

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников строительных специаль-
ностей высших учебных заведений.

ЧАСТЬ I

Составители: Абдурахимов А., Хуррамов Ш.Р., Анорбаев Х.,
Мирзаев С.Т., Исомов Р.Д., Бабакаев С.Н., Кодиров И. Хушбекова Р.А.

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников строительных специальностей высших учебных заведений. Часть I.

Ташкентский архитектурно-строительный институт.
Составители: Абдурахимов А., Хуррамов Ш., Анорбаев Х.,
Мирзаев С.Т., Исомов Р.Д., Бабакаев С.Н., Кодиров И. Хушбекова Р.А.,
Ташкент 2000 г.

Методическое указание предназначено для студентов-заочников, первокурсников строительных специальностей высших учебных заведений и содержит 1 ÷ 3 контрольные задания. Каждая контрольная работа составлена по двадцати пяти вариантной системе. В методическом указании приведена программа курса, а также образцы решения примеров и задач по каждой контрольной работе, которые помогут студенту-заочнику самостоятельно выполнить задания.

Кафедра “Высшая и прикладная математика”. Печатается по решению секции “Фундаментальных и инженерных дисциплин” НМС ТАСИ.

Рецензенты:

д.ф-м. н. проф. Хошимов Ш.А.
к.т.н. доц. Маматкулов М.

Программа курса “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” для студентов-заочников строительных специальностей высших учебных заведений (I - 3 контрольные работы).

I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

- 1.1 Определители, их свойства. Вычисление определителей.
- 1.2 Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса.
- 1.3 Матрицы, действия над ними. Теорема Кронекера-Капелли. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
- 1.4 Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение. Угол между двумя векторами. Векторное и смешанное произведение векторов.
- 1.5 Уравнение плоскости. Уравнение прямой. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой.
- 1.6 Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола и их уравнения.
- 1.7 Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

II. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ..

- 2.1 Простейшие элементарные функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности
- 2.2 Непрерывность функции. Точка разрыва функции, их классификация.
- 2.3 Производная. Вычисление производной. Дифференциал функций. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование параметрически заданной и неявной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
- 2.4 Исследование функций с помощью производных.

III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- 3.1 Неопределенный интеграл. Методы интегрирования неопределенных интегралов: замена переменной и интегрирование по частям.
- 3.2 Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование иррациональных функций.
- 3.3 Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла: замена переменной и интегрирование по частям
- 3.4 Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых и объемов тел.
- 3.5 Несобственные интегралы и их сходимость. Вычисление несобственных интегралов.
- 3.6 Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, экстремумы функций нескольких переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. “Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.”. М.: Наука , 1980 г.
2. Я.С. Бугров , С.М. Никольский. “Дифференциальное и интегральное исчисление”. М.Наука, 1980 г.
3. Ё.У. Соатов “Олий математика” 3 т. Т.: Узбекистон, 1996 й.
4. Р.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. “Краткий курс высшей математики” т.1. М. :Высшая школа, 1978 г.
5. Г.Н. Берман “Сборник задач по курсу математического анализа” М.: Наука, 1975 г.
6. П.Е Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова “Высшая математика в упражнениях и задачах”. Часть I., М. Высшая школа, 1986 г.
7. “Олий математика” фанидан дастур. Профессионал олий таълим давлат стандарти. Техника йуналишилари буйича бакалаврлар тайёрлаш учун Т.: 1997 й.

I- КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

1.1 Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_3 = 7 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 = -3 \\ 4X_1 + 5X_2 + 4X_3 = 3 \end{cases}$$

Проверить ее совместность, если она совместна, решить ее тремя способами:

а) по правилу Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса.

Решение: Для установления совместности системы применим способ элементарных преобразований для расширенной матрицы системы

$$\begin{aligned} B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{array} \right) = A. \end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$$

Отсюда следует, что $\text{rang} A = \text{rang} B = 3$

и согласно теореме Кроникера-Капелли система совместна.

Теперь определим решения системы:

а) Используя правило Крамера:

Так как, $\Delta = |A| = 64 \neq 0$ Решение системы существует, и притом единственное. Находим.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -64; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 128.$$

Следовательно, $x_1 = \Delta x_1 / \Delta = 0 / 64 = 0$; $x_2 = \Delta x_2 / \Delta = -64 / 64 = -1$;

$$x_3 = \Delta x_3 / \Delta = 128 / 64 = 2$$

б) Матричным методом:

Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 19; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

Вычислим матрицу A^{-1} , так как, $|A| \neq 0$ и матрица невырожденная

$$A^{-1} = 1/|A| \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = 1/64 \begin{pmatrix} 6 & 19 & 5 \\ -16 & -8 & 8 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь находим матрицу X:

$$x = 1/64 \begin{pmatrix} 6 & 19 & 5 \\ -16 & -8 & 8 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1/64 \begin{pmatrix} 42 & -57 & +15 \\ -112 & +24 & +24 \\ 98 & +27 & +3 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 / 64 \begin{pmatrix} 0 \\ -64 \\ 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Итак, решение системы: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

в) Методом Гаусса:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_3 = 7 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 = -3 \\ 4X_1 + 5X_2 + 4X_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_3 = 7 \\ X_2 - 8X_3 = -17 \\ 9X_2 - 8X_3 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_3 = 7 \\ X_2 - 8X_3 = -17 \\ 64X_3 = 128 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_3 = 2 \\ X_2 = -17 + 8 \times 2 = -1 \\ X_1 = 7 + (-1) - 3 \times 2 = 0 \end{cases}$$

Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

1.2 Даны векторы $\vec{a} = \{1, 0, 4\}$, $\vec{b} = \{-1, 3, 1\}$, $\vec{c} = \{1, 0, -2\}$, $\vec{d} = \{-1, 15, 33\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 образуют базис и найти координаты вектора \vec{d} в этом базисе.

Решение: Находим смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c}

$$\Delta = \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Так как $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \neq 0$, то заданные векторы некопланарны и в пространстве \mathbb{R}^3 образуют базис. Пусть x_1, x_2, x_3 координаты вектора \vec{d} в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тогда получим векторное уравнение в виде :

$$\vec{d} = x_1 \vec{a} + x_2 \vec{b} + x_3 \vec{c}, \text{ равносильное системе уравнений } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_2 = 15, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 33. \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 33 \\ 3x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 6x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_3 = -2 \\ x_1 = 4 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Найденные решения есть координаты вектора \vec{d} в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Таким образом $\vec{d} = \{6, 5, -2\}$ или $\vec{d} = 6\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$

1.3 Даны координаты точек А (5, -4, 3), В (2, -1, 0), С (3, -2, 1).

Найти: а) косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} ;

б) проекцию вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ на направление вектора \vec{a} , где

$$\vec{a} = \vec{BC} + \vec{AC}, \quad \vec{b} = 2\vec{AB} - 3\vec{CA}, \quad \alpha = -5, \quad \beta = 3.$$

Решение: Применяя формулу, выражающую координаты вектора $\vec{M_1M_2}$ через координаты его концов $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$. Находим

$$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\vec{BC} = \{3 - 2, -2 - (-1), 1 - 0\} = \{1, -1, 1\}$$

→

$$AC = \{3-5, -2-(-4), 1-3\} = \{-2, 2, -2\}$$

$$\vec{AB} = \{2-5, -1-(-4), 0-3\} = \{-3, 3, 3\}$$

Используя векторы \vec{BC} , \vec{AC} , \vec{AB} и формулы:

$$\vec{a}_1 \pm \vec{b}_1 = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\},$$

$$\lambda \vec{a}_1 = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$$

получим

$$\vec{a} = \vec{BC} + \vec{AC} = \{1-2, -1+2, 1-2\} = \{-1, 1, -1\},$$

$$\vec{b} = 2\vec{AB} - 3\vec{CA} = 2\vec{AB} + 2\vec{AC} = \{2 \times (-3) + 3 \times (-2)\}$$

$$2 \times 3 + 3 \times 2, 2 \times (-3) + 3 \times (-2) = \{-12, 12, -12\}.$$

а) Известно, что косинус угла φ между двумя векторами, вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2})}$$

Искомый угол φ образован векторами $\vec{a} = \{-1, 1, -1\}$ и $\vec{b} = \{-12, 12, -12\}$
Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{((-1) \times (-12) + 1 \times 12 + (-1) \times (-12))}{(\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{(-12)^2 + 12^2 + (-12)^2})} =$$

$$= \frac{(12 + 12 + 12)}{(\sqrt{3} \sqrt{3 \times 144})} = \frac{36}{(3 \cdot 12)} = 1$$

б) Сначала находим вектор

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = -5\vec{a} + 3\vec{b} = \{-5 \times (-1) + 3 \times (-12), (-5) \times 1 + 3 \times 12, -5 \times (-1) + 3 \times (-12)\} = \{-31, 31, -31\}$$

и потом определим

$$\vec{\quad} \vec{\quad} \vec{\quad} \vec{\quad} \vec{\quad} \vec{\quad}$$

$$\text{пр } a \quad (\alpha a + \beta b) = (a \quad (\alpha a + \beta b)) / |a|$$

$$\rightarrow \rightarrow$$

Итак, $\text{пр } a \quad (-5a + 3b) = ((-1) \times (-31) + 1 \times 31 + (-1) \times (-31)) / \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}$
 $= (31 + 31 + 31) / \sqrt{3} = 31\sqrt{3}$

1.4 Даны координаты вершин пирамиды ABCD:

$$A(-7, -8, 10), B(-3, 6, 3), C(-3, 0, 6), D(2, -5, -1)$$

Найти:

- уравнение плоскости ABC;
- уравнение ребра AB;
- уравнение прямой, проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC;
- уравнение прямой, проходящей через вершину C и параллельной ребру AB;
- уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной ребру AB;
- синус угла между ребром AD и гранью ABC;
- косинус угла между гранями ABC и ABD;
- расстояние от вершины D до грани ABC

Решение: а) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ определяется по формуле:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Применяя её, находим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-(-8) & z-10 \\ -3-(-7) & 6-(-8) & 3-10 \\ -3-(-7) & 0-(-8) & -6-10 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+7) \begin{vmatrix} 14 & -7 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - (y+8) \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (z-10) \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -168(x+7)+36(y+8)-24(z-10)&=0; \\ 14x-3y+2z+54&=0 \end{aligned}$$

б) Уравнение ребра АВ находим используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$(x-x_1) / (x_2-x_1) = (y-y_1) / (y_2-y_1) = (z-z_1) / (z_2-z_1)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} (x-(-7)) / (-3-(-7)) &= (y-(-8)) / (6-(-8)) = (z-10) / (3-10) \\ (x+7) / 4 &= (y+8) / 14 = (z-10) / -7 \end{aligned}$$

в) Пусть искомая прямая задана уравнением:

$$(x-x_1) / l = (y-y_1) / m = (z-z_1) / p.$$

Так, как прямая проходит через точки $D(2, -5, -1)$, то

$$(x-2) / l = (y+5) / m = (z+1) / p$$

Учитывая коллинеарность направляющего вектора искомой прямой

→

$S = \{l, m, p\}$ и нормального вектора плоскости ABC $n = \{14, -3, 2\}$,

получим

$$14 / l = -3 / m = 2 / p$$

Откуда,

$$l = -(14 / 3)m, \quad p = -(2 / 3)m$$

Следовательно уравнение прямой проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC, имеет вид:

$$\begin{aligned} (x-2) / -(14 / 3)m &= (y+5) / m = (z+1) / -(2 / 3)m; \\ (x-2) / -(14 / 3) &= (y+5) / 1 = (z+1) / -(2 / 3); \end{aligned}$$

г) Искомая прямая проходит через точку C. Поэтому, уравнение её будем искать в виде:

$$(x+3) / l = y / m = (z+6) / p$$

Эта прямая параллельна ребру АВ.

$$(x+7) / 4 = (y+8) / 14 = (z-10) / 7.$$

Используя условия параллельности прямых, находим: $4 / l = 14 / m = -7 / p$

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид:

$$(x+3) / (2/7)m = y / m = (z+6) / -(1/2)m \text{ или}$$

$$(x+3) / (2/7) = y / 1 = (z+6) / -(1/2)$$

д) Искомая плоскость проходит через точку D. Поэтому, уравнение её имеет вид:

$$A(x-2)+B(y+5)+C(z+1)=0 \Rightarrow \vec{n}=\{A, B, C\}$$

(нормальный вектор плоскости)

Эта плоскость перпендикулярна к ребру AB

$$(x+7) / 4 = (y+8) / 14 = (z-10) / -7.$$

Используя условия перпендикулярности прямой и плоскости имеем:

$$A / 4 = B / 14 = C / -7.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$(2/7)B(x-2)+B(y+5)-(1/2) B(z+1)=0 \text{ или}$$

$$4X+14Y-7Z-55=0.$$

е) Определим сначала уравнение ребра AD:

$$(x-(-7)) / (2-(-7)) = (y-(-8)) / (-5-(-8)) = (z-10) / (-1-10);$$

$$(x+7) / 9 = (y+8) / 3 = (z-10) / -11.$$

→

Откуда $S = \{9, 3, -11\}$

→

Учитывая, что нормальный вектор грани ABC равен $\vec{n} = \{14, -3, 2\}$, определим синус угла между ребрами AD и гранью ABC:

$$\sin \varphi = (Al+Bm+Cp) / (\sqrt{A^2+B^2+C^2} \sqrt{l^2+m^2+p^2})$$

$$\sin \varphi = (14 \times 9 + (-3) \times 3 + 2 \times (-11)) / (\sqrt{14^2 + (-3)^2 + 2^2} \sqrt{9^2 + 3^2 + (-11)^2}) =$$

$$= 95 / (\sqrt{209} \sqrt{211}) \approx 0.45$$

ж) Определим сначала уравнение грани ABD

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-(-8) & z-10 \\ -3-(-7) & 6-(-8) & 3-10 \\ 2-(-7) & -5-(-8) & -1-10 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 9 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 0,$$

$$7x+y+6z-3=0.$$

Применяя формулу, определяющую угол между двумя плоскостями, находим косинус угла между гранями ABC и ABD:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= (7 \times 14 + 1 \times (-3) + 6 \times 2) / (\sqrt{7^2 + 1^2 + 6^2} \sqrt{14^2 + (-3)^2 + 2^2}) = \\ &= 107 / (\sqrt{86} \sqrt{209}) \approx 0.8\end{aligned}$$

е) Расстояние от вершины D до грани ABC определим по формуле расстояние от точки до плоскости:

$$\begin{aligned}d &= |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \\ &= |14 \times 2 + (-3) \times (-5) + 2 \times (-1) + 54| / \sqrt{14^2 + (-3)^2 + 2^2} = 95 / \sqrt{209} \approx 6.57 \\ &\text{ед. длины}\end{aligned}$$

1.5 Найти точку пересечения прямой $(x+3) / 2 = y / 0 = (z-1) / 1$ и плоскости $4x - y + 2z = 0$.

Решение: Рассмотрим два вектора $\vec{n} \{A, B, C\} = \{4, -1, 2\}$ и $\vec{S} \{l, m, p\} = \{2, 0, 1\}$ Первый из них перпендикулярен заданной плоскости, а второй параллелен заданной прямой. Прямая пересекается с плоскостью, так как

$$Al + Bm + Cp = 4 \times 2 + (-1) \times 0 + 2 \times 1 = 10 \neq 0$$

Чтобы найти точку пересечения, запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$(x+3) / 2 = y / 0 = (z-1) / 1 = t;$$

$x = 2t - 3$, $y = 0$, $z = t + 1$ и подставим эти выражения для x , y , z в уравнение плоскости:

$$4(2t-3) - 0 + 2(t+1) = 0$$

Решая его находим $t = 1$. Следовательно, координаты точки пересечения $x = -1$, $y = 0$, $z = 2$.

1.6 Составить уравнение геометрического места точек, отношения расстояний которых до данных точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно числу $3/5$

Решение: Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка искомого геометрического места точек. Расстояние $/AM/$ и $/BM/$ находим по формуле расстояние между двумя точками:

$$/AM/ = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ и } /BM/ = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}$$

По условию задачи $/AM/ : /BM/ = 3/5$

Следовательно

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}}{5\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}}{3\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}}$$

Возведя в квадрат левую и правую части, получим

$$\begin{aligned} 25(x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4) &= 9(x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36) \\ 16x^2 - 78x + 16y^2 + 208y &= 143, \\ 16(x^2 - (39/8)x + y^2 + 13y) &= 143, \\ x^2 - 2 \times (39/16)x + (39/16)^2 + y^2 + 2 \times (13/2)y + (13/2)^2 &= 143/16 + (39/16)^2 + (13/2)^2; \\ (x - 39/16)^2 + (y + 13/2)^2 &= 14625/256, \\ (x - 39/16)^2 + (y + 13/2)^2 &= (15\sqrt{65} / 16)^2. \end{aligned}$$

Полученное уравнение представляет собой окружность, с центром в точке

$$M_0(39/16, -13/2) \text{ и радиусом равным } 15\sqrt{65} / 16$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

1.1.1-1.1.25. Дана система линейных уравнений. Проверить её совместность, если она совместна, решить её тремя способами:

- а) по правилу Крамера;
- б) матричным методом;
- в) методом Гаусса;

$$1.1.1 \begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = -3 \\ 3X_1 + X_2 + 7X_3 = -1 \\ X_1 - 4X_2 + 3X_3 = 7 \end{cases}$$

$$1.1.2 \begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + X_3 = 5 \\ 2X_1 - 3X_2 - 2X_3 = 6 \\ 4X_1 - X_2 + 4X_3 = 4 \end{cases}$$

$$1.1.3 \begin{cases} X_1 + 4X_2 - 3X_3 = -2 \\ 2X_1 + 5X_2 + X_3 = -1 \\ X_1 + 7X_2 - 10X_3 = -5 \end{cases}$$

$$1.1.4 \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 3 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 4X_1 + X_2 - 5X_3 = 1 \end{cases}$$

$$1.1.5 \begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 = 9 \\ 2X_1 - 3X_2 = 0 \\ 5X_1 - 4X_2 - 2X_3 = 9 \end{cases}$$

$$1.1.6 \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 + 2X_3 = -9 \\ 2X_1 + 5X_2 - 3X_3 = -1 \\ 4X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -15 \end{cases}$$

$$1.1.7 \begin{cases} 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = -14 \\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0 \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 10 \end{cases}$$

$$1.1.8 \begin{cases} 4X_1 + X_2 - 3X_3 = -6 \\ 8X_1 + 3X_2 - 6X_3 = -15 \\ X_1 + X_2 - X_3 = -4 \end{cases}$$

$$1.1.9 \begin{cases} 2X_1 + 7X_2 - X_3 = 10 \\ 3X_1 - 5X_2 + 3X_3 = -14 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
1.1.10 \begin{cases} 2X_1+3X_2+4X_3=-10 \\ 4X_1+11X_3=-29 \\ 7X_1-5X_2=7 \end{cases} & 1.1.11 \begin{cases} 2X_1+X_2-5X_3=-11 \\ 4X_1+11X_3=-29 \\ 7X_1-5X_2=7 \end{cases} & \begin{cases} 2X_1-X_2+5X_3=10 \\ 5X_1+2X_2-13X_3=21 \\ 3X_1-X_2+5X_3=12 \end{cases} \\
1.1.13 \begin{cases} X_1-4X_2-2X_3=0 \\ 3X_1-5X_2-6X_3=7 \\ 3X_1+X_2+X_3=6 \end{cases} & 1.1.14 \begin{cases} 2X_1-3X_2+2X_3=-6 \\ 5X_1+8X_2-X_3=0 \\ X_1-2X_2+3X_3=6 \end{cases} & 1.1.15 \begin{cases} X_1-5X_2+X_3=-2 \\ 2X_1-4X_2-3X_3=0 \\ 3X_1+4X_2+2X_3=3 \end{cases} \\
1.1.16 \begin{cases} X_1+2X_2+4X_3=31 \\ 5X_1+X_2+2X_3=20 \\ 3X_1-X_2+X_3=0 \end{cases} & 1.1.17 \begin{cases} X_1-4X_2-2X_3=-7 \\ 3X_1+X_2-X_3=5 \\ -3X_1+5X_2+6X_3=7 \end{cases} & 1.1.18 \begin{cases} 3X_1+4X_2+2X_3=8 \\ 2X_1-X_2-3X_3=-1 \\ X_1+5X_2+X_3=-7 \end{cases} \\
1.1.19 \begin{cases} X_1+X_2+3X_3=-1 \\ 2X_1-X_2+2X_3=-4 \\ 4X_1+X_2+4X_3=-2 \end{cases} & 1.1.20 \begin{cases} X_1-2X_2-3X_3=6 \\ 2X_1+3X_2-4X_3=20 \\ 3X_1-2X_2-5X_3=6 \end{cases} & 1.1.21 \begin{cases} 7X_1-5X_2=31 \\ 4X_1+11X_3=-43 \\ 2X_1+3X_2+4X_3=-20 \end{cases} \\
1.1.22 \begin{cases} X_1+X_2-X_3=1 \\ 8X_1+3X_2-6X_3=2 \\ -4X_1-X_2+3X_3=-3 \end{cases} & 1.1.23 \begin{cases} 2X_1-X_2-X_3=4 \\ 3X_1+4X_2-2X_3=11 \\ 3X_1-2X_2+4X_3=11 \end{cases} & 1.1.24 \begin{cases} 4X_1-3X_2+2X_3=9 \\ 2X_1+5X_2-3X_3=4 \\ 5X_1+6X_2+2X_3=18 \end{cases} \\
1.1.25 \begin{cases} 3X_1+2X_2+X_3=5 \\ 2X_1+3X_2+X_3=1 \\ 2X_1+X_2+3X_3=11 \end{cases} & &
\end{array}$$

1.2.1-1.2.25 Даны векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} в некотором базисе. Показать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 образуют базис и найти координаты вектора \vec{d} в этом базисе.

$$\begin{array}{llll}
1.2.1 \vec{a}=\{1, 2, -1\} & \vec{b}=\{3, 0, 2\} & \vec{c}=\{1, 1, 4\} & \vec{d}=\{-13, 2, 18\} \\
1.2.2 \vec{a}=\{-1, 1, 1\} & \vec{b}=\{3, 2, 0\} & \vec{c}=\{1, -1, 2\} & \vec{d}=\{11, -1, -4\} \\
1.2.3 \vec{a}=\{2, -1, 0\} & \vec{b}=\{1, -1, 2\} & \vec{c}=\{0, 3, 1\} & \vec{d}=\{-1, 7, 0\} \\
1.2.4 \vec{a}=\{4, 2, 1\} & \vec{b}=\{1, 0, 1\} & \vec{c}=\{2, 1, 0\} & \vec{d}=\{3, 1, 3\} \\
1.2.5 \vec{a}=\{-3, 2, 5\} & \vec{b}=\{1, -1, 0\} & \vec{c}=\{2, 1, 0\} & \vec{d}=\{-9, 3, 15\} \\
1.2.6 \vec{a}=\{1, 3, 0\} & \vec{b}=\{0, -2, 1\} & \vec{c}=\{1, 0, 1\} & \vec{d}=\{-13, 2, 18\} \\
1.2.7 \vec{a}=\{-1, 1, 0\} & \vec{b}=\{3, 2, -1\} & \vec{c}=\{0, 5, 1\} & \vec{d}=\{5, 0, -3\} \\
1.2.8 \vec{a}=\{4, 1, 0\} & \vec{b}=\{3, -1, 1\} & \vec{c}=\{0, 1, -2\} & \vec{d}=\{1, -4, 1\} \\
1.2.9 \vec{a}=\{1, -1, 2\} & \vec{b}=\{-3, 2, 0\} & \vec{c}=\{1, 2, -1\} & \vec{d}=\{8, 8, 7\} \\
1.2.10 \vec{a}=\{-1, 1, 1\} & \vec{b}=\{3, 0, 2\} & \vec{c}=\{1, 2, -1\} & \vec{d}=\{8, -5, 7\} \\
1.2.11 \vec{a}=\{2, 0, -1\} & \vec{b}=\{1, 2, -1\} & \vec{c}=\{0, 1, 3\} & \vec{d}=\{5, -4, 5\} \\
1.2.12 \vec{a}=\{4, 1, 2\} & \vec{b}=\{1, 1, 0\} & \vec{c}=\{2, 0, 1\} & \vec{d}=\{3, 5, 0\}
\end{array}$$

1.2.13	$\vec{a} = \{2, 5, -3\}$	$\vec{B} = \{-1, 0, 1\}$	$\vec{c} = \{1, 0, 2\}$	$\vec{d} = \{-3, -5, 7\}$
1.2.14	$\vec{a} = \{1, 0, 3\}$	$\vec{B} = \{0, 1, -2\}$	$\vec{c} = \{1, 1, 0\}$	$\vec{d} = \{7, -1, 19\}$
1.2.15	$\vec{a} = \{0, -1, 1\}$	$\vec{B} = \{-1, 3, 2\}$	$\vec{c} = \{1, 0, 5\}$	$\vec{d} = \{5, -15, 0\}$
1.2.16	$\vec{a} = \{1, 0, 4\}$	$\vec{B} = \{-1, 1, 3\}$	$\vec{c} = \{1, -2, 0\}$	$\vec{d} = \{-6, 2, 0\}$
1.2.17	$\vec{a} = \{2, 1, -1\}$	$\vec{B} = \{0, -3, 2\}$	$\vec{c} = \{1, 1, 4\}$	$\vec{d} = \{-6, -14, -9\}$
1.2.18	$\vec{a} = \{1, 0, 4\}$	$\vec{B} = \{-1, 1, 3\}$	$\vec{c} = \{1, -2, 0\}$	$\vec{d} = \{0, 7, 29\}$
1.2.19	$\vec{a} = \{2, 1, -1\}$	$\vec{B} = \{0, -3, 2\}$	$\vec{c} = \{1, 1, 4\}$	$\vec{d} = \{4, -9, 14\}$
1.2.20	$\vec{a} = \{2, 0, 3\}$	$\vec{B} = \{1, 1, 1\}$	$\vec{c} = \{-1, 2, 1\}$	$\vec{d} = \{-11, 11, -14\}$
1.2.21	$\vec{a} = \{1, -2, 1\}$	$\vec{B} = \{-1, 0, 2\}$	$\vec{c} = \{-3, 1, 0\}$	$\vec{d} = \{16, -19, 10\}$
1.2.22	$\vec{a} = \{1, 0, 2\}$	$\vec{B} = \{3, -3, 4\}$	$\vec{c} = \{0, 1, 1\}$	$\vec{d} = \{-16, 13, -25\}$
1.2.23	$\vec{a} = \{0, 3, 1\}$	$\vec{B} = \{1, -2, 0\}$	$\vec{c} = \{1, 0, 1\}$	$\vec{d} = \{2, 7, 5\}$
1.2.24	$\vec{a} = \{-1, 0, 1\}$	$\vec{B} = \{3, -1, 2\}$	$\vec{c} = \{0, 1, 5\}$	$\vec{d} = \{8, -7, -13\}$
1.2.25	$\vec{a} = \{4, 0, 1\}$	$\vec{B} = \{3, 1, -1\}$	$\vec{c} = \{0, -2, 1\}$	$\vec{d} = \{0, -8, 9\}$

1.3.1-1.3.25 Даны координаты точек А, В, С. Найти:

а) косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} ;

б) проекцию вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ на направление вектора \vec{a}

1.3.1 $A(9, 10, 1), B(7, 6, -1), C(4, 0, -4)$
 $\vec{a} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}, \vec{b} = 4\vec{BC} + \vec{AC}, \alpha = 1, \beta = 2$

1.3.2 $A(0, 2, 1), B(1, 2, 0), C(0, 3, -1)$
 $\vec{a} = 3\vec{AC} + 3\vec{BC}, \vec{b} = \vec{AB} + 5\vec{BC}, \alpha = -1, \beta = 2$

1.3.3 $A(0, 4, 8), B(-5, 4, -2), C(-1, 4, 1)$
 $\vec{a} = \vec{AB} - 4\vec{AC}, \vec{b} = 3\vec{AC} + 2\vec{AB}, \alpha = -2, \beta = 3$

1.3.4 $A(3, 0, 1), B(-2, 3, 2), C(1, 1, -2)$
 $\vec{a} = 3\vec{BC} - \vec{AB}, \vec{b} = 6\vec{BC} + 5\vec{AC}, \alpha = 1, \beta = 2$

1.3.5 $A(4, 1, -3), B(5, 1, -2), C(-1, 3, 3)$
 $\vec{a} = 4\vec{AC} - 2\vec{CB}, \vec{b} = 7\vec{AB} + 5\vec{BC}, \alpha =, \beta = 3$

1.3.6 $A(4, 1, 1), B(3, 1, 2), C(0, 1, -2)$
 $\vec{a} = 3\vec{BC} - 4\vec{CA}, \vec{b} = 6\vec{BA} - \vec{AC}, \alpha = 1, \beta = 2$

1.3.7 $A(-3, 4, -5), B(0, 1, -2), C(-1, 2, 3)$
 $\vec{a} = 4\vec{AB} - 3\vec{BC}, \vec{b} = 5\vec{CA} - 2\vec{BA}, \alpha = -2, \beta = 5$

- 1.3.8 $A(7, 5, -2), B(6, 0, 0), C(7, 2, 2)$
 $\vec{a} = 4\vec{AB} - 3\vec{BC}, \vec{b} = 2\vec{CB} + 5\vec{AC}, \alpha = -4, \beta = 2$
- 1.3.9 $A(-3, 27, -3), B(-1, -3, -1), C(2, 3, 2)$
 $\vec{a} = 2\vec{BC} - 5\vec{AB}, \vec{b} = 5\vec{AC} - \vec{CB}, \alpha = -3, \beta = 1$
- 1.3.10 $A(2, -1, 8), B(3, 1, 7), C(2, 0, 7)$
 $\vec{a} = \vec{AB} - 3\vec{BC}, \vec{b} = 6\vec{CB} - 2\vec{AC}, \alpha = 5, \beta = 6$
- 1.3.11 $A(-1, -1, 8), B(4, -1, -2), C(0, -1, 1)$
 $\vec{a} = 6\vec{BC} + 2\vec{AB}, \vec{b} = 2\vec{AC} - 5\vec{AB}, \alpha = 1, \beta = 2$
- 1.3.12 $A(-2, 4, -2), B(3, 1, 0), C(0, 3, -4)$
 $\vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \vec{b} = 2\vec{BC} + 5\vec{CA}, \alpha = 3, \beta = -6$
- 1.3.13 $A(1, 1, 4), B(-2, 1, 5), C(-1, 3, 3)$
 $\vec{a} = 4\vec{AC} - 2\vec{BC}, \vec{b} = 2\vec{AC} + 3\vec{AB}, \alpha = -5, \beta = 3$
- 1.3.14 $A(4, 2, 6), B(2, 2, 8), C(-4, 2, 0)$
 $\vec{a} = 5\vec{AB} - 7\vec{AC}, \vec{b} = 2\vec{BC} + 3\vec{BA}, \alpha = 9, \beta = 12$
- 1.3.15 $A(15, -12, 0), B(6, -3, 0), C(9, -6, 8)$
 $\vec{a} = \vec{AC} - 6\vec{BC}, \vec{b} = \vec{AB} + 3\vec{BC}, \alpha = -7, \beta = 6$
- 1.3.16 $A(-1, -5, -2), B(0, -6, 4), C(-1, -8, 2)$
 $\vec{a} = 3\vec{BC} + 5\vec{AB}, \vec{b} = 5\vec{AC} - 3\vec{AB}, \alpha = -3, \beta = 4$
- 1.3.17 $A(-1, -10, -5), B(1, -8, -3), C(0, 0, 4)$
 $\vec{a} = 2\vec{BC} - 3\vec{AC}, \vec{b} = 4\vec{AB} + 3\vec{AC}, \alpha = 4, \beta = -6$
- 1.3.18 $A(-3, 3, 7), B(-2, 3, 6), C(-3, 2, 6)$
 $\vec{a} = 4\vec{AB} + \vec{AC}, \vec{b} = 2\vec{BC} - 3\vec{BA}, \alpha = -3, \beta = 8$
- 1.3.19 $A(2, -2, -8), B(5, -2, -4), C(1, -2, -4)$
 $\vec{a} = 5\vec{AB} - 3\vec{BC}, \vec{b} = 4\vec{CA} + \vec{AB}, \alpha = -4, \beta = 1$
- 1.3.20 $A(1, 2, 4), B(-4, -1, 6), C(-1, 1, 2)$
 $\vec{a} = 3\vec{CA} - 2\vec{AB}, \vec{b} = 2\vec{BA} + 4\vec{CB}, \alpha = 3, \beta = -5$
- 1.3.21 $A(1, 1, 4), B(-1, 5, 1), C(-1, 3, 3)$
 $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{AC}, \vec{b} = 2\vec{BC} - 3\vec{AB}, \alpha = 3, \beta = -4$
- 1.3.22 $A(0, 1, -2), B(3, 1, 2), C(4, 1, 1)$
 $\vec{a} = 2\vec{AC} + 3\vec{BA}, \vec{b} = 3\vec{BC} - 4\vec{AB}, \alpha = -2, \beta = 6$
- 1.3.23 $A(6, -8, 10), B(0, -2, 4), C(2, -4, 6)$
 $\vec{a} = 3\vec{AB} + 6\vec{CB}, \vec{b} = 2\vec{AC} - 5\vec{AB}, \alpha = 2, \beta = 8$
- 1.3.24 $A(0, 3, 2), B(-2, -1, 0), C(-5, -7, -3)$
 $\vec{a} = 5\vec{BC} - 2\vec{CA}, \vec{b} = 6\vec{AB} + 4\vec{AC}, \alpha = -2, \beta = 5$
- 1.3.25 $A(-1, 4, 6), B(0, 2, 5), C(-1, 3, 5)$
 $\vec{a} = 8\vec{AC} - 4\vec{AB}, \vec{b} = 2\vec{BC} - 6\vec{AB}, \alpha = -3, \beta = -4$

1.4.1-1.4.25 Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти:

- а) уравнение плоскости ABC;
- б) уравнение ребра AB;
- в) уравнение прямой, проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC;
- г) уравнение прямой, проходящей через вершину C и параллельной ребру AB;
- д) уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной ребру AB;
- е) синус угла между ребром AD и гранью ABC;
- ж) косинус угла между гранями ABC и ABD;
- з) расстояние от вершины D до грани ABC;

1.4.1	A(7, 3, 5)	B(5, 3, 2)	C(10, 2, 4)	D(7, -2, 1)
1.4.2	A(-8, -6, -3)	B(4, 2, 1)	C(0, 5, 2)	D(0, 2, 5)
1.4.3	A(-7, -13, 14)	B(-6, 0, 5)	C(1, 2, 1)	D(-2, -1, 2)
1.4.4	A(5, 5, -6)	B(-4, -8, 4)	C(1, 7, -1)	D(-4, 0, -2)
1.4.5	A(7, -8, -1)	B(-3, -6, -2)	C(2, -3, -5)	D(5, 4, 14)
1.4.6	A(16, -8, -13)	B(5, 3, 2)	C(-3, 0, 3)	D(0, 2, 1)
1.4.7	A(7, 3, -5)	B(1, 2, 3)	C(-1, 2, 1)	D(2, -1, 2)
1.4.8	A(8, 3, 2)	B(4, -2, 2)	C(3, 1, -1)	D(2, 1, 1)
1.4.9	A(8, -4, -5)	B(7, 3, 6)	C(-2, 1, 4)	D(1, 3, 2)
1.4.10	A(6, -7, -3)	B(1, 2, 3)	C(1, 3, 2)	D(7, -2, 1)
1.4.11	A(12, 7, -1)	B(0, -2, -5)	C(-4, 5, 1)	D(-7, 4, 3)
1.4.12	A(-5, -6, 1)	B(-2, 1, 2)	C(0, -1, 4)	D(-3, 2, 1)
1.4.13	A(-1, 0, -7)	B(4, -5, 3)	C(-2, 1, -9)	D(1, -1, 3)
1.4.14	A(2, 4, -2)	B(-1, 1, 2)	C(3, 0, -2)	D(1, -1, 1)
1.4.15	A(4, -1, 2)	B(-1, 1, 0)	C(2, -1, 1)	D(0, 2, 1)
1.4.16	A(16, -9, -5)	B(1, -2, 2)	C(-1, 2, 1)	D(2, 0, 1)
1.4.17	A(-9, -2, 3)	B(6, -1, -2)	C(1, 0, 1)	D(-3, 2, 1)
1.4.18	A(-10, 7, -6)	B(-3, 0, -6)	C(-5, -3, -2)	D(-1, 10, 3)
1.4.19	A(5, 3, -2)	B(-1, 0, 3)	C(-4, -2, -1)	D(4, 2, -1)
1.4.20	A(-5, 4, -3)	B(5, -1, 2)	C(2, 1, -4)	D(1, -3, 0)
1.4.21	A(0, 3, 4)	B(1, 0, 3)	C(2, -1, 4)	D(0, 3, 1)
1.4.22	A(-16, 20, -21)	B(-4, 1, 3)	C(2, 3, 0)	D(-1, -1, -2)
1.4.23	A(2, -1, 1)	B(3, 7, -2)	C(3, 6, 3)	D(-7, 5, 1)
1.4.24	A(8, -10, 2)	B(-3, 3, -1)	C(0, -6, 5)	D(-3, -4, 2)
1.4.25	A(7, 2, -3)	B(4, 1, 1)	C(2, 1, 2)	D(2, -1, 1)

1.5.1-1.5.25 Найти точку пересечения данной прямой и плоскости.

1.5.1 $(x-3) / 0 = (y+2) / 3 = (z-5) / 10$, $x+2y-2z+25=0$

- 1.6.19 A(1, 0), x=8, m=1/5
 1.6.21 A(0,-5), x=3, m=1/2
 1.6.23 A(1, 5), x=-1, m=1/4
 1.6.25 A(6, 0), x=3/2, m=2

- 20
 1.6.20 A(2, 1), x=-5, m=3
 1.6.22 A(-3, 4), x=5, m=3
 1.6.24 A(3, 0), x=12, m=1/2

II КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ
ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
№2.

- 1.2.1 Найти а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 5x + 4} - x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{3x} - 3^{2x})}{(\sin 7x - \sin 2x)}$

Решение:

а) Так как $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$,

имеем неопределенность вида $\infty - \infty$ преобразуем данное выражение

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 - 5x + 4} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) / (\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) = \\ & (x^2 - 5x + 4 - x^2) / (\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) = (-5x + 4) / (\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) = \\ & (-5 + (4/x)) / (\sqrt{1 - (5/x) + (4/x^2)} + 1) \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 5x + 4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} (-5 + (4/x)) / \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 - (5/x) + (4/x^2)} + 1) = -5/2$$

б) Предел знаменателя и числителя при $x \rightarrow 0$ равен нулю, поэтому имеем неопределенность вида 0/0, которая раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & [(\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x})(\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}) / (\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x})] / \\ & \quad / [(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) / (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})] = \\ & = [2x / (\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x})] / [2x / (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})] = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) / (\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}) \end{aligned}$$

Тогда
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}) / (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) / (\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) / (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}) / (\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x})} = 2/6 = 1/3$$

в) Имеем неопределенность вида 0/0, которая раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (2^{3x} - 3^{2x}) / (\sin 7x - \sin 2x) &= 9^x [(8/9)^x - 1] / (2 \sin(5/2)x) \times (\cos(9/2)x) = \\ [9^x \times x \times [(8/9)^x - 1] / x] / [(2 \times (5x/2)) \times ((\sin(5/2)x) \times (\cos(9/2)x) / 5x/2)] &= \\ [(9x \times [(8/9)^x - 1]) / x] / [5 \times ((\sin(5/2)x) / (5/2)x)] & \end{aligned}$$

Так как,
$$\lim_{x \rightarrow 0} (8/9)^x - 1 / x = \ln 8/9; \quad \lim_{x \rightarrow 0} 9^x = 1$$

и
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(5/2)x) / (5/2)x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(9/2)x = 1, \text{ то}$$

$$\lim((2^{3x} - 3^{2x}) / (\sin 7x - \sin 2x)) = (1 \times \ln(8/9)) / (5 \times 1 \times 1) = (\ln 8/9) / 5$$

2.2 Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0 \\ 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение : Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$, где она задана непрерывными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=0$ и $x_2=2$.

Для точек $x_1=0$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 - x = 1$$

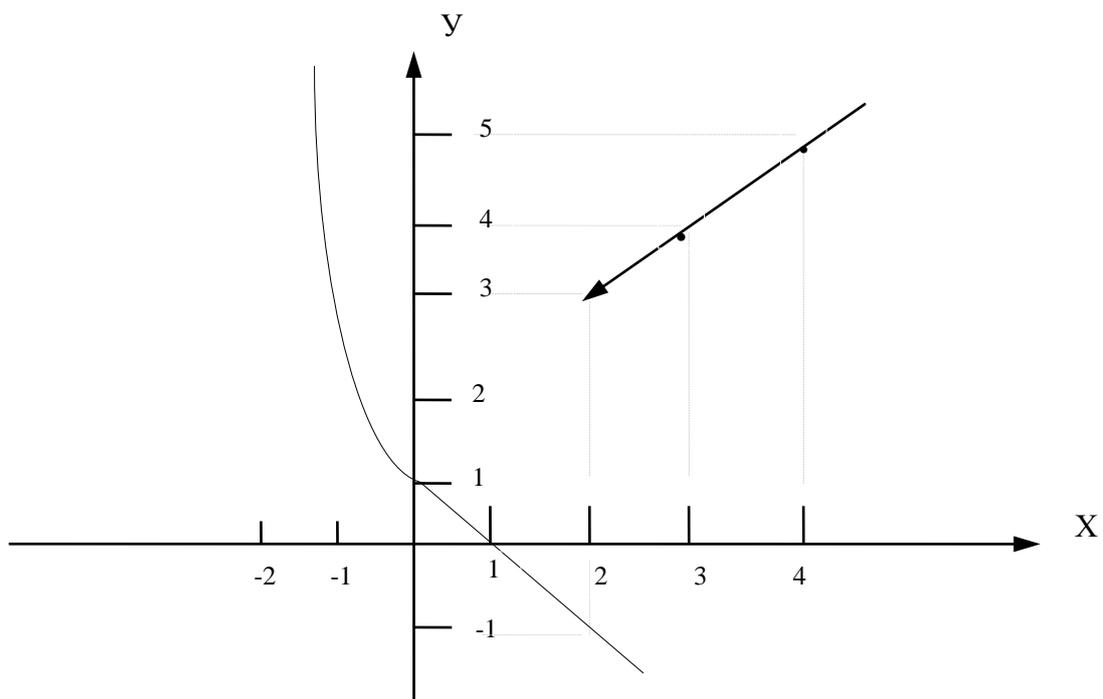
$$x^2+1=1, \quad (1-x)^2=1$$

$$f(0)=1-x \Big|_{x=0} = 1 \text{ т.е. функция } f(x) \text{ в точке } x_1=0 \text{ непрерывна.}$$

Для точки $x_2=2$ находим:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (1-x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x+1) = 3$$

$f(2) = 1-x \Big|_{x=2} = -1$ в точке $x_2=2$ функция имеет разрыв первого рода.
Построим график.



2.3 Продифференцировать данные функции

а) $y = \ln \operatorname{arctg} x^2$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$

в) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

Решение:

а)
$$y' = (\ln \operatorname{arctg} x^2)' = (1 / \operatorname{arctg} x^2) \times (\operatorname{arctg} x^2)' =$$

$$= (1 / \operatorname{arctg} x^2) \times (x^2)' / (1 + (x^2)^2) = (2x / (1 + x^4)) \operatorname{arctg} x^2$$

б) Прологарифмируем данную функцию

$$\ln y = \cos x \ln(\sin x)$$

Тогда $(1/y) y' = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x (1/\sin x)(\sin x)'$.

$$(1/y) y' = -\sin x \ln(\sin x) + (\cos^2 x / \sin x)$$

Отсюда выразим y'

$$y' = -y((\sin x \ln(\sin x) - (\cos^2 x / \sin x)))$$

$$y = -(\sin x)^{\cos x} [\sin x \ln(\sin x) - (\cos^2 x / \sin x)]$$

в) Дифференцируя имеем равенство

$$3x^2 + (y'/y) - 2xe^y - x^2 e^y y' = 0$$

Откуда

$$y' = (2xye^y - 3x^2 y) / (1 - x^2 y e^y) = xy(2e^y - 3x) / (1 - x^2 y e^y)$$

2.4 Найти y' и y''

а) $y = e^{-x} \sin x$ б) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = \sin^2 2t \end{cases}$

Решение:

а) $y' = (e^{-x})' \times \sin x + e^{-x} (\sin x)' = (e^{-x}) (-x)' \sin x + e^{-x} \cos x =$
 $= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x)$

$$y'' = [e^{-x} (\cos x - \sin x)]' = -e^{-x} (\cos x - \sin x) + e^{-x} (-\sin x - \cos x) =$$

$$= -e^{-x} (\cos x - \sin x + \sin x + \cos x) = -2e^{-x} \cos x$$

б) Так как $\begin{cases} x_t' = -4\cos t \sin t = -2\sin 2t \\ y_t' = (2\sin 2t \cos 2t) \times 2 = 4\sin 2t \cos 2t \end{cases}$

то $y_x' = (y_t' / x_t') = (4\sin 2t \cos 2t / (-2\sin 2t)) = -2 \cos 2t$

Откуда согласно формуле

$$y_x'' = [(y_x')_t] / x_t' = [(-2\cos 2t)'_t] / (-2\sin 2t) =$$

$$= [-2(-\sin 2t) \times 2] / (-2\sin 2t) = 4\sin 2t / (-2\sin 2t) = -2$$

2.5 Провести полное исследование функции $y = (x-1)^2 / (x+1)$

и построить ее график

1) Областью определения функции является множество

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

2) Ордината точки графика $y \geq 0$ при $x > -1$, $y \leq 0$ при $x < -1$

3) Точки пересечения графика данной функции с осями координат:
(0, -1) и (1, 0)

4) $X=-1$ - вертикальная асимптота, так как $\lim_{x \rightarrow -1-0} (x-1)^2 / (x+1) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1+0} (x-1)^2 / (x+1) = +\infty$

Находим наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) / x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-1)^2 / (x(x+1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + 1) / (x^2 + x) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [(x-1)^2 / (x+1)] - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + 1 - x^2 - x) / (x+1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x + 1) / (x+1) = -3$$

Таким образом, наклонная асимптота $y = kx + b = x - 3$.

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание: локальный экстремум:

$y' = [2(x-1)(x+1) - (x-1)^2] / (x+1)^2 = (x-1)(x+3) / (x+1)^2$
 Из $y' = 0$ следует $(x-1)(x+3) = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Составим таблицу $y(-3) = -8$, $y(1) = 0$

x	$(-\infty; -3)$	(-3)	$(-3; -1)$	(-1)	$(-1; 1)$	(1)	$(1; +\infty)$
y	+	0	--	не сущ.	--	0	+
y	\nearrow	$y_{\max} = (-8)$	\searrow	не имеет экстремум	\searrow	$y_{\min} = 0$	\nearrow

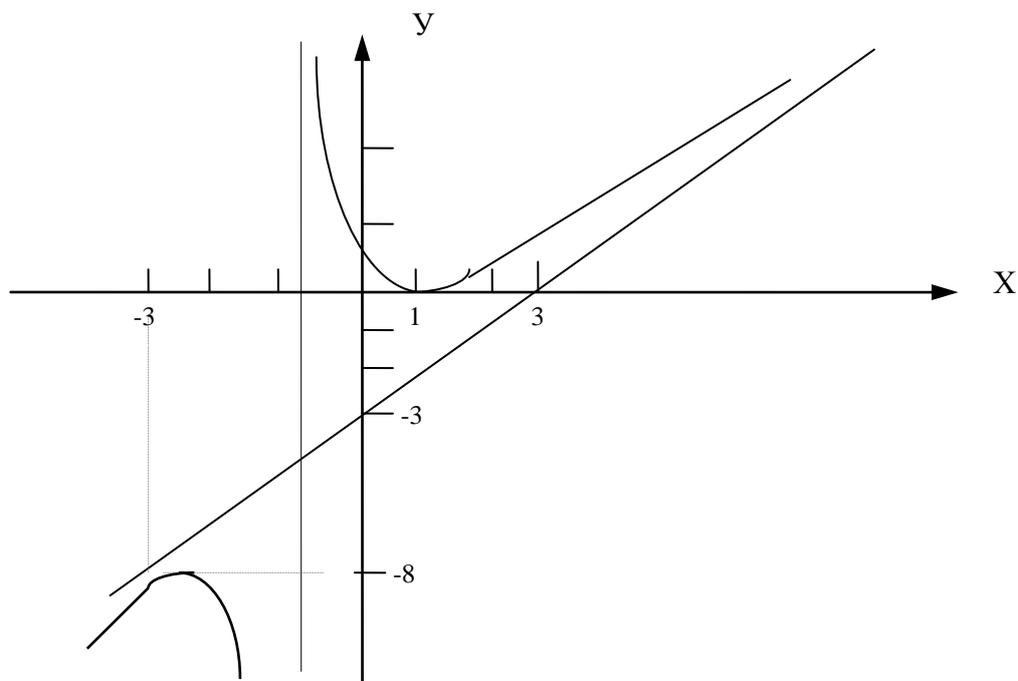
6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$y'' = ((x^2 + 2x - 3) / (x+1)^2)' = [(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x - 3)] / (x+1)^4 = 8 / (x+1)^3$$

Так как $y'' \neq 0$, то составим таблицу

y	$[(-\infty; -1)$	(-1)	$[-1; +\infty]$
y	-	0	+
график	Выпуклый	Точка перегиба отсутствует	Вогнутый

Построим график функции:



2.6 Вычислить $e^{0,1}$ точностью до 0,001 с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Решение: Для функции $f(x)=e^x$ формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n \quad (1)$$

$$\text{где } R_n = \left[\frac{(x^{n+1})}{(n+1)!} \right] \times e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (2)$$

Формулу (1) с учетом (2) можно написать в виде:

$$e^x \approx (1+x) + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^4}{n!} \quad (3)$$

так как $x_1 = 0.1 \in (0.05)$ и для любого значения x находящегося в $0 < x < 0.5$ выполняется $0 < \theta x < 0.5$ и $e^{\theta x} < e^{0.5} < 2$. Тогда

$$|R_n| = \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) e^{\theta x} < \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Если $(2x^{n+1}) / (n+1)! < \alpha/10$ то $|R_n| < \alpha/10$
 откуда $(x^{n+1}) / (n+1)! < 0.5 (\alpha/10)$ (4)

Из этого неравенства можно определить n . Для $\alpha=0.001$ имеем:

$$(x^{n+1}) / (n+1)! < 0.5 (1/10^4)$$

Вычисляем для $x=0.1$

$$n_0=1 \quad x=1.0000$$

$$n_1=0.1/1! \quad x=0.1000$$

$$n_2=0.1/2! \quad x=0.0050$$

$$n_3=0.1/3! \quad x=0.0002$$

$$n_4=0.1/4! < 0.5 \times 10^{-4}$$

$$e^{0.1} \approx 1.2052 \approx 1.105$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

2.1.1-2.1.25 Найти указанные пределы

2.1.1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1})$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt[3]{x^2 - 16}) / (\sqrt{x+12} - \sqrt{3x+4})$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (2^{3x} - 3^{2x}) / (\sin 3x + 2x)$

2.1.2 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{5x-6}) / (\sqrt[3]{x^2-9})$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 + \sin x)) / \sin 4x$

2.1.3 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6})$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{2-3x} - \sqrt[3]{6-x}) / \sqrt[3]{8+x^3}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a^{\text{rc}} \sin x^2) / (3^{5x} - 5^{3x})$

2.1.4 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 4})$ б) $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{4x+5} - \sqrt{6x-5}) / (\sqrt{4+x} - \sqrt{2x-1})$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 7(x + \pi) / (e^{3x} - 1)$

2.1.5 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 7x + 1} - x^2)$ б) $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x-2}) / (\sqrt{2x+9} - \sqrt{3x+1})$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - e^x) / (x + \text{tg} x^3)$

- 2.1.6 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2})$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{27+x} - \sqrt[3]{27-x}) / (\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x})$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / (\cos 2x - \cos x)$
- 2.1.7 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x})$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{5-x} / (\sqrt[3]{x^2+x^4}))$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x - \sin x) / (e^{3x} - e^{-x})$
- 2.1.8 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^4+3} - \sqrt{x^4-2})$ б) $\lim_{x \rightarrow 2/3} (\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x-1/3}) / (\sqrt[3]{3x-2})$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} 2\sin 2\pi(x+1) / \ln(1+2x)$
- 2.1.9 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x(x-1)})$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt[3]{x-3} - \sqrt[3]{2x-7}) / (\sqrt{1+2x-3})$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - e^{2x}) / (\sin 3x - \operatorname{tg} 2x)$
- 2.1.10a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4})$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{10x-3x} / (\sqrt{2-x-2}))$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (9\ln(1-3x)) / 4\operatorname{arctg} 4x$
- 2.1.11a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/(x^2-1) - \sqrt{x^6-1})$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{8-x} / (x^2+2^3\sqrt{x}))$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (5^{2x} - 2^{5x}) / (\sin x + \sin x^2)$
- 2.1.12a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/(x^2+2) - (\sqrt{(x^2-1)(x^2-2)}))$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}) / (\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})$
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / (e^{x^2} - 1)$
- 2.1.13a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/(x^2+3) - (\sqrt{x(x^4+2)}))$ б) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3+8) / (\sqrt[3]{4-2x-2})$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (7^x - 5^{-2x}) / (2 \arcsin x - x^2)$$

$$2.1.14a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^3 - 1})}{\dots}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow -8} (\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+25}) / (\sqrt[3]{x+2})$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 2x) / (\ln(e-x) - 1)$$

$$2.1.15a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots + 5) - x}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-3x + x^2 - 3)}{(x^2 - 3x)}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (10^{2x} - 5^{-x}) / (2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x)$$

$$2.1.16a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots + 2 - \sqrt{x-3})}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2x + 4 - 2)}{(\sqrt{9-x} - 3)}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x - \sin x) / x(1 - \cos 2x)$$

$$2.1.17a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots - 2)^2 - \sqrt[3]{(x-3)^2}}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(-1 - \sqrt{9+2x})}{(\sqrt[3]{x-2})}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \sin x)(x - \cos 2x) / \sin^2 x$$

$$2.1.18a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots + 8x^3 - 2x)}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\dots + 3 - 3)}{(\sqrt{4x-3} - \sqrt{x+6})}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} \pi(1-x/2)) / \ln(x+1)$$

$$2.1.19a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots - 2) - \sqrt{(x^2 - 2x + 3)}}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1 / \sqrt{2x^2 - 3x + 5 - 2})}{\dots}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+2x)) / (2^x - 1)$$

$$2.1.20a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\dots + 2) - \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-x - \sqrt[3]{3+2x})}{(x^3 + x^2)}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin 2x} - e^{\sin x}) / \operatorname{tg} x$$

$$2.1.21a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\dots - 4 - x^3)}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\dots + 2x)}{(\sqrt{x-2})}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin(x/2)) / (\pi - x)$$

$$2.1.22a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\dots - 3 - x \sqrt{x(x^2 + 8)})}{\dots} \quad B) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-9 - \sqrt{3x+6})}{(x^2 - 9)}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin 7\pi x) / (\sin 8\pi x)$$

$$2.1.23a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x+2-x}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{-13-\sqrt{8+x}} / (\sqrt{4-x}-3)$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin 5x) / (\operatorname{tg} 3x)$$

$$2.1.24a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-4)-\sqrt{x^4-9}}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-\sqrt{6+2x}} / (\sqrt{8-x}-3)$$

$$2.1.25a) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^3-5}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x-\sqrt{x+6}} / (\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-3})$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \ln(9-2x^2) / \sin 2\pi x$$

2.2.1-2.2-25 Исследовать данную функцию на непрерывность и построить её график

$$2.2.1 \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x^3, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ x+1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

$$2.2.2 \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0 \\ 1-x, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ x^2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$2.2.3 \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 1 \\ 2x, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2.2.4 \quad f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{если } x < 0 \\ x+1, & \text{если } 0 \leq x \leq 4 \\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

$$2.2.5 \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leq 1 \\ 2x, & \text{если } 0 < x < 3 \\ x+2, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$$

$$2.2.6 \quad f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{если } x < 1 \\ x^2+2, & \text{если } 1 \leq x < 2 \\ 2x, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$$

$$2.2.7 \quad f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x-2, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2.2.8 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0 \\ (x+1)^2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ 4-x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$2.2.9 \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \leq -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ 3-x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

$$2.2.10 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x-3, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.2.11 \quad f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{если } x \leq -1 \\ (x+1)^3, & \text{если } -1 < x < 0 \\ x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2.2.12 \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ x+1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

2.2.13 $f(x) = \begin{cases} (x-3), & \text{если } x < 0 \\ (x+1), & \text{если } 0 \leq x \leq 4 \\ 3+x, & \text{если } x > 4 \end{cases}$	2.2.14 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ x+1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$
2.2.15 $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0 \\ 1-x^3, & \text{если } -0 < x \leq 2 \\ x+4, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$	2.2.16 $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -1 \\ \ln x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$
2.2.17 $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0 \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ 1-x, & \text{если } x > \pi \end{cases}$	2.2.18 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1 \\ x^2-1, & \text{если } -1 < x \leq 2 \\ 2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$
2.2.19 $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \leq 0 \\ -x+4, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x-2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$	2.2.20 $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 1 \\ x^2+2, & \text{если } 1 < x \leq 2 \\ -2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$
2.2.21 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 1 \\ (x-2)^2, & \text{если } 1 < x < 3 \\ 6-x, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$	2.2.22 $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{если } x \leq -1 \\ x^2-2, & \text{если } -1 < x \leq 2 \\ x, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$
2.2.23 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x \leq -2 \\ x^3, & \text{если } -2 < x < 1 \\ 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$	2.2.24 $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 0 \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi \\ 3, & \text{если } x \geq \pi \end{cases}$
2.2.25 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{если } x \leq -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1 < x \leq 2 \\ 2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$	

2.3.1-2.3.25 Продифференцировать данные функции

3.3.1 а) $y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}$	б) $y = x^{(2/x)}$	в) $x \sin 2y - y \cos 2x = 10$
3.3.2 а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	б) $y = x^e$	в) $(e^y - x)^2 = x^2 + 4$
3.3.3 а) $y = \arctg(1/x)$	б) $y = x^{\arcsin x}$	в) $x \times \operatorname{tg} y - x^2 + y^2 = -4$
3.3.4 а) $y = 3^{\cos^2 x}$	б) $y = (\cos x)^{\cos x}$	в) $y - x^2 = \arctg y$
3.3.5 а) $y = \ln \operatorname{ctg}^3 \sqrt{x}$	б) $y = x^{1/x}$	в) $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$
3.3.6 а) $y = x^3 \sqrt{2/(1+x)}$	б) $y = 2x^{\sqrt{x}}$	в) $e^{2y} - e^{-3x} + (y/x) = 1$
3.3.7 а) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$	б) $y = (\ln x)^x$	в) $y = x + x \sin y$
3.3.8 а) $y = -e^{1/x}$	б) $y = (\cos x)^x$	в) $e^y + 3x^2 e^{-y} = 4x$
3.3.9 а) $y = e^{-\cos 5x}$	б) $y = (\sin x)^{\cos x}$	в) $\ln(x^2 + y^2) + \arctg(x/y) = 0$
3.3.10 а) $y = x \arctg^3 5x + \ln \operatorname{tg} x$	б) $y = (\arctg 2x)^{\sin x}$	в) $x \sin y - y \cos x = 0$
3.3.11 а) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	б) $y = x^{\arccos x}$	в) $3^{x+y} + y \ln 3 = 15$
3.3.12 а) $y = x^2 e^{-2x}$	б) $y = x^{\operatorname{tg} x}$	в) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$
3.3.13 а) $y = 2^{1/x}$	б) $y = (\ln(5x-4))^{\arctg x}$	в) $y \sin x + \cos(x-y) = \cos y$
3.3.14 а) $y = x \ln^2 y$	б) $y = (\sin(7x+4))^{\arccos x}$	в) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$

3.3.15 a) $y=3e^{\sin^2 x}$

3.3.16 a) $y=\ln((1+x)(1-x))$

3.3.17 a) $y=(4\ln x)/(1-\ln x)$

3.3.18 a) $y=7^{x+2x}$

3.3.19 a) $y=e^{-x} x^{\ln x}$

3.3.20 a) $y=x/\sqrt{8-x^2}$

3.3.21 a) $y=2/5\ln^2(3\operatorname{ctg}5x+2)$

3.3.22 a) $y=\ln^5\sqrt{10/(e^{5x}-e^{-5x})}$

3.3.23 a) $y=(1/3)\ln(x+1)/\sqrt{x^2-2x}$

3.3.24 a) $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}+e^{4x}}$

3.3.25 a) $y=\ln^3\sqrt{3\operatorname{tg}(x/2)+4}$

б) $y=xe^y+ye^x=xy$

б) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$

б) $y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}$ б) $xy+\ln y-2\ln x=0$

б) $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$ б) $e^{x+y}=\sin(y/x)$

б) $y=(\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}$ б) $(x+y)^2-(x-2y)^3=0$

б) $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$ б) $y \ln x-x \ln y=x+y$

б) $y=(\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$ б) $y^3-3y+6x=0$

б) $y=(\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}$ б) $\sqrt{x+\sqrt{y}}=5y$

б) $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$ б) $x^2+y^3-10x+y=0$

б) $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x}$ б) $x^2=6y-y^3$

б) $y=(\ln(7x-5))^{\operatorname{tarctg} 2x}$ б) $x^2+2xy-y^3=12$

2.4.1-2.4.25 Найти y' и y''

2.4.1 a) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

б) $\begin{cases} x=\ln \cos 2t \\ y=\sin^2 2t \end{cases}$

2.4.2 a) $y=x/(x^2-1)$

б) $\begin{cases} x=1-e^{3t} \\ y=(1/3)(e^{3t}+e^{-3t}) \end{cases}$

2.4.3 a) $y=x^3 \ln x$

б) $\begin{cases} x=(1-t)/t^2 \\ y=(1+t)^{1/2} \end{cases}$

2.4.4 a) $y=\operatorname{arctg}(2x/(1-x^2))$

б) $\begin{cases} x=\sin^3 4t \\ y=1/2\cos 4t \end{cases}$

2.4.5 a) $y=\ln \operatorname{tg}(\pi/4+x)$

б) $\begin{cases} x=1/3(t^3+t) \\ y=\ln(t^2+1) \end{cases}$

2.4.6 a) $y=x e^x$

б) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=1/(\sin^2 t) \end{cases}$

2.4.7 a) $y=x \operatorname{arctg} x$

б) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\operatorname{arctg} t \end{cases}$

2.4.8 a) $y=x \operatorname{arctg} x$

б) $\begin{cases} x=\sin t/(1+\sin t) \\ y=\cos t/(1+\sin t) \end{cases}$

2.4.9 a) $y=\cos x-(1/3)\cos^3 x$

б) $\begin{cases} x=4-e^{2t} \\ y=3/(e^{2t}+1) \end{cases}$

2.4.10a) $y=\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

2.4.11a) $y=((x-1)(x+1))e^{-x}$	б) {	$x=t \cos t$ $y=t \sin t$
2.4.12a) $y=\operatorname{arctg}x^2$	б) {	$x=\cos(t/2)$ $y=t-\sin t$
2.4.13a) $y=x^2 \ln x$	б) {	$x=t+\sin t$ $y=1-\cos t$
2.4.14a) $y=\sqrt{(1-x^2)/x}$	б) {	$x=t^2$ $y=(t^3/3)-t$
2.4.15a) $y=\ln \operatorname{ctg}4x$	б) {	$x=\cos 3t$ $y=\sin 3t$
2.4.16a) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$	б) {	$x=\sin(t/2)$ $y=\cos t$
2.4.17a) $y=\cos^2 x$	б) {	$x=e^{2t}$ $y=\cos t$
2.4.18a) $y=x e^{1/x}$	б) {	$x=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$ $y=2\ln \operatorname{ctg} t$
2.4.19a) $y=x e^{-x}$	б) {	$x=t^2+1$ $y=e^t$
2.4.20a) $y=\ln(\ln x)$	б) {	$x=3\cos^2 t$ $y=2\sin^3 t$
2.4.21a) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$	б) {	$x=t+\ln \cos t$ $y=t-\ln \sin t$
2.4.22a) $y=e^{\sqrt{x}}$	б) {	$x=2t-\sin 2t$ $y=\sin^3 t$
2.4.23a) $y=1/(1+x^2)$	б) {	$x=t+1/2(\sin 2t)$ $y=\cos^3 t$
2.4.24a) $y=\sqrt{4-x^2}$	б) {	$x=t^5+2t$ $y=t^3+8t-1$
2.4.25a) $y=1/(4+\sqrt{x})$	б) {	$x=(1/3)t^3+(1/2)t^2+t$ $y=(1/2)t^2+1/t$

2.5.1-2.5.25 Провести полное исследование и построить график функции

2.5.1	$y=(x-1)/(x^2-2x)$	2.5.2	$y=(2-4x^2)/(1-4x^2)$
2.5.3	$y=2x^2/(4x^2-1)$	2.5.4	$y=(2x+1)/x^2$
2.5.5	$y=1/(x^2-9)$	2.5.6	$y=4x^2/(x^2-1)$
2.5.7	$y=x^4/(x^3-1)$	2.5.8	$y=(x^2-x-1)/(x^2-2x)$
2.5.9	$y=(x-3)^2/4(x-1)$	2.5.10	$y=(x^2+4x+1)/x^2$
2.5.11	$y=(x^2+16)/4x$	2.5.12	$y=3x/(1+x^2)$
2.5.13	$y=(3-x^2)/(x+2)$	2.5.14	$y=5x^2/(x^2-25)$
2.5.15	$y=(x^2+1)/x$	2.5.16	$y=(x-1)^2/(x^2+1)$
2.5.17	$y=(x^3+1)/x^2$	2.5.18	$y=x/(3-x^2)$
2.5.19	$y=(x+1)^2/(x-1)^2$	2.5.20	$y=x/(x-1)^2$
2.5.21	$y=(2x-1)/(x-1)^2$	2.5.22	$y=x^3/2(x+1)^2$
2.5.23	$y=1/(1-2x^2)$	2.5.24	$y=2/x^2+x+1$
2.5.25	$y=(x^3-1)/4x^2$		

2.6.1-2.6.25 Вычислить e^a с точностью до 0.001 с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

2.6.1	$a=0.49;$	2.6.2	$a=0.33;$	2.6.3	$a=0.75;$
2.6.4	$a=0.63;$	2.6.5	$a=0.21;$	2.6.6	$a=0.56;$
2.6.7	$a=0.37;$	2.6.8	$a=0.83;$	2.6.9	$a=0.13;$
2.6.10	$a=0.59;$	2.6.11	$a=0.48;$	2.6.12	$a=0.43;$
2.6.13	$a=0.41;$	2.6.14	$a=0.31;$	2.6.15	$a=0.26;$
2.6.16	$a=0.28;$	2.6.17	$a=0.29;$	2.6.18	$a=0.93;$
2.6.19	$a=0.94;$	2.6.20	$a=0.96;$	2.6.21	$a=0.97;$
2.6.22	$a=0.98;$	2.6.23	$a=0.99;$	2.6.24	$a=0.13;$
2.6.25	$a=0.16;$				

**III-КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ
ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3**

3.1 Вычислить интегралы. Результаты в пункте а) проверить дифференцированием.

$$а) \int \sin \sqrt{x} dx$$

Решение:

Пусть $\sqrt{x}=t$ откуда $x=t^2, dx=2t dt$

$$J = \int \sin \sqrt{x} dx = 2 \int t \sin t dt$$

Далее, интегрируем по частям. Положим $u=t, dv=\sin t dt$

Тогда $du=dt, v=-\cos t$. По формуле $\int u dv = uv - \int v du$ имеем:

$$J = 2 \int t \sin t dt = 2(-t \cos t + \int \cos t dt) = -2t \cos t + 2 \sin t + c$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$J = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$$

Теперь, проверим результат дифференцированием:

$$dJ = d(-2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c) = (-\cos \sqrt{x}) / (\sqrt{x}) + (2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}) / 2\sqrt{x} + ((2 \cos \sqrt{x}) / 2\sqrt{x}) dx = \sin \sqrt{x} dx$$

Получено подинтегральное выражение. Значит интеграл вычислен правильно.

$$б) \int ((x^2 - x + 2) / (x^4 - 5x + 4)) dx$$

Решение:

Разложим подинтегральную функцию на элементарные дроби.

Так как $x^4 - 5x + 4 = (x-1) \times (x+1) \times (x-2) \times (x+2)$

имеем:

$$(x^2 - x + 2) / (x^4 - 5x + 4) = A / (x+1) + B / (x-1) + C / (x+2) + D / (x-2)$$

Умножая обе части равенства на $x^4 - 5x + 4$ получаем

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2) \text{ или}$$

$$x^2 - x + 2 = (A+B+C+D)x^3 + (-A+B-2C+2D)x^2 + (-4A-4B-C-D)x + (4A-4B+2C-2D)$$

Сравнивая коэффициенты при x^0 , x^1 , x^2 и x^4 придем к системе уравнений

$$\begin{cases} 4A-4B+2C-2D=2 \\ -4A-4B-C-D=-1 \\ -A+B-2C+2D=1 \\ A+B+C+D=0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=2/3$; $B=-1/3$; $C=(-2)/3$; $D=1/3$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int ((x^2-x+2) / (x^4-5x+4)) dx &= 2/3 \int dx/(x+1) - 1/3 \int dx/(x-1) - 2/3 \int dx/(x+2) + \\ &+ 1/3 \int dx/(x-2) = 2/3 \ln |x+1| - 1/3 \ln |x-1| - 2/3 \ln |x+2| + 1/3 \ln |x-2| + C = \\ &= 1/3 \ln |((x+1)^2(x-2)) / ((x+2)^2(x-1))| + C \end{aligned}$$

в) $\int dx / \sin^3 x$

Решение. Положим $\operatorname{tg}(x/2)=t$, откуда $dx=2dt / (1+t^2)$, $\sin x = (2t) / (1+t^2)$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int dx / \sin^3 x &= \int ((2dt) / (1+t^2)) / (2t/(1+t^2))^3 = \\ &= \int ((1+t^2)^2 / 4t^3) \times dt = 1/4 \int ((1+2t^2+t^4+1) / t^3) dt = \\ &= 1/4 \int dt / t^3 + 1/2 \int dt / t + 1/4 \int t dt = 1/4 (-1/2t^2) + 1/2 \ln |t| + (t^2/8) + C = \\ &= 1/2 \ln |t| + ((t^4-1)/8t^2) + C \end{aligned}$$

3.2 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

а) $\int_{-\infty}^{\infty} dx / (x^2+4x+9)$

Решение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx / (x^2+4x+9) = \int_{-\infty}^0 dx / (x^2+4x+9) + \int_0^{\infty} dx / (x^2+4x+9) =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 dx / ((x+2)^2+5) + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B dx / ((x+2)^2+5) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} (x+2)/5 \Big|_a^0 + \lim_{B \rightarrow \infty} (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} (x+2)/\sqrt{5} \Big|_0^B =$$

$$- \lim_{a \rightarrow -\infty} (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} (a+2)/5 + (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} 2/\sqrt{5} + \lim_{B \rightarrow \infty} (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} (b+2)/\sqrt{5} -$$

$$- (1/\sqrt{5}) \operatorname{arctg} 2\sqrt{5} = (-1/\sqrt{5})(-\pi/2) + (1/\sqrt{5})(\pi/2) = (\pi\sqrt{5})/5$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 ((3x^2+2) / \sqrt[3]{x^2}) dx = 3 \int_{-1}^1 x^{4/3} dx + 2 \int_{-1}^1 x^{-2/3} dx = 3J_1 + 2J_2$$

$$J_1 = \int_{-1}^1 x^{4/3} dx = (3/7)x^{7/3} \Big|_{-1}^1 = 6/7.$$

В интеграле J_2 существует точка $x=0$, где подинтегральная функция разрывна. Поэтому J_2 представим в виде:

$$J_2 = \int_{-1}^1 x^{-2/3} dx = \int_{-1}^0 x^{-2/3} dx + \int_0^1 x^{-2/3} dx$$

Таким образом

$$J_2 = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-2/3} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 x^{-2/3} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 3x^{1/3} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} 3x^{1/3} \Big|_{\varepsilon_2}^1 = 3+3=6$$

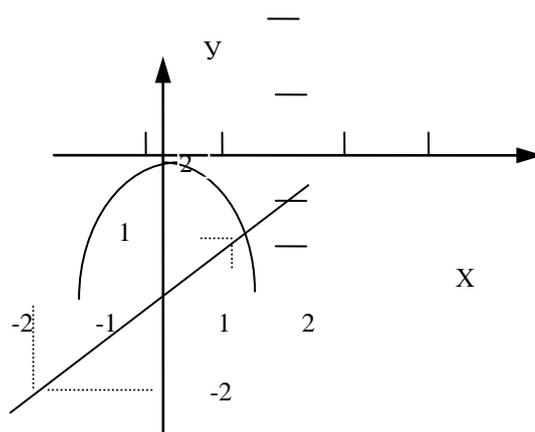
Тогда

$$\int_{-1}^1 (3x^2+2) / \sqrt[3]{x^2} dx = 3(6/7) + 2 \times 6 = 102/7.$$

3.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x$ и параболой $y=2-x^2$

Решение:

На рисунке видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для системы уравнений:

$$\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2 \end{cases}$$


В результате получаем, $x_1=-2$, $x_2=1$. Так как $y_1=2-x^2 > y_2=x$, $-2 \leq x \leq 1$, то

$$S = \int_{-2}^1 [(2-x^2)-x] dx = [2x - x^3/3 - x^2/2] \Big|_{-2}^1 = 9/2$$

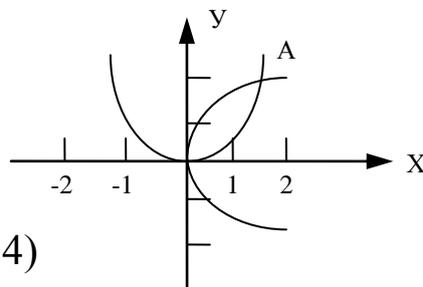
3.4 Вычислить объём тела, полученный вращением параболы $y=x^2$ и $8x=y^2$ вокруг оси Oy .

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases}$$

находим точки пересечения парабол: $Q(0, 0)$, $A(2, 4)$

Так как $x_2(y)=\sqrt{y} \geq x_1(y)=y^2/8$ и $0 \leq y \leq 4$, то



$$V = \pi \int_0^4 (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_0^4 (y - (y^4/64)) dy = \pi \left((y^2/2) - (y^5/320) \right) \Big|_0^4 = 24\pi / 5$$

3.5 Даны функция $Z=3x^2-xy+x+y$ и две точки $A(1, 3)$, $B(1, 06; 2, 92)$

Требуются а) Вычислить значение функции в точке B ;

б) Вычислить приближенно значение функции в точке B , используя значение функции в точке A и заменив приращения функции от точки A до точки B с полным дифференциалом;

в) Оценить относительную погрешность приближенного вычисления в процентах;

г) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $Z=3x^2-xy+x+y$ в точке $C(x_0, y_0, z_0)$.

Решение:

а) $Z_1=Z(B)=3(1, 06)^2-1, 06 \times 2, 92+1, 06+2, 92=4, 2556$.

б) Приближенное значение функции Z в точке B вычислим заменив приращения с полным дифференциалом, по формуле :

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

Так как

$$Z_0=Z(A)=3 \times 1^2 - 1 \times 3 + 1 + 3 = 4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - y + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_A = 6 \times 1 - 3 + 1 = 4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_A = -1 + 1 = 0,$$

$$\Delta x = 1.06 - 1 = 0.06, \quad \Delta y = 2.92 - 3 = -0.08,$$

то,

$$Z_1(B) = Z(A) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_A \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_A \Delta y = 4 + 4 \times 0.06 + 0 \times (-0.08) = 4.24.$$

в) Определим относительную погрешность:

$$\delta = |(z_1 - z_0)/z_0| \times 100\% = |(4.24 - 4.2556)/4.24| \times 100\% = 0.37\%.$$

г) Положим $C(x_0, y_0, z_0) = C(1, 3, 4)$. Тогда уравнение касательной плоскости в точке C к поверхности Z будет иметь вид:

$$z - z_0 = (\partial z / \partial x)|_c (x - x_0) + (\partial z / \partial y)|_c (y - y_0)$$

Так как $\partial z / \partial x = 4$; $(\partial z / \partial y)|_c = 0$ Следовательно:

$$z - 4 = 4(x - 1) + 0(y - 3) \text{ или } z = 4x$$

3.6 Исследовать на экстремум функцию $z = xy(x + y - 2)$

Решение: Находим первые частные производные данной функции

$$Z_x' = 2xy + y^2 - 2y, \quad Z_y' = x^2 + 2xy - 2x$$

Приравнявая их нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2yx + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + 2xy - 2x = 0 \end{cases}$$

Из которой определяем стационарные точки данной функции:

$$P_1(0, 0), P_2(2, 0), P_3(0, 2), P_4(2/3, 2/3)$$

Найдем вторые частные производные данной функции:

$$Z_{xx}'' = 2y, \quad Z_{xy}'' = 2x + 2y - 2, \quad Z_{yy}'' = 2x$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума

$$\Delta = Z_{xx}'' Z_{yy}'' - (Z_{xy}'')^2 \text{ имеем :}$$

для точки M_1 $\Delta = -4 < 0$, для точки M_2 $\Delta = 4 < 0$, для точки M_3 $\Delta = -4 < 0$, для точки M_4 $\Delta = 12/9 > 0$, $A = 4/3 > 0$

Таким образом для точек M_1, M_2, M_3 экстремума нет.

В точке M_4 функция имеет минимум $Z_{\min} = Z(2/3, 2/3) = -(8/27)$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №3

3.1.1-3.1.25 Вычислить интегралы. Результат в пункте а) проверить дифференцированием;

- | | | |
|----------|---|---|
| 3.1.1 | а) $\int x^3 \ln x \, dx$ | б) $\int dx / (4x^3 + x)$ |
| | в) $\int dx / (x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}))$ | г) $\int (\sin x \, dx) / (5 + 3 \sin x)$ |
| 3.1.2 | а) $\int x \, dx / (\cos^2 x)$ | б) $\int ((x-1)/(x^3 + 1)) dx$ |
| | в) $\int ((\sqrt[3]{x}-1)/(1+\sqrt{x})) dx$ | г) $\int dx / (\cos x(1+\cos x))$ |
| 3.1.3 | а) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ | б) $\int x dx / (x^3 - 3x + 2)$ |
| | в) $\int ((\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x^3 - 1})) dx$ | г) $\int (\sin^2 x \, dx) / (1 + \cos x + \sin x)^2$ |
| 3.1.4 | а) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$ | б) $\int ((x^2 - 3)/(x^4 + 5x^2 + 6)) dx$ |
| | в) $\int ((\sqrt{x+1}-1) / (\sqrt[3]{x+1}+1)) dx$ | г) $\int ((1-\sin x) / (\cos x(1+\cos x))) dx$ |
| 3.1.5 | а) $\int x^2 e^{-2x} \, dx$ | б) $\int (x^2 \, dx) / (x^4 - 16)$ |
| | в) $\int (\sqrt{x} \, dx) / (1 + \sqrt{x^2})$ | г) $\int (\cos x \, dx) / (1 + \cos x + \sin x)$ |
| 3.1.6 | а) $\int ((\ln x) / x^2) dx$ | б) $\int ((x+3) / (x^3 + 2x - 12)) dx$ |
| | в) $\int ((\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x+1})) dx$ | г) $\int ((1 + \sin x) / (1 + \cos x + \sin x)) dx$ |
| 3.1.7 | а) $\int x^2 \cos 5x \, dx$ | б) $\int ((x-2)/(x^4 + 4x^2)) dx$ |
| | в) $\int (\sqrt{x} \, dx) / (\sqrt[3]{x} + 2)$ | г) $\int ((\cos x - \sin x) / (1 + \sin x)^2) dx$ |
| 3.1.8 | а) $\int \ln^2 x \, dx$ | б) $\int ((2x^2 - 3x - 12) / (x^3 + x^2 - 6x)) dx$ |
| | в) $\int (\sqrt[3]{x} / (1 + \sqrt{x})) \, dx$ | г) $\int ((8 + \operatorname{tg} x) / (18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x)) dx$ |
| 3.1.9 | а) $\int x \operatorname{arcsin} x \, dx$ | б) $\int (x^4 \, dx) / (x^4 + 6x^2 + 8)$ |
| | в) $\int dx / (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$ | г) $\int ((1 + \operatorname{ctg} x) / (\sin x + 2 \cos x)^2) dx$ |
| 3.1.10а) | а) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} \, dx$ | б) $\int ((6x^4 - 1) / (2x^3 - x + 1)) dx$ |
| | в) $\int ((1 + \sqrt[3]{x-1}) / (\sqrt{x-1})) dx$ | г) $\int ((6 + \operatorname{tg} x) / (9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x)) dx$ |
| 3.1.11а) | а) $\int \ln(4x^2 + 1) dx$ | б) $\int ((x-1) / (2x^3 + 3x^2 + x)) dx$ |
| | в) $\int x \, dx / \sqrt[3]{1+x}$ | г) $\int ((5 \operatorname{tg} x + 2) / (2 \sin 2x + 5)) dx$ |
| 3.1.12а) | а) $\int ((x \cos x) / (\sin^3 x)) dx$ | б) $\int ((x+4) / (x^3 + 6x^2 + 9x)) dx$ |
| | в) $\int dx / (x \sqrt{1+x})$ | г) $\int 36 dx / (6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x$ |

$$3.1.13a) \int (x - \sin^2 x) dx \quad \text{б)} \int_{-40}^4 ((x^2 + x - 1)/(x^3 + x^2 - 6x)) dx$$

$$\text{в)} \int x dx / ((2+5x) \sqrt{2+5x}) \quad \text{г)} \int ((\operatorname{tg}^2 x)/(4+3\cos 2x)) dx$$

$$3.1.14a) \int x \operatorname{tg}^2 x dx \quad \text{б)} \int dx / (x^4 + x^3 + x^2 + x)$$

$$\text{в)} \int x dx / \sqrt[3]{5x-1} \quad \text{г)} \int ((\sin^3 x) / \sqrt{\sin x}) dx$$

$$3.1.15a) \int x dx / \sin^2 x \quad \text{б)} \int (x^3 - 6)/(x^4 + 6x + 8) dx$$

$$\text{в)} \int dx / (\sqrt{1-2x} \sqrt[4]{1-2x}) \quad \text{г)} \int ((\sin^3 x) / (\cos^4 x)) dx$$

$$3.1.16a) \int ((x \sin x) / (\cos^2 x)) dx \quad \text{б)} \int dx / (x^4 + 5x^2 + 4)$$

$$\text{в)} \int \sqrt[6]{x} dx / (1 + \sqrt[3]{x}) \quad \text{г)} \int ((\sin 2x) / (\cos^3 x)) dx$$

$$3.1.17a) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx \quad \text{б)} \int x^2 dx / (x^4 + x^2 + x)$$

$$\text{в)} \int dx / (3^4 \sqrt{x^3} - 2^3 \sqrt{x^2}) \quad \text{г)} \int dx / (\sin^3 x)$$

$$3.1.18a) \int (\ln^2 x dx) / \sqrt[3]{x^2} \quad \text{б)} \int ((2x^2 - 3x - 3)/(x-1)(x^2 - x + 5)) dx$$

$$\text{в)} \int ((\sqrt{x}-1) / (\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1))) dx \quad \text{г)} \int \sin(4x/2) dx$$

$$3.1.19a) \int x \ln^2 x dx \quad \text{б)} \int dx / (x^4 - x^3 + x^2 - x)$$

$$\text{в)} \int dx / (\sqrt{x})(\sqrt[4]{x^3} - 1) \quad \text{г)} \int \cos^5 x dx$$

$$3.1.20a) \int x^2 \ln^2 x dx \quad \text{б)} \int ((3x-7) dx) / (x^3 + x^2 + 4x + 4)$$

$$\text{в)} \int dx / (\sqrt{x-2})(1 + \sqrt[3]{x-2}) \quad \text{г)} \int \cos^2 x \sin^4 x dx$$

$$3.1.21a) \int ((\ln^2 x) / \sqrt{x}) dx \quad \text{б)} \int ((x+2) / (x^3 - 2x^2 + 2x)) dx$$

$$\text{в)} \int ((\sqrt{x+3})(1 + \sqrt[3]{x+3})) dx \quad \text{г)} \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

$$3.1.22a) \int (x^2 + 2)e^{x/2} dx \quad \text{б)} \int ((x-1) / (x^3 + x)) dx$$

$$\text{в)} \int ((\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)) dx \quad \text{г)} \int \operatorname{tg}^4 x dx$$

$$3.1.23a) \int (x+3)^2 \sin 2x dx \quad \text{б)} \int x dx / (x^3 - 1)$$

$$\text{в)} \int ((x+1) / (\sqrt[3]{2x+1})) dx \quad \text{г)} \int (\cos^4 x)(\sin^2 x) dx$$

$$2.1.24a) \int \ln(x^2 + 4) dx \quad \text{б)} \int ((x^3 - 6) / (x^4 + 6x^2 + 8)) dx$$

$$\text{в)} \int (\sqrt[4]{x+1} / (\sqrt{x+4})^4 \sqrt{x^3}) \quad \text{г)} \int dx / \sin^6 x$$

$$2.1.25a) \int \operatorname{arctg}(1/x) dx \quad \text{б)} \int (x^4 dx) / (x^4 + 5x^2 + 4)$$

$$\text{в)} \int (x dx) / (2 + \sqrt{2x+1}) \quad \text{г)} \int \sin^6 x dx$$

3.2.1-3.2.25 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$3.2.1 \quad \text{а)} \int_1^{\infty} x dx / (x^2 + 4x + 5) \quad \text{б)} \int_0^{\pi/2} ((e^{\operatorname{tg} x}) / (\cos^2 x)) dx$$

$$\quad \quad \quad \infty \quad \quad \quad \pi/6$$

$$\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$$

- 3.2.2. a) $\int ((3-x^2)/(x^2+4))dx$ б) $\int (\cos x dx)/(\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5})$
- 3.2.3 a) $\int_0^\infty ((\arctg 2x)/(1+4x^2))dx$ б) $\int_1^2 dx/(\sqrt{4x-x^2-4})$
- 3.2.4 a) $\int_0^\infty ((x+2)dx)/(\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4})$ б) $\int_{\pi/2}^\pi \sin x dx)/(\sqrt[7]{(\cos^2 x)})$
- 3.2.5 a) $\int_{1/2}^\infty dx/(4x^2+4x+5)$ б) $\int_{-1/3}^0 dx/\sqrt[3]{1+3x}$
- 3.2.6 a) $\int_0^\infty dx/(x(1+\ln^2 x))$ б) $\int (2x dx)/\sqrt{1+x^4}$
- 3.2.7 a) $\int_0^\infty ((\sqrt{\arctg 2x})/(1+4x^2))$ б) $\int_{3/4}^1 dx/\sqrt[5]{3-4x}$
- 3.2.8 a) $\int_0^\infty x dx/(4x^2+4x+5)$ б) $\int_1^2 dx/\sqrt[5]{4x-x^2-4}$
- 3.2.9 a) $\int_0^\infty x \sin x dx$ б) $\int_{1/2}^1 dx/\sqrt[9]{1-2x}$
- 3.2.10a) $\int dx_{-\infty}^{-1} (-4x)$ б) $\int x^2 dx_{0}^2 / \sqrt[6]{64-x^6}$
- 3.2.11a) $\int dx_{1/3}^\infty 9x^2 \arctg^2 3x$ б) $\int x^4 dx_{0}^1 / \sqrt[3]{1-x^5}$
- 3.2.12a) $\int dx_{2}^\infty (x^2) \sqrt{\arctg(x/2)}$ б) $\int (x^3 dx_{0}^3) / (\sqrt[3]{9-x^2})$
- 3.2.13a) $\int dx_{1}^\infty (x^2+2x)$ б) $\int (\sin^3 x dx_{0}^{\pi/2}) / \cos x$
- 3.2.14a) $\int dx_{1}^\infty (x^3+x^2)$ б) $\int dx_{0}^{1/2} / (2x-1)$
- 3.2.15a) $\int dx_{e^{-2}}^\infty (\ln x-1)^2$ б) $\int dx_{0}^{1/4} / (1-4x)$
- 3.2.16a) $\int dx_{1}^\infty (x^2-5x+1)$ б) $\int x dx_{0}^2 / \sqrt[4]{(4-x^2)^3}$
- 3.2.17a) $\int dx_{-1}^\infty (4x+5)$ б) $\int dx_{1}^3 / (3-x)^5$
- 3.2.18a) $\int x dx_{1}^\infty \sqrt{16x^4-1}$ б) $\int dx_{0}^3 / (x^2-6x+9)$
- 3.2.19a) $\int x^3 dx_{0}^\infty \sqrt{16x^4+1}$ б) $\int x dx_{0}^1 (1-x^4)$
- 3.2.20a) $\int x dx_{1}^\infty \sqrt{x^2-4x+1}$ б) $\int ((dx_{0}^{1/3}) / (x^2))dx$

3.2.21 a) $\int x dx / (16x^4 - 1)$

б) $\int \sqrt{(\ln(2-3x)/(2-3x))} dx$

3.2.22a) $\int_0^{\infty} x dx / \sqrt{(x^2+4)^3}$

б) $\int (\ln_{1/3} \zeta - 1) / (3x - 1) dx$

3.2.23a) $\int x^2 dx / \sqrt{(x^3+8)^4}$

б) $\int dx / \sqrt{1-x} \ln^2(1-x)$

3.2.24a) $\int_0^{\infty} x dx / \sqrt{(16+x^2)^5}$

б) $\int dx / \sqrt{10x^2 - 9x + 1}$

3.2.25a) $\int dx / \sqrt{\zeta^2 - 9x + 2}$

б) $\int_0^{1/3} dx / \sqrt{1-3x}$

3.3.1-3.3.25 Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями.

3.3.1 $x=4-(y-1)^2, \quad x=y^2-4y-3$

3.3.2 $x=2\sqrt{2} \cos t, y=3\sqrt{2} \sin t (y \geq 3)$

3.3.3 $z=6 \cos 3\varphi, \quad (z \geq 3)$

3.3.4 $x=(y-2)^3, \quad x=4y-8$

3.3.5 $x=8 \cos^3 t, \quad y=4 \sin^3 t (x \geq 3\sqrt{3})$

3.3.6 $z=\cos \varphi, \quad z=\sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$

3.3.7 $y=(x+1)^2, \quad y^2=x+1$

3.3.8 $x=4(t-\sin t), y=4(1-\cos t) (0 < x < 8\pi, y \geq 4)$

3.3.9 $z=4 \cos 3\varphi$

3.3.10 $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8$

3.3.11 $x=\sqrt{2} \cos t, y=4\sqrt{2} \sin t (y \geq 4)$

3.3.12 $z=2(1-\cos \varphi)$

3.3.13 $y=(x-1)^2, \quad y^2=x-1$

3.3.14 $x=24 \cos^3 t, \quad y=2 \sin^3 t (x \geq 9\sqrt{3})$

3.3.15 $z=2 \sin 2\varphi$

3.3.16 $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x$

3.3.17 $x=t-\sin t, \quad y=1-\cos t (0 \leq x < 2\pi, y \geq 1)$

3.3.18 $z=3 \sin 4\varphi$

3.3.19 $xy=4, \quad x-y=5$

3.3.20 $x=6 \cos t, \quad y=4 \sin t$

3.3.21 $x=z=2(1+\cos 4\varphi)$

3.3.22 $y^2=16-8x, \quad y^2=24x+18$

3.3.23 $x=32 \cos^3 t, \quad y=\sin^3 t (x \geq 4)$

3.3.24 $z=2 \sin 3\varphi$

3.3.25 $y=x^2-3x, \quad 3x+y-4=0$

3.4.1-3.4.25 Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченная графиками данных функций, вокруг указанной оси координат.

3.4.1	$y=(x-1)^2,$	$x=0,$	$x=2,$	$y=0$	(oy)
3.4.2	$y=-x^2+5x-6, y=0$				(ox)
3.4.3	$x=3\cos^3 t,$	$y=4\sin^3 t$	$(0 \leq t \leq \pi/2)$		(oy)
3.4.4	$y^2=(x-1)^3,$	$x=2$			(ox)
3.4.5	$y=x^3,$	$y=x$			(oy)
3.4.6	$x=6(t-\sin t),$	$y=6(1-\cos t)$			(ox)
3.4.7	$y=x^2-2x+1,$	$x=2,$	$y=0$		(oy)
3.4.8	$y=2x-x^2,$	$y=0,$	$2x^2-4x+y=0$		(ox)
3.4.9	$x=2\cos t,$	$y=5\sin t$			(oy)
3.4.10	$y=3\sin x,$	$y=\sin x$	$(0 \leq x \leq \pi)$		(ox)
3.4.11	$y=\arcsin x,$	$y=\arccos x$	$y=0$		(oy)
3.4.12	$x=7\cos^3 t,$	$y=7\sin^3 t$			(ox)
3.4.13	$y=(x-1)^2,$	$y=1$			(oy)
3.4.14	$x=\sqrt[3]{y-2},$	$x=1$	$y=1$		(ox)
3.4.15	$x=\sqrt{3} \cos t,$	$y=2\sin t$			(oy)
3.4.16	$y=2x-x^2,$	$y=-x+2$			(ox)
3.4.17	$y=\sqrt{x-1},$	$y=0,$	$y=1,$	$x=0.5$	(oy)
3.4.18	$x=2(t-\sin t),$	$y=2(1-\cos t)$			(ox)
3.4.19	$y=x^2+1,$	$y=x,$	$x=0,$	$x=1$	(oy)
3.4.20	$y=e^{1-x},$	$y=0,$	$x=0,$	$x=1$	(ox)
3.4.21	$x=2\cos t,$	$y=6\sin t$			(oy)
3.4.22	$y^2=4x,$	$x^2=4y$			(ox)
3.4.23	$y=2-(x^2/2),$	$x+y=2$			(oy)
3.4.24	$y=\cos^3 t,$	$y=\sin^3 t$			(ox)
3.4.25	$y=5\cos 2,$	$y=\cos x$	$(x \geq 0)$		(ox)

3.5.1-3.5.25 Даны функция $Z=Z(x, y)$ и две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$.

Требуется: а) Вычислить значение функции Z в точке B .

б) Вычислить приближенно значение функции Z в точке B , используя значения функции в точке A и заменив приращения функции от точки A до точки B с полным дифференциалом.

в) Оценить относительную погрешность приближенного вычисления в процентах.

г) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $Z=Z(x, y)$ в точке $Z(x_0, y_0, z_0)$

3.5.1	$Z=x^2+xy+y^2$	$A(1, 2)$	$B(1.02, 1.96)$
3.5.2	$Z=3x^2-xy+x+y$	$A(1, 3)$	$B(1.06, 2.92)$
3.5.3	$Z=x^2+3xy-6y$	$A(4, 1)$	$B(3.96, 1.03)$
3.5.4	$Z=x^2-y^2+6x+3y$	$A(2, 3)$	$B(2.02, 2.97)$
3.5.5	$Z=x^2+2xy+3y^2$	$A(2, 1)$	$B(1.96, 1.04)$

3.5.6	$Z=x^2+y^2+2x+y-1$	A(2. 4)	B(1.98, 3.91)
3.5.7	$Z=3x^2+2y^2-xy$	A(-1. 3)	B(-0.98, 2.97)
3.5.8	$Z=x^2-y^2+5x+4y$	A(3. 2)	B(3.05, 1.98)
3.5.9	$Z=2xy+3y^2-5x$	A(3. 4)	B(3.04, 3.95)
3.5.10	$Z=xy+2y^2-2x$	A(1. 3)	B(1.03, 2.98)
3.5.11	$Z=2x^2+3xy+4$	A(1. 2)	B(0.97, 2.04)
3.5.12	$Z=2xy+3x-2y$	A(2. 2)	B(1.93, 2.05)
3.5.13	$Z=2y^2-3xy+4y$	A(1. 3)	B(1.07, 2.95)
3.5.14	$Z=x^2-y^2-2x+y$	A(4. 1)	B(3.98, 1.06)
3.5.15	$Z=x^2+y^2+2x+3y$	A(1. 2)	B(1.05, 1.98)
3.5.16	$Z=y^2+6xy-3y$	A(3. 2)	B(2.94, 2.05)
3.5.17	$Z=3xy+2x+y$	A(1. 2)	B(1.05, 1.93)
3.5.18	$Z=x^2+y^2+3x+3y$	A(3. 2)	B(3.04, 1.95)
3.5.19	$Z=x^2+2xy+3y^2$	A(2. 1)	B(1.95, 1.04)
3.5.20	$Z=2xy+3y^2-5x$	A(3. 4)	B(3.04, 3.95)
3.5.21	$Z=x^2+xy+y^2$	A(1. 1)	B(1.08, 1.85)
3.5.22	$Z=2x^2+3xy+y^2$	A(2. 1)	B(2.01, 0.95)
3.5.23	$Z=5x^2+6xy$	A(3. 4)	B(2.95, 4.02)
3.5.24	$Z=3x^2+2xy^2$	A(1. 3)	B(1.05, 2.97)
3.5.25	$Z=3x^2y^2+5y^2x$	A(1. 1)	B(1.01, 1.04)

3.6.1-3.6.25 Исследовать на экстремум функции $Z=Z(x, y)$

3.6.1	$Z=2(x+y)-x^2-y^2$
3.6.2	$Z=xy(12-x-y)$
3.6.3	$Z=(x-5)^2+y^2+1$
3.6.4	$Z=x^2-xy+y^2+x-y+1$
3.6.5	$Z=x^2+3(y+2)^2$
3.6.6	$Z=(x-2)^2+2y^2-10$
3.6.7	$Z=3x^3+3y^2-9xy+10$
3.6.8	$Z=1+6x-x^2-xy-y^2$
3.6.9	$Z=xy-3x^3-2y^2$
3.6.10	$Z=y\sqrt{x-y^2}-x+6y$
3.6.11	$Z=2xy-5x^2-3y^2+2$
3.6.12	$Z=2x^3+2y^3-6xy+5$
3.6.13	$Z=y\sqrt{x-2y^2}-x+14y$
3.6.14	$Z=(x-1)^2+2y^2$
3.6.15	$Z=x^3+8y^3-6xy+1$
3.6.16	$Z=x\sqrt{y-x^2}-y+6x+3$
3.6.17	$Z=x^2+xy+y^2-6x-9y$
3.6.18	$Z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$
3.6.19	$Z=x^2+xy+y^2-2x-y$
3.6.20	$Z=2xy-3x^2-2y^2+10$

$$3.6.21 Z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$$

$$3.6.22 Z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$$

$$3.6.23 Z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$$

$$3.6.24 Z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

$$3.6.25 Z = xy - x^2 - y^2 + 9$$

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант контрольной работы студента определяется следующим образом:

- если последние две цифры учебного шифра 00, то выполняется 25-вариант;
- если от 01 до 25, то выполняется соответствующий вариант;
- если число, состоящее из этих последних двух цифр больше 25, то номер варианта соответствует остатку от деления этого числа на 25; если остаток будет равен нулю, то берется 25-вариант. Например последние две цифры будут 67, тогда $67/25=2(17/25)$ остаток равен 17 и студент выполняет вариант № 17.

При выполнении и оформлении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. Контрольная работа выполняется в тетради, а не на листах, с полями для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, учебный номер (шифр), номер контрольной работы. Здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует проставить дату её выполнения и расписаться.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решение задачи надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения делая необходимые чертежи.
6. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново, целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом.

Исправленную работу следует посылать в институт вместе с незачтенной. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Программа курса “Высшая математика для студентов-заочников строительных специальностей высших учебных заведений (1-3 контрольные).	3
2. 1-Контрольная работа. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры . Примеры решения задач к выполнению контрольной работы.	5
3. Задания для контрольной работы №1.....	14
4. 2-Контрольная работа. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Исследование функций с помощью производных. Примеры решения задач к выполнению контрольной работы.	19
5. Задания для контрольной работы №2.....	25
6. 3-Контрольная работа. Неопределенные и определенные интегралы. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Примеры решения задач к выполнению контрольной работы.	33
7. Задания для контрольной работы №3.....	38
8. Правила выполнения и оформления контрольных работ.	44

