

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT ARXITEKTURA-QURULISH INSTITUTI

**A. Abduraximov , S.T.Mirzaev,
Sh.R.Xurramov, K.Q.Turg'unov**

**INTEGRAL HISOB KURSINI PEDAGOGIK
TEXNOLOGIYALAR ASOSIDA O'QITISH**

TOSHKENT -2007

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzopdi, dotsent Buvaev Q. T. O'zMU),
pedagogika fanlari nomzopdi, dotsent Abdullaeva Sh.Sh. (TAQI).
Mas'ul muxarrir: katta o'qituvchi N.A. Niyazova (TAQI)

Abduraximov A., Mirzaev S.T., Xurramov Sh.R., Turg'unov K. Integral hisob kursini pedagogik texnologiyalar asosida o'qitish. Oliy texnika o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma.-T.: TAQI,2007, 87 -bet.

Mazkur o'quv qo'llanma oliy texnika o'quv yurtlari uchun oliy matematika fanining "Integral hisob" bo'limi dasturiga moslab yozilgan. Har bir mavzu uchun pedagogik-texnologik xarita, tarqatma materiallar, didaktik vositalar va ilg'or pedagogik texnologiyalar asosida ishlangan dars loyihalari keltirilgan.

Qo'llanma oliy texnika o'quv yurtlari talabalari va professor o'qituvchilar uchun mo'ljallangan.

MUNDARIJA

S'OZ BOSHI.....	4
I. ANIQMAS INTEGRAL	7
1.1 Aniqmas integralning ta'rifi va xossalari, integrallashning asosiy usullari.....	7
1.2. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash.....	19
1.3. Ba'zi trigonometrik ifodalarni integrallash.....	29
1.4. Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash.....	37
II. ANIQ INTEGRAL.....	46
2.1. Aniq integralning ta'rifi va xossalari	46
2.2. Aniq integralni hisoblash.....	54
2.3. Xosmas integrallar.....	61
2.4. Aniq integralning tadbiqi.....	71
ADABIYOTLAR.....	87

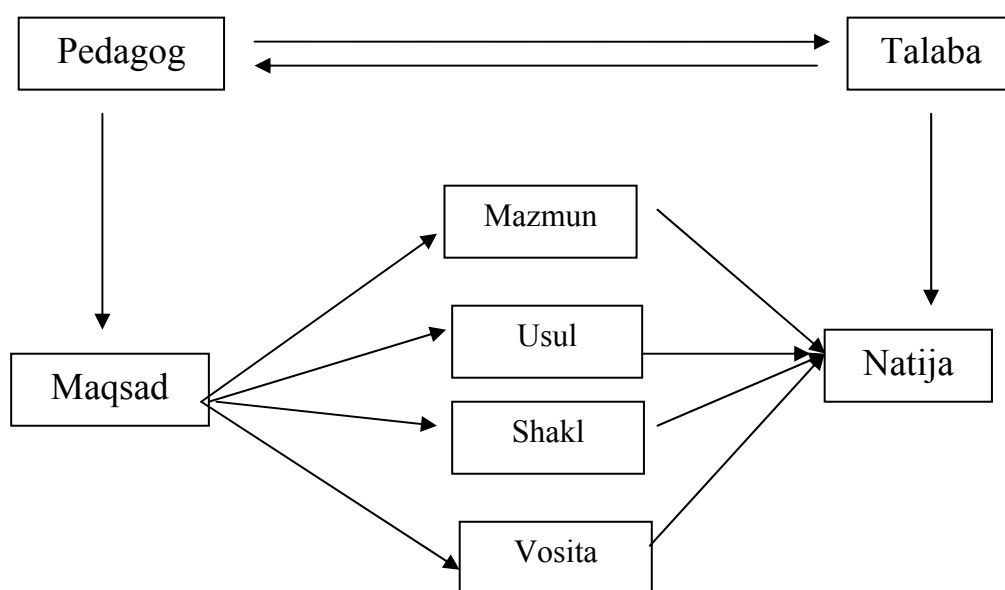
S'OZ BOSHI

O'zbekiston Respublikasining "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"da ta'lim jarayoniga interfaol usullar, innovatsion, pedagogik va axborot texnologiyalarni olib kirish zarurligi uqtirilgan.

Innovatsion texnologiyalar pedagog va talaba faoliyatiga yangilik va o'zgartirishlar kirituvchi pedagogik jarayon bo'lib, asosan interfaol usullar orqali amalga oshiriladi. Interfaol usullar bu jamoa bo'lib fikrlashga olib keluvchi pedagogik ta'sir etish usullari hisoblanadi.

Pedagogik texnologiyaning asosiy negizi – bu pedagog va talabaning belgilangan maqsaddan kafolatlangan natijaga erishishlari uchun hamkorligidir. Bunda, qo'llaniladigan har bir ta'lim texnologiyasi pedagog va talabaning har ikkalasi uchun ijobiy natija berishi, y'ani o'quv jarayonida talaba mustaqil fikrlay olishi, ijodiy ishlay bilishi, izlanishi, tahlil eta olishi, o'zi xulosa qila olishi, o'ziga va guruhga, guruh o'z navbatida talabaga baho bera olishi, pedagog esa talabaning bunday faoliyatlari uchun imkoniyat va sharoit yarata bilishi lozim.

Shunday qilib, ta'lim jarayonidagi pedagogik texnologiya -bu yakka tartibdagi jarayon bo'lib, u talabaning extiyojidan kelib chiqqan holda bir maqsadga yo'naltirilgan, oldindan loyihalashtirilgan va kafolatlangan natija berishga qaratilgan pedagogik jarayondir (1-shakl) [].



1-shakl

Chizmadan ko'rinadiki, maqsadni amalga oshishi va kafolatlangan natijaga erishish, ham pedagog, ham talabaning hamkorlikdagi faoliyati hamda ular qo'ygan maqsad, tanlangan mazmun, usul, shakl, vositaga, ya'ni texnologiyaga bog'liq.

Bundan tashqari pedagogik texnologiyada o'qitish qayta takrorlanadigan jarayon hisoblanadi.

Amaliyotda qayta takrorlanuvchi o'qitish sikli quyida keltirilgan sakkizta bosqichdan iborat bo'ladi.

Birinchi bosqichda fan o'qitilishining umumiy maqsadi belgilanadi. O'quv rejasidagi fanlarni o'qitish ularning maqsadini aniq ifodalashdan boshlanadi.

Ikkinchi bosqichda fanning mavzulari o'quv maqsadining toifalarini aniqlaydi. Mashg'ulotlar boshida o'quv maqsadi, uning boshqa mavzular va mutaxassisning kelgusidagi amaliy faoliyati bilan aloqadorligi talabalar ongiga yetkaziladi.

Uchunchi bosqichda har qaysi mavzudagi tayanch so'z va iboralar belgilanadi. Bunda modul tizimidan foydalanish qo'l keladi. Ta'kidlash joizki, modul o'quv materialini mantiqan tugallangan birligi bo'lib, fanning tayanch iboralarini o'rganishga yo'naltirilgan tamoyillarga asoslangan.

To'rtinchi bosqichda har qaysi tayanch so'z va iboraning o'quv maqsadi B.Blum pedagogik taksonomiyasi bo'yicha belgilanadi, hamda o'quv maqsadlarining toifasi aniqlanadi qayta takrorlanadigan o'qitish siklida ushbu bosqich eng muhim hisoblanadi.

Beshinchi bosqichda har qaysi tayanch so'z va iboralar uchun tashxisiy testlar tuziladi. Yaratilgan testlar talabalarining bilim olganlik darajasini baholash uchun qulay hisoblanadi va shuning uchun joriy nazoratda ulardan foydalanish maqsadga muvofiq keladi.

Oltinchisi o'qitish bosqichidir. Bunda, dars jarayoni uchun mo'ljallangan o'quv materialini bayon etish va uni ishlab chiqish shaxsga yo'naltirilgan shaklda amalga oshiriladi.

Yettinchi bosqich test sinovlar o'tkazish bosqichi hisoblanadi. Test sinovlar

o'tkazish teskari aloqa vazifasini bajaradi. Uni amalga oshirishdan maqsad o'quv jarayoniga tuzatishlar va o'zgartirishlar kiritishni aniqlashdir. Pedagogik texnologiyada testlar ishlab chiqarishdagi o'lchov asbobi vazifasini bajaradi.

Sakkizinchi bosqichda o'quv maqsadlariga erishganlik holati baholanadi. Baholash ishlari joriy test sinovlar o'tkazish yo'li bilan amalga oshirilishi mumkin. Baholash natijasiga ko'ra talabalar guruhi darsni to'la o'zlashtirgan va to'la o'zlashtirmagan talabalarga bo'linishi mumkin. Ikkinchi tabaqadagi talabalar, pedagog rahbarligida o'sha materialni o'rganishni davom ettirishlari kerak bo'ladi.

Amaliyotda mahsulot ishlab chiqarish jarayoni texnologik xaritalar asosida amalga oshiriladi. Shunga mos holda yangi pedagogik texnologiyalar o'quv jarayoniga pedagogik-texnologik xaritalar orqali qo'llaniladi.

Pedagogik-texnologik xaritani tuzish oson emas, chunki buning uchun pedagog pedagogika, psixologiya, xususiy uslubiyat, pedagogik va axborot texnologiyalaridan xabardor bo'lishi, shuningdek juda ko'p usul va uslublarni bilishi kerak bo'ladi. Har bir darsning rang-barang, qiziqarli bo'lishi avvaldan puxta o'ylab tuzilgan pedagogik-texnologik xaritaga bog'liq.

Pedagogik-texnologik xaritani qay shakl va ko'rinishda tuzish pedagogning tajribasi, qo'ygan maqsadi va ixtiyoriga bog'liq. Pedagogik-texnologik xarita qanday tuzilgan bo'lmasin, unda dars jarayoni yaxlit holda aks etgan bo'lishi hamda aniq belgilangan maqsad, vazifa va kafolatlangan natija, dars jarayonini tashkil etish texnologiyasi o'z ifodasini to'liq topgan bo'lishi kerak.

Ushbu o'quv qo'llanmada oliy matematika fanining "Integral hisob" kursini ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalangan holda o'qitish jarayonini loyihalashnirish yo'l-yo'riqlari ko'rsatilgan. Unda har bir mavzuni o'qitishning pedagogik-texnologik xaritasi berilgan, dars loyihasini amalga oshirish bo'yicha tarqatma materiallar, didaktik vositalar, o'qitish usullari hamda test topshiriqlari keltirilgan. Buning natijasida "Integral hisob" kursining maqsadlaridan boshlab, bu maqsadlarga erishish natijalarini ko'rish imkoniyati yaratilgan.

1.ANIQMAS INTEGRAL

1.1 Aniqmas integralning ta'rifi va xossalari, integrallashning asosiy usullari

a) *Mavzuning pedagogik-texnologik xaritasi*

Ushbu mavzusining pedagogik –texnologik xaritasi X.A.Akromov va boshqalar tomonidan yaratilgan pedagogik –texnologik xarita shaklidan foydalanilgan holda ishlab chiqildi (1-jadval) [].

Fanning umumiy maqsadi	Mavzuning tartibi	Mavzu nomi	Mavzuga oid o'quv-ilmii adabiyotlar	Ma'ruzaga ajratilgan vaqt	Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt	Mavzuning o'quv maqsadi	Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi	Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadli	Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi	O'qitish texnologiyalari	Didaktik vositalar	Test topshiriqlari	O'zlashtirish darajasi
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №1

3.Mavzu nomi: Aniqmas integralning ta'rifi va xossalari, integrallashning asosiy usullari

4.Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

- 4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.
- 4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.
- 4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 4 soat

7.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarda aniqmas integral ta'rifi va xossalarini, integrallar jadvalini, integrallashning asosiy usullarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

8. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

- 8.1 Boshlang'ich funksiya
- 8.2 Aniqmas integral
- 8.3 Aniqmas integralning xossalari
- 8.4 Aniqmas integral jadvali
- 8.5 Bevocita integrallash
- 8.6 O'zgaruvchilarni almashtirish
- 8.7 Bo'laklab integrallash

9. Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

- 9.1 Boshlang'ich funksiya iborasini tushuntirish
- 9.2 Aniqmas integral iborasini tushuntirish
- 9.3 Aniqmas integralning xossalarini o'rgatish
- 9.4 Aniqmas integral jadvali bilan tanishtirish
- 9.5 Bevocita integrallash usulini o'rgatish
- 9.6 O'zgaruvchilarni almashtirish usulini o'rgatish
- 9.7 Bo'laklab integrallash usulini o'rgatish

10. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

- 10.1 Boshlang'ich funksiya- bilish
- 10.2 Aniqmas integral- bilish
- 10.3 Aniqmas integralning xossalari - qo'llash
- 10.4 Aniqmas integral jadvali- tushinish
- 10.5 Bevocita integrallash- qo'llash
- 10.6 O'zgaruvchilarni almashtirish- qo'llash
- 10.5 Bo'laklab integrallash - qo'llash.

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, "Bumerang" usuli

12. Didaktik vositalar - Proektor, slaydlar (№1- Integralning xossalari, №2-Integrallar jadvali, , № 3-Bo'laklab integrallash), tarqatma matnlar (№ 1- Aniqmas integralning ta'rifi , xossalari va jadvali, № 2- Bevosita integrallash, №3- O'zgaruvchini almashtirish, №4- Bo'laklab integrallash).

13. Test topshiriqlari:

1. $y = \sin x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = \operatorname{tg} x + C$ B) $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$ C) $F(x) = \cos x + C$ D) $F(x) = -\cos x + C$

2. $y = x^3$ funksiyaning (2.4) nuqtadan otuvchi boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = \frac{x^4}{4}$ B) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1$ C) $F(x) = \frac{x^4}{4 \ln a} + 2$ D) $F(x) = x^4 - 12$

3. Funksiyalardan qaysi biri uchun $F(x) = \frac{a^{2x}}{2} + C$ boshlang'ich funksiya bo'ladi?

A) $f(x) = a^x$ B) $f(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ C) $f(x) = a^{2x}$ D) $f(x) = 2a^x$

4. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich bo'lsa $f(x)$ ning aniqmas integralini aniqlang

A) $\int f(x) dx = F(x) + C$ B) $\int f(x) dx = F'(x) + C$
C) $\int f(x) dx = d(F(x)) + C$ D) $\int f(x) dx = 2F(2x) + C$

5. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ning aniqmas integralini toping

A) $\int \operatorname{tg} x dx = \ln |\operatorname{ctg} x| + C$ B) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\sin x| + C$
C) $\int \operatorname{tg} x dx = \operatorname{ctg} x + C$ D) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$

6. $\int \frac{dx}{x}$ ni hisoblang

A) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ B) $\int \frac{dx}{x} = \log_a x + C$ C) $\int \frac{dx}{x} = e^x + C$ D) barcha javoblar to'g'ri

7. $\int cf(x) dx$ uchun to'g'ri tenglikni aniqlang

A) $\int cf(x) dx = c^2 \int f(x) dx$ B) $\int cf(x) dx = \frac{1}{c} \int f(x) dx$
C) $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$ D) $\int cf(x) dx = -c^2 \int f(x) dx$

8. $\int (f(x) + g(x)) dx$ uchun to'g'ri tenglikni aniqlang.

A) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
B) $\int (f(x) + g(x)) dx = 2 \int f(x) dx + \frac{1}{2} \int g(x) dx$
C) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ D) To'g'ri javob yoq

9. $\int xf(x) dx = 2x^2 + C$ bo'lsa, $f(x) = ?$

A) 4 B) $2x$ C) 0 D) aniqlab b o'lmaydi

10. Quyidagi jadval integrallardan noto'g'risini ko'rsating

A) $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$

B) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

C) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arcsin x + C$

D) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. Quyidagi jadval integrallardan noto'g'risini ko'rsating

A) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

B) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

C) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

D) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg} x + C$

12. Quyidagi jadval integrallardan noto'g'risini ko'rsating

A) $\int \cos x dx = \sin x + C$

B) $\int \sin x dx = \cos x + C$

C) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

D) $\int e^x dx = e^x + C$

13. $\int (e^x + 4\sqrt[3]{x}) dx = ?$

A) $e^x + \sqrt[3]{x} + C$

B) $e^x + x\sqrt[3]{x} + C$

C) $e^x + 4\sqrt[3]{x} + C$

D) $e^x + 2\sqrt[3]{x} + C$

14. $\int \frac{e^{2x} + 5}{e^x} dx$ ni aniqlang.

A) $e^x - 5xe^{-x} + C$

B) $e^x - \frac{1}{5x}e^{-x} + C$

C) $e^x - 5e^{-x} + C$

D) $e^x + 5e^{-x} + C$

15. $\int (\sqrt{t} + \sqrt{x}) dx = ?$

A) $\frac{2}{3}(t\sqrt{t} - x\sqrt{x}) + C$

B) $\sqrt{t}x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

C) $x\sqrt{x} + C$

D) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C$

16. $\int f(ax) dx$ uchun to'g'ri tenglikni aniqlang.

A) $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$

B) $\int f(ax) dx = F(a+x) + C$

C) $\int f(ax) dx = aF(ax) + C$

D) $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{x}{a}\right) + C$

17. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni toping

A) $x = t^3$

B) $x = t^2 + 1$

C) $x = t^2 - 1$

D) $x = t^2$

18. $\int e^x \sin e^x dx = ?$

A) $\sin e^x + C$

B) $e^x + \cos e^x + C$

C) $e^x(1 + \cos e^x) + C$

D) $-\cos e^x + C$

19. Qaysi bandda bo'laklab integrallash formulas keltirilgan

1) $\int u dv = uv - \int v du$

2) $\int dv = uv - \int du$

$$3) \quad uv = \int uvdu - u \quad 4) \quad \int vdu = uv - \int dv$$

A) 1 B) 2,3 C) 4 D) hech qaysi bandda

20. $\int e^{5x} \sin 3x dx$ nu bo'laklab integrallashda $u(x)$ sifatida qaysi ifodani olgan ma'qul?

A) $5x$ B) $3x$ C) e^{5x} D) e^x

21. $\int (x^2 + 1)e^{2x-1} dx$ nu bo'laklab integrallashda $dv(x)$ sifatida qaysi ifodani olish maqsadga muvofiq?

A) $(x^2 + 1)dx$ B) $(2x-1)dx$ C) $e^{2x-1}dx$ D) $2x dx$

b) Dars jarayoni tafsiloti

Dars yuqorida keltirilgan texnologik xarita asosida amalga oshiriladi.

Dastlab pedagog talabalarga dars mavzusi va maqsadini bayon qiladi. Dars “Bumerang” texnologiyasi bilan o'tkaziladi va 1-sxema asosida to'rt bosqichda amalga oshiriladi.

1. Matnlar bilan dastlabki tanishuv bosqichi

Talabalar to'rtta guruhga ajratiladi. Pedagog har bir guruhga mustaqil o'rganish uchun tarqatma materiallar beradi. Tarqatma materiallar quyidagicha taqsimlanadi:

1-guruhga “Aniqmas integralning ta'rif va xossalari” matni, Aniqmas integralning xossalari keltirilgan slayd, testlar;

2-guruhga “Integrallar jadvali. Bevosita integrallash” matni, Integrallar jadvali keltirilgan slayd, testlar;

3-guruhga “O'zgaruvchini almashtirish” matni, testlar;

4-guruhga “Bo'laklab integrallash” matni, Bo'laklab integrallashga oid slayd, testlar.

Pedagog guruhlarga berilgan tarqatma materiallarni guruh a'zolariga alohida organishlari lozimligini uqtiradi, tayyorgarlik uchun 25 daqiqa vaqt ajratadi.

2. Olgan bilimlarini boshqa talabalarga etkazish bosqichi

Pedagog oldindan tayyorlab qo'yilgan raqamlar yozilgan kichik qog'ozlarni guruh a'zolaridan bittadan topshirishlarini so'raydi. So'ngra, raqamlar bo'yicha talabalardan yangi guruhlar tuzadi. Bunda, har bir yangi guruhda avvalgi guruhlardan bittadan vakillar bo'ladi, ya'ni 4 ta guruhda 4 xil matn o'rganilgan bo'lsa, bu yangi

guruhda har bittasidan bittadan vakil to'planib, umumiy mavzu bo'yicha 4 xil matn birlashadi.

Yangi tuzilgan guruhlarning har bir a'zosi 2 ta vazifa, pedagog va talaba vazifasida faoliyat ko'rsatadi:

- pedagog sifatida o'zi avval o'rgangan materialni gapirib beradi, tushuntiradi, o'zi mustaqil o'rgangan matnning asosiy joylariga barchaning diqqatini jalb qiladi, guruh boshqa a'zolarining tushunish va o'zlashtirish qobiliyatini tekisradi;

- talaba sifatida guruh a'zolarining navbatma-navbat so'zlab, tushuntirayotgan matnlarni eshitadi, tahlil qiladi, fikrlaydi va yodda saqlashga harakat qiladi.

Pedagog bu bosqich uchun 30 daqiqa vaqt beradi.

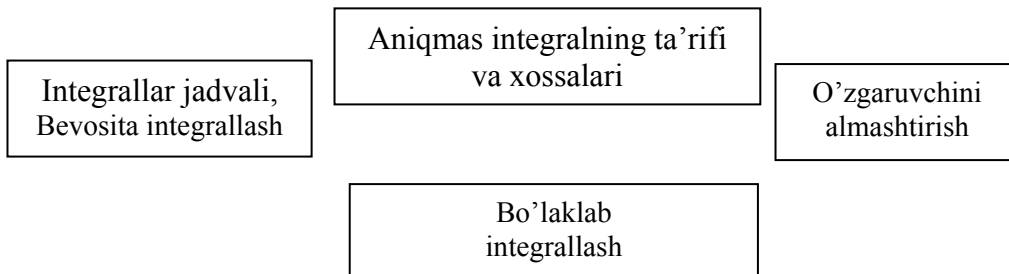
1 -cxema

“Aniqmas integralning ta’rifi va xossalari, integrallashning asosiy usullari”

mavzusi uchun “Bumerang” texnologiyasi

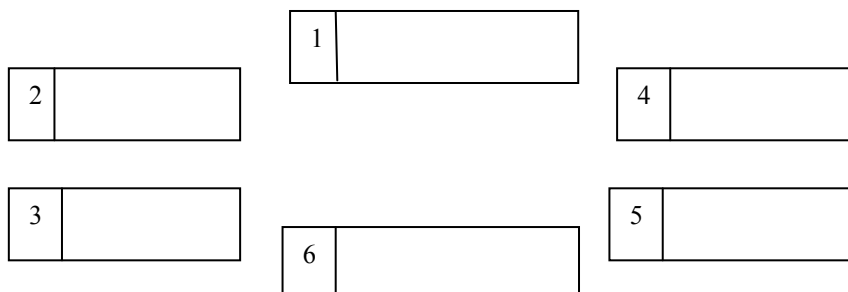
1-bosqich

Matnlar bilan dastlabki tanishuv



2-bosqich

Olgan bilimlarini boshqa talabalarga etkazish



3-bosqich

Savol-javoblar

4-bosqich

Talabalarni baholash

3. Savol-javoblar bosqichi

Savol- javoblar quyidagi tarzda amalga oshiriladi:

- har bir guruh a'zosi bir- birlariga o'z matnlaridan kelib chiqqan holda savollar beradi;
 - talaba hohlagan to'rt matn bo'yicha savollar beradi;
 - pedagog tarqatma materiallar asosida tuzilgan testlarni talabalardan so'raydi.
- Bu bosqich uchun 15 daqiqa vaqt ajratiladi.

4. Talabalarni baholash bosqichi

Berilgan savol va testlarga javob berish tugagach, pedagog doskaga guruhlar tomonidan to'plangan ballarni yozadi, ularni guruh a'zolariga teppa-teng bo'ladi. Har bir talabaga ballar qo'yilgach, pedagog talabalarning faoliyatiga baho beradi, berilgan javoblarga o'z fikrini bildiradi va darsni yakunlaydi.

c) Tarqatma materiallar

Matnlar

1) Aniqmas integralning ta'rifi va xossalari

Berilgan funksiyaning hosilasini topish differensial hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Matematik analiz masalalarining turliligi, uning geometriya, mexanika, fizika va texnikadagi keng miqyosdagi tadbiqui teskari masalani-

berilgan $f(x)$ funksiya uchun hosilasi shu funksiya teng bo'lgan $F(x)$ funksiya topish masalasini echishga olib keladi.

Funksiyaning ma'lum hosilasiga ko'ra uning o'zini tiklash integral hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

1-ta'rif. Agar X oraliqning barcha $x \in X$ nuqtalarida $F'(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan, $F(x) = x^3$ funksiya butun sonlar oqida $f(x) = 3x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki $x \in R$ da $(x^3)' = 3x^2$ tenglik to'g'ri bo'ladi.

Lemma. Qandaydir X oraliqda hosilasi nolga teng bo'lgan funksiya $f(x)$ ning shu oraliqdagi qiymati o'zgarmas bo'ladi.

Isboti. Barcha $x \in X$ da $f'(x) = 0$ bo'lsin. U holda istalgan ikkita $x_1, x_2 \in X$

uchun Lagranj teoremasiga ko'ra $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \xi < x_2$. $f(\xi) = 0$ bo'lganligidan $f(x_2) = f(x_1)$. Bundan, $x \in X$ da $f(x) = C$, (bu erda C - ixtiyoriy o'zgarmas son) kelib chiqadi.

Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi bir qiymatli echilmaydi. Buni quyidagi teoremada qarab chiqamiz.

1-teorema. Agar X oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya uchun shu oraliqda boshqa bir boshlang'ich funksiya $F(x) + C$ (bu erda C - ixtiyoriy o'zgarmas son) ko'rinishda bo'ladi.

Isboti. $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun X oraliqda ixtiyoriy boshlang'ich funksiya, ya'ni $\Phi'(x) = 0$ bo'lsin. U holda istalgan $x \in X$ da

$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Bundan, lemmaga asosan $\Phi(x) - F(x) = C$ yoki $\Phi(x) = F(x) + C$ kelib chiqadi.

Isbotlangan teoremadan, berilgan funksiyaning ikkita boshlang'ich funksiyasi bir-biridan faqat o'zgarmas songa farq qilishi mumkinligi, ya'ni agar $f(x)$ funksiya uchun X oraliqda biror $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, u holda uning qolgan hamma boshlang'ich funksiyalari $F(x) + C$ ko'rinishda ifodalanishi ma'lum bo'ldi.

2-ta'rif. Agar qandaydir X oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $F(x) + C$ (bu erda C - ixtiyoriy o'zgarmas son) funksiyalar to'plamiga shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi va $\int f(x)dx = F(x) + C$ (1) kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$ - integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda; x - integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ - integrallash belgisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish yoki berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi *funksiyani integrallash* deyiladi.

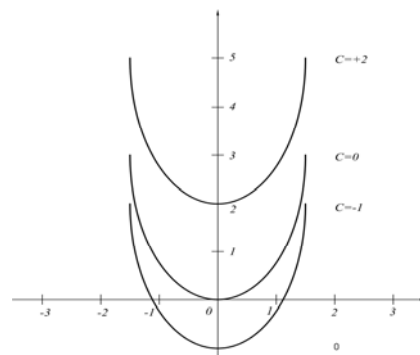
Kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya shu kesmada boshlang'ich funksiyaga ega, demak, aniqmas integralga ham ega ekanini isbotsiz aytib o'tamiz. Shu sababli, bundan keyin integral ostidagi funksiyalar uzluksiz va (1)

formula ma'noga ega deb hisoblaymiz. Agar uzilishga ega funksiya berilgan bo'lsa, uning integralini funksiya uzluksiz bo'lgan oraliqda qaraymiz. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$

funksiya $(-\infty, 0)$ va $(0, \infty)$ oraliqda uzluksiz. Shu sababli, uning aniqmas integrali

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \\ \ln(-x) + C, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases} = \ln|x| + C \text{ deb qaraladi.}$$

Boshlang'ich funksiyalarning grafigi *integral egri chiziqli* deyiladi, shuning uchun aniqmas integral *geometrik jihatdan* ixtiyoriy C o'zgarmasga bog'liq bo'lgan barcha integral egri chiziqlar to'plamini ifodalaydi. Masalan, $\int 2x dx$ integral $-y = x^2$ parabola grafigini Oy o'qi bo'yicha parallel surish natijasida hosil qilingan parabolalardan iborat bo'lgan integral egri chiziqlar to'plamini ifodalaydi (1-shakl).



1-shakl

Aniqmas integralning xossalari №1-slaydda keltirilgan.

Keltirilgan xossalardan birini, masalan, 3^o xossani isbotlaymiz.

$F'(x) = f(x)$ bo'lsin. U holda, $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$, y'ani $kF(x)$ funksiya $kf(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Bundan, $k \int f(x) dx = k[F(x) + C] = kf(x) + kC = kf(x) + C_1 = \int kf(x) dx$.

Qolgan xossalar ham shu kabi isbotlanadi.

2) Integrallar jadvali. Bevosita integrallash

Asosiy integrallar jadvalini №2- slaydda keltiramiz. Ularning to'g'riligini differentsiallashtirish orqali oson tekshirish mumkin.

Integrallarni asosiy integrallar jadvali va aniqmas integralning xossalari yordamida hisoblashga *bevosita integrallash* deyiladi.

1- misol. $I = \int (5 \sin x - \frac{2}{x^2 + 1} + x^3) dx$ integrallarni hisoblang.

Echish. 3^o va 4^o xossalarni qo'llasak,

$$\int (5 \sin x - \frac{2}{x^2 + 1} + x^3) dx = 5 \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} + \int x^3 dx.$$

Endi I,III,YII integrallarni qo'llasak, $I = -5 \cos x - 2 \arg \operatorname{tg} x + \frac{x^4}{4} + C$.

3) O'zgaruvchini almashtirish

Ko'pchilik hollarda o'zgaruvchini almashtirish bu integralni hisoblashni bevosita Integrallashga olib keladi. Bynday usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

2-teorema. $x = \varphi(t)$ funksiya qandaydir T oraliqda aniqlangan va differentsiallanuvchi hamda X oraliq bu funksiyaning qiymatlar sohasi bo'lib, bu oraliqda $f(x)$ funksiya aniqlangan, y'ani T oraliqda $f[\varphi(t)]$ murakkab funksiya aniqlangan bo'lsin. U holda, agar X oraliqda $f(x)$ funksiya $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ (2) formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F(x)$ va $F[\varphi(t)]$ funksiyalar T oraliqda aniqlangan bo'lib, shu sohada $F'(x) = f(x)$ bo'lsin. U holda $(F[\varphi(t)])' = F[\varphi(t)]'_x \varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ bo'ladi.

Bundan $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}$ ni hisobga olsak,

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ kelib chiqadi. Bu formulaga *aniqmas integralda*

o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

2- misol. $I = \int \cos 3x dx$ integralni hisoblang.

Echish. $t = 3x$ belgilash kiritsak, $dt = 3dx$, $dx = \frac{1}{3}dt$. (2) formulaga ko'ra

$I = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C$. Eski o'zgaruvchiga qaytsak, $I = \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

4) Bo'laklab integrallash

Bu usul ikki funktsiya ko'paytmasining differentsiali formulasiga asoslanadi.

3-teorema. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar qandaydir X oraliqda aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lib, $u'(x)v(x)$ funksiya bu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega, y'ani $\int u(x)v(x)dx$ mavjud bo'lsin. U holda, X oraliqda $u(x)v'(x)$ funksiya ham boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi va $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ (3) formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ tenglikdan $u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x)$

$[u(x)v(x)]'$ va $u'(x)v(x)$ funksiyalar boshlang'ich funksiyaga ega bo'lganligi sababli, $v'(x)u(x)$ ham boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi va oxirgi tenglikning chap va o'ng tomonini integrallasak (3) formula kelib chiqadi. Bu formulaga *aniqmas integralni bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

$v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$ ni hisobga olsak (3) formuladan $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ (4) formula kelib chiqadi.

3-misol. $I = \int x e^x dx$ integralni hisoblang.

Echish. $I = \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

Slaydlar

1) Aniqmas integralning xossalari

1°. Aniqmas integralning hosilasi (differensial) integral ostidagi funksiyaga (integral ostidagi ifodaga) teng, ya'ni $(\int f(x)dx)' = f(x)$ $(d\int f(x)dx = f(x)dx)$.

2°. Funktsiya differentsialining aniqmas integrali shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmas yig'indisiga teng, ya'ni $\int dF(x) = F(x) + C$.

3°. Ozgarmas ko'paytuvchini aniqmas integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

4°. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$.

5°. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, ya'ni $\int f(x)dx = F(x) + C$, bo'lsa, u holda $\int f(u)du = F(u) + C$ tenglik to'g'ri bo'ladi, bu yerda $u = u(x)$ - x ning differentsiallanuvchi funksiyasi.

Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi. Masalan, agar $\int \cos x dx = \sin x + C$ bo'lsa, u holda $\int \cos x^2 dx^2 = \sin x^2 + C$ bo'ladi.

2) Integrallar jadvali

$$\text{I. } \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\text{VIII. } \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\text{IY. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C (a \neq 0),$$

$$\text{Y. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\text{XII. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C,$$

$$\text{YI. } \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\text{YII. } \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\text{XIY. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

3) Bo'laklab integrallash

Bo'laklab integrallash orqali hisoblanadigan integrallarni asosan uch guruhga ajratish mumkin:

$$a) \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \arcsin x dx,$$

$\int P(x) \arccos x dx$, bu erda $P(x)$ - ko'phad. Bu integrallarni hisoblashda u orqali keltirilgan funksiyalarni va $dv = P(x) dx$ deb olish lozim;

b) $\int P(x) e^{kx} dx$, $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$.. Bu integrallarni hisoblashda $u = P(x)$, $dv = e^{kx} dx$, $dv = \sin kx dx$, $dv = \cos kx dx$ belgilash maqsadga muvofiq;

c) $\int e^{kx} \sin kx dx$, $\int e^{kx} \cos kx dx$ ko'rinishdagi integrallar (3) formulani takroran qo'llash orqali hisoblanadi.

Ko'rsatilgan uch guruh bo'laklab integrallanadigan barcha integrallarni o'z ichiga olmaydi. Masalan, $I = \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ integralni hisoblaylik

$$I = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

1.2. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash

a) *Mavzuning pedagogik-texnologik xaritasi*

Mavzu	Kasr ratsional funksiyalarni integrallash
Maqsad, vazifalar	Талабаларда ratsional kasr funktsiyalarni ko'phad va sodda kasrlarga yoyish, sodda ratsional kasrlarni integrallash, rekurrent formuladan foydalanish, kasr ratsional funktsiyalarni integrallashni bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarini shakllantirishdir Mavzuga oid tarqatma materiallarni talabalar tomonidan yakka va guruh holatida o'zlashtirib olishlarini hamda suhbat-munozara orqali tarqatma materiallardagi matnlar qay tarzda o'zlashtirilganligini nazorat qilish, ularning bilimini baholash.
O'quv jarayonining mazmuni	Ratsional kasr funktsiyalarni ko'phad va sodda kasrlarga yoyish. Sodda ratsional kasrlarni integrallash. Kasr ratsional funktsiyalarni integrallash.
O'quv jarayonini amalga oshirish texnologiyasi	<i>Uslub:</i> Og'zaki bayon qilish, "Bumerang" usuli, modulli o'qitish texnologiyasi. <i>Vosita:</i> Tarqatma materiallar: kasr funktsiyalarni ko'phad va sodda kasrlarga yoyish, sodda ratsional kasrlarni integrallash, rekurrent formulalar keltirilgan slaydlar. <i>Usul:</i> Tayyor yozma materiallar va formulalar asosida. <i>Nazorat:</i> Og'zaki savol-javoblar, test nazorati, o'z-o'zini nazorat, rekurrent formulani amalda qo'llay bilishi. <i>Baholash:</i> Reyting tizimi asosida.
Kutiladigan natijalar	Professor-o'qituvchi: Mavzuni kam vaqt ichida talabalar tomonidan o'zlashtirilishiga erishadi. Talabalar faolligini oshiradi. Talabalarda darsga nisbatan qiziqish uyg'otadi. Bir vaqtning o'zida ko'pchilik talabalarni baholaydi. O'z maqsadiga erishadi. Talaba: Yangi bilimlarni egallaydi. Yakka holda va guruh bo'lib ishlashni o'rganadi. Nutq rivojlanadi va eslab qolish qobiliyati kuchayadi. O'z-o'zini nazorat qilishni o'rganadi. Kam vaqt ichida ko'p ma'lumotga ega bo'ladi.
Kelgusi rejalar (tahlil, o'zgarishlar)	Professor-o'qituvchi: Yangi pedagogik texnologiyalarni o'zlashtirish va dars jarayoniga tadbiq etish, takomillashtirish. O'z ustida ishlash. Pedagogik mahoratini oshirish. Talaba: Matn ustida mustaqil ishlashni o'rganish. O'z fikrini ravon bayon qila olish. Mavzuga oid qo'shimcha materiallarni topish va o'rganish. O'z fikri va guruh fikrini tahlil qilib bir echimga kelish malakasini hosil qilish.

b) Test topshiriqlari.

1. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$$

$$B) \int \frac{A}{x-a} dx = \ln|x-a| + c$$

$$C) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln \left| \frac{1}{x-a} \right| + c$$

$$D) \int \frac{A}{x-a} dx = \frac{1}{A} \ln|x-a| + c$$

2. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = \frac{A_k}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

$$B) \int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{A_k(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

$$C) \int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = \frac{(1-k)}{A_k(x-a)^{k-1}} + c$$

$$D) \int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = \frac{A_k(x-a)^{k-1}}{(1-k)} + c$$

3 To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{5}{(x-2)^3} dx = \frac{1}{20}(x-2)^4 + c$$

$$B) \int \frac{5}{(x-2)^3} dx = \frac{-5}{2}(x-2)^{-2} + c$$

$$C) \int \frac{5}{(x-2)^3} dx = \frac{1}{10}(x-2)^3 + c$$

$$D) \int \frac{5}{(x-2)^3} dx = \frac{5}{2}(x-2)^4 + c$$

4. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping (integrallarda maxrajning diskriminanti manfiy)

$$A) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$

$$B) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln|x^2+px+qx| + c$$

$$C) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln|x^2+px+qx| + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$

D) To'g'ri javob yo'q

5. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{2x-5}{x^2+6x+13} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+13| + c$$

$$B) \int \frac{2x-5}{x^2+6x+13} dx = \arctg(x^2+6x+13) + c$$

$$C) \int \frac{2x-5}{x^2+6x+13} dx = \ln|x^2+6x+13| - \frac{10+12}{\sqrt{52-36}} \arctg \frac{2x+6}{4} + c$$

D) To'g'ri javob yo'q

6. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+1| + c$$

$$B) \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + c$$

$$C) \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \quad D) \text{ To'g'ri javob yo'q}$$

7. To'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + c$$

$$B) \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{2}{3} \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + c$$

$$C) \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$D) \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \left(\frac{4x-1}{(x^2-x+1)} + \ln|x^2-x+1| \right) + c$$

c) Ma'ruza matni

Ratsional kasr funksiyalarni ko'phad va sodda kasrlarga yoyish

Quyida kasr-ratsional funksiyalarni integrallashda kerak bo'ladigan ma'lumotlarni keltirilamiz.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ funksiya darajali ko'phad deyiladi, bunda $a_0, a_1, \dots, a_n$ – ko'phadning koeffitsiyentlari, n - daraja ko'rsatkichi.

1-ta'rif. Ikki ko'phadning nisbati kasr-ratsional funksiya yoki ratsional kasr deyiladi.

Masalan, $Q_m(x)$ va $P_n(x)$ ko'phadlarning nisbatidan

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n} \text{ kasr-ratsional funksiya hosil bo'ladi.}$$

Agar $m < n$ bo'lsa, u holda ratsional kasr to'g'ri, agar $m \geq n$ bo'lsa, u holda ratsional kasr noto'g'ri kasr bo'ladi.

$R(x)$ ratsional kasr noto'g'ri bo'lgan hollarda kasrni $Q_m(x)$ suratini $P_n(x)$ maxrajiga odatdagidek bo'lish yo'li bilan uning butun qismini ajratish kerak.

$Q_m(x)$ bo'linuvchi $P_n(x)$ bo'luvchi hamda $q(x)$ bo'linmaning ko'paytmasi bilan $r(x)$ qoldiqning yig'indisiga teng bo'lgani uchun, $Q_m(x) = P_n(x) \cdot q(x) + r(x)$

yoki $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$ ayniyatni hosil qilamiz, bu yerda $q(x)$ - butun qism deb ataluvchi ko'phad, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri kasr, chunki $r(x)$ qoldiqning darajasi $P_n(x)$ ning darajasidan kichik.

Shunday qilib, noto'g'ri ratsional kasr bo'lgan holda undan $q(x)$ butun qismni va $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri kasrni ajratish mumkin. Shunday qilib, noto'g'ri ratsional kasrni integrallash ko'phadni va to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltiriladi.

1-misol. $R(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^2 + x - 2}$ noto'g'ri ratsional kasrdan butun qismini ajrating.

Yechish. $R(x)$ ratsional kasr noto'g'ri kasr, chunki suratning darajasi maxrajning darajasidan katta ($4 > 2$). Ko'phadlarni bo'lish qoidasi bo'yicha suratni maxrajga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 1 \quad | \quad x^2 + x - 2 \\ \underline{2x^4 + 2x^3 - 4x^2} \\ -5x^3 + 4x^2 + 1 \\ \underline{-5x^3 - 5x^2 + 10x} \\ 9x^2 - 10x + 1 \\ \underline{9x^2 + 9x - 18} \\ -19x + 19 \end{array}$$

Shunday qilib, $R(x) = 2x^2 - 5x + 9 + \frac{-19x + 19}{x^2 + x - 2}$ ni hosil qilamiz.

2-ta'rif. Quyidagi kasrlar eng sodda ratsional kasrlar deyiladi:

$$I. \frac{A}{x - \alpha}; \quad II. \frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad (k > 2, k \in \mathbb{Z});$$

$$III. \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, (\text{maxrajning diskriminanti } D < 0); \quad IV. \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^2}, (s > 2, s \in \mathbb{Z}, D < 0),$$

bu yerda A, B, α, p, q - haqiqiy sonlar.

Ushbu $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasrni qarab chiqamiz, bu kasrning

$P_n(x)$ maxraji $(x-\alpha)^k, (x^2+px+q)^s$ ko'rinishdagi chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga yoyiladi, bunda $(x-\alpha)^k$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi k karalikdagi haqiqiy ildizga mos keladi, $(x^2+px+q)^s$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi s karalikdagi kompleks-qo'shma ildizlarga mos keladi (diskriminant $D<0$), ya'ni

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \dots (x^2+p_ix+q_i)^{s_i} \quad (1)$$

1-teorema. Har qanday $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ratsional kasrni, bunda $R_n(x)$ ning maxraji

(1) formula bo'yicha ko'paytuvchilarga ajratilgan, ya'ni I, II, III, IV turdagi oddiy kasrlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. Bunda:

a) (1) yoyilmaning $(x-\alpha)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga I turdagi bitta $\frac{A}{x-\alpha}$

kasr mos keladi;

b) (1) yoyilmaning $(x-\alpha)^k$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga I va II turdagi k ta

kasr mos keladi: $\frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)}$;

c) (1) yoyilmaning x^2+px+q ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga III turdagi kasr

mos keladi: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

d) (1) yoyilmaning $(x^2+px+q)^s$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga III va IV

turdagi s ta kasr mos keladi: $\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^s} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \dots + \frac{A_sx+B_s}{x^2+px+q}$.

To'g'ri ratsional kasrning oddiy kasrlar yig'indisiga yoyilmasida A, B koeffitsiyentlarni aniqlash uchun turli xil usullar mavjud, ulardan noma'lum koeffitsiyentlar usulini misolda tushuntiramiz.

2-misol. $R(x) = \frac{x+2}{x^3-x}$ ratsional kasrni oddiy kasrlar yig'indisiga ajrating.

Yechish. $R(x)$ ratsional kasr to'g'ri kasr, chunki suratning darajasi maxrajning darajasidan kichik ($l < 3$). Kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Keltirilgan teorema asosan $R(x)$ kasrni oddiy kasrlarga ajratamiz:

$$R(x) = \frac{x+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1}, \quad (2)$$

A, B, D koeffitsiyentlarni topish uchun (2) tenglikning o'ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismida maxrajni tashlab yuboramiz. Bu amallar natijasi quyidagi tenglikdan iborat bo'ladi:

$$x+2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-1), \quad (3)$$

(3) tenglikning chap va o'ng qismlarida x o'zgaruvchining teng darajalari oldida turgan koeffitsiyentlar o'zaro tenglashtirimiz:

$$\begin{cases} x^2 : A + B + D = 0 \\ x^1 : B - D = 1 \\ x^0 : -A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B + D = 2 \\ B - D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{3}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bundan, (2) tenglikni $R(x) = \frac{x+2}{x(x^2-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$ ko'rinishda yozamiz.

Sodda ratsional kasrlarni integrallash

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$I. \quad \int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C;$$

$$II. \quad \int \frac{A dx}{(x-\alpha)^k} = A \int (x-\alpha)^{-k} d(x-\alpha) = A \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C.$$

III turdagi integrallarni ko'rib chiqamiz: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$, bunda $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratamiz va integralni hisoblaymiz:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p,$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Integrallardan birinchisi $\ln|x^2+px+q|$ ga teng. Ikkinchi integralni hisoblash

uchun maxrajda to'liq kvadratni ajratamiz: $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, bu yerda

$q - \frac{p^2}{4} > 0$, chunki shartga ko'ra $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Demak, ikkinchi integral jadval integraliga keladi. Yuqorida aytilganlarni inobatga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C. \end{aligned}$$

Shuni aytib o'tish kerakki, agar III turdagi kasrni integrallashda $A = 0$ bo'lsa, darhol maxrajda to'liq kvadrat ajratish kerak.

3-misol. $I = \int \frac{3x+8}{x^2+4x+8} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Suratda maxrajning hosilasini ajratamiz va integralni hisoblaymiz:

$$(x^2 + 4x + 8)' = 2x + 4,$$

$$I = \int \frac{3x+8}{x^2+4x+8} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4) - \frac{3}{2} \cdot 4 + 8}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Birinchi integral $\ln|x^2+4x+8|$ ga teng. Ikkinchi integralning maxrajida to'liq kvadrat ajratamiz: $(x^2+4x+8) = (x+2)^2 - 4 + 8 = (x+2)^2 + 2^2$. Natijada quyidagini hosil

$$\text{qilamiz: } I = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+8| + 2 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 2^2} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+8| + \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C.$$

4-misol. $I = \int \frac{dx}{x^2-6x+14}$ integralni hisoblang.

Yechish. $A = 0$ bo'lgani uchun maxrajda to'liq kvadratni ajratishdan boshlaymiz: $x^2 - 6x + 14 = (x-3)^2 - 9 + 14 = (x-3)^2 + (\sqrt{5})^2$. Bundan,

$$I = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-3}{\sqrt{5}} + C.$$

Endi IV turdagi integralni hisoblaymiz: $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}$, bunda $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Integralni suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratib, hisoblaymiz:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p,$$

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Birinchi integral darhol hisoblanadi:

$$\int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int (x^2 + px + q)^{-n} d(x^2 + px + q) = \frac{1}{(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}}.$$

Ikkinchi integralga kelsak, $\left(x + \frac{p}{2}\right) = t, dx = dt$ belgilash kiritib, $0 < q - \frac{p^2}{4} = a^2$ deb uni

quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^n} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} \quad (4)$$

Oxirgi integralga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz:

$$\left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^2}, \quad v = \frac{1}{2} \frac{1}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} \end{array} \right|$$

Shunday qilib, (4) formuladagi oxirgi integral bunday yoziladi;

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Agar endi $I_n = \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n}$ deb belgilasak, oddiy almashtirishlardan so'ng (4)

formula ushbu ko'rinishni oladi: $I_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$,

$$\text{yoki } I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right). \quad (5)$$

Bu formula bo'yicha I_{n-1} ni I_{n-2} orqali ifodalaymiz, so'ngra I_{n-2} ni I_{n-3} orqali ifodalaymiz va hokazo. Bu jarayon quyidagi integralni hosil qilgunimizcha davom

etadi: $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C.$

(5) formula keltirish yoki rekurrent (qaytuvchan) formula deyiladi. Bunday

nomlanishiga sabab I_n dan I_{n-1} ga, keyin esa I_{n-2} ga qaytishga to'g'ri keladi va hokazo.

Shuni aytib o'tish kerakki, agar IV turdagi kasrlarni integrallashda $A = 0$ bo'lsa, darhol maxrajda to'liq kvadrat ajratish kerak.

4-misol. $I = \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}$ integralni hisoblang.

Yechish. Uchhadda to'liq kvadrat ajratamiz: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Natijada quyidagini hosil qilamiz: $I = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2}$.

$\left(x - \frac{1}{2}\right) = t$ almashtirishni bajarib va $a^2 = \frac{3}{4}$ deb belgilab, $I = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = I_2$ ni hosil qilamiz. (5) formula bo'yicha quyidagilarni topamiz:

$$I = I_2 = \frac{1}{2(2-1)a^2} \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{2-1}} + (2 \cdot 2 - 3)I_1 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + I_1 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{3} \arctg \frac{2t}{3} \right) + C.$$

x o'zgaruvchiga qaytib, $I = \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$ ni hosil qilamiz.

5-misol. $I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ Integralni hisoblang:

Yechish. (5) formula bo'yicha topamiz:

$$I = I_3 = \frac{1}{2(3-1)} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^2} + (2 \cdot 2 - 3)I_2 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^2} + 3I_2 \right), \quad (6)$$

$$\text{bunda } I_2 = \frac{1}{2(2-1)} \left(\frac{x}{1 + x^2} + (2 \cdot 2 - 3)I_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 + x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 + x^2} + \arctg x \right) + C. \quad (7)$$

I_2 ning qiymatini (7) formuladan (6) formulaga qo'yamiz:

$$I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{1 + x^2} + \frac{3}{2} \arctg x \right) + C.$$

Kasr ratsional funktsiyalarni integrallash

Avvalgi mavzularda aytilganlardan $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$ noto'g'ri ratsional kasrni integrallash masalasi $q(x)$ ko'phadni integrallashga (uning integrali jadval integrali bo'ladi) va $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltiriladi, bu esa aslida I, II, III va IV turdagi kasrlarning integrallarini topishga keltiriladi.

Shunday qilib, ratsional kasrni integrallash quyidagi tarzda amalga oshiriladi:

- 1) berilgan kasr to'g'ri yoki noto'g'ri kasr ekanini tekshirish; agar kasr noto'g'ri kasr bo'lsa, uning butun qismini ajratilish;
- 2) kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratish;
- 3) to'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlar yig'indisiga yoyish;
- 4) yoyilmaning koeffitsiyentlarni topish;
- 4) integrallashni bajarish.

5-misol. $I = \int \frac{(x^2 + 3)dx}{x(x-1)(x+2)}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya - to'g'ri ratsional kasr, uni I turdagi sodda kasrlar yig'indisiga ajratamiz: $\frac{x^2 + 3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+2}$, bundan

$$x^2 + 3 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Dx(x-1).$$

Tenglikning chap va o'ng qismlarida x o'zgaruvchining teng darajalari oldida turgan koeffitsiyentlar o'zaro tenglashtirimiz:

$$\begin{cases} x^2 : A + B + D = 1 \\ x^1 : A + 2B - D = 0 \\ x^0 : -2A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}, B = \frac{4}{3}, D = \frac{7}{6}. \text{ Shunday qilib,}$$

$$I = \int \frac{(x^2 + 3)dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{4}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{7}{6} \int \frac{d(x+2)}{x+2} = -\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{4}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{6} \ln|x+2| + C.$$

1.3.Ba'zi trigonometrik ifodalarni integrallash.

a) Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda

qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №3

3.Mavzu nomi: Ba'zi trigonometrik ifodalarni integrallash

4.Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 2 soat

7.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarda ba'zi trigonometrik ifodalarni tegishli almashtirishlar yordamida hisoblash bo'yicha bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

8. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

8.1 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ -umumiy almashtirish

8.2 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ da ifoda - $\sin x$ ga nisbatan toq

8.3 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ da ifoda - $\cos x$ ga nisbatan toq

8.4 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ da ifoda - $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft

8.5 $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallar

8.6 $\int \sin nx \sin mxdx$, $\int \sin nx \cos mxdx$, $\int \cos nx \cos mxdx$ ko'rinishdagi integrallar

9.Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

9.1 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ -umumiy almashtirishni o'rganish

9.2 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq bo'lganda hisoblashni o'rganish

9.3 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq bo'lganda hisoblashni o'rganish

9.4 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft bo'lganda hisoblashni o'rganish

9.5 $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni o'rganish

9.6 $\int \sin nx \sin mxdx$, $\int \sin nx \cos mxdx$, $\int \cos nx \cos mxdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni o'rganish

10. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

10.1 $tg \frac{x}{2} = z$ umumiy almashtirish - qo'llash

10.2 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq bo'lganda hisoblash - qo'llash

10.3 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq bo'lganda hisoblash - qo'llash

10.4 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ni ifoda $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft bo'lganda hisoblash - qo'llash

10.5 $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash - qo'llash

10.6 $\int \sin nx \sin mxdx$, $\int \sin nx \cos mxdx$, $\int \cos nx \cos mxdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash - qo'llash

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, "Aqliy xujum" usuli

12 . Didaktik vositalar - Proektor, tarqatma matnlar(slaydlar) (№1- $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash , №2- $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblasgh, № 3- $\int \sin nx \sin mxdx$, $\int \sin nx \cos mxdx$, $\int \cos nx \cos mxdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblasgh).

13. Test topshiriqlari:

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$ uchun to'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) F(x) = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

$$B) F(x) = \ln |tg x| + C$$

$$C) F(x) = \frac{1}{\cos x} + C$$

$$D) F(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + C$$

2. Noto'g'ri tenglikni toping

$$A) \sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$B) \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$C) \sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad D) \text{ barcha tenglik to'g'ri}$$

3. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ uchun to'g'ri boshlang'ich funksiyani toping

$$A) F(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$$

$$B) F(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$C) F(x) = \frac{1}{1 - \cos x} + C$$

$$D) F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$$

4. $\operatorname{tg} x = z$ bo'lsa, noto'g'ri tenglikni toping

$$A) dx = \frac{dz}{1 + z^2} \quad B) \cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2} \quad C) \sin^2 x = \frac{z^2}{1 + z^2} \quad D) \cos^2 x = \frac{z}{1 + z^2}$$

5. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = \operatorname{ctg} x + C$$

$$B) F(x) = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + C$$

$$C) F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$$

$$D) \text{ to'g'ri javob yo'q}$$

6. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ uchun noto'g'ri tasdiqni toping

$$A) n > 0 \text{ va toq bo'lsa } \cos x = z \text{ almashtirish maqsadga muvofiq}$$

$$B) m > 0 \text{ va toq bo'lsa } \sin x = z \text{ almashtirish maqsadga muvofiq}$$

$$C) m > 0 \text{ va toq bo'lsa } \cos x = z \text{ almashtirish maqsadga muvofiq}$$

$$D) \text{ to'g'ri javob keltirilmagan}$$

7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = \frac{1}{3 \sin x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$B) F(x) = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$C) F(x) = \frac{1}{\cos^3 x} + C$$

$$D) F(x) = \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$$

8. $\int \cos x \sin^2 x dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$B) F(x) = \frac{\cos^2 x}{2} + C$$

$$C) F(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$D) F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

9. Noto'g'ri tenglikni aniqlang

A) $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

B) $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \sin(m-n)x]$

C) $\cos nx \sin mx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$ C)

D) barcha tengliklar to'g'ri

10. $\int \sin 3x \cos 2x dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$ B) $F(x) = \frac{\cos x}{2} - \frac{\sin 5x}{10} + C$

C) $F(x) = \frac{\cos 3x}{2} - \frac{\sin 5x}{10} + C$ D) $F(x) = -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$

11. $\int \cos 4x \cos x dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = \frac{\sin 6x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$ B) $F(x) = \frac{\cos 2x}{6} - \frac{\sin 5x}{10} + C$

C) $F(x) = \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 5x}{10} + C$ D) $F(x) = -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$

12. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ uchun noto'g'ri tasdiqni toping

A) $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq bo'lsa, $\cos x = z$ almashtirish maqsadga muvofiq

B) $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq bo'lsa, $\sin x = z$ almashtirish maqsadga muvofiq

C) $\sin x = z$ ifoda $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft bo'lsa $\tan x = z$ almashtirish maqsadga muvofiq

D) $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq bo'lsa, $\cos x = z$ almashtirish maqsadga muvofiq

13. $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralni hisoblashda qanday almashtirish maqsadga muvofiq?

A) $\sin x = z$ B) $\tan x = z$ C) $\cos x = z$ D) $\cot x = z$

14. $\int \frac{2dx}{1 + \tan x}$ integralni hisoblashda qanday almashtirish maqsadga muvofiq?

$$A) \sin x = z \quad B) \operatorname{tg} x = z \quad C) \cos x = z \quad D) 2x = z$$

15. $\int \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x} dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = C - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) \quad B) F(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$C) F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C \quad D) \text{ to'g'ri javob yo'q}$$

16. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ integralni hisoblashda qanday almashtirish maqsadga muvofiq?

$$A) \sin x = z \quad B) \operatorname{tg} x = z \quad C) \cos x = z \quad D) \operatorname{ctg} x = z$$

17. $\int \cos^3 x dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = C - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \quad B) F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$C) F(x) = \frac{\cos^3 x}{3} + C \quad D) \text{ to'g'ri javob yo'q}$$

18. $\int \frac{\cos x}{5 + \sin x} dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

$$A) F(x) = \ln|5 + \sin x| + C \quad B) F(x) = \ln|5 + \cos x| + C$$

$$C) \frac{\cos x}{5 + \sin x} \quad D) \text{ to'g'ri javob yo'q}$$

b) Tarqatma matnlar (slaydlar)

1) $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash

Faraz qilaylik, faqat trigonometrik funksiyalarga ratsional ravishda bog'liq bo'lgan ifoda berilgan bo'lsin. Uni doim $\sin x$ va $\cos x$ ning ratsional funksiyasi deb hisoblash mumkin, chunki hamma trigonometrik funksiyalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ratsional ravishda ifodalash mumkin. Bu ifodani $R(\sin x, \cos x)$ orqali belgilaymiz.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ ko'rinishdagi integralni $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ o'rniga qo'yish bilan doim z o'zgaruvchili ratsional funksiyaning integraliga almashtirish, ya'ni ratsionallashtirish mumkin. Haqiqatan ham

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad x = \arg tg z, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

Shu sababli, $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int R_1(z) dz,$

bunda $R_1(z)$ - z o'zgaruvchili ratsional funksiya.

$tg \frac{x}{2} = z$ o'rniga qo'yish $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ko'rinishdagi har qanday funktsiyani integrallashga imkon beradi, shuning uchun u *universal trigonometrik almashtirish* deyiladi. Lekin amaliyotda bu almashtirish ko'pincha ancha murakkab ratsional funktsiyaga olib keladi. Shuning uchun ba'zan undan foydalanmasdan ancha sodda o'rniga qo'yishlardan foydalaniladi.

1) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq, ya'ni

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $\cos x = z$ o'rniga qo'yish bu funktsiyani ratsionallashtiradi;

2) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq, ya'ni

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $\sin x = z$ o'rniga qo'yish bu funktsiyani ratsionallashtiradi;

3) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft, ya'ni

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $tg x = z$ o'rniga qo'yish bu funktsiyani

ratsionallashtiradi. Bunda, $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \frac{z^2}{1 + z^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + z^2}$

formulalardan foydalaniladi.

1-misol. $I = \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ integralni hisoblang.

Yechish. $tg \frac{x}{2} = z$ o'rniga qo'yishdan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4 \frac{2z}{1+z^2} + 3 \frac{1-z^2}{1+z^2} + 5} = \int \frac{2dz}{2z^2 + 8z + 8} = \int \frac{dz}{(z+2)^2} = -\frac{1}{z+2} + C = C - \frac{1}{tg \frac{x}{2} + 2}$$

2- misol. $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral belgisi ostidagi funksiya $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft, shu sababli $\operatorname{tg} x = z$ o'rniga qo'yishdan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\frac{1}{2}+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arg \operatorname{tg} \sqrt{2}z + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arg \operatorname{tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$$

3-misol. $I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $\sin x$ ga nisbatan toq, funksiya, shu sababli $\cos x = z$ o'rniga qo'yishdan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2 + \cos x} = \int \frac{-(1-z^2)dz}{2+z} = \int \frac{z^2-1}{z+2} dz = \int \left(z - 2 + \frac{3}{z+2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \ln|z+2| + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln|2 + \cos x| + C$$

2) $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblasgh

$\int \sin^n x \cos^m x dx$ ko'rinishdagi integrallar m va n butun sonlarga bog'liq holda hisoblanadi:

a) Agar $n > 0$ va toq bo'lsa, u holda $\cos x = z$ o'rniga qo'yish integralni ratsionallashtiradi;

b) Agar $m > 0$ va toq bo'lsa, u holda $\sin x = z$ o'rniga qo'yish ham integralni ratsionallashtiradi;

c) Agar ikkala n va m ko'rsatkichlar juft va nomanfiy bo'lsa, u holda

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ formulalaridan foydalanib, darajani pasaytiriladi;

d) Agar $m+n = -2k \leq 0$ (juft, nomusbat) bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} x = z$ yoki $\operatorname{ctg} x = z$ o'rniga qo'yish integralni darajali funksiyalarning integrallari yig'indisiga olib keladi.

Agar bunda $m < 0$ va $n < 0$ bo'lsa, u holda quyidagi sun'iy usulni qo'llash mumkin: suratda turgan birni $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, bu erda $k = \frac{|m+n|}{2} - 1$ bilan ifodalab, ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi;

e) Agar darajalardan biri nolga teng, ikkinchisi manfiy toq bo'lsa, u holda

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ universal o'rniga qo'yishni bajarib, coddalashtiriladi.

4-misol. $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralda $n=3$, $m=-4$. Shu sababli, $\cos x = z$ o'rniga qo'yish yordamida quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{-(1-z^2)dz}{z^4} = -\int \frac{dz}{z^4} + \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{z} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

5-misol. $I = \int \sin^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Darajani pasaytirish formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos 2x + \frac{1 + \cos^4 x}{2} \right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \end{aligned}$$

6-misol. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu yerda $n = -3$, $m = -1$, $n + m = -4 < 0$, $k = 1$. Shu sababli

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = 2 \int \frac{dx}{\sin 2x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

7-misol. $I = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu yerda $n = 0$, $m = -6$, $m + n = -6 < 0$. Quyidagi almashtirishlardan

foydalanamiz: $\operatorname{tg} x = z$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dz$. Bundan,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+z^2)^2 dz = \int (1+2z^2+z^4) dz = \\ &= z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + C = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \sin nx \sin mx dx, \int \sin nx \cos mx dx, \int \cos nx \cos mx dx$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblash

Bu integrallar trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indiga almashtiruvchi quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

8-misol. $I = \int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral belgisi ostidagi funktsiyani yig'indiga almashtiramiz:

$$I = \int \sin 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx = C - \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x.$$

1.3. Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash.

a) Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi

1. Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2. Mavzuning tartibi: №4

3. Mavzu nomi: Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash

4. Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994-496b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк., 1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt: 2 soat

7. Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarda ba'zi irratsional ifodalarni tegishli almashtirishlar yordamida hisoblashda bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

8. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

$$8.1 \int R \left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

$$8.2 \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

$$8.3 \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

$$8.4 \int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

9. Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

9.1 $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni o'rganish

9.2 $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni

o'rganish

9.3 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni o'rganish

9.4 $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashni o'rganish

10. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

10.1 $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash - qo'llash

10.2 $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash

- qo'llash

10.3 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash - qo'llash

10.4 $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash - qo'llash

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, "Aqliy xujum" usuli

12. Didaktik vositalar: Proektor, tarqatma matnlar(slaydlar)

(№1- $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash,

№2- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ ko'rinishdagi integrallarni

hisoblash, №3- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash ,

№4- $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash).

13. Test topshiriqlari:

1. Tasdiqlardan noto'g'risini ko'rsating

A) $\sqrt{x^2 - a^2}$ ifoda $x = \frac{a}{\sin z}$ yoki $x = \frac{a}{\cos z}$ almashtirish yordamida

irratsionallikdan qutqaziladi

B) $\sqrt{x^2 + a^2}$ ifoda $x = \operatorname{atgz}$ yoki $x = \operatorname{actgz}$ almashtirish yordamida

irratsionallikdan qutqaziladi.

C) $\frac{1}{(x + \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ifoda $x = z^2$ almashtirish yordamida

irratsionallikdan qutqaziladi.

D) $\frac{1}{(x + \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ifoda $x = \frac{1}{z} - \alpha$ almashtirish yordamida

irratsionallikdan qutqaziladi.

2. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = t^2$

B) $x = t^3$

C) $x = t^4$

D) $x = t^2$

3. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt{x})} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = t^2$

B) $x = t^3$

C) $x = t^4$

D) $x = t^2$

4. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $2x+1 = t^2$

B) $2x+1 = t^3$

C) $2x+1 = t^4$

D) $2x+1 = t^6$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $1-2x = t^2$

B) $1-2x = t^3$

C) $1-2x = t^4$

D) $1-2x = t^2 - 1$

6. $\int \sqrt{4-x^2} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = 2 \sin z$

B) $x = \frac{1}{z}$

C) $x = \frac{1}{\sin z}$

D) to'g'ri javob yo'q

7. $\int \sqrt{9-x^2} dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = 10 \arcsin \frac{x}{9} + \frac{x}{3} \sqrt{9-x^2} + C$

B) $F(x) = 4,5 \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + C$

$$C) F(x) = 5 \arcsin \frac{x}{3} + C$$

$$D) F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + C$$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = 2 \sin z$ B) $x = \frac{1}{z}$ C) $x = \operatorname{atgz}$ D) to'g'ri javob yo'q

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = \cos z$ B) $x = \operatorname{tgz}$ C) $x = \sin z$ D) to'g'ri javob yo'q

10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = \cos z - 2$ B) to'g'ri javob yo'q C) $x = \frac{2}{\sin z}$ D) $x = \operatorname{tgz}$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = 2 \arcsin \frac{2}{x} + C$

B) $F(x) = 4\sqrt{x^2 - 4} + C$

C) $F(x) = 2 \arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x^2 - 4} + C$

D) $F(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + C$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = 2 \sin z$ B) $x = \frac{1}{z}$ C) $x = \operatorname{atgz}$ D) to'g'ri javob yo'q

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$ ni hisoblashda to'g'ri almashtirishni aniqlang

A) $x = 2 \sin z$ B) $x = \frac{1}{z}$ C) $x = \operatorname{atgz}$ D) to'g'ri javob yo'q

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ning boshlang'ich funksiyasini toping

A) $F(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

B) $F(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} + C$

C) $F(x) = \ln |\sqrt{1+x^2} - 1| + C$

D) $F(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2} + C$

15. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x+1}}$ integralda dastlabki o'rniga qo'yishni ko'rsating

$$A) x-3=t \quad B) x-3=\frac{1}{t} \quad C) x^2+x+1=t \quad D) x^2+x+1=t^2$$

b) Tarqatma matnlar (slaydlar)

$$1) \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \quad \underline{\text{ko'rinishdagi integrallarni hisoblash}}$$

Algebraik irratsionallikni o'z ichiga olgan ba'zi integrallarni o'zgaruvchini tegishlicha almashtirgandan so'ng ratsional funksiyalarning integrallariga keltirish mumkin.

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \quad \text{ko'rinishdagi integrallar (bu erda, } R - \text{ erkli } x$$

o'zgaruvchi kasr darajalarining ratsional funksiyasi) $x = z^s$, bu yerda $s - n_1, n_2, \dots, n_k$ sonlarning eng kichik umumiy karralisi, o'ringa qo'yish yordamida ratsionallashtiriladi.

1-misol. $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. 3 va 6 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 6 ga teng, sh sababli

$x = z^6, dx = 6z^5 dz, z = \sqrt[6]{x}$ o'rniga qo'yishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{(z^6 + z^4 + z) \cdot z^5 dz}{z^6(1 + z^2)} = 6 \int \frac{z^5 + z^3 + 1}{1 + z^2} dz = 6 \int \left(z^3 + \frac{1}{1 + z^2} \right) dz = \\ &= 6 \frac{z^4}{4} + 6 \arctg z + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^3} + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C \end{aligned}$$

$$2) \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \quad \underline{\text{ko'rinishdagi}}$$

integrallarni hisoblash

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \quad \text{ko'rinishdagi integrallar (bu erda,}$$

$R - \frac{ax+b}{cx+d}$ ifoda kasr darajalarining ratsional funksiyasi) $\frac{ax+b}{cx+d} = z^s$, bu yerda

$s - n_1, n_2, \dots, n_k$ sonlarning eng kichik umumiy karralisi, o'ringa qo'yish yordamida ratsionallashtiriladi.

2-misol. $I = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. 2 va 3 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 6 ga teng, shuning uchun $2x-3 = z^6, dx = 3z^5 dz, z = \sqrt[6]{2x-3}$ almashtirishni bajaramiz:

$$I = 3 \int \frac{z^3 \cdot z^5 dz}{z^2 + 1} = 3 \int \frac{z^8 dz}{z^2 + 1} = 3 \int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz = 3 \left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z \right) + C = \frac{3}{7} \sqrt[6]{(2x-3)^7} - \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x-3)^5} + \sqrt{2x-3} - 3\sqrt[6]{2x-3} + 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{2x-3} + C$$

3-misol. $\int \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{2-x}{2+x} = z^3$ o'rniga qo'yishni kiritamiz, bundan:

$$x = \frac{2-2z^3}{1+z^3}, \quad dx = \frac{-12z^2 dz}{(1+z^3)^2}, \quad 2-x = \frac{4z^3}{1+z^3}. \quad \text{Demak,}$$

$$I = \int \frac{-2(1+z^3)^2 \cdot z \cdot 12z^2 dz}{16z^6(1+z^3)^2} = -\frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^3} = \frac{3}{4z^2} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$

3) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat ajratiladi:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

2) $x + \frac{b}{2a} = z$ belgilashni kiritib, quyidagi ko'rinishdagi integrallardan biriga keltiriladi:

a) agar $a > 0$ va $b^2 - 4ac < 0$ bo'lsa, u holda ko'rinishda ,bu erda $n^2 = a, m^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0;$

b) agar $a > 0$ va $b^2 - 4ac > 0$ bo'lsa, u holda $\int R_1(z, \sqrt{n^2 z^2 - m^2}) dz$ ko'rinishda ,bu erda $n^2 = a, m^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0;$

c) agar $a < 0$ va $b^2 - 4ac > 0$ bo'lsa, u holda $\int R_1(z, \sqrt{m^2 - n^2 z^2}) dz$ ko'rinishda ,bu erda $n^2 = -a$, $m^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$;

3) Keltirilgan integrallardan quyidagi o'rniga qo'yishlar yordamida $\int R(\sin t, \cos t) dt$ ko'rinishdagi integrallar hosil qilinadi:

$$a) \quad z = \frac{m}{n} \operatorname{tg} t, \quad dz = \frac{m}{n} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t};$$

$$b) \quad z = \frac{m}{n} \sec t, \quad dz = \frac{m}{n} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt;$$

$$c) \quad z = \frac{m}{n} \sin t, \quad dz = \frac{m}{n} \cdot \cos t dt.$$

4-misol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5 + 2x + x^2)^3}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat ajratamiz: $5 + 2x + x^2 = (x + 1)^2 + 4$.

$x + 1 = z$ belgilash kiritamiz va a) ko'rinishdagi integralni hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{(4 + z^2)^3}}. \quad z = 2 \operatorname{tg} t, \quad dz = \frac{2dt}{\cos^2 t}, \quad 4 + z^2 = 4 + 4 \operatorname{tg}^2 t = \frac{4}{\cos^2 t} \quad \text{o'rniga qo'yishni baja-}$$

$$\text{ramiz. Shunday qilib, } I = \int \frac{2dt}{\cos^2 \sqrt{\frac{4^3}{\cos^6 t}}} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C =$$

$$= \frac{z}{4\sqrt{4 + z^2}} + C = \frac{x + 1}{4\sqrt{(x + 1)^2 + 4}} + C = \frac{x + 1}{4\sqrt{x^2 + 2x + 5}} + C.$$

5-misol. $I = \int \sqrt{1 - x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral c) ko'rinishdagi integral.

Su sababli, $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $1 - x^2 = \cos^2 t$ o'rniga qo'yishlarni bajaramiz va Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi boshqa integrallarni hisoblash usullarini qarab chiqamiz:

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral kvadrat uchhadda to'liq kvadrat

ajratib, XII yoki XII ko'rinishdagi jadval integralga keltirib hisoblanadi.

6-misol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 4x + 8}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 2^2$ tenglikdan foydalanib hisoblaymiz:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3 + 4}} = \ln \left| (x-2) + \sqrt{(x-2)^2 + 4} \right| + C.$$

7-misol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2 - 4x}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $6 - x^2 - 4x = 10 - (x^2 + 4x + 4) = 10 - (x + 2)^2$ tenglikdan foydalanib hisoblaymiz:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{10 - (x + 2)^2}} = \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{10}} + C$$

e) $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ ko'rinishdagi integrallar $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ ifodaga

asoslangan holda ikkita, biri darajali funksiya dan olingan integral va ikkinchisi a)bandda qaralgan integralga ajratish orqali hisoblanadi.

8-misol. $I = \int \frac{(4x - 3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Suratda ildiz ostidagi ifodaning hosilasini ajratamiz:
 $(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6$. Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(2x - 6) - 3 + 12}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx = 2 \int \frac{(2x - 6)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} + 9 \int \frac{d(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 + 1}} = \\ &= 4\sqrt{x^2 - 6x + 10} + 9 \ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| + C \end{aligned}$$

4) $\int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash

$\int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral $z = -\frac{1}{x - a}$ o'rniga qo'yish orqali

a) bandda qaralgan integralga keltirib hisoblanadi.

9-misol. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$ hisoblang.

Yechish. Bu integralni $z = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{z}, dx = -\frac{dz}{z^2}$ o'rniga qo'yishlarni bajarab,

hisoblaymiz:

$$I = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \frac{1}{z} \sqrt{\frac{5-2z+z^2}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{5-2z+z^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)^2 + 4}} =$$

$$= C - \ln \left| z - 1 + \sqrt{5 - 2z + z^2} \right| = C - \ln \left| \frac{1}{x} - 1 + \sqrt{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right| = C - \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{x} \right|.$$

II.ANIQ INTEGRAL

2.1.Aniq integralning ta'rifi va xossalari

a) *Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi*

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №5

3.Mavzu nomi: Aniq integralning ta'rifi va xossalari

4.Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 2 soat

7.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarda aniq integralga olib keluvchi masalalar, aniq integralning ta'rifi va xossalari haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

8. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

8.1 Integral yig'indi

8.2 Aniq integral

8.3 Egri chiziqli trapetsiya

8.4 Aniq integralning xossalari

8.5 Funksiyaning o'rta qiymati

9.Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

9.1 Integral yig'indini tushuntirish

9.2 Aniq integral iborasini tushuntirish

9.3 Egri chiziqli trapetsiya tusunchasini o'rgatish

9.4 Aniq integralning xossalarini o'rgatish

9.5 Funksiyaning o'rta qiymatini topishni o'rgatish

10. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

- 10.1 Integral yig'indi-bilish
- 10.2 Aniq integral - bilish
- 10.3 Egri chiziqli trapetsiya-tushinish
- 10.4 Aniq integralning xossalari-qo'llash
- 10.5 Funksiyaning o'rta qiymati- qo'llash

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, “Bumerang” usuli

12. Didaktik vositalar: Proektor, slaydlar (№1-Integral yig'indi, №2- Aniq integralning xossalari), tarqatma matnlar (№1- Aniq integralning ta'rifi , №2- Aniq integralning geometrik ma'nosi, №3- Aniq integralning xossalari).

13. Test topshiriqlari:

1. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz, $[a, b]$ kesma n ta $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ bo'lakchalarga bo'lingan bo'lib, Δx_i ularning uzunliklari va $\xi_i \in \Delta x_i$ bo'lsa

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ integral yig'indi deyiladi

B) $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ aniq integral deyiladi

C) $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ aniq integral deyiladi.

D) Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi

2. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

$$A) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

$$B) \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

$$C) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$D) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

$$A) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$B) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$C) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$D) \int_a^b kf(x)dx = \frac{1}{k} \int_a^b f(x)dx.$$

4. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi

B) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx = 0$ bo'ladi

C) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo'ladi

D) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq g(x)$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ bo'ladi.

5. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) Agar $[a, b]$ kesma c nuqta bilan 2 qismga bo'lingan bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

B) Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsa, $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

C) $[a, b]$ kesmada funksiya ning o'rtacha qiymati funksiyaning shu kesmadagi aniq integralini kesma uzunligiga bo'linganiga teng, ya'ni $f_{o'rt} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

D) Barcha tasdiqlar to'g'ri.

6. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

B) Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsa, $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

$$C) \int_a^b f(x)dx < \int_b^a f(x)dx$$

$$D) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) $[a, b]$ kesmada funksiya ning o'rtacha qiymati funksiyaning shu kesmadagi

aniq integralini kesma uzunligiga bo'linganiga teng, ya'ni $f_{o'rt} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$$B) \int_a^b kf(x) dx = \frac{1}{k} \int_a^b f(x) dx$$

C) Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ bo'ladi.

D) Agar $[a, b]$ kesma c nuqta bilan 2 qismga bo'lingan bo'lsa,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

8. Qaysi bandda aniq integralning xossasi keltirilgan?

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$3) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = 1$$

A) hammasi

B) 4

C) 3

D) hech qaysisi

9. $f(x) \geq 0$ bo'lsa, egri chiziqli trapetsiya yuzasi qaysi formula bilan aniqlanadi?

$$A) S = \int_a^b f(x) dx$$

$$B) S = - \int_a^b f(x) dx$$

$$C) S = \int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx$$

$$D) S = \int f(x) dx.$$

b) Tarqatma materiallar

Matnlar

1) Aniq integralning ta'rifi

Aniq integral - matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lib, yuzalar, yoy uzunliklari, hajmlar, ishlar, inersiya momentlarini hisoblash va boshqa masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

$[a, b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi integral yig'indisi $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ bo'lsin (№1-Integral yig'indi slaydiga qarang).

Bo'lishlar soni n ni orttira boramiz. Bunda eng katta interval uzunligi nolga intiladi, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

1-ta'rif. Agar $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ da σ integral yig'indi $[a, b]$ kesmani qismaniy $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har biridan ξ_i nuqtani tanlash usuliga bog'liq bolmaydigan chekli limitga intilsa, u holda bu limit $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

$\int_a^b f(x)dx$ - $f(x)$ dan x bo'yicha a dan b gacha olingan aniq integral deb o'qiladi, bu yerda $f(x)$ - *integral ostidagi funksiya*, $[a, b]$ - *integrallash oralig'i*, a va b - *integrallashning quyi va yuqori chegarasi* deyiladi.

Shunday qilib, ta'rifiga ko'ra
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Aniq integralning ta'rifidan ko'rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo'lmas ekan. Biz quyida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada aniq integralga ega bo'ladi.

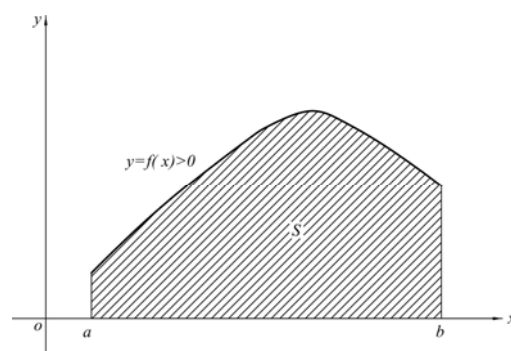
Izoh: Aniq integralning qiymati integral ostidagi ifoda harfga bog'liq emas. Masalan:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt.$$

2) Aniq integralning geometrik ma'nosi

$y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $f(x) > 0$ bo'lsin.

2-ta'rif. Yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'qi bilan, yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi (1-shakl).

Ma'lumki, $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ integral yig'indi asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ va balandliklari mos ravishda $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi (№1-Integral yig'indi slaydiga qarang).



1-shakl

$n \rightarrow \infty$ da $\Delta x_i \rightarrow 0$ va to'g'ri to'rtburchaklar kichraya borib, ularning yuqori asoslaridan tashkil topgan siniq chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigiga yaqinlashadi, to'g'ri to'rtburchaklar egri chiziqli trapetsiyani qoplaydi. Bundan, aniq integralning quyidagi talqindagi *geometrik ma'nosi* kelib chiqadi: $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'qi bilan, yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzasiga son jihatdan teng bo'ladi.

3) Aniq integralning xossalari

Aniq integralning xossalari №2-slaydda keltirilgan.

Keltirilgan xossalardan birini, masalan, 4^o, 6^o, 8^o -xossalarni isbotlaymiz.

4^o-xossaning isboti.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm \varphi(\xi_i)]\Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx \end{aligned}$$

6^o-xossaning isboti . Shartga ko'ra $f(x) \geq \varphi(x)$ bo'lgani uchun $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ bo'ladi va 3^o-xossaga asosan $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx \geq 0$ ni yozish mumkin, bundan

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0 \text{ yoki } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx \text{ i kelib chiqadi .}$$

8^o-xossaning isboti. Shartga kora $m \leq f(x) \leq M$. Bundan, 4^o-xossaga asosan

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx . \text{ Shuningdek, } \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a)$$

$$\text{va } \int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a) \text{ bo'lganligidan, } m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a) .$$

Qolgan xossalar ham shu kabi isbotlanadi.

Slaydlar

1) Integral yig'indi

$[a, b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta qismga bo'lamiz, ularni qismaniy intervallar deb ataymiz;

2) Qismaniy intervallarning uzunliklarini

$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$ bilan belgilaymiz;

3) Har bir qismaniy intervalning ichida bittadan ixtiyoriy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n$ nuqtalarni tanlayamiz;

4) Tanlangan nuqtalarda berilgan funksiyaning qiymatlari $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ ni hisoblaymiz;

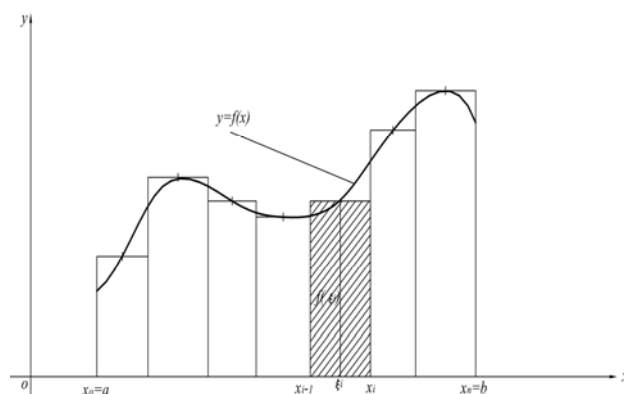
5) Funksiyaning hisoblangan qiymatlarini tegishli qismaniy interval uzunligiga ko'paytmalari $f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, \dots, f(\xi_i)\Delta x_i, \dots, f(\xi_n)\Delta x_n$ larni tuzamiz;

6) Tuzilgan ko'paytmalarni qo'shamiz va yig'indini σ bilan belgilaymiz:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_i)\Delta x_i + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

σ yig'indi $y = f(x)$ funksianing $[a, b]$ kesmadagi *integral yig'indsii* deyiladi.

Integral yig'indining geometrik ma'nosi ravshan: agar $f(x) > 0$ bo'lca, integral yig'indi asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ va balandliklari mos ravishda $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ bo'lgan to'g'ri



2-shakl

to'rtburchak yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi (2-shakl).

2) Aniq integralning xossalari

1°. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2°. Aniq integralning chegaralari teng bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng, ya'ni $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3°. Ozgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish

mumkin, ya'ni $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

4°. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali shu funktsiyalar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng. Masalan, ikki qo'shiluvchi uchun, $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$.

5°. Agar $[a, b]$ kesmada funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda funksiya aniq integralining ishorasi funksiya ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni:

a) agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

b) agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

6°. Agar $[a, b]$ kesmada ikki $f(x) \geq \varphi(x)$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$ bo'ladi.

7°. Agar $[a, b]$ kesma bir necha qismga bo'linsa bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral har bir qism bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan, ikki qism, ya'ni $c \in [a, b]$ uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8°. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$ bo'ladi.

Bu xossa aniq integralni *baholash haqidagi teorema* deyiladi.

9°. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $c \in [a, b]$ nuqta topiladiki $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ bo'ladi.

Bu formulaga *o'rta qiymat formulasi*, $f(c)$ ga $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi *o'rta qiymati* deyiladi.

2.2. Aniq integralni hisoblash

a) Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o’zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo’llashda ko’nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №6

3.Mavzu nomi: Aniq integralni hisoblash

4.Mavzuga oid o’quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg’ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 2 soat

7.Mavzuning o’quv maqsadi: talabalarda aniq integralni hisoblash formulasi va usullarini bilish hamda ularni amalda qo’llashda ko’nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir.

8. Mavzu tayanch so’z va iboralarining nomi:

8.1 Aniq integral yuqori chegarasining funksiyasi

8.2 Yuqori chegara bo’yicha hosila

8.3 N’yuton –Leybnits formulasi

8.4 Aniq integralda o’zgaruvchini almashtirish

8.5 Aniq integralni bo’laklab integrallash

9.Tayanch so’z va iboralarining o’quv maqsadi:

9.1 Aniq integral yuqori chegarasining funksiyasini tushuntirish.

9.2 Yuqori chegara bo’yicha hosilani tushuntirish

9.3 N’yuton –Leybnits formulasini o’rgatish

9.4 Aniq integralda o’zgaruvchini almashtirish usulini o’rgatish

9.5 Aniq integralni bo’laklab integrallash usulini o’rgatish

10.Tayanch so’z va iboralar o’quv maqsadlarining toifasi:

10.1 Aniq integral yuqori chegarasining funksiyasi-bilish

10.2 Yuqori chegara bo'yicha hosila- bilish

10.3 N'yuton –Leybnits formulasi- qo'llash

10.4 Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish- qo'llash

10.5 Aniq integralni bo'laklab integrallash- qo'llash

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, “Bumerang” usuli

12 . Didaktik vositalar: Proektor, tarqatma matnlar (slyaydlar) (№ 1- Yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral, № 2- N'yuton –Leybnits formulasi, №3- Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish, №4- Aniq integralni bo'laklab integrallash Bo'laklab integrallash).

13. Test topshiriqlari:

1. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

A) Aniq integral o'zining yuqori chegarasining funksiyasi ,ya'ni

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(z)dz = I(x)$$

B) Aniq integral $I(x) = \int_a^x f(x)dx$ dan yuqori chegara bo'yicha olingan hosila

integral osti funksiyasiga teng

C) Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun bo'shlang'ich funksiya bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

D) barcha javoblar noto'g'ri.

2. Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.

$$A) \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$B) \int_a^b u dv = u\Big|_a^b + v\Big|_a^b + \int_a^b v du$$

C) Aniq integral $I(x) = \int_a^x f(x)dx$ dan yuqori chegara bo'yicha olingan hosila

integral osti funksiyasiga teng

D) Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun bo'shlang'ich funksiya bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

3. To'g'ri javobni toping

A) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$

B) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$

C) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{5}{3}$

D) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$

4. $\int_1^e \frac{dx}{x}$ aniq integralni hisoblang.

A) 1

B) 2

C) 0

D) 0.3.

5. $\int_0^1 xe^{-x} dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $e - 2$

B) $\frac{e-2}{2}$

C) $\frac{e-2}{e}$

D) $\frac{e+2}{e}$.

6. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{e^2}{2}$

C) $\frac{e-1}{2}$

D) $2e^2$.

7. Tog'ri javobni ko'rsating.

A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0$

C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2$

D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -1$.

8. Tog'ri javobni ko'rsating.

A) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = 4\pi$

B) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \pi$

C) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = 0$

D) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = 1$.

9. $\int_0^1 \arctg x dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

B) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{4}$

C) $\pi - \ln 2$

D) 0.

10. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{32}{3}$

B) $\frac{16}{3}$

C) 1

D) 0.

11. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) 0.

11 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{4-\pi}{4}$ B) $\frac{4-\pi}{2}$ C) $\pi-2$ D) 0.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ aniq integralni hisoblang.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 1.

b) Tarqatma matnlar (sлайdlar)

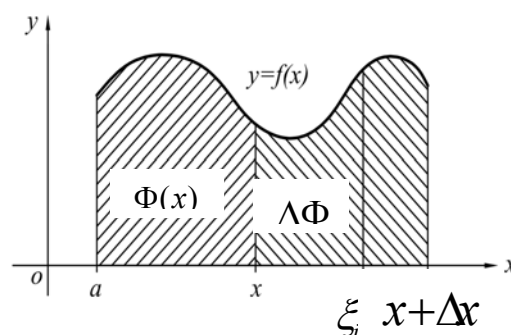
1) Yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral

Aniq integralning quyi chegarasi a tayin qilib belgilansa va yuqori chegarasi x o'zgaruvchi bo'lsa, u holda integralning qiymati ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Agar bu funksiani $\Phi(x)$ bilan belgilasak, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$ hosil bo'ladi. Bu funktsiyaga *yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral* deyiladi.

1-teorema. Agar $f(t)$ funksiya $t = x$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning hosilasi integral osti funksiyasining yuqori chegaradagi qiymatiga teng, ya'ni $\Phi'(x) = f(x)$ yoki

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \text{ bo'ladi.}$$

Isboti. x argumentga Δx orttirma bersak,



3-shakl

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \text{ hosil bo'ladi. 3-shaklga ko'ra}$$

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (1). \text{ O'rta qiymat haqidagi teoremani (1) integralga}$$

$$\text{qo'llasak, } \Delta \Phi = f(c)\Delta x, \quad c \in [x, x + \Delta x] \text{ kelib chiqadi. Bundan, } \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(c)$$

$$\text{va } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \text{ yoki } \Phi'(x) = f(x), \text{ chunki } \Delta x \rightarrow 0 \text{ da } c \rightarrow x \text{ va } f(t) \text{ funksiya } t = x$$

nuqtada uzluksiz.

Teoremdan $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lishligi kelib chiqadi, chunki $\Phi'(x) = f(x)$.

2) N'yuton –Leybnits formulasi

Aniq integrallarni integral yigindining limiti sifatida bevosita hisoblash ko'p hollarda uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda kam qo'llaniladi. Su sababli, Integrallarni hisoblash N'yuton - Leybnits teoremasi bilan beriladi.

2-teorema. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralag'idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2).$$

(2) tenglik aniq integralni hisoblashning asosiy formulasi (Nyuton — Leybnits formulasi) deyiladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi. Shuningdek $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$ funksiya ham $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $\Phi'(x) = f(x)$.

Ma'lumki, berilgan funksianing ikkita boshlang'ich funksiyasi bir - biridan o'zgarmas C qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni $\Phi(x) = F(x) + C$. Shu sababli,

$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Bundan, $x = a$ da $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, yoki $\int_a^a f(x)dx = 0$ bo'lishligini inobatga olsak, $C = -F(a)$ kelib chiqadi.

Demak, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Endi $x = b$ desak, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ni hosil qilamiz. Agar $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ belgilash kiritilsa, oxirgi formulani quyidagicha yozish mumkin $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

(2) tenglik aniq integralni hisoblashning asosiy formulasi yoki *N'yuton -*

Leybnits formulasi deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralni bevosita integral yig'indi limiti sifatida emas, balki N'yuton - Leybnits formulasi bo'yicha hisoblash maqsadga muvofiq. Buning uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topiladi va so'ngra integrallash intervalida uning orttirmasini hisoblanadi.

1-misol. $\int_0^{\pi} \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$.

2-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblang

Yechish. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$.

3-misol. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 1$.

3) Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

3-teorema. $x = \varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va differentsiallanuvchi hamda $[a, b]$ kesma bu funksiyaning qiymatlar sohasi bo'lib, bu kesmada $f(x)$ funksiya aniqlangan, y'ani $[\alpha, \beta]$ kesmada $f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya aniqlangan va $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ (3) formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F(x)$ va $F[\varphi(t)]$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan bo'lib, shu sohada $F'(x) = f(x)$ bo'lsin. U holda $(F[\varphi(t)])' = F[\varphi(t)]'_x \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ bo'ladi. Bundan, N'yuton - Leybnits formulasiga asosan

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

kelib chiqadi. Bu formulaga *aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi*

deyiladi.

Aniq integralni (3) formula bo'yicha hisoblashda yangi o'zgaruvchidan eski o'zgaruvchiga qaytish shart emas, balki yangi o'zgaruvchining chegaralarini keyingi boshlang'ich funksiyaga qo'yish kerak.

4-misol. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x+1=t^2$ ko'rinishda o'zgaruvchini almashtiramiz. Bundan, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$. Integrallashning yangi chegaralarini aniqlaymiz: $x=3$ da $t=2$, $x=8$ da $t=3$.

$$\text{Demak, } \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1) \cdot 2tdt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2 \left(6 - \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

5-misol. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $x=0$ da $t=0$, $x=1$ da $t=\frac{\pi}{2}$ larni inobatga

$$\text{olsak, } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

4) Aniq integralni bo'laklab integrallash

4-teorema. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar qandaydir $[a, b]$ kesmada

aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lib, bu kesmada $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ aniq integral

mavjud bo'lsin. U holda, $[a, b]$ kesmada $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ aniq integral ham mavjud

bo'ladi va $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ (4) formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ tenglikdan $u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x)$ $[u(x)v(x)]'$ va $u'(x)v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada aniq integralga ega bo'lganligi sababli, $v'(x)u(x)$ ham aniq integralga ega bo'ladi va oxirgi tenglikning chap va o'ng tomonini integrallasak (4) formula kelib chiqadi. Bu formulaga *aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

6-misol. $\int_0^1 \arctg x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_0^1 \arctg x dx = \left| \begin{matrix} u = \arg tg x, & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{matrix} \right| = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} =$

$$= \arctg 1 - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

7-misol. $\int_0^1 x e^{-x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x} dx, & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| - x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2.3. Xosmas integrallar

a) Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o’zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo’llashda ko’nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №7

3.Mavzu nomi: Xosmas integrallar

4.Mavzuga oid o’quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg’ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 2 soat

7.Mavzuning o’quv maqsadi: talabalarda chegarasli cheksiz bo’lgan va chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari haqida bilim, ko’nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir.

8. Mavzu tayanch so’z va iboralarining nomi:

8.1 Chegarasi cheksiz xosmas integrallar

8.2 Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari

- 8.3 Yaqinlashuvchi xosmas integrallar
- 8.4 Uzoqlashuvchi xosmas integrallar
- 8.5 Taqqoslash alomatlari
- 8.6 Absolyut va shartli yaqinlashish

9. Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

- 9.1 Chegarasi cheksiz xosmas integrallarni tushuntirish
- 9.2 Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallarni tushuntirish
- 9.3 Yaqinlashuvchi xosmas integrallarni tushuntirish
- 9.4 Uzoqlashuvchi xosmas integrallarni tushuntirish
- 9.5 Taqqoslash alomatlarini o'rgatish
- 9.6 Absolyut va shartli yaqinlashishni o'rgatish

10. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

- 10.1 Chegarasi cheksiz xosmas integrallar -bilish
- 10.2 Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari- bilish
- 10.3 Yaqinlashuvchi xosmas integrallar - tushunish
- 10.4 Uzoqlashuvchi xosmas integrallar- tushunish
- 10.5 Taqqoslash alomatlari- qo'llash
- 10.6 Absolyut va sgartli yaqinlashish-bilish

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, "FSMU" usuli

12 . Didaktik vositalar: Proektor, tarqatma matnlar(slaydlar) (№1- Chegarasi cheksiz xosmas integrallar, №2- Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari, №3- Taqqoslash alomatlari №4- Absolyut va sartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar

13. Test topshiriqlari:

1. Yaqinlashuvchi xosmas integralni aniqlang.

$$A) \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad B) \int_0^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx \quad C) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \quad D) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

2. Yaqinlashuvchi xosmas integralni aniqlang.

$$A) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad B) \int_0^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx \quad C) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad D) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

3. *Yaqinlashuvchi xosmas integralni aniqlang.*

A) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ B) $\int_0^{\frac{x}{3}} e^{\frac{x}{3}} dx$ C) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ D) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4. *Uzoqlashuvchi xosmas integralni aniqlang.*

A) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ B) $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$ C) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ D) *to'g'ri javob yo'q.*

5. *Uzoqlashuvchi xosmas integralni aniqlang.*

A) $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ B) $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ C) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ D) *to'g'ri javob yo'q.*

6. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ *yaqinlashuvchi xosmas integralning qiymatini aniqlang.*

A) 9 B) 8 C) 3 D) 6

7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *yaqinlashuvchi xosmas integralning qiymatini aniqlang.*

A) π B) 0 C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{4}$.

8. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *yaqinlashuvchi xosmas integralni qiymatini aniqlang.*

A) 4 B) 5 C) 0 D) 2.

9. *Noto'g'ri tasdiqni aniqlang.*

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, \infty)$ intervalda uzluksiz bo'lsa va bu intervalda $0 \leq f(x) \leq g(x)$ shart o'rinli bo'lsa, u holda ...

A) Agar $\int_a^{\infty} g(x) dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ uzoqlashuvchi bo'ladi

B) Agar $\int_a^{\infty} g(x) dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi

C) Agar $\int_a^{\infty} f(x) dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} g(x) dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi

D) Barcha tasdiqlar to'g'ri emas

10. *To'g'ri tasdiqni aniqlang.*

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, \infty)$ intervalda uzluksiz bo'lsa va bu intervalda $0 \leq f(x) \leq g(x)$ shart o'rinli bo'lsa, u holda:

A) Agar $\int_a^{\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi

B) Agar $\int_a^{\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'ladi

C) Agar $\int_a^{\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi

D) Barcha tasdiqlar to'g'ri.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchiligini tekshirish uchun

mos funksiya aniqlansin.

A) $f(x) = e^{-x}$ B) $f(x) = e^x$ C) $f(x) = e^{-x^3}$ D) bunday funksiya yo'q.

12. Shartli yaqinlashuvchi xosmas integralni aniqlang.

A) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ B) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ C) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ D) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$

b) Tarqatma materiallar

Matnlar

1) Chegarasi cheksiz xosmas integrallar

Biz aniq integralni integrallash oralig'i chekli hamda integral ostidagi funksiya berilgan kesmada uzluksiz bo'lgan hollarda hisoblashni o'rgangan edik. Integrallash oralig'i cheksiz hamda integral ostidagi funksiya berilgan kesmada uzilishga ega bo'lgan hollarda hisoblanadigan aniq integrallar *xosmas integrallar* deyiladi. Xosmas integrallar ikki turga bo'linadi: chegarasi cheksiz xosmas integrallar va chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari.

1-ta'rif. $[a, +\infty)$ yarim intervalda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali yuqori chegarasi cheksiz xosmas integral deyiladi, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi

va $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ (1) tenglik bilan aniqlanadi.

Agar (1) formulada o'ngda turgan limit mavjud bo'lsa, xosmas integral *yaqinlashuvchi* deyiladi va bu limit integralning qiymati sifatida qabul qilinadi.

Agar ko'rsatilgan limit mavjud bo'lmasa, xosmas integral *uzoqlashuvchi* deyiladi.

Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishligini

$$\text{aniqlash uchun } \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a)$$

qiymat tekshiriladi. Agar bu qiymat chekli bo'lsa xosmas integral *yaqinlashuvchi*, aks holda xosmas integral *uzoqlashuvchi* bo'ladi.

1-misol. $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

$$\textbf{Yechish. } I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{k} e^{-kx} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{k} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-kb} - 1).$$

Agar $k > 0$ bo'lsa, $I = \frac{1}{k}$ integral yaqinlashuvchi, $k \leq 0$ bo'lsa, $I = \infty$ integral uzoqlashuvchi.

2-misol. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$, $m = \text{const}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

$$\textbf{Yechish. } m = 1 \text{ da, } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = \infty, m \neq 1 \text{ da}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} \Big|_1^{+\infty} \text{ ga ega bo'lamiz. Bunda, } m > 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{m-1}, m < 1 \text{ bo'lsa,}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \infty$. Shunday qilib, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ xosmas integral $m > 1$ da yaqinlashuvchi, $m \leq 0$ da uzoqlashuvchi bo'ladi.

$(-\infty, b]$ yarim intervalda uzluksiz bo'lgan funksiyaning xosmas integrali

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty) \text{ formula bilan aniqlanadi.}$$

Agar $f(x)$ funksiya butun sonlar o'qida uzluksiz bo'lsa, u holda

umumlashgan xosmas integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ (2), bu yerda c - ixtiyoriy tayinlangan nuqta, kabi aniqlanadi. Agar tenglikning o'ng tomonida turgan har ikkala integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda chap tomondagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3- misol. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. (2) tenglikda $c = 0$ deb faraz qilib, quyidagini hosil qilamiz: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Tenglikning o'ng qismidagi xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-\infty}^0 = \arctg 0 - \arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \arctg(+\infty) - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Demak, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Integral yaqinlashuvchi va uning qiymati π ga teng.

4-misol. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $c = 0$ da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx$. Bu erda, $\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 = e^0 - e^{-\infty} = 1$

va $\int_0^{+\infty} e^x dx = e^x \Big|_0^{+\infty} = e^{+\infty} - e^0 = \infty$. Demak, integral uzoqlashuvchi.

Aniq integralning eng sodda xossalari hech qanday o'zgarishsiz yaqinlashuvchi xosmas integralga ham o'tadi. Masalan, $y=f(x)>0$ bo'lsa,

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu integralning qiymati

cheksiz egri chiziqli trapesiyaning yuziga teng bo'ladi.

2) Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari

1-ta'rif. $(a, b]$ yarim intervalda uzluksiz ba $x = a$ da aniqlanmagan yoki II tur uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi

va $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (4) tenglik bilan aniqlanadi.

Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishligini aniqlash uchun $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - F(a)$ qiymat tekshiriladi.

Agar bu qiymat chekli bo'lsa xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$[a, b)$ intergaldagi uzluksiz va $x = b$ da aniqlanmagan yoki II tur uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a), \text{ bu yerda } F(b), F(x)$$

boshlang'ich funksiyaning $x \rightarrow b$ dagi limiti.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning biror-bir $x = c$ oraliq nuqtasida uzilishga ega yoki aniqlanmagan bo'lsa, u holda xosmas integral $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (4) kabi aniqlanadi. Agar tenglikning o'ng tomonida turgan har ikkala integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda chap tomondagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

5-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x \rightarrow 1$ da $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow \infty$ va $x = 1$ nuqta $[0, 1]$ kesmaning ung

oxirida yotadi. Shu sababli, $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\ln|1-x| \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln 1 \right],$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} = \infty$. Demak, integral uzoqlashuvchi.

6-misol. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$, $x = 0$ nuqta $[0,4]$ kesmaning chap oxirida

yotadi. Shu sababli, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^4 = 4 - 0 = 4$. Demak, integral yaqinlashuvchi.

7-misol. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow \infty$ va $x = 0$ nuqta $[-1,8]$ kesmaning ichida

joylashgan. Shu sababli, (4) formulaga binoan, $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

O'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi, chunki

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^0 = 0 + 3 = 3$, $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \Big|_0^8 = 6$. Bundan, $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 + 6 = 9$, ya'ni xosmas

integral yaqinlashuvchi.

8- misol. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow \infty$ va $x = 0$ nuqta $[-1,1]$ kesmaning

ichida yotadi. Shu sababli, (4) formulaga binoan, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

O'ng tomondagi ikkala xosmas integral ham uzoqlashuvchi, chunki

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 = -\infty - 1 = -\infty$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = -1 + \infty = +\infty$. Demak, integral uzoqlashuvchi.

3) Taqqoslash alomatlari

Berilgan funksiyalarning boshlang'ich funktsiyasi noma'lum bo'lsa, u holda xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligi haqidagi masalani hal qilish qiyin bo'ladi.

Bunday hollarda boshlang'ich funksiyalarni bilishni talab etmaydigan maxsus alomatlardan foydalanib, integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash mumkin.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo'lsa va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda

a) agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. a) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va M ga teng ya'ni

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x)dx = M \text{ bo'lsin.}$$

Shartga ko'ra $\varphi(x) > 0$ bo'lgani uchun geometrik nuqtai nazardan b ning o'sishi bilan $\int_a^b \varphi(x)dx$ integral ham o'sadi. Ammo, limitga ega bo'lgan o'suvchi

funksiya shu limit bilan chegaralanadi, ya'ni $\int_a^b \varphi(x)dx \leq M$.

$f(x) \leq \varphi(x)$ shartga binoan, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \leq M$. Bundan, $\int_a^b f(x)dx \leq M$, ya'ni

integralning chegaralanganligi kelib chiqadi. Shuningdek, $\int_a^b f(x)dx$ funksiya o'suvchi, chunki $f(x) > 0$. O'suvchi funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda u limitga ega bo'ladi. Demak, $\int_a^b f(x)dx$ integral limitga ega, ya'ni yaqinlashuvchi.

b) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ funksiya uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x)dx$ o'suvchi

funksiya cheksizlikka intiladi. $\int_a^b \varphi(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$ bo'lgani uchun $\int_a^b \varphi(x)dx$ funksiya

ham cheksizlikka intiladi, ya'ni $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ko'rinishdagi integral uchun ham shu kabi teorema o'rinli.

9-misol. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x > 1$ da $\frac{1}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$ o'rinli. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}$ integral

yaqinlashuvchi (2-misolga qarang). Demak, 1-teoremaga asosan, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}$ integral yaqinlashuvchi.

10-misol. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x > 1$ bo'lganda $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ tengsizlik o'rinli.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral uzoqlashuvchi (2- misolda $m = \frac{1}{2} < 1$). Demak, 1-teoremaga asosan,

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ integral ham uzoqlashuvchi.

11-misol. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x > 1$ da $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ tengsizlik o'rinli. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ integral

yaqinlashuvchi (1-misolga qarang). Demak, 1-teoremaga asosan, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integral,

va shuningdek, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integral ham yaqinlashuvchi. $y = e^{-x^2}$ funksiyaning

juftligidan $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

integral yaqinlashuvchi.

4) Absolyut va sarti yaqinlashuvchi xosmas integrallar

Taqqoslash teoremasi faqat nomanfiy funksiyalarga tegishli. Ishorasini saqlamaydigan funksiyalarning xosmas integrallari uchun o'rinli bo'ladigan alomatlar bilan tanishamiz.

Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral

ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bunda oxirgi integral *absolut yaqinlashuvchi integral* deb ataladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral yaqinlashuvchi, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral esa uzoqlashuvchi

bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral *shartli yaqinlashuvchi integral* deb ataladi.

12-misol. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ xosmas integrallarni yaqinlashishga

tekshiring.

Yechish. Integral ostidagi funksiyalar $\left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, $\left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$

shartlarni qanoatlantiradi. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} dx$, integral yaqinlashuvchi (3-misolga qarang).

Shu sababli, $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| dx$, $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan xosmas integrallar absolyut yaqinlashuvchi.

2.4. Aniq integralning tadbiqu

a) Mavzusining pedagogik texnologik xaritasi

1.Fanning umumiy maqsadi: “Oliy matematika” fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir

2.Mavzuning tartibi: №8

3.Mavzu nomi: Aniq integralning tadbiqu

4.Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

4.1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- tom, T.: 1994- 496 b.

4.2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- tom, T.: 1996- 640 b.

4.3. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

5. Ma'ruzaga ajratilgan vaqt: 2 soat

6. Amaliy mashg'ulot(laboratoriya)ga ajratilgan vaqt- 4 soat

7.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarda matematika va fizikaning ba'zi masalalariga aniq integralning tadbqiqini o'rganishda bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni shakllantirishdir.

8. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

- 8.1 Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash
- 8.2 Egri chiziqli sektor yuzasini hisoblash
- 8.3 Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash
- 8.4 Aylanma jism sirtini hisoblash
- 8.5 Jism hajmini hisoblash
- 8.6 O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash

9.Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

- 9.1 Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblashni o'rganish
- 9.2 Egri chiziqli sektor yuzasini hisoblashni o'rganish
- 9.3 Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblashni o'rganish
- 9.4 Aylanma jism sirtini hisoblashni o'rganish
- 9.5 Jism hajmini hisoblashni o'rganish
- 9.6 O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblashni o'rganish

10.Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadlarining toifasi:

- 10.1 Yassi figura yuzasini hisoblash-qo'llash
- 10.2 Egri chiziqli sektor yuzasini hisoblash -qo'llash
- 10.3 Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash-qo'llash
- 10.4 Aylanma jism sirtini hisoblash-qo'llash
- 10.5 Jism hajmini hisoblash-qo'llash
- 10.6 O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash-qo'llash

11. O'qitish texnologiyalari: muammoli, "Bumerang" usuli

12. Didaktik vositalar: Proektor, tarqatma matnlar (№1- Yassi figura yuzasini hisoblash, №2- Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash, №3-Aylanma jism sirtini hisoblash, №4- Jism hajmini hisoblash, №5- O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash).

13.Test topshiriqlari:

1. $y = 2x$, $y = 0$, $x = 3$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $9(kv.b)$ B) $10(kv.b)$ C) $12 (kv.b)$ D) $14(kv.b)$.
2. $y = x$, $y = 0$, $x = -2$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $8(kv.b)$ B) $10(kv.b)$ C) $6 (kv.b)$ D) $14(kv.b)$.
3. $y = -3x$, $y = 0$, $x = 4$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $6(kv.b)$ B) $1(kv.b)$ C) $4 (kv.b)$ D) $10(kv.b)$.
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $\pi ab (kv.b)$ B) $\frac{\pi}{3} ab (kv.b)$ C) $\frac{\pi}{2} ab (kv.b)$ D) $4ab (kv.b)$.
5. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ va $x = \pi$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $2(kv.b)$ B) $1(kv.b)$ C) $3 (kv.b)$ D) $4(kv.b)$.
6. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ va $x = \pi$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $1(kv.b)$ B) $2 (kv.b)$ C) $3 (kv.b)$ D) $4(kv.b)$.
7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellips bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.
 A) $15\pi (kv.b)$ B) $\frac{11\pi}{3} (kv.b)$ C) $\frac{7\pi}{2} (kv.b)$ D) $3\pi (kv.b)$
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid hajmini hisoblang.
 A) $\frac{4}{3}\pi abc (kub.b)$ B) $\frac{\pi}{3} abc (kub.b)$ C) $\frac{\pi}{2} abc (kub.b)$ D) $4\pi abc (kub.b)$.
9. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsning ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.
 A) $\frac{320}{3}\pi (kub.b)$ B) $\frac{310}{3}\pi (kub.b)$ C) $100\pi (kub.b)$ D) $\frac{311}{\pi} (kub.b)$.
10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsning oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

A) $\frac{400}{3}\pi$ (kub.b) B) $\frac{200}{3}\pi$ (kub.b) C) 100π (kub.b) D) $\frac{109}{\pi}$ (kub.b).

11. $y = x^2$ parabolaning $O(0,0)$ va $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini hisoblang.

A) 1.196 (uz.b) B) 2.121(uz.b) C) 3.21 (uz.b) D) 4.125(uz.b).

12. $y = 4 - x^2$ parabolaning OX o'qi bilan kesishish nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini hisoblang.

A) $2\sqrt{17} + 0.5\ln(4 + \sqrt{17})$ (uz.b) B) $2\ln(3 + \sqrt{10})$ (uz.b)
C) $2\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{5})$ (uz.b) D) 4 (uz.b) .

13. $y = \frac{x^2}{2}$ parabolaning $O(0,0)$ va $A(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini hisoblang.

A) 2.4 (uz.b) B) 3.2 (uz.b) C) 4.3 (uz.b) D) 4.9(uz.b) .

14. Vintli prujinani x siqish, qo'yilgan F kuchga proporsional bo'lsa va uni 0.01 m siqish uchun 10H kuch sarflansa F kuchning bajargan ishini toping.

A) 0.8 Dj B) 0.2 Dj C) 0.5Dj D) 2D.j

15. Prujina tinch xolatda 0.2m uzunlikka ega, 50H kuch uni 0.01m ga uzaytirsam prujinani 0.22m dan 0.32m ga cho'zishda bajariladigan ishni hisoblang.

A) 35 Dj B) 40 Dj C) 5Dj D) 20Dj.

16. Prujinani 0.05m siqish uchun 25 Dj ish sarflandi. Prujinani 0.1m siqish uchun sarflanadigan ishni hisoblang.

A) 100 Dj B) 50 Dj C) 200Dj D) 25Dj.

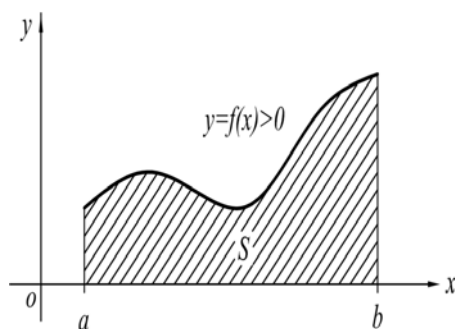
b) Tarqatma materiallar

Matnlar

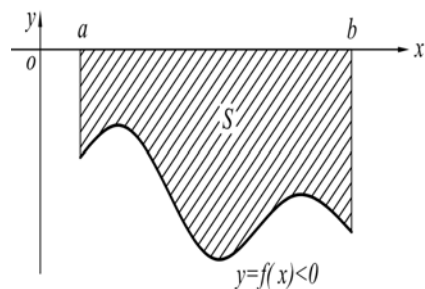
1) Yassi figura yuzasini hisoblash

a) Figuralar yuzasini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash. Ma'lumki, aniq integralning ta'rifiga asosan, $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral yuqoridan $f(x) > 0$ funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'qi bilan, yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzasiga son jihatdan teng, ya'ni

$S = \int_a^b f(x)dx$ bo'ladi (1-shakl).



1-shakl.



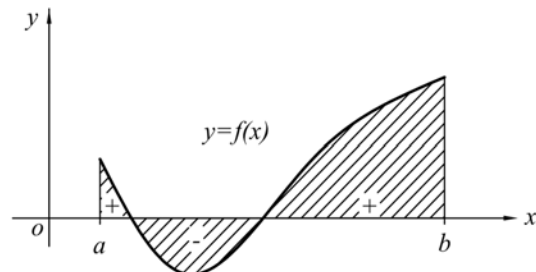
2-shakl.

Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, u holda aniq integral $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo'ladi.

Absolut kattaligiga ko'ra u tegishli trapetsiyaning yuziga teng (2-shakl), shu sababli

$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$ bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'z ishorasini chekli son marta almashtirsa, u holda butun kesma bo'yicha olingan integralni xususiy kesmalar bo'yicha olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Bunda, $f(x) > 0$ bo'lgan kesmalarda integral musbat, $f(x) \leq 0$ bo'lgan kesmalarda integral manfiy bo'ladi. Butun kesma bo'yicha olingan integral



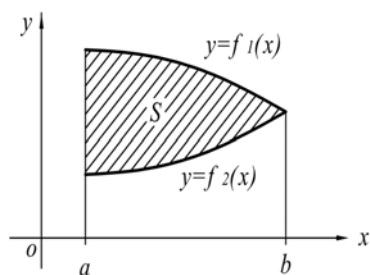
3-shakl.

Ox o'qidan yuqorida va quyida yotuvchi yuzalarning tegishli algebraik yig'indisini beradi. Yuzalarning yig'indisini hosil qilish uchun ko'rsatilgan kesmalar bo'yicha olingan integrallarning absolyut kattaliklari yig'indisini topish yoki

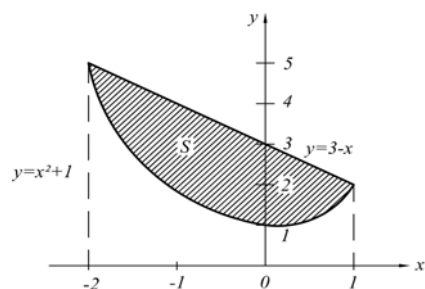
$S = \int_a^b |f(x)|dx$ integralni hisoblash kerak bo'ladi (3-shakl).

Shu singari, $y_1 = f_1(x)$ va $y_2 = f_2(x)$ egri chiziqlar, bu erda $f_1(x) \geq f_2(x)$, hamda $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya

(4-shakl) yuzasi $S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$ formula orqali hisoblanadi.



4-shakl.



5-shakl.

2-misol. $y = \cos x$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzasini hisoblang, bunda $x \in [0, 2\pi]$.

Yechish. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ va $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ da $\cos x \geq 0$ hamda $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ da $\cos x \leq 0$ bo'lgani uchun

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= \sin \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left| \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left| \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right| + \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} =$$

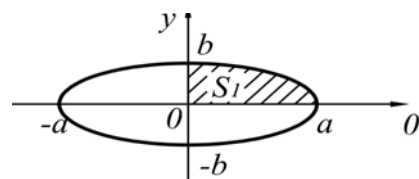
$$= 1 - 0 + |-1 - 1| + 0 - (-1) = 4 \text{ (kv.birl.)}.$$

3-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan figuraning yuzasini hisoblang.

Yechish. Ellipsning koordinata o'qlariga nisbatan simmetriyasidan foydalanib (6-shakl) izlanayotgan figuraning yuzasi $S = 4S_1$

bo'lishligini topamiz, ya'ni $S = 4 \int_a^b y dx$, bunda,

$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ellipsning I chorakdagi tenglamasi.



6-shakl

Shunday qilib, $S = \frac{4b}{a} \int_a^b \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

$x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$, $x = 0$ da $t = 0$, $x = a$ da $t = \frac{\pi}{2}$ larni inobatga olsak,

$$S = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= 2ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Shunday qilib, ellips bilan chegaralangan figuraning yuzasi $S = \pi ab$ (kv. birl.)ga teng. Xususan, agar $a = b$ bo'lsa, doiraning yuzasi $S = \pi a^2$ (kv.birl.) hosil bo'ladi.

Agar egri chiziqli trapetsiya $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ parametrik tenglama bilan berilgan

chiziq bilan chegaralangan bo'lsa (bunda $t \in [\alpha, \beta]$ va $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$), u holda bu tenglamalar $[a, b]$ kesmada biror $y = f(x)$ funksiyani aniqlaydi. Egri chiziqli

trapetsiyaning yuzasi $S = \int_a^b y dx$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu integralda

o'zgaruvchini almashtsak, $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$ kelib chiqadi. Bu formula chiziq parametrik

tenglamalar bilan berilganda egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblash formulasi bo'ladi.

4-misol. Ox o'q va $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

tsikloidaning bir arkasi bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang.

Yechish. $S = \int_0^{2\pi a} y dx = \left| \begin{matrix} y = a(1 - \cos t), & x = a(t - \sin t), & dx = a(1 - \cos t) dt, \\ x = 0 & da & t = 0, & x = 2\pi a & da & t = 2\pi \end{matrix} \right| =$

$$S = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

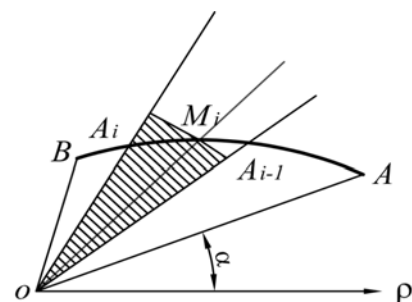
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2 \text{ (kv.birl.)}.$$

b) *Figuralar yuzasini qutb koordinatalarda hisoblash.* AB egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho = \rho(\varphi)$ ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) formula bilan berilgan bo'lsin, bunda $\rho(\varphi)$ funksiya $[a, \beta]$ kesmada uzluksiz.

$\rho = \rho(\varphi)$ tenglama bilan berilgan egri chiziq va qutb o'qlari bilan α hamda β burchak hosil qiluvchi $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ nurlar bilan chegaralangan figuraga *egri*

chiziqli sektor deyiladi.

Bu sektorning yuzasini aniqlash uchun uni $\varphi = \alpha, \varphi = \varphi_1, \dots, \varphi = \varphi_i, \dots, \varphi = \beta$ nurlar bilan n ta qismga bo'lamiz. Nurlar orasidagi burchaklarni $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_n$ bilan, yuzalarni $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ bilan belgilaymiz.



7-shakl.

U holda egri chiziqli sektorning yuzasi

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \text{ ga teng bo'ladi.}$$

ΔS_i yuzani hisoblaymiz. Buning uchun har bir kichik egri chiziqli sektorning ichida

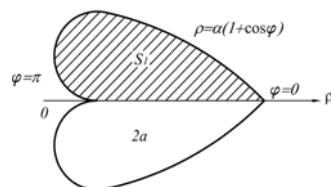
φ ($\varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i$) nur o'tkazamiz (7-shakl). Nurning egri chiziq bilan kesishgan nuqtasini N_i bilgn belgilaymiz. U holda $ON_i = \rho_i$. Har bir $A_{i-1}N_iA_i$ kichik egri chiziqli sektorni $\rho(\varphi_i) = \rho_i$ radius bilan chizilgan tashqi doiraviy sektorga almashtiramiz. Har bir doiraviy sektorning yuzasi $\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$ ga teng va u kichik egri chiziqli sektor yuzasining taqribiy qiymatini beradi.

Demak, $\Delta S_i \approx \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$. Bundan, $S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$. S yuzaning aniq qiymati bu yig'indining $\Delta\varphi \rightarrow 0$ dagi limitiga teng bo'ladi. Ammo, bu yig'indi $[a, \beta]$ kesmada $\rho^2(\varphi)$ funksiya uchun integral yig'indi bo'ladi, shu sababli,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

5-misol. $\rho = a(1 + \cos \varphi), a > 0$ kardioda bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish. Kardioda qutb koordinatasiga nisbatan simmetrik bo'lganligi sababli (8-shakl),



8-shakl.

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \text{ Bundan,}$$

$$S = \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (kv.birl.)}$$

2) Egri chiziqli yoy uzunligini hisoblash

a) Yoy uzunligini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash. AB yassi egri chiziqli $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin, bu erda, $y = f(x)$ $[a, b]$

kesmada uzluksiz funksiya. AB yassi egri chiziqli

$A = N_0, N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, N_i, \dots, N_n = B$ nuqtalar

bilan ixtiyoriy n bo'lakka bo'lamiz

(9-shakl). Qo'shni bo'linish nuqtalarini

kesmalar bilan tutashtirib AB yoyga ichki chizilgan siniq chiziqli hosil qilamiz.. Bu

siniq chiziqli $AN_1, N_1N_2, \dots, N_{i-1}N_i, \dots, N_{n-1}B$ bo'g'inlardan iborat bo'ladi, ularning

uzunliklarini $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_i, \dots, \Delta l_n$ bilan, ulardan eng kattasini esa μ bilan

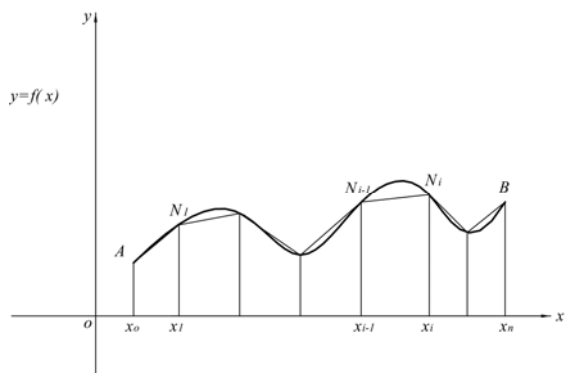
belgilaymiz. U holda siniq chiziqli perimetri $P = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$ ga teng bo'ladi.

n ortishi bilan Δl_i kamayadi, ya'ni $\mu \rightarrow 0$. $\mu \rightarrow 0$ da siniq chiziqli perimetrining limiti AB egri chiziqli uzunligiga yaqinlashadi.

1-ta'rif. AB egri chiziqli l uzunligi deb AB egri chiziqliqa ichki chizilgan siniq chiziqli perimetrining siniq chiziqli bo'g'inlari soni cheksiz ortganda va eng katta bo'g'inning uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi, ya'ni $L = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i$ bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ hosila bilan birga uzluksiz bo'lsa, u holda $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ (1) ga teng bo'ladi.

Isboti. N_i nuqtaning koordinatalari x_i va $f(x_i)$ bo'lsin. U holda, bo'linish



9-shakl.

nuqtalari mos ravishda $a = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ absissalarga ega bo'ladi.

U holda har bir bo'g'inning uzunligi $\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.

Lagranj teoremasiga ko'ra, $f(x_i) - f(x_{i-1}) + f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Bundan, $P = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (2).

Bu yig'indi $[a, b]$ kesmada $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funksiya uchun tuzilgan integral yig'indi bo'ladi. $y = f(x)$ va $f'(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksizligidan bu funksiya shu kesmada uzluksiz bo'ladi, shuning uchun $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ da aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema ko'ra (2) integral yig'indi (1) integralga teng, ya'ni $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

6-misol. Yarimkubik parabola $y = x^{3/2}$ ning $x = 0$ va $x = 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi yoyi uzunligini toping.

Yechish. $y = x^{3/2}$ dan $y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$. Bundan, (1) formulaga ko'ra

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27} \text{ (uz.birl.)}$$

Agar AB yassi egri chiziq $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ parametrik tenglama bilan berilgan

bo'lsa (bunda $t \in [\alpha, \beta]$ va $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$), u holda bu tenglamalar $[a, b]$ kesmada

biror $y = f(x)$ funksiyaning aniqlaydi. $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ integralda o'zgaruvchini

almashtirsak, $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ (3) kelib

chiqadi. Bu formula yassi egri chiziq parametrik tenglamalar bilan berilganda uni yoyi uzunligini hisoblash formulasi bo'ladi.

7-misol. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ tsikloida bir arkasi yoyining uzunligini toping.

Yechish.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \left| \begin{array}{l} y = a(1 - \cos t), \quad x = a(t - \sin t), \quad dx = a(1 - \cos t)dt, \\ x = 0 \text{ da } t = 0, \quad x = 2\pi a \text{ da } t = 2\pi \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(x) + \psi'^2(x)} dx = \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \text{ (uz.birl.)}.$$

B) Yoy uzunligini qutb koordinatalarida hisoblash.

AB yassi egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho = \rho(\varphi)$ ($x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$) formula bilan berilgan bo'lsin, bunda $\rho(\varphi)$ funksiya $[a, \beta]$ kesmada $\rho'(\varphi)$ hosilasi bilan uzluksiz.

Qutb koordinatadan Dekard koordinataga o'tamiz: $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

U holda, $x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, y'(\varphi) = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi$. Bundan, (3)

formulaga asosan, $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$ kelib chiqadi.

8-misol. $\rho = a(1 + \cos \varphi), a > 0$ kardioida uzunligini hisoblang:

Yechish. Kardioida qutb koordinatasiga nisbatan simmetrik bo'lganligi

sababli (8-shakl), $L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi =$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a \text{ (uz.birl.)}.$$

(1) formulada integrallashning quyi chegarasi a o'zgarmas bo'lib, yuqori chegarasi x o'zgarsin, ya'ni $L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$ bo'lsin. Aniq integralning o'zgaruvchi yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi haqidagi teorema asosan,

$$L'(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \right)' = \sqrt{1 + f'^2(x)} \text{ yoki } dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \text{ kelib chiqadi.}$$

Bu formulalarga *egri chiziq yoyining differentsialini* topish formulalari deyiladi.

3) Aylanma jism sirti yuzasini hisoblash

AB egri chiziq $y = f(x), a \leq x \leq b$ tehlama bilan berilgan bo'lsin va $y = f(x)$ funksiya o'zining 1-tartibli hosilasi bilan $[a, b]$ kesmada uzluksiz va mahfiy bo'lmasin. U holda AB egri chiziqning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan

sirt $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ (4) formula bilan aniqlanuvchi S yuzaga ega bo'ladi.

Bu tasdiqning isbotini qaramaymiz.

Agar sirt $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$, tehlama bilan berilgan AB egri chiziqning Oy oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan bo'lsa, u holda uning yuzasi $S = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy$ (5) formula bilan aniqlanadi.

9-misol. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \leq x \leq b$, $b - a = H$ tehlama bilan berilgan egri chiziqning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzasini toping.

Yechish. $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, u holda $1 + [f'(x)]^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$. Bundan, (4)

formulaga asosan, $S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b - a) = 2\pi RH$ (kv.birl.).

Agar sirt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ parametrik tehlamlar bilan berilgan AB egri chiziqning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan bo'lsa va $\psi(t) \geq 0$, shuningdek t α dan β gacha u'zgarganda $\varphi(t)$ a dan b gacha u'zgaradigan bo'lsa, u holda (4) formulada $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ o'zgaruvchini almashtirib,

$S = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$. (6) formulani hosil qilamiz.

Agar egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, tehlama bilan berilgan bo'lib, $\rho(\varphi)$ funktsiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda (4) formulada $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, o'zgaruvchini almashtirib,

$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$. (7) formulani hosil qilamiz.

10-misol. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ tsikloidaning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzasini toping.

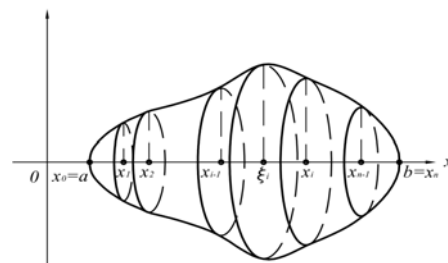
Yechish.

$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{(a \sin t)^2 + [a(1 - \cos t)]^2} dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} dt = \frac{64}{3}\pi a^2$ (kv.birl.).

4) Jism hajmini hisoblash

a) Jismning hajmini ko'ndalang kesimining yuzi bo'yicha hisoblash.

Hajmi hisoblanishi lozim bo'lgan biror jismni qaraymiz. Bu jismning Ox o'qiga perpendikular tekislik bilan kesimining yuzasi ma'lum bo'lsin. Bu yuza kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog'liq bo'ladi, ya'ni x ning funksiyasi bo'ladi: $S = S(x)$. Faraz qilaylik, $S(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsin.



Berilgan jismning hajmini

hisoblash uchun $[a, b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

10-shakl

nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Bu nuqtalar orqali Ox o'qiga perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar jismni n ta qatlamga ajratadi. x_{i-1} va x_i abtsissali kesimlar hosil qilgan i -qatlamning yajmini topamiz. Uning hajmi ΔV_i balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, asosi biror ξ_i absissali jismning kesimi bilan mos tushadigan to'g'ri silindrning hajmiga taqriban teng, bunda $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (10-shakl).

Shu sababli, $S = S(\xi_i)$ va $\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i$ bo'ladi. U holda, barcha n qatlamlar

hajmlarining yig'indisi $V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i$ bo'ladi. O'ng tomondagi yig'indi $[a, b]$

kesmada $S(x)$ funksiya uchun integral yig'indi bo'ladi. Shu sababli,

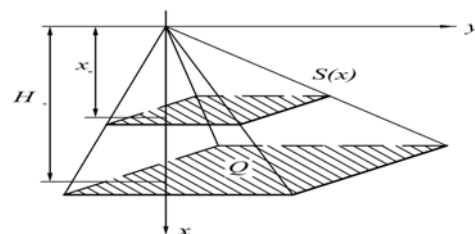
$\max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ uning limiti $\int_a^b S(x) dx$ aniq integral bo'ladi.

Bundan, $V = \int_a^b S(x) dx$ (8)kelib chiqadi.

11-misol. Balandligi H ga va asosining yuzasi Q ga teng piramida hajmini toping.

Yechish. Oxy koordinatalar sistemasini, koordinatalar boshi piramida uchida joylashgan va Ox o'q asosdan H masofadan o'tuvchi qilib tanlaymiz (11-shakl). Piramidani uning asosiga parallel kesim bilan kesamiz. Kesimdan piramida uchigacha bo'lgan masofani x bilan, kesim

yuzasini $S(x)$ bilan belgilaymiz. Asosga parallel kesimlar proporsiyasi xossasiga asosan, $\frac{S(x)}{O} = \frac{x^2}{H^2}$, bundan $S(x) = \frac{Q}{H^2} x^2$. U holda, (8)



tenglikka asosan,

11-shakl

$$V = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{QH^3}{3H^2} = \frac{1}{3} QH \text{ (kub.birl.)}.$$

12-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jismning.

hajmini hisoblang.

Yechish. Ellipsoidning Ox o'qiga perpendikular va Oyz koordinatalar tekisligidan x birlik masofada yotuvchi tekislik bilan kesimida $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ yarim o'qli ellips hosil bo'ladi. Bunday

ellipsning yuzasii $S = \pi b_1 c_1$ bo'ladi. Shuning uchun $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Bundan,

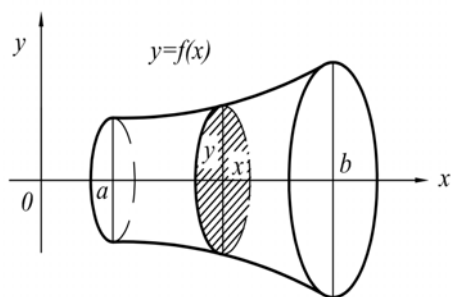
ellipsning hajmi quyidagiga teng bo'ladi:

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \pi bc \left(a - \frac{a}{3} + a - \frac{a}{3}\right) = \pi bc \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi abc \text{ (kub.birl.)}.$$

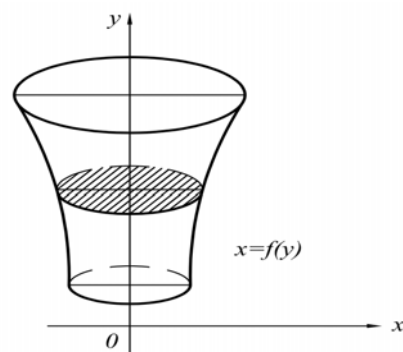
b) Aylanish jismlarining hajmini hisoblash. Agar qarayotgan jism $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ tehlama bilan berilgan egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lsa, Ox o'qiga perpendikulyar x absissali kesim doiradan iborat bo'lib, uning radiusi $y = f(x)$ ordinataga mos keladi (12-shakl). U holda, kesim yuzasi $S(x) = \pi y^2$ yoki $S(x) = \pi (f(x))^2$ va Ox o'qi atrofida aylanayotgan jismning hajmi $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ yoki $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ ga teng bo'ladi.

Oy Ox o'qi atrofida aylanayotgan jism (13-shakl) hajmining formulasi ham xuddi shunga o'xshash hosil qilinadi: $V = \pi \int_c^d x^2 dy$ yoki $V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$.

bunda $x = \varphi(y)$ aylanish jismini hosil qiluvchi chiziqning tenglamasi, $c \leq y \leq d$.



12-shakl.



13-shakl.

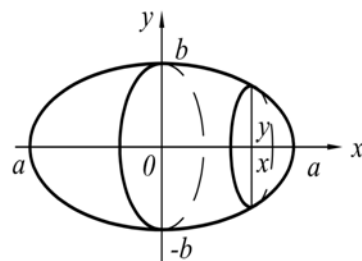
13-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ellipsning Oy o'qi atrofida aylantirishidan hosil qilingan jismning hajmlarini hisoblang.

Yechish. Ellips

tenglamasidan $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$. (14-shakl). Bundan,

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b =$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left(b^3 - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} a^2 b \quad (\text{kub.birl}).$$



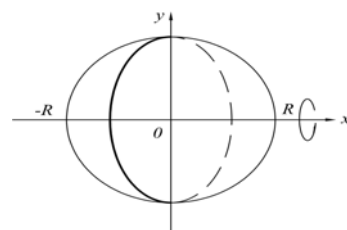
14-misol. R radiusli shar hajmini toping.

14-shakl

Yechish. R radiusli shar $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ yarimaylananing Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi. Shu sababli, shar simmetriyasini inobatga olsak (15-shakl),

$$V = \pi \int_{-R}^R (f(x))^2 dx = 2\pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Shunday qilib, R radiusli shar hajmi $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (kub.birl).



15-shakl

5) O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash.

Material nuqta Ox o'q bo'ylab yo'nalgan va x ga bog'liq tarzda o'zgaruvchan F kuch ta'sirida harakatlanayotgan bo'lsin. Material nuqtaning Ox o'q bo'ylab $x = a$

nuqtadan $x = b$ ($a < b$) nuqtaga ko'chishida F kuchning bajargan ishi A ni topish talab qilinsin. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilamiz.

$[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada ξ_i nuqtani olamiz. Material nuqtaga $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada ta'sir etuvchi kuch nuqtadan-nuqtaga otganda o'zgaradi. $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaning uzunligi kichik bo'lganligi sababli, kuchning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaning nuqtalaridagi qiymati uning ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtalaridagi qiymatidan kam farq qiladi. Shu sababli, F kuchning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi qiymati $A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng bo'ladi. Har bir kesma uchun kuchning qiymatini aniqlab, $[a, b]$ kesma uchun kuchning qiymatini topamiz: $A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i$. Tenglikning o'ng tomoni $F(x)$ funktsiya uchun integral yig'indi bo'ladi. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun, integral yig'indining $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ dagi limiti $F(x)$ funktsiyaning $[a, b]$ kesmadagi aniq integraliga teng bo'ladi. Shunday qilib, $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx$ (9).

15-misol. m massali jismni erdan vertikal h masofaga ko'tarish uchun zarur bo'ladigan ishni toping.

Yechish. Erning jismni tortish kuchini F bilan belgilaymiz. Nuyuton qonuniga asosan, $F = G \frac{mm_e}{x^2}$, bu erda x -jismdan er markazigacha bo'lgan masofa.

$Gmm_e = k$ belgilash kiritsak, $F(x) = \frac{k}{x^2}$, $R \leq x \leq h + R$, bu erda R -er radiusi. $x = R$ da

$F(R)$ kuch mg ga teng, ya'ni $\frac{k}{R^2} = mg$, bu erda m -jism massasi, g -erkin tushish

tezlanishi. Demak, $A = \int_R^{R+h} F(x)dx = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -mgR^2 \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = \frac{mgRh}{R+h}$.

ADABIYOTLAR

- 1.I.A.Karimov.Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevari. T.; 1997.
- 2.Ishmuxamedov R.J. Innovasion texnologiyalar yordamida ta'lim samaradorligini oshirish yollari .T.; 2006.
- 3.Akramov X.A.,Voxidov M.M., Avchiev Sh.K., Qo'chqorov R.A. Sanoat inshootlari faninig pedagogik texnologik haritalari. T.; 2006.
- 4.N.X. Avliyaqulov O'qitishning modul tizimi va pedagogik texnologiyasi aniqlash asoslari. Buxoro, 2002.
- 5.Фарберман Б.Л. Ilg'or pedagogik texnologiyalar. T.; 1999.
- 6.Кларин М.В. Педагогическая технология в учебном процессе. М.: 1981.
- 7.Soatov Yo.U. Oliy matematika. I-tom,T.;1994.
- 8.Soatov Yo.U. Oliy matematika. III-tom , T.;1996.
- 9.Шипачев В.С.Основы высшей математики.М.;1989.

