarrow \forall a \in S \rightarrow a \in L(T)$, яъни $L(S) \subseteq L(T)$.

Агарда $\forall b \in L(T)$, у ҳолда $T \sim S$ бўлгани учун $b \in L(S)$; яъни $L(T) \subseteq L(S)$. Демак $L(S) = L(T)$.

Агар $L(S) = L(T)$ бўлса, $S \sim T$ эканлиги таърифдан бевосита келиб чиқади.

2°. Агар иккита векторларнинг чекли системалари ўзаро эквивалент бўлиб, чизиқли эрки бўлса, улар бир хил сондаги векторлардан тузилган бўлади.

Исботи. Агар иккала векторлар системалари бўш бўлса, теорема ўринли. Фараз этайлик $u_1, u_2, \dots, u_n$ ва $v_1, v_2, \dots, v_s$ лар эквивалент системалар бўлиб ҳар бири чизиқли боғланмаган бўлсин. У ҳолда илгариги мавзудаги иккинчи натижага кўра $r \leq s$ ва $s \leq r$ бўлиб, бўлардан r с келиб чиқади.

Чекли векторлар системасидаги элементар алмаштиришлар деб қуйидагиларга айтилади:

- 1). Системадаги бирор векторни $\alpha \neq 0$ сонга кўпайтириш;
 - 2). Системадаги бирор векторни $\alpha \neq 0$ га кўпайтириб иккинчи бир векторга қўшиш;
 - 3). Системадан нол векторни чиқариб ташлаш ёки нол векторни қўшиш.
- 1) ва 2)-элементар алмаштиришларга хосмас, 3) га эса хос алмаштириш дейилади.

1-теорема. Агар чекли сондаги векторларнинг бирор системаси иккинчи бир вектор системасидан элемент алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, бу икки система ўзаро эквивалент бўлади.

Исботи. Фараз этайлик,

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (1)$$

векторлар системаси берилган бўлсин. Агар янги система (1) дан 1) алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда

$$\alpha a_1, a_2, \dots, a_m \quad (2)$$

система ҳосил бўлади ва (1) ҳамда (2) ларнинг эквивалент эканлиги таърифдан бевосита келиб чиқади. Агар янги система

$$a_1 + \alpha a_2, a_2, \dots, a_m \quad (3)$$

кўринишда бўлса ҳам (1) ва (3) лар эквивалентдир.

Энди векторли фазолар назариясининг асосий тушунчаларидан бирига таъриф берамиз.

Таъриф. Берилган чекли сондаги векторлар системасининг базиси деб унинг чизиқли боғланмаган ва берилган системага эквивалент бўш бўлмаган қисмий системасига айтилади.

Бошқача сўз билан айтганда берилган векторлар системасидаги ҳар бир векторни ифодалаш мумкин бўлган, чизиқли боғланмаган, бўш бўлмаган қисмий системадир.

2-теорема. Агар чекли векторлар системасида ҳеч бўлмаса бирорта нолдан фарқли вектор мавжуд бўлса, бу система базисга эга. Берилган системанинг ҳар қандай иккита базиси бир хил сондаги векторлардан тўзилган бўлади.

Исботи. Фараз этайлик, чекли сондаги ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли бўлган векторлар системаси

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_m \quad (4)$$

берилган бўлсин. Бу системадаги нол векторларни ташлаб юбориш мумкин, чунки ҳосил бўлган система (4) системага эквивалент бўлади. Шунинг учун ҳам $u_1 \neq 0$ деб олишимиз мумкин. Агар (4) чизиқли эркин бўлса унинг ўзи базис бўлади. Агарда (4) система чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда бу системадаги u_k вектор ўзидан олдинги векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, яъни $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m$ система (4) га эквивалент ва камида бирта нолдан фарқли вектор ўнга қарашли. Шу жараёни давом эттириб чекли қадамдан кейин бирортаси ҳам қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлмаган системага эга бўламиз ва у базис бўлади.

Агар $u_1, u_2, \dots, u_k$ ва $v_1, v_2, \dots, v_s$ лар берилган системанинг базислари бўлсалар, улар эквивалент бўлади ва демак $k=s$.

Таъриф. Берилган векторлар системасининг базисини ташкил этувчи векторлар сонига шу системанинг *ранги* дейилади.

Фақат нол вектордан тузилган системанинг ва бўш системанинг ранги нолга тенг деб ҳисобланади.

Хоссалари.

1°. Агар $u_1, u_2, \dots, u_k \in L(v_1, v_2, \dots, v_m)$ бўлса, $u_1, u_2, \dots, u_k$ векторлар системасининг ранги $v_1, v_2, \dots, v_m$ векторлар системасининг рангидан катта эмас.

Исботи. Агар $u_1, \dots, u_k$ система фақат нол векторлардан тўзилган бўлса, унинг ранги нолга тенг ва $v_1, \dots, v_m$ системанинг рангидан катта эмас.

Агарда биринчи $u_1, \dots, u_k$ системада бирорта нолдан фарқли вектор мавжуд бўлса, $v_1, \dots, v_m$ система ҳам нолдан фарқли векторга эга бўлади (теорема-нинг шартига кўра). У ҳолда иккала система ҳам базисга эга. $u_1, \dots, u_r$ биринчи системанинг базиси; $v_1, \dots, v_s$ эса иккинчи системанинг базиси бўлсин. У ҳолда $v_1, \dots, v_s$ система $v_1, \dots, v_m$ га эквивалент ва демак $L(v_1, \dots, v_s) = L(v_1, \dots, v_m)$.

Шундай қилиб $u_1, \dots, u_r \in L(v_1, \dots, v_s)$ ва $r \leq s$.

Натижалар:

1. Берилган системанинг ранги унинг ихтиёрий қисми системанинг рангидан кичик эмас.

2. Эквивалент системанинг ранглари ўзаро тенг.

3. n -ўлчовли векторли фазодаги ихтиёрий чекли системанинг ранги $\leq n$.

Ҳақиқатдан ҳам $L(e_1, e_2, \dots, e_n) = R^n$ ва $a_1, \dots, a_m \in L(e_1, e_2, \dots, e_n) = R^n$ бўлса, 1° га кўра $a_1, \dots, a_m$ нинг ранги $e_1, e_2, \dots, e_n$ нинг ранги n дан катта эмас.

4. Агар чекли системанинг ранги r га тенг бўлса, унинг Ихтиёрий k та вектордан тўзилган қисмий системаси $k > r$ бўлганда, чизиқли боғлангандир.

5. Агар

$$a_1, \dots, a_m \quad (5)$$

системанинг ранги

$$a_1, \dots, a_m, b \quad (6)$$

системанинг рангига тенг бўлсин. У ҳолда b вектор (5) системадаги векторлар орқали чизиқли ифодаланади.

Исботи. Тушунарлики, агар иккала системанинг ҳам ранги нолга тенг бўлса, теорема ўринли. Фараз этайлик, (5)-системанинг ранги $r > 0$ га тенг бўлсин ва $a_1, a_2, \dots, a_r$ - унинг базиси бўлсин. У ҳолда иккинчи системанинг ранги ҳам r га тенг бўлади ва $a_1, a_2, \dots, a_r$ система (6) нинг қисми бўлгани учун $a_1, \dots, a_r, b$ чизиқли боғланган, демак, $b \in L(a_1, \dots, a_r)$. У ҳолда $b \in L(a_1, \dots, a_r, \dots, a_m)$ яъни $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

- 1). Чизиқли боғланмаган максимал система деб қандай системага айтилади?
- 2). Векторлар системасининг базиси ва ранги деб нимага айтилади?
- 3). $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$ векторлар системасининг ранги нечага тенг?

МАВЗУ: МАТРИЦАЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ РАНГИ

РЕЖА :

1. Матрицалар ва улар устида амаллар.
2. Матрицанинг ранги.
3. Чизиқли тенгламалар системасининг ранги.

АДАБИЁТЛАР [1 , 2 , 3].

Матрица деб элементларни (объектларни) маълум тартибда олиб тўзилган жадвалга айтилади. Масалан, ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвалга n та устун ва m та сатрдан тузилган *матрица* дейилади. Бундан кейин матрицаларни латин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгилаймиз: $A, B, \dots$. Агар сатр ва устунлари сонини кўрсатиш зарур бўлса $A^{m \times n}$ кўринишдаги белгилашдан фойдаланамиз. (1)да $|| \dots ||$ кўринишда белгилашнинг ўрнига (...) ёки $[\dots]$ кўринишдаги белгилашлардан ҳам фойдаланилади. Агарда (1) да $m=n$ бўлса, унга n - *тартибли квадрат матрица* дейилади. Барча элементлари ноллардан иборат бўлган матрицага *нол матрица* дейилади.

Бош диагоналида бирлар қолган жойларида эса ноллардан иборат бўлган квадрат матрицага *бирлик матрица* дейилади . Масалан, ушбу матрица n - тартибли бирлик матрицадир

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Агар бизга $A^{m \times n} = (a_{ij})$ ва $B^{m \times n} = (b_{ij})$ матрицалар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг мос элементлари тенг бўлсагина бундай *матрицаларга тенг* дейилади. Демак, $A^{m \times n} = B^{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

Энди матрицалар устида бажариладиган амалларни қараб чиқамиз.

1. *Қўишиш*. Матрицаларнинг йиғиндиси ҳам тенглик сингари бир хил русумли матрицалар учун аниқланган. $A^{m \times n} = (a_{ij})$ ва $B^{m \times n} = (b_{ij})$ матрицаларнинг йиғиндиси деб $A^{m \times n} + B^{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})$ тенглик билан аниқланувчи матрицага айтилади. Бошқача қилиб айтганда матрицаларни қўишиш учун уларнинг мос элементлари кушилади.

$$\text{Масалан } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ b & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+0 & 3+2 \\ a+b & b+d & c+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ a+b & b+d & c+e \end{pmatrix}$$

Тушунарилики $A^{m \times n}$ ва $B^{m \times n}$ матрицаларнинг йиғиндиси ҳам $m \times n$ ўлчовли матрица бўлади, яъни $A^{m \times n} + B^{m \times n} = (A+B)^{m \times n}$.

Матрицаларни қўшиш қуйидаги хоссаларга эга:

- 1) $A+B=B+A$ - коммутативлик, 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ - ассоциативлик,
3) $A+O=O+A=A$, бу ерда O нол матрица.

2. *Матрицани сонга кўпайтириш.* Матрицани сонга кўпайтириш учун унинг барча элементлари шу сонга кўпайтирилади, яъни $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

$$\text{Мисол. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ бўлса, у ҳолда } 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 5a_1 & 5a_2 \end{pmatrix} \text{ бўлади.}$$

Хоссалари:

$$1^\circ. (\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) \quad 2^\circ. (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$3^\circ. 1 \cdot A = A. \quad 4^\circ. \lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$$

3. *Матрицани матрицага кўпайтириш.* Матрицаларни кўпайтириш сатрларни устунларга кўпайтириш қондаси бўйича амалга оширилади. Унинг маънога эга бўлиши учун биринчи матрицанинг устунлари сони 2-матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши керак, яъни $A^{m \times n} \cdot B^{n \times k} = C^{m \times k}$. $C^{m \times k}$ матрицанинг c_{ij} элементи A даги i -сатр элементларини B даги j -устун элементларига мос равишда кўпайтириб қўшиш натижасида ҳосил бўлади, яъни агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

бўлса,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,k) \quad (2)$$

бўлади.

Бошқача қилиб айтганда $C=(c_{ij})$ матрицанинг элементлари (2)-формула билан аниқланади.

Хоссалари: 1). $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - матрицаларнинг кўпайтмаси ассоциатив;

$$2). A \cdot E = E \cdot A = A$$

3). $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ - матрицаларнинг кўпайтмаси қўшишга $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ нисбатан дистрибутивдир.

Бу хоссаларнинг ўринли эканлигини чап ва ўнг томондаги ихтиёрий элементларини ҳисоблаб кўриш йўли билан матрицаларнинг тенглик

тушунчасидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Уни биз талабаларга мустақил иш сифатида таклиф қиламиз.

Мисоллар:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{ёнақаранг} \quad AB = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ёнақаранг} \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ёнақаранг}.$$

Бу мисолдан кўринадикки, матрицаларни кўпайтириш коммутативлик хоссасига бўйсинмайди, яъни $AB \neq BA$.

3). (Мустақил топшириқ). Барча n -тартибли матрицалар тўпламининг аддитив Абел группаси бўлишини исботланг.

Матрицанинг ранги. A матрицанинг сатрлари m та n ўлчовли горизонтал $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ (3) векторларни, устунлари эса n та m ўлчовли вертикал векторларни ташкил қилади. Уларни горизонтал векторлардан фарқ қилиш учун $\mathbf{a}^1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $\mathbf{a}^2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, $\dots$, $\mathbf{a}^n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ (4) кўринишда белгилаймиз.

1-таъриф. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ векторлар системасининг ранги A матрицанинг сатрлар бўйича ранги, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ векторлар системасининг рангига эса A матрицанинг устунлар бўйича ранги дейилади.

1-теорема. Элементар алмаштиришлар матрицанинг рангини ўзгартирмайди.

Исботи. Элементар алмаштиришларни сатрларга тадбиқ этайлик.

1). Матрицанинг ихтиёрий иккита сатрининг ўрнини алмаштириш (3) системадаги иккита векторнинг ўрнини алмаштиришга мос келади, шунинг учун ҳам унинг ранги ўзгармайди.

2). Матрицанинг бирор сатри (масалан i -сатр) $\alpha \neq 0$ сонига кўпайтирилган бўлса, у ҳолда (3) системадаги $\mathbf{a}_i$ -вектор шу α сонига кўпайтирилган бўлади, яъни

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \alpha \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \quad (5)$$

система ҳосил бўлади. Фараз этайлик, (3) чизиқли эркли, лекин (5) эса чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ сонлари мавжуд бўлиб $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_i (\alpha \mathbf{a}_i) + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = 0$ тенглик бажарилади. $\alpha_i \neq 0$ деб олишимиз мумкин (акс ҳолда (3)-система чизиқли боғланган бўлар эди). $\alpha \neq 0$ бўлганлиги сабабли $\alpha_i \alpha \neq 0$, демак, $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + (\alpha_i \alpha) \mathbf{a}_i + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = 0$, яъни (3)-система чизиқли боғланган, бу

карама-каршилиқ (5)-системанинг чизиқли боғланмаган эканлигини кўрсатади.

3). Матрицанинг j -сатрининг элементлари α га ($\alpha \neq 0$) кўпайтирилиб i -сатрининг мос элементларига қўшилган бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m \quad (6)$$

векторлар системасига эга бўламиз. Бизга маълумки, (3) ва (6) векторлар системалари эквивалент, яъни уларнинг ранглари тенг.

2-теорема. Ҳар бир матрицанинг сатр бўйича ранги устун бўйича рангига тенг.

Исботи. Биз (3) ва (4) системаларнинг ранглари тенг эканлигини исботлаймиз. (3) нинг базиси

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \quad (7)$$

(4) нинг базиси эса

$$\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^s \quad (8)$$

бўлсин. Биз $r=s$ эканлигини исботлаймиз. Фараз этайлик $r < s$ бўлсин. У ҳолда (7) системадаги $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}, \dots, a_{in})$, ($i=1, 2, \dots, r$) векторларнинг биринчи s та координаталаридан фойдаланиб ушбу s та номаълумли r та тенгламадан тузилган бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}x_s = 0$, ($i=1, 2, \dots, r$) ни тузиб оламиз. $r < s$ бўлгани учун бу ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$) нолмас ечимга эга, яъни

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{is}\alpha_s = 0, \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (9)$$

Бу ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$) ечим (3) даги қолган векторлар $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \dots, \mathbf{a}_m$ ларнинг биринчи s та координаталардан тузилган

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{ks}x_s = 0, \quad (k=r+1, r+2, \dots, m)$$

системани ҳам қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \dots, \mathbf{a}_m$ векторларнинг ҳар бири (7) системадаги векторлар орқали (базис орқали) чизиқли ифодаланади: $\mathbf{a}_k = \mu_{1k}\mathbf{a}_1 + \mu_{2k}\mathbf{a}_2 + \dots + \mu_{rk}\mathbf{a}_r$, ($k=r+1, r+2, \dots, m$). Бундан ($a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$) = ($\mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \dots + \mu_{rk}a_{r1}, \dots, \mu_{1k}a_{1n} + \mu_{2k}a_{2n} + \dots + \mu_{rk}a_{rn}$) ёки

$$a_{k1} = \mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \dots + \mu_{rk}a_{r1},$$

.....

$$a_{ks} = \mu_{1k}a_{1s} + \mu_{2k}a_{2s} + \dots + \mu_{rk}a_{rs},$$

$$a_{k,s+1} = \mu_{1k}a_{1,s+1} + \mu_{2k}a_{2,s+1} + \dots + \mu_{rk}a_{r,s+1}, \quad (k=r+1, r+2, \dots, n)$$

.....

$$a_{kn} = \mu_{1k}a_{1n} + \mu_{2k}a_{2n} + \dots + \mu_{rk}a_{rn}.$$

Бу тенгликларнинг биринчи s тасини мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ларга кўпайтириб қўшсак (9) га асосан $a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{ks}\alpha_s = \alpha_1(\mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \dots + \mu_{rk}a_{r1}) + \alpha_2(\mu_{1k}a_{12} + \mu_{2k}a_{22} + \dots + \mu_{rk}a_{r2}) + \dots + \alpha_s(\mu_{1k}a_{1s} + \mu_{2k}a_{2s} + \dots + \mu_{rk}a_{rs})$

$_{rk} a_{rs}) + \mu_{1k}(a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots + a_{1s} \alpha_s) + \mu_{2k}(a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \dots + a_{2s} \alpha_s) + \dots + \mu_{rk}(a_{r1} \alpha_1 + a_{r2} \alpha_2 + \dots + a_{rs} \alpha_s) + \mu_{1k} \cdot 0 + \mu_{2k} \cdot 0 + \dots + \mu_{rk} \cdot 0 = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Демак,

$$a_{k1} \alpha_1 + a_{k2} \alpha_2 + \dots + a_{ks} \alpha_s = 0 \quad (10)$$

(9) ва (10) дан (8) нинг чизикли боғланган эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам $\alpha_1 \mathbf{a}^1 + \alpha_2 \mathbf{a}^2 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}^s = \alpha_1 (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \alpha_2 (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + \alpha_s (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ms}) = (a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots + a_{1s} \alpha_s, a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \dots + a_{2s} \alpha_s, \dots, a_{m1} \alpha_1 + a_{m2} \alpha_2 + \dots + a_{ms} \alpha_s) = (0, 0, \dots, 0)$. Бу эса (8) нинг чизикли эркин эканлигига зиддир. Демак, $r < s$ бўла олмас экан. $r > s$ ҳол ҳам худди шундай қаралади. Шунинг учун ҳам $r = s$.

Чизикли тенгламалар системасининг ранги деб унинг матрицасининг рангига айтилади.

Агар нолмас сатрга эга бўлган матрицадаги k -нолмас сатрдаги биринчи нолдан фарқли элемент $(k-1)$ -нолмас сатрдаги биринчи нолдан фарқли элементдан ўнг томонда турса бундай матрицага *поғонали матрица* дейилади. Тушунарлики матрицанинг ранги унинг поғонали кўринишидаги нолдан фарқли сатрлар сонига тенг.

Мисол. Ушбу матрицанинг рангини ҳисобланг

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги $r(A) = 3$.

Энди ушбу асосий теоремани осонгина исботлаш мумкин.

Теорема (Кроникер-Капелли). Чизикли тенгламалар системасининг ечимга эга бўлиши учун унинг асосий матрицасининг ранги кенгайтирилган матрицасининг рангига тенг бўлиши зарур ва етарли.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- 1). Матрицанинг ранги деб нимага айтилади?
- 2). Чизикли тенгламалар системасининг ранги деб нимага айтилади ?
- 3). Матрицанинг сатрлар (устунлар) бўйича ранги деб нимага айтилади?
- 4). Матрицадаги элементар алмаштиришлар унинг рангига қандай таъсир қилади?

16- МАЪРУЗА

МАВЗУ: ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ

НОМАЉЛУМЛАРИНИ КЕТМА-КЕТ ЙЎҚОТИШ УСУЛИ (ГАУСС УСУЛИ) БИЛАН ЕЧИШ

УСУЛИ) БИЛАН ЕЧИШ

1. Чизикли тенгламалар системасида ягона ечимга эга бўлган ҳол.
2. Чизикли тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлган ҳол.
3. Мисоллар.
4. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган чизикли тенгламалар системаси ечимлари орасидаги боғланиш.

АДАБИЁТЛАР [1 , 2 , 3].

Ушбу *texn* -чизиқли тенгламалар системаси (ч.т.с.)

[illegible]

берилган бўлсин. Уни Гаусс усули билан ечиш учун унинг ихтиёрий бир (масалан биринчи) тенгламасини ёзиб оламиз ва қолган тенгламаларнинг барчасидан бирорта номаълумни (масалан, x_1 ни) йўқотамиз. У ҳолда ушбу системага эга бўламиз:

[illegible]

Тушунарлики (2) система (1) га эквивалент. Энди (2) системадаги 1-тенгламани ва қолган тенгламалардан яна бирортасини (масалан 2-тенгламани) ёзиб оламиз, қолган барча тенгламалардан x_2 ни йўқотамиз. Шу жараёни давом эттирамиз. Бунда агар $0=0$ кўринишдаги тенглама ҳосил бўлса, уни тушириб қолдирамиз. Агарда, $0=b$ ($b \neq 0$) кўринишдаги тенглик ҳосил бўлса, у ҳолда жараёни тўхтатамиз ва система ечимга эга бўлмайди. Шу жараёни k марта такрорлагандан кейин қуйидаги икки ҳолатдан бири юз беради:

- 1).Охирги тенгламада фақат 1 та номаълум қатнашиб қолади;
- 2).Охирги тенгламада 1 тадан ортиқ номаълум қатнашади ва улардан бирортасини ҳам энди йўқотиш имконияти йўқ.

1-ҳолда охири тенгламадан x_n ни топиб оламиз ва уни охиригидан олдинги тенгламага қўйиб x_{n-1} ни топамиз. x_n ва x_{n-1} ларни топилган

қийматларини ундан олдинги тенгламага қўйиб x_{n-2} ни топамиз ва ҳ.к. $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ ларнинг топилган қийматини системадаги биринчи тенгламага қўйиб x_1 ни топамиз.

Шундай қилиб, бу ҳолда берилган система ягона $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ ечимга эга.

Мисол. 1).
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -12 \end{cases}$$
 системани Гаусс усули билан ечинг.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 7x_2 - 12x_3 = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ -8x_3 = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Жавоби: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

Иккинчи ҳолда системанинг охириги тенгламасида фақат бирта номаълумни чап томонда (масалан, x_k ни) қолдириб бошқа номаълумларни $x_{k+1}, \dots, x_n$ ларни эркин ўзгарувчи сифатида қабул қилиб ҳосил бўлган системани 1-ҳолдаги сингари йўл билан ечиб $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни топамиз ва бу ҳолда топилган ечим $x_{k+1}, \dots, x_n$ эркин ўзгарувчи (параметр)ларга боғлиқ бўлади ва уларга ихтиёрий қийматлар бериб системанинг чексиз кўп ечимини топамиз.

Мисол.2).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ -3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 = 4x_3 - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + 2 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3 - 2 \end{cases} \quad x_1 =$$

$$2 + x_2 - x_3 = 2 + (4/3)x_3 - 2 - x_3 = x_3/3.$$

Жавоби: $x_1 = x_3/3; x_2 = 2 + (4/3)x_3; x_3 \in \mathbb{R}$.

Бу алмаштиришларни тўғри бурчакли матрицалар ёрдамида ҳам бажариш мумкин.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Фараз этайлик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (1)$$

система билан бирга унга мос

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (2)$$

бир жинсли чизикли тенгламалар системаси ҳам берилган бўлсин.

1°. (2) системанинг иккита $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ечимларининг йиғиндиси ва айирмаси ҳам шу системанинг ечими бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$ бўлса, у ҳолда $a_{i1}(\alpha_1 \pm \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 \pm \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n \pm \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \pm (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = 0 \pm 0 = 0$.

2°. (2)-системанинг ихтиёрий ечимининг $\lambda \in R$ сонига кўпайтмаси яна шу системанинг ечими бўлади.

Исботи. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (2)-системанинг ечими бўлсин, яъни $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$, у ҳолда $a_{i1}(\lambda\alpha_1) + a_{i2}(\lambda\alpha_2) + \dots + a_{in}(\lambda\alpha_n) + \lambda(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Бу икки хоссадан келиб чиқадики, (2) системанинг ечимлар тўплами W арифметик фазо бўлар экан (n ўлчовли арифметик фазо мавзусига қаранг), яъни W , n ўлчовли арифметик фазонинг қисм фазоси экан.

3°. (1) нинг ихтиёрий $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ечимларининг айирмаси (2) системанинг ечими бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = b_i$ бўлса, у ҳолда $a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i - b_i = 0$ бўлади.

4°. (1) нинг ихтиёрий ечими $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ билан (2) нинг ечими $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ларнинг йиғиндиси ва айирмаси ҳам (1) нинг ечими бўлади.

Исботи. $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$ бўлса, у ҳолда $a_{i1}(\alpha_1 \pm \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 \pm \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n \pm \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \pm (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i \pm 0 = b_i$ бўлади.

3° ва 4° -хоссалардан келиб чиқадики, (1)- системанинг ечимларини ҳосил қилиш учун унинг бирта $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ечимига (2) - системанинг ечимини қўшиш кифоя, яъни агар (1) нинг ечимлари тўпламини H десак, $H + x_0 = W$. Демак, H тўплам W қисм фазони x_0 векторга силжитиш натижасида ҳосил бўлади. Бундай ҳолда (1) нинг ечимлари тўплами *чизикли кўпхиллилик* ташкил этади дейилади.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Ч.т.с.ни Гаусс усули билан ечишни гапириб беринг.
2. Қандай ҳолда ч.т.с. ечимга эга эмас.
3. Қандай ҳолда чизикли тенгламалар системаси ягона ечимга эга?
4. Қандай ҳолда ч.т.с. чексиз кўп ечимга эга?
5. Бир жинсли чизикли тенгламалар системанинг ечимлари фазоси деганда нимани тушунаси?

6. Чизикли кўпхиллилик нима?

17-МАЪРУЗА

МАВЗУ: 2 ВА 3- ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР. ЎРНИГА
ҚЎЙИШЛАР ГРУППАСИ.

Р Е Ж А:

1. Икки номаълумли чизикли тенгламалар системаси ва иккинчи тартибли детерминантлар.
 2. Зномаълумли чизикли тенгламалар системаси ва 3-тартибли детерминантлар.
 3. Ўрнига қўйишлар группаси.
 4. Жуфт ва тоқ ўрнига қўйишлар.
- АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

1. Фараз этайлик бизга

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) & \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{array} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & & \end{array}$$

чизикли тенгламалар системаси берилган бўлсин. (1) ни x_1 ва x_2 га нисбатан

ечсак
$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (2)$$

лар ҳосил қиламиз. Бу ерда махраж

$$d = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

кўринишда белгиланиб (3)га *иккинчи тартибли детерминант* дейилади. Демак, иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун унинг бош диагоналидаги элементлари кўпайтмасидан иккинчи диагоналидаги элементлари кўпайтмасини айириш керак экан. (2) нинг суратидаги ифодаларни ҳам иккинчи тартибли детерминант кўринишда ёзиш мумкин:

$$d_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Булардан фойдаланиб (2) ни

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} \quad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (4) га (1) системани ечиш учун Крамер формуласи дейилади.

Мисол.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{системани Крамер формулалари ёрдамида ечинг.}$$

Бу ерда $d = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Демак, (4) га кўра $x_1 = \frac{-5}{-5} = 1$ ва $x_2 = \frac{-5}{-5} = 1$.

Жавоби: $x_1 = 1$ ва $x_2 = 1$.

2.Энди фараз қилайлик 3 та номаълумли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин. (5)ни x_1, x_2, x_3 ларга нисбатан ечамиз. Бунинг учун унинг биринчи тенгламасини $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{31}$ га иккинчисини $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ га ва учинчисини $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ га кўпайтириб қўшамиз. У ҳолда

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (6)$$

Бунинг махражини

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

деб белгилаб олсак, (7) га 3- тартибли детерминант дейилади. (7) нинг чап томонидан уни ҳисоблаш қоидаси келиб чиқади:

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}^+ + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}^- \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^+ + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^-$$

Осонлик билан кўриш мумкинки, агар (7) да 1-устун элементлари a_{11}, a_{21}, a_{31} ни мос равишда b_1, b_2, b_3 лар (озод ҳадлар устуни) билан алмаштирсак (6) нинг сурати ҳосил бўлади, яъни (7) дан

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}.$$

(8)

(7) ва (8) га асосан (6) ни қуйидагича ёза оламиз: $x_1 = \frac{d_1}{d}$. Худди шунингдек, (5) ни x_2 ва x_3 га нисбатан ечсак $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $x_3 = \frac{d_3}{d}$ ларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Мисолар. 1). $d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 3 - 0 - 12 - 2 = -7.$

2). $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 + 0 + 1 - 1 = 2, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 = -2,$$

Шун

инг учун ҳам $x_1 = \frac{4}{4} = 1, y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, z = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$

Жавоби: $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$

3.Ўрнига қўйишлар группаси. Фараз этайлик, бизга n та элементга эга бўлган A тўплам берилган бўлсин. Бу тўплам элементларини $1, 2, \dots, n$ лар билан номерлаб чиқайлик. У ҳолда A ни $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ деб ёзиш мумкин.

1-таъриф. A тўпламни ўзига биектив (ўзаро бир қийматли) акслантиришга ўрнига қўйиш дейилади.

Тушунарлики қаралаётган тўпламда $n!$ та ўрнига қўйиш мавжуд. Бундан кейин биз s ўрнига қўйишда $1, 2, 3, \dots, n$ элементларнинг мос равишда $i_1, i_2, \dots, i_n$ элементларга ўтишини

$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ кўринишда белгилаймиз. Агар $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ва $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ ўрнига қўйишлар берилган бўлиб $i_k = j_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

тенглик бажарилса s ва t ўрнига қўйишларга тенг дейилади ва $s = t$

кўринишда ёзилади. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ га айний ўрнига қўйиш дейилади.

n та элементдан тузилган A тўпламдаги барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_n билан белгилаймиз. S_n даги иккита s ва t ўрнига қўйишнинг кўпайтмаси деб аввало s кейин эса t ўрнига қўйишни бажариш натижасида ҳосил бўлган ўрнига қўйишга айтишга келишамиз.

Масалан: $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ бўлсин.

У ҳолда $st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ бўлади.

1 - теорема. $\langle S_n ; \cdot \rangle$ - мультипликатив группа бўлади.

Исботи. Группа таърифидаги шартларнинг бажарилишини текширайлик.

1) $\forall s, t \in S_n \Rightarrow s \cdot t \in S_n$ бажарилади;

2) $\forall s, t, l \in S_n \Rightarrow s \cdot (t \cdot l) = (s \cdot t) \cdot l$ бўлади, чунки агар $s = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $l = \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$

бўлса, бу тенглик $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$ бўлиб, унинг чап томони

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix}$ ўнг томони ҳам $\left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix}$

дан иборат.

3) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ бўлиб $\forall s \in S_n$ учун $s \cdot e = s$ бажарилади.

4) $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ га тескариси $s^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ бўлади, чунки $s \cdot s^{-1} = e$.

Шундай қилиб группа таърифидаги барча шартлар бажарилади. $\langle S_n ; \cdot \rangle$ — группага n -тартибли симметрик группа деб юритилади.

Агар $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ўрнига қўйишда $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_n$ бўлса, у

инверсияга эга эмас дейилади, акс ҳолда инверсияга эга дейилади.

Масалан: $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ да инверсиялар сони 1 учун 1 та, 2 учун 2 та, 3 учун 1 та, 4 учун 0 та, жами 4 та инверсия бор.

Берилган ўрнига қўйишдаги инверсиялар сони жуфт бўлса, унга жуфт ўрнига қўйиш, агарда инверсиялар сони тоқ бўлса, у ҳолда тоқ ўрнига қўйиш дейилади.

Ўрнига қўйишдаги исталган 2 та элементнинг ўрнини алмаштиришга *транспозиция* дейилади.

Агар i_k ва i_l ларнинг ўрни алмаштирилса, у (i_k, i_l) кўринишда белгиланади.

2-теорема. Транспозиция натижасида ўрнига қўйишларнинг жуфт-тоқлиги ўзгаради.

Исботи.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_l & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_l & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

транспозиция натижасида ҳосил қилинган бўлсин. У ҳолда i_k ни i_l дан олдинга ўтказиш учун $l-(k-1)$ та инверсия бажариш керак. Ундан кейин i_l ни жойига (яъни i_{l-1} дан кейинги жойга) қўйиш учун $l-(k-1)-1$ та инверсия, жами $l-k+1+l-k=2(l-k)+1$ та инверсия бажариш керак.

3-теорема. $n!$ та ўрнига қўйишларнинг ярми $\frac{n!}{2}$ таси жуфт ва қолган ярми $\frac{n!}{2}$ таси тоқ бўлади.

Исботи. Агар $n!$ та ўрнига қўйишлардаги жуфтлари сони p , тоқлари сони q билан белгиласак, $p+q=n!$ бўлади. Энди агар барча $n!$ та ўрнига қўйишларда транспозиция бажарсак, у ҳолда жуфтлар тоқларга, тоқлари эса жуфтларга ўтади, яъни $p=q$, демак, $p = \frac{n!}{2}$ ва $q = \frac{n!}{2}$.

4-теорема. Жуфт ўрнига қўйишлар тўплами S_n^* кўпайтиришга нисбатан группа ҳосил қилади.

Бунинг исботи қатъий келтиришни талабаларга ҳавола қиламиз.

$\langle S_n^* \rangle$ да бирлик элемент айний қўйиш бўлади. t га тескариси $t^{-1} \in S_n^*$ бўлади.

Натижа. Тоқ ўрнига қўйишлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группа бўлмайди.

Бунда бирлик элемент мавжуд эмас.

$$\text{Мисол. } S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ни қарайлик. $S_3 = \{ f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \}$ деб белгилаб олсак, қуйидаги жадвалга эга бўламиз. Бу жадвалда бирлик элемент $e = f_0$, f_1 га тескариси f_2 ; f_2 га тескариси f_1 ; f_3 га тескариси f_3 ; f_4 га тескариси f_4 ; f_5 га тескариси f_5 .

Шунингдек группанинг барча шартлари бажарилади, яъни $\langle S_3 ; \cdot \rangle$ - мультипликатив группа бўлади.

$\cdot$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_4
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Иккинчи тартибли детерминант қандай ҳисобланади ?
2. Ушбу детерминант $\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$ нинг қиймати нимага тенг ?
3. Учинчи тартибли детерминант қандай ҳисобланади ?
4. Ушбу $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ детерминантнинг қиймати нимага тенг ?
5. Ўрнига қўйишлар группаси $\langle S_n ; \cdot \rangle$ нинг тартиби нечага тенг ?
6. Ўрнига қўйишларнинг инверсияси деганда нимани тушунасиз ?
7. Тоқ (жуфт) ўрнига қўйиш деб нимага айтилади ?
8. Транспозиция нима ва у қандай хоссага эга ?
9. n та элементдан тузилган жуфт ўрнига қўйишлар тўплами мультипликатив группа бўладими ?
10. n элементдан тузилган тоқ ўрнига қўйишлар тўплами группа бўладими ?

18- МАЪРУЗА

МАВЗУ: n - ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

РЕЖА:

1. n - тартибли детерминантнинг таърифи.
2. Хоссалари.
3. Мисоллар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3] .

1. n - тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицанинг детерминанти деб ушбу $n!$ та ҳадлар йиғиндисидан тузилган

$$\sum_{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \quad (1)$$

ифодага айтилади. Бунда ҳар бир ҳадда n та кўпайтувчи бўлиб, ҳар бир сатр ва устундан биртадан элемент қатнашади. γ эса $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ ўрнига кўйишдаги инверсиялар сонини билдиради. Демак, (1) даги $\frac{n!}{2}$ та ҳад мусбат ишора билан ва қолган $\frac{n!}{2}$ та ҳад эса манфий ишора билан олинади. Берилган A матрицанинг детерминанти қуйидагича белгиданади:

$$\det A = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

Мисол. 1). $a_{12} \ a_{23} \ a_{31} \ a_{52} \ a_{45} \ a_{54}$ кўпайтма 6-тартибли детерминант ёйилмасида қатнашадими? Индекслар ҳосил қилган ўрнига кўйиш $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ дан иборат. Бундан кўринадики иккинчи устундан иккита элемент олинган. Шунинг учун ҳам у 6- тартибли детерминант таркибида қатнашмайди.

2). $a_{12} \ a_{23} \ a_{31}$ ҳад 3- тартибли детерминантда қандай ишора билан қатнашади ?

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ўрнига кўйишдаги инверсиялар сонини аниқлайлик: 1 учун 2 та, 2 учун 0 та, 3 учун ҳам 0 та жами 3 та инверсия бор. Шунинг учун ҳам бу ҳад учинчи тартибли детерминант таркибига минус ишора билан киради.

Детерминантнинг сатрларини устунлар устунларини эса сатрлар қилиб ёзишга уни *транспонирлаш* дейилади.

2. Хоссалари.

1°. Детерминантни транспонирласак унинг қиймати ўзгармайди. Ҳақиқатан ҳам

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \quad (1)$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \quad (2)$$

(1) ва (2) нинг ўнг томонидаги йиғинди барча $n!$ та ўрнига қўйишлар бўйича олингани учун ўнг томонлари тенг. Демак чап томонлари ҳам тенг бўлиши керак, яъни $D = D'$.

2°. Детерминантда исталган 2 та сатрининг ўрнини алмаштирсак, унинг ишораси ўзгаради.

Исботи. Агарда D детерминантда k ва l сатрларнинг ўринларини алмаштирсак D' детерминант ҳосил бўлади.

Бу ерда

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & \cdots & i_l & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ ни } t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_l & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

дан бирта транспозиция ёрдамида ҳосил килиш мумкин. Транспозиция ток ўрнига қўйиш бўлганлиги сабабли (1) ва (2) даги ҳадларнинг барчаси тескари ишора билан олинади, яъни $D' = -D$.

Натижа. 2 та бир хил сатр (устун) га эга бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг.

3°. Детерминантда бирор сатри (устуни) ноллардан иборат бўлса, ундай детерминантнинг қиймати нолга тенг.

4°. Агар детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари умумий кўпайтувчи m га эга бўлса, уни детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Исботи.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ma_{i1} & ma_{i2} & \cdots & ma_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots (ma_{ik_i}) \cdots a_{nk_n} =$$

$$= m \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1- *натижа*. Детерминантни бирор s сонига кўпайтириш учун унинг бирор сатри (устуни) ни шу сонга кўпайтириш кифоя.

2- *натижа*. Детерминантнинг бирор сатри (устуни) иккинчи бир сатрига пропорционал бўлса, унинг қиймати 0 га тенг.

5°. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари 2 та элементнинг йиғиндиси кўринишда ифодаланган бўлса, уни 2 та n -тартибли детерминант йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots (a_{ik_i} + b_{ik_i}) \cdots a_{nk_n} =$$

Исботи
$$= \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} + \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots b_{ik_i} \cdots a_{nk_n} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Натижа. Детерминантнинг бирорта сатри (устуни) ни бирор сонга кўпайтириб иккинчи бир сатри (устуни) нинг мос элементларига қўшак детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

5°. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари қолган сатр (устун) ларининг чизикли комбинациясидан иборат бўлса, унинг қиймати нолга тенг.

Исботи юқоридаги хоссалардан бевосита келиб чиқади.

$$\text{Мисол. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Бунда охирги устунидан } 4 \text{ ни}$$

чиқардик. Натижада 1 ва 4 устунлари бир хил бўлиб қолди.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- n - тартибли детерминант деб нимага айтилади?
- n - тартибли детерминантнинг ҳар бир ҳади қандай қоида бўйича ҳосил қилинади?
- n - тартибли детерминантдаги ҳадларнинг ишораси қандай аниқланади?
- Детерминантнинг қиймати қандай алмаштиришлар бажарса ўзгармайди?
- Қандай ҳолларда детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади?

19- МАЪРУЗА

МАВЗУ: МИНОРЛАР ВА АЛГЕБРАИК ТЎЛДИРУВЧИЛАР

РЕЖА:

- n -тартибли детерминантнинг ($k \leq n$) k -тартибли минори ва қўшимча минор.
- Алгебраик тўлдирувчи.
- Детерминантларни k -тартибли минорлар бўйича ёйиш. Лаплас теоремаси.
- Мисоллар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

Тартиби 3 дан юқори бўлган детерминантларни ҳисоблаш учун тайин бир формула мавжуд эмас. Уларни кўпчилик ҳолларда тартиби пасайтириб ҳисобланади. Бунинг учун эса бизга минор ва алгебраик тўлдирувчи тушунчалари керак бўлади.

Фараз қилайлик n -тартибли D детерминант берилган бўлсин. Ундаги k та сатр ва k та устунини ажратиб уларнинг кесишиш жойидаги элементларидан детерминантдаги тартибда олиб k -тартибли детерминант тузсак бу детерминантга D детерминантнинг k -тартибли минори дейилади. Шу ажратилган сатр ва устунларни ўчириб, қолган жойдаги элементлардан детерминантдаги тартибда олиб $n-k$ -тартибли детерминант тузсак унга k -тартибли минорга мос қўшимча минор дейилади. Масалан: ушбу

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{array} &
 \begin{array}{ccc} a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{array} &
 \begin{array}{ccc} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}
 \end{array}$$

n -тартибли детерминантдаги $1, 2, \dots, k$ сатрлари ва $1, 2, \dots, k$ устунларини ажратиб k -тартибли M минор ва $n-k$ -тартибли қўшимча M' минор тузсак у

қуйидагича

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad M' = \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & a_{k+1k+2} & \cdots & a_{k+1n} \\ a_{k+2k+1} & a_{k+2k+2} & \cdots & a_{k+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk+1} & a_{nk+2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

бўлади.

Агар $k=1$ бўлса, бирта элементга (масалан, $a_{ij}=M$ га) эга бўламиз. Унинг қўшимча минорини M'_{ij} билан белгилаймиз. Қўшимча минор M' нинг ўчирилган сатрлари $i_1, i_2, \dots, i_k$ ва устунлар $j_1, j_2, \dots, j_k$ номерларининг (-1) нинг даражасидаги йиғиндисига кўпайтмасига M минорга мос алгебраик тўлдирувчи дейилади. Агар биз M га мос алгебраик тўлдирувчини A билан белгиласак, у ҳолда $A = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} M'$ бўлади. Хусусий ҳолда $M=a_{ij}$ бўлса, $A_{ij}=(-1)^{i+j} M'_{ij}$ бўлади.

Мисол.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{нинг} \quad M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \text{ минорига мос алгебраик}$$

тўлдирувчиси қуйидагича ёзилади: $A = (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$. Шу

детерминантдаги a_{43} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{ij} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

дан иборат бўлади.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. D детерминантдаги M минорнинг исталган ҳадини унга мос алгебраик тўлдирувчининг исталган ҳадига кўпайтирсак, D детерминантнинг ҳади ҳосил бўлади, яъни MA нинг исталган ҳади D нинг ҳадидан иборатдир.

Исботи. қуйидаги икки ҳолни қараймиз.

1⁰-ҳол. M минор D детерминантнинг юқори чап бурчагида, қўшимча минор эса қуйи ўнг бурчагида жойлашган бўлсин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Бу ҳолда M нинг алгебраик тўлдирувчиси $A = (-1)^{1+2+\dots+k+1+2+\dots+k} M' = M'$.

M нинг исталган ҳади

$$(-1)^p \alpha_{1\beta_1} \alpha_{2\beta_2} \cdots \alpha_{1k} \quad (1) \quad \text{кўринишга эга. Бунда}$$

$$p = \text{inv.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_k \end{pmatrix}$$

$A = M'$ нинг исталган ҳади эса

$$(-1)^q a_{k+1\beta_{k+1}} a_{k+2\beta_{k+2}} \cdots a_{n\beta_n} \quad (2)$$

кўринишга эга. Бунда

$$q = \text{inv.} \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & k+3 & \dots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \beta_{k+3} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

(1) ва (2) нинг кўпайтмаси

$$(-1)^{p+q} \alpha_{1\beta_1} \alpha_{2\beta_2} \cdots \alpha_{1k} \alpha_{k+1\beta_{k+1}} \alpha_{k+2\beta_{k+2}} \cdots \alpha_{n\beta_n} \quad (3)$$

D нинг ҳади бўлади. Чунки унда n та кўпайтувчи бўлиб D нинг ҳар бир сатри

ва устунидан биртадан элемент олинган ва $\text{inv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = p+q$,

чунки $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ лар $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \beta_{k+3}, \dots, \beta_n$ лардан кичик бўлгани учун улар билан инверсия ташкил қилмайди.

2⁰-ҳол. M минор D нинг $k_1, k_2, \dots, k_r$ сатрлари ва $l_1, l_2, \dots, l_r$ устунларини ишғол қилсин ва $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, $l_1 < l_2 < \dots < l_r$ деб оламиз. Бу ҳолни 1-ҳолга келтирамиз. Бунинг учун k_1 -сатрни ўзидан олдинги (k_1-1) -та сатрдан олдинга ўтказиб 1-ўринга, k_2 -сатрни ўзидан олдинги (k_2-2) сатрдан олдинга ўтказиб 2-ўринга ва ҳоказо k_r -сатрни ўзидан олдинги $(k_r - r)$ та сатрдан олдинга ўтказиб r -ўрин-га ёзамиз. Устунлар билан ҳам худди шу ишни бажарсак, M минор D' нинг юқори чап бурчагида жойлашади ва детерминантнинг хоссаларига кўра

$D =$

$$(-1)^{(k_1-1)+(k_2-2)+\dots+(k_r-r)+(l_1-1)+(l_2-2)+\dots+(l_r-r)} D' =$$

$$= (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_r+l_1+l_2+\dots+l_r}$$

D' (3)

1-ҳолга кўра M нинг исталган ҳадининг M' нинг ихтиёрий ҳадига кўпайтмаси D' нинг ҳадини беради. Энди M нинг ихтиёрий ҳадини

$$(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_r+l_1+l_2+\dots+l_r} M' = A \quad \text{нинг}$$

исталган ҳадига кўпайтирсак, (3)га кўра D нинг ҳадини беради.

2 -теорема (Лаплас теоремаси). n -тартибли D детерминантнинг r та сатр (устун) ларидан барча r -тартибли минорларни тўзиб ва уларни мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтириб қўшсак, йиғинди D детерминантнинг қийматига тенг бўлади.

Исботи. Шу r - тартибли минорлар $M_1, M_2, \dots, M_t$ ва уларга мос алгебраик тўлдирувчилар $A_1, A_2, \dots, A_t$ бўлсин. У ҳолда

$$M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t = D \quad (4)$$

эканлигини исботлаймиз. 1-теоремага кўра M_i нинг исталган ҳадини A_i нинг исталган ҳадига кўпайтирсак D нинг ҳади ҳосил бўлади. $M_i A_i$ ва $M_j A_j$ лар ($i \neq j$) умумий ҳадга эга эмас, чунки M_i ва M_j лар камида бирта устун элементлари билан фарқ қилади.

Энди (4) нинг чап томонида $n!$ та ҳад бор эканлигини кўрсатсак теорема исботланган бўлади. Детерминантнинг таърифига кўра M_i минорда (r -тартибли детерминант) $r!$ та A_i да эса $(n-r)!$ та ҳад бор. У ҳолда $M_i A_i$ да $r!(n-r)!$ та ҳад бўлади. Демак, (4) нинг чап томонида $r! (n-r)! t$ та ҳад бўлади. Энди t ни

аниқлайлик: $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Шунинг учун ҳам $r! (n-r)! \left\{ \frac{n!}{r!(n-r)!} \right\} = n!$. (4) нинг

чап томонида $n!$ та ҳад бор экан.

Мисол.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{детерминантни биринчи 2 та сатри бўйича ҳисобланг.}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot (-2) + (1+3)(-1)(-1-1) + (2-3)2 + 2(-1) + 2(-1)2 + (-2-1)1 = 12 + 8 - 2 - 2 - 4 - 3 = 9$$

$$2). \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 - 3 - 0 = 4.$$

Энди D ни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблайлик.

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 + 2) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 3 + 4 - 3 = 4$$

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМДАШ УЧУН САВОЛЛАР .

- а). k - тартибли минор деб нимага айтилади ?
- б). Қўшимча минор деб нимага айтилади ?
- в). Алгебраик тўлдирувчи деб нимага айтилади ?

$$г). \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантдаги a_{32} элементга мос алгебраик тўлдирувчини топинг.

20 - МАЪРУЗА

МАВЗУ: ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ САТР ЁКИ УСТУН ЭЛЕМЕНТЛАРИ БЎЙИЧА ЁЙИШ.

РЕЖА:

1. Детерминантларни сатр элементлари бўйича ёйиш формуласи. Мисоллар.
 2. Детерминантларни сатр элементлари бўйича ёйиш. Мисоллар.
 3. Крамер формулалари.
 4. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолмас ечимга эга бўлиш шарти.
- АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

1. Агар Лаплас теоремасида $r=1$ деб олиб i - сатрни ажратсак (4) формула қуйидаги кўринишга келади.

$$1\text{- натижа.} \quad D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} . \quad (1)$$

(1) га D детерминантни i -сатр элементлари бўйича ёйиш формуласи дейилади.

Агарда Лаплас теоремасида $r=1$ деб олиб бирта j - устунини ажратиб олсак ушбу натижага эга бўламиз.

$$2\text{- натижа.} \quad D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} . \quad (2)$$

(2) га D ни j - устун элементлари бўйича ёйиш формуласи дейилади.

$$\underline{\text{Мисол.}} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ни аввал 1-сатр элементлари бўйича ёйиб, кейин эса 1- устун элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг.

Аввало D ни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблайлик:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 0 + 4 - 0 - 2 + 0 - 2(0 + 0 + 0 + 0 - 2 - 0) + 3(1 - 2 - 0 - 0 + 1) + 0 = 2 + 4 - 6 = 0$$

Энди D ни 1- устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаймиз:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + 4 - 0 - 2 + 0 - (0 + 0 + 6 + 0 - 3 - 0) + (4 + 0 - 6 - 0 - 0 + 3) + 0 = 2 - 3 + 1 = 0$$

Агарда D нинг i - сатридаги фақат бирта элемент, масалан $a_{il} \neq 0$, бўлиб қолган элементлар нолга тенг бўлса, у ҳолда D нинг қиймати шу элемент билан унга мос алгебраик тўлдирувчи A_{il} нинг кўпайтмасига тенг бўлади.

$$\text{Мисол 1)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 4 + 0 - 0 + 40 + 1 = 25$$

2).

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

формулаларга *Крамер формулалари* дейилади. (7) нинг (5)-чизикли тенгламалар системасини қаноатлантиришини бевосита унинг исталган тенгламасига қўйиб текшириб кўриш мумкин.

(7)да $D \neq 0$ бўлиши керак, агар $D=0$ бўлса, (5) ечиш учун Крамер формуласидан фойдаланиб бўлмайди. (Бу ҳолда (5) нинг ранги $r < n$ топилади ва (5)да $n-r$ та номаълумларни ўнг томонга ўтказиб кейин қўлласа бўлади).

Мисол. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

чизикли тенгламалар системасини Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг.

Аввало D, D_1, D_2, D_3 ларни ҳисоблайлик.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 1 + 18 - 12 + 3 - 4 = 12, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 24 - 16 + 9 + 2 = 12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 6 - 9 + 1 + 16 = 24, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 1 - 27 + 12 + 12 + 6 = 36.$$

Бу топилган қийматларни (7) формулаларга олиб бориб қўйсак

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{12}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{24}{12}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{36}{12} = 3.$$

берилган системанинг ечимларига эга бўламиз.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз:

Теорема. n та номаълумли n та бир жинсли чизикли тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг номаълумлари олдидаги коэффицентлардан тузилган матрицанинг детерминанти нолга тенг ($D = \det A = 0$) бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. а). Фараз этайлик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

система нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Бу охирги системани қуйидагича ёза оламиз:

$$(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n; a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n; \dots;$$

$$a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

ёки

$$\alpha_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) + \alpha_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) + \dots + \alpha_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) = 0. \quad (10)$$

(10) дан кўринадики D нинг устунлари чизиқли боғланган ва демак $D=0$.

б). $D=0$ бўлса, у ҳолда детерминантларнинг хоссаларига кўра унинг устунлари чизиқли боғланган. Демак, ҳеч бўлмаса бирортаси нолдан фарқли бўлган $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлари мавжуд бўлиб (10) бажарилади. (10) дан эса (9) келиб чиқади, яъни (8)-система нолдан фарқли ечимга эга.

Мисол. $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$

$$x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ чизиқли тенгламалар системасини қарайлик..

$$\text{Бунда } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 16 - 15 - 12 + 1 + 40 = 43 - 43 = 0$$

бўлганлиги учун система нолдан фарқли ечимга эга. Уни Гаусс усули билан

$$\text{ечамиз: } x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \quad x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \quad x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

$$3x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$7x_2 + 14x_3 = 0 \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 = -2x_3, \quad x_1 = 5x_3 + x_2 = 5x_3 - 2x_3 = 3x_3.$$

Жавоби: $x_1 = 3x_3, x_2 = -2x_3, x_3 \in R$.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. n - тартибли D детерминантни i - сатр элементлари бўйича ёйиш формуласини ёзинг.
2. n - тартибли D детерминантни j - устун элементлари бўйича ёйиш формуласини ёзинг.
3. Агар n - тартибли детерминантдаги бирор сатр элементларини бошқа бир сатрининг алгебраик тўлдирувчиларига мос равишда кўпайтириб ҳосил бўлган кўпайтмаларни қўшсак йиғинди нимага тенг бўлади?
4. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр элементларини уларга мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтириб ҳосил бўлган кўпайтмаларни қўшсак йиғинди нимага тенг бўлади?
5. Крамер формуласини ёзинг.
6. Агар Крамер формуласи $x_j = \frac{D_j}{D}$, да $D = 0$ бўлиб қолса қандай ҳолат юз беради?
7. $x_j = \frac{D_j}{D}$, Крамер формуласидаги D_j ва D лар қандай боғланган ?

МАВЗУ: МАТРИЦАНИНГ РАНГИНИ УНИНГ МИНОРЛАРИДАН ФОЙДАЛАНИБ ҲИСОБЛАШ

РЕЖА:

1. Матрицанинг ранги ва унинг нолдан фарқли минорларининг тартиби орасидаги боғланиш.
 2. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти.
 3. Мисоллар. (Детерминантларни ҳисоблаш).
- АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3]

1. Фараз этайлик бизга $m \times n$ -тартибли $A=(a_{ij})$ матрица берилган бўлсин. Биз бундан аввал матрицанинг рангини элементар алмаштиришлардан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин эканлигини курган эдик. Энди ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. $A=(a_{ij})$ матрицанинг ранги унинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиблисининг тартибига тенг.

Исботи. A матрицада нолдан фарқли энг юқори k -тартибли минор M унинг юқори чап бурчагида жойлашган бўлсин:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Акс ҳолда A нинг сатр ва устунларининг ўринларини ўзаро алмаштириб шу ҳолга олиб келиш мумкин. Бу билан унинг ранги ўзгармайди.

A нинг s - сатри ($s=1,2,3,\dots,m$) биринчи k та сатрлар орқали чизиқли ифодаланади. Ушбу $(k+1)$ - тартибли детерминант Δ_i ни қараймиз:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} & a_{si} \end{vmatrix}$$

Бу ерда $i=1, 2, \dots, n$; $s= k+1, k+2, \dots, m$. Барча $i= 1, 2, \dots, n$ лар учун $\Delta_i = 0$, чунки $i \leq k$ да Δ_i да иккита бир хил устун мавжуд бўлади. $k+1 \leq i$ да эса Δ_i

A нинг $(k+1)$ - тартибли минорини ифодалайди, шунинг учун ҳам $\Delta_i = 0$. Δ_i ни охирги устун элементлари бўйича ёйсақ

$$a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \dots + a_{ri} A_{ri} + a_{si} A_{si} = 0, \quad (1)$$

Бунда $A = (-1)^{k+1+k+1} M = M = 0$ бўлгани учун (1) ни a_{si} га нисбатан ечсак

$a_{si} = \beta_{1i} a_{1i} + \beta_{2i} a_{2i} + \dots + \beta_{ri} a_{ri}$, ($i=1, 2, \dots, n$; $s = k+1, k+2, \dots, m$) га эга бўламиз. Бундан кўринадикки A нинг s -сатри биринчи k та сатрлари орқали чизикли ифодаланади. Демак, A матрицанинг ранги (сатрлар бўйича ранги) k га тенг.

Натижа. Детерминантнинг нолга тенг бўлиши учун унинг сатрлари (устунлари) чизикли боғланган бўлиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини ҳисобланг.

Аввало шуни таъкидлаш керакки, матрицанинг рангини минорлардан фойдаланиб ҳисоблашда фақат бир-бирининг ичига жойлашган минорларини текшириш кифоя.

Бизнинг мисолимизда $M_1 = 1 \neq 0$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0, \quad M_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \neq 0$$

Демак, $r(A) = 4$.

2. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти

2-теорема. A ва B n -тартибли квадрат матрицалар кўпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг.

Исботи. Агар $A = E$ - бирлик матрица бўлса $/E \cdot B / = 1 \cdot /B / = /E / \cdot /B /$. яъни бу ҳолда теорема ўринли.

2-теоремани исботлашдан олдин ушбу леммани исботлаймиз.

Лемма. Агар A'' матрица A' матрицадан бирта элементар сатр алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда

$$/A' \cdot B / = /A' / \cdot /B / \quad (2)$$

дан

$$/A'' \cdot B / = /A'' / \cdot /B / \quad (3)$$

келиб чиқади.

Исботи. Фараз этайлик A'' матрица A' матрицадан қуйидаги элементар алмаштиришларнинг бири орқали ҳосил қилинган бўлсин:

- a) сатрларининг ўринларини алмаштириш;
- б) ихтиёрий сатрини нолдан фарқли k сонига кўпайтириш;
- b) бирор сатрини ихтиёрий сонга кўпайтириб иккинчи бир сатрига қўшиш.

Матрицаларни кўпайтириш қондасига асосан $A'' \cdot B$ матрица $A' \cdot B$ матрицадан мос элементар алмаштириш натижасида ҳосил бўлади.

a) бажарилган бўлса, $/A''/ = -/A'/$ ва

$$/A'' \cdot B/ = -/A' \cdot B/; \quad (4)$$

b) бажарилган бўлса,

$$/A''/ = k \cdot /A'/, \quad /A'' \cdot B/ = k \cdot /A' \cdot B/; \quad (5)$$

c) бажарилган бўлса, у ҳолда

$$/A''/ = /A'/, \quad /A'' \cdot B/ = /A' \cdot B/ \quad (6)$$

(4), (5) ва (6) дан (2) га асосан (3) келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,

$$(4) \text{ ва } (2) \text{ дан } /A'' \cdot B/ = -/A' \cdot B/ = -/A'/ \cdot /B/ = /A''/ \cdot /B/;$$

$$(5) \text{ ва } (2) \text{ дан эса } /A'' \cdot B/ = k \cdot /A' \cdot B/ = k \cdot /A'/ \cdot /B/ = /A''/ \cdot /B/;$$

$$(6) \text{ ва } (2) \text{ дан } /A'' \cdot B/ = /A' \cdot B/ = /A'/ \cdot /B/ = /A''/ \cdot /B/.$$

Шу билан лемма тўла исбот бўлди.

Агар A матрица a), б), c) элементар алмаштиришлар ёрдамида E бирлик матрицадан ҳосил қилинган бўлса, леммага асосан $/E \cdot B/ = /E/ \cdot /B/$ дан $/A \cdot B/ =$

$/A/ \cdot /B/$ келиб чиқади. Бунда $/A/ \neq 0$, яъни A - хосмас матрица.

$/A/ \neq 0$ бўлса, у ҳолда AB матрицанинг сатрлари ҳам чизиқли боғланган бўлади, яъни $/A \cdot B/ \neq 0$ ва $/A \cdot B/ = /A/ \cdot /B/$ тенглик бажарилади.

3. Детерминантларни ҳисоблаш.

1- мисол. Ушбу $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

детерминантда x қатнашган ҳаднинг коэффицентини ҳисобланг:

Детерминантни охириги устун элементлари бўйича ёйсақ фақат 1-сатр, 4-устунини ўчирганда x қатнашади. Шунинг учун ҳам x қатнашган ҳаднинг коэффицентини қуйидагига тенг бўлади:

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0+1+0+1-1+0) = -1$$

2 - мисол . Ушбу Вандермонд детерминантининг қийматини

$$\text{ҳисобланг: } V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Бунинг учун V_n нинг ҳар бир устунини $(-a_1)$ кўпайтириб ўзидан олдингисига қўшамиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^2(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot V_{n-1} = \dots = \\ &= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq j < i} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

3-мисол. Ушбу детерминантни учбурчак кўринишга келтириб ҳисобланг:

$$D = \begin{vmatrix} a-x & a & a & \dots & a \\ a & a-x & a & \dots & a \\ a & a & a-x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a-x \end{vmatrix}$$

Охирги устунини (-1) га кўпайтириб барча устунларига қўшиб чиқамиз:

$$D = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & -x & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & -x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a-x \end{vmatrix}$$

Энди барча сатрларини охирги сатрига қўшамиз:

$$D = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & a \\ 0 & -x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & na-x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1}(na-x).$$

4- мисол. Берилган D детерминантни чизикли кўпайтувчиларини ажратиш усули билан ҳисобланг:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x \end{vmatrix} \quad (1)$$

D нинг ёйилмаси n -даражали кўпхад бўлиб у $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ да нолга айланади. Шунинг учун ҳам

$$D = c (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (2)$$

деб олсак бўлади. Энди номаълум коэффициент c ни аниқлаймиз. (1) нинг бошхад x^{n-1} , демак $c=1$.

Шундай қилиб $D = (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$.

5-мисол. (Рекурент формулалардан фойдаланиш).

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

ни ҳисобланг.

D_{n+1} ни охирги сатр элементлари бўйича ёйамиз:

$$D_{n+1} = (-1)^{n+2} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix} + x D_n = a_n (-1)^{n+2+n} + x D_n = a_n + x(a_{n-1} + x D_{n-1}) =$$

$$= a_n + a_{n-1} x + x^2 D_{n-1}.$$

Бу ерда $D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$ $D_1 = a_0$.

Шунинг учун ҳам

$$D_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Матрицанинг ранги нимага тенг ?
2. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти ҳақидаги теоремани айтинг.
3. n ($n > 3$) тартибли детерминантларни ҳисоблаш усуллари ҳақида гапириб беринг.

22 - МАЪРУЗА

МАВЗУ : ТЕСКАРИ МАТРИЦА

РЕЖА:

1. Детерминантларни кўпайтириш.
2. Тескариланувчи матрицалар .
3. Тескари матрицани ҳисоблаш усуллари.
4. Чизиқли тенгламалар системасини матрицавий кўринишда ёзиш ва ечиш.
5. Мисоллар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3]

1. *Детерминантларни кўпайтириш.* Ушбу теорема ўринли:

Теорема. Иккита n - тартибли

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ва} \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг кўпайтмасини яна n - тартибли детерминант

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

шаклида ифодалаш мумкин бўлиб, бунда c_{ij} элемент D_1 даги i - сатр элементлари $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ларни D_2 даги j - устун элементлари $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ га мос равишда кўпайтириб натижани қўшиш билан ҳосил қилинади, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (1)$$

Исботи. Ушбу $2n$ -тартибли детерминантни қараймиз:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар D да биринчи n та сатрини ажратиб n - тартибли минорлар тузсак фақат биртаси D_1 га тенг, қолганлари эса нолга тенг бўлади. D_1 нинг алгебраик тўлдирувчиси D_2 га тенг бўлади. Демак,

$$D = D_1 \cdot D_2. \quad (2)$$

Энди D даги 1- устунни b_{11} га 2 - устунни b_{21} га , . . . , n - устунни b_{n1} га кўпайтириб $n+1$ - устунига қўшамиз. Сўнгра 1- устунни b_{12} га , 2- устунини b_{22} га ва ҳ.к. n - устунини b_{n2} га кўпайтириб $n+2$ - устунига қўшамиз ва ҳ.к. давом этиб 1- устунини b_{1n} га , иккинчи устунини b_{2n} га ва ҳ.к. n - устунини b_{nn} га кўпайтириб $2n$ - устунига қўшамиз. У ҳолда ушбуга эга бўламиз (детерминантнинг хоссаларига кўра $D \neq 0$ нинг қиймати ўзгармайди):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Агар D нинг охириги n та сатрини ажратиб шу сатрлардаги n - тартибли минорлар бўйича ёйсак $D = MA$ га эга бўламиз. (Чунки фақат

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n \neq 0$$

бўлиб қолган барча n - тартибли минорлар нолга тенг). Бу ерда

$$A = (-1)^{(n+1)+(n+2)+\dots+2n+1+2+\dots+n} \cdot D = (-1)^{n+2(1+2+\dots+n)} \cdot D = (-1)^n \cdot D.$$

□□□□

$$D = (-1)^n (-1)^n D = (-1)^{2n} D = D. \quad (3)$$

Демак, (2) ва (3) дан $D_1 \cdot D_2 = D$.

Детерминантларни транспонирласак унинг қиймати ўзгармагани учун детерминантларни кўпайтириш учун ҳам ҳозирги кўриб ўтилган “сатрларини устунларига“, бўйича қондасидан ташқари “сатрларини сатрларига“, “устунларини сатрларига“, ”устунларини устунларига“ қондаларини қўллаш мумкин.

Натижа. A ва B квадрат матрицалар кўпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг .

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (4)$$

Умуман

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|; \quad |A|^k = |A^k|.$$

2. Тескари матрица .

Фараз этайлик F майдонда n -тартибли A матрица берилган бўлсин. Агар

$$A \cdot B = B \cdot A = E \quad (1)$$

шартни қаноатлантирувчи B n -тартибли квадрат матрица мавжуд бўлса, бу матрицага A га тескари матрица дейилади, ўз навбатида A ҳам B га тескари матрица бўлади . (1) дан

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det E = 1$$

бўлгани учун $\det A \neq 0$ ва $\det B \neq 0$ деган хулосага келамиз, яъни фақат хосмас матрицалар учун тескариси мавжуд бўлар экан . Бундан кейин A га тескари матрицани A^{-1} билан белгилаймиз.

Берилган матрицага тескари матрицани топишнинг 2 хил усули бор:

- 1). Детерминантлардан фойдаланиб ;
- 2). Матрицадаги элементар алмаштиришлардан фойдаланиб топиш .

Аввало 1- усулни қараб чиқайлик . Фараз этайлик

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. У ҳолда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица A га тескари матрица бўлади. Бу ердаги A_{ij} A матрицадаги a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси. Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \cdots + a_{1n}A_{n1} & a_{11}A_{12} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{n2} & \cdots & a_{11}A_{1n} + a_{12}A_{2n} + \cdots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{2n}A_{n1} & a_{21}A_{12} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{n2} & \cdots & a_{21}A_{1n} + a_{22}A_{2n} + \cdots + a_{2n}A_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1} & a_{n1}A_{12} + a_{n2}A_{22} + \cdots + a_{nn}A_{n2} & \cdots & a_{n1}A_{1n} + a_{n2}A_{2n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

берилган бўлсин. Агар (1) нинг асосий матричасини A , ноъмаълумлар устунини X ва овоз хадлар устунини b билан белгиласак, яъни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

деб белгилаб олсак, (1) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$AX = b. \quad (2)$$

Бунга (1)-чизиқли тенгламалар системасининг матрицавий кўринишда ёзилиши дейилади.

Агар $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда A га тескари A^{-1} матрица мавжуд бўлади ва $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b$ ёки $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot b$, бу ерда $A^{-1} \cdot A = E$ ва $E \cdot X = X$ бўлгани учун

$$X = A^{-1} \cdot b \quad (3)$$

тенгликка эга бўламиз.

Мисол. Ушбу тенгламалар системасини матрицавий кўринишда ёзинг ва ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

деб олсак $AX=b$ ҳосил бўлади. Энди A^{-1} ни топайлик.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Демак, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$.

МАВЗУНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тескари матрица деб қандай матрицага айтилади?
2. қандай матрицалар учун тескариси мавжуд бўлади?
3. Берилган матрицага тескари матрица мавжуд бўлса уни топишнинг қандай усуллари биласиз?
4. Матрицанинг рангини топишнинг қандай усуллари биласиз?
5. Ушбу матрицавий тенглама $AX=B$ дан номаълум матрица X ни топинг.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси. Тошкент. Ўзбекистон. 2001 йил. 304 бет.
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент. Ўқитувчи . 1975йил.
3. Назаров Р.Н., Тошпулатов Б.Т., Дусимбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I, II- қисм. Тошкент .Ўқитувчи . 1993, 1995йил.
4. Искандаров Р.И. Олий алгебра. I,II-қисм.“Ўрта ва олий мактаб”. Тошкент.1963.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М. “Наука”. 1971.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.”Наука”. 1977.
7. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. Учебник . М. “Наука”. 1984.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения .М. “Наука”.1983.
9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.М.”Наука”.1983.
10. Фадеев Д.К. , Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М. “Наука”. 1985.
- 11 А.И. Кострикина.. Сборник задач по алгебре. Под редакцией М. “Наука”.1987.
12. Исроилов М., Солеев А. Сонлар назариясига кириш. Тошкент. Фан. 2003
13. Аллаков И. Алгебра ва алгебраик системалар. Термиз. 1987.

