

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

5480100 – амалий математика ва информатика йўналиши

09.305-гуруҳ талабаси Орипов Пулатжоннинг

ҳисболаш усуллари фанидан

КУРС ИШИ

**Мавзу: Эллиптик типдаги бир тенглама учун қуйилган
чегаравий масалани чекли айирмалар усули ёрдамида
ёчиш**

Фарғона – 2012

МУНДАРИЖА

КИРИШ	3
I.БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА- ЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ	9
I.1. Тенгламалар классификацияси.....	9
I.2. Математик физика тенгламаларининг типлари.....	16
I.3. Асосий масалаларнинг қўйилиши: Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалалар.....	22
II.БОБ. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ЕЧИШ	25
II.1. Дирихле масаласининг қўйилиши.....	25
II.2. Масала ечимининг топилиши.....	25
III.БОБ. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ ТҶРЛАР УСУЛДА ЕЧИШ	30
III.1. Тўрлар усулининг ғояси.....	30
III.2. Тўрлар усули ёрдамида масала тақрибий ечимининг сонли натижаларини топиш.....	36
III.3. Масала ечимини ЭҲМда қайта ишлаш.....	45
ХУЛОСА	59
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати	60

КИРИШ

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Шу мақсадни амалга оширишда бўлажак мутахассис билим ва кўникмаларининг мустаҳкамлиги, улар эгаллаган билимнинг атрофлича ўрганилгани катта аҳамият касб этади. Республикамиз Президенти Ислон Абдуғаниевич Каримов айтганларидек «...мамлакатимизнинг бой илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш» учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Давлат таълим стандартларида бўлажак мутахассис эгаллаши кўзда тутилган билимларни чуқур ва атрофлича баён қилиниши ҳамда ўргатилишига алоҳида аҳамият бериш “Миллий дастур”да кўзда тутилган асосий мақсадни амалга ошириш бўйича катта натижа беради. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришиш, жумладан юқори малакали кадрлар тайёрлашда миллий дастурни ўрни ва аҳамияти беқиёсдир. Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди: «Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, бирибир кадрларга бориб қадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз калажаги, ўрнимизга

ким келишига ёки бошқачароқ қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ... ».

Дифференциал тенгламалар назариясига оид дастлабки масалалар XVI-XVII асрларда Ж.Непернинг логарифмик жадвални тузиш жараёнида учрайди. Г.Галилей эса қаршиликсиз муҳитда оғир жисмларнинг тушушини ўрганишида бундай масалалар таҳлилига асос солган [8], [9].

И.Ньютон ва Г.Лейбницнинг ишлари билан дифференциал тенгламалар назарияси ривожининг илк даври бошланди деб айтиш мумкин.

Баъзи геометрик масалаларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоб усуллари ёрдамида ўрганилиши оддий дифференциал тенгламаларнинг синфларга бўлинишига олиб келади.

XVII асрнинг биринчи ярмида дифференциал тенгламалар фақатгина механикада эмас, балки дифференциал геометрия ва варивцион ҳисобда ҳам кенг қўлланила бошланди. Бу давр охирига келиб математик физика масалалари, аввало торнинг тебраниши ҳақидаги масала хусусий ҳосилали тенгламалар кўринишини олди. Мазкур асрда дифференциал тенгламалар назарияси дифференциал тенгламаларнинг турли типлари ҳақидаги таълимот сифатида ривожлантирилди. Шунингдек, асосий эътибор интеграллашнинг хусусий усулларига, ечимни оддий функциялар билан ифодалашга ва квадратураларга олиб келишга қаратилган бўлиб, ечим мавжуд, лекин уни квадратурага олиб келиб бўлмаган тақдирда тақрибий интеграллашга ҳаракат қилинар эди.

Оддий дифференциал тенгламаларнинг кейинги ривожланишида XVIII асрнинг йирик математиклари Л.Эйлер, А.К.Клеро, Ж.Даламбер, С.Пуассон, ва Ж.Л.Лагранж катта ҳисса қўшдилар.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси дастлаб торнинг тебраниши ҳақидаги масалани ечишдан ривожлана бошлади.

Б.Тейлор (1715 йил) ушбу масаланинг ечимини математик жиҳатдан асослади, бунда у қуйидаги кўринишдаги тенгламага келди [9]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Баъзи чегаравий шартлар асосида Б.Тейлор масалани ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли оддий чизиқли тенгламаларга келтирди ва иккита учи бириктирилган тор учун ҳар қангдай вақт моментида у синусоида шаклида эканлигини топди. Тебранувчи тор тенгламасини

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

шаклида Даламбер ифодаланади ва унинг ечимини иккита ихтиёрий функция йиғиндиси шаклида, яъни $f(x+t) + \varphi(x-t)$ кўринишда топди [9].

Тор тебраниши тўла аниқланиши учун чегаравий шартлар билан бирга бошланғич шартлар берилиши кераклигини бир йилдан сўнг кўрсатди.

Юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар гидродинамика масалаларида (Эйлер, Даламбер, 1752 йил), мембрана тебранишлари ҳақидаги масала (Эйлер, 1753 йил), потенциаллар назариясида (Лаплас, 1789 йил) ва ҳ.к.ларда пайдо бўлди.

Р.Липшиц, Ж.Пеано, Ш.Пикар, С.В.Ковалевская, Ж.Дарбу, Ж.Лиувилль, П.Л.Чебышев, К.Я.Якоби, М.В.Остроградский ва бошқалар диккеренциал тенгламалар назариясининг навбатдаги масалаларини ҳал қилган ҳолда унинг ривожига катта ҳисса қўшдилар.

Дифференциал тенгламалар назариясининг XX асрдаги ривожланишида рус олимларидан А.Н.Тихонов, В.В.Степанов, М.М.Нахушев, Ф.Трикоми, А.В.Бицадзе, Н.М.Гюнтер, В.И.Смирнов, М.А.Лаврентьев, Н.И.Мусхелишвили, И.Н.Векуа, ўзбекистонлик

олимлардан М.С.Салоҳиддинов, Т.Ж.Жўраев ва улар яратган мактаб вакиллариининг ҳиссаси катта бўлди.

Ҳисоблаш математикаси, амалий масалаларни ечишга бўлган эҳтиёж (юза ва ҳажмларни ўлчаш, кема ҳаракатини бошқариш, юлдузлар ҳаракатини кузатиш ва бошқалар) туфайли вужудга келганлиги учун ҳам у сонли математика бўлиб, унинг мақсади масала ечимини сон шаклида топишдан иборат.

Шундай типик математик масалаларга дуч келинадик, уларни классик методлар билан ечиш мумкин эмас ёки ечиш мумкин бўлган тақдирда ҳам ечим шундай мураккаб кўринишда бўладики, ундан самарала фойдаланишнинг иложи бўлмайди. Бундай типик математик масалаларга алгебрада тартиби жуда катта бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш, матрицаларнинг тескарисини топиш, матрицаларнинг хос сонларини топиш, алгебраик ва трансцендент тенгламалар ҳамда бундай тенгламалар системасини ечиш масалалари, математик анализда сонли интеграллаш ва дифференциаллаш, функцияни яқинлаштириш масалалари, шунингдек, оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш масалалари ва бошқалар киради.

Математикада ўрганиладиган объектлар сонининг кўпайиши бу фаннинг амалий татбиқ соҳаларини кенгайтиради. Масалан, К.Гаусс, Ж.Фурье, О.Коши, М.В.Остроградский каби олимлар вариацион ҳисоб усулини яратдилар, механика, физиканинг экстремумга доир масалаларини ҳосила ёрдамида ечдилар.

Европалик олимлар Л.Эйлер, Ж.А.Лагранж, Г.В.Лейбниц, Г.Крамер, К.Якоби, Ж.Г.Стокс, Дж. Ортега, Б.Больцано, К.Вейрштрасс ва бошқалар турли исботлаш усулларида фойдаланиб, дифференциал ва интеграл ҳисоб курсини ривожлантирдилар.

Бу усулларнинг кенйинги ривожда европалик олимлар Б.П.Демидович, Б.С.Кронберг, А.А.Самарский, Н.С.Бахвалов, Г.И.

Марчук, И.С. Березин, ўзбекистонлик олимлардан В.Қ. Қобулов, М.Исроилов, А.Абдуқодиров ва бошқаларнинг ҳиссаси катта бўлди.

Фан ва техниканинг фаол ривожланиши, атом ядросидан фойдаланиш, учувчи аппаратларни лойиҳалаш, космик учиш динамикаси, бошқариладиган термоядро синтези муаммоси муносабати билан плазма физикаси масалаларини текшириш ҳамда ечишни тақозо қилмоқда. Бундай масалалар ўз навбатида математиклар олдига янгидан-янги ҳисоблаш методларини яратиш вазифасини қўяди. Иккинчи томондан, фан ва техника ютуқлари математиклар ихтиёрига кучли ҳисоблаш воситаларини бермоқда. Бунинг натижасида эса мавжуд усулларни янги машиналарда қўллаш учун қайтадан кўриб чиқиш эҳтиёжи туғилмоқда.

1.БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ

1.1. Тенгламалар классификацияси

Икки эркин ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, номаълум функция ва унинг иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари (иккинчи тартибли ҳосилалардан бири иштирок этиши шарт) орасидаги боғланишни ифодаловчи муносабатга айтилади ва уни умумий ҳолда

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

кўринишда ёзилади, бу ерда F - ўз аргументларининг берилган функцияси.

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.1)$$

кўринишдаги тенглама *юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизикли тенглама* дейилади. Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x, y нинг функциялари бўлиб, камида биттаси нолдан фарқли. Агар бу коэффициентлар x, y дан ташқари яна u, u_x ва u_y ларнинг ҳам функцияси бўлса, (1.1) **квази чизикли тенглама** дейилади.

Агар тенгламада юқори тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлар ҳам чизикли бўлса, яъни (1.1) ушбу

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{33}u + f = 0 \quad (1.2)$$

кўринишда бўлса, (1.1) чизикли тенглама дейилади. Бунда $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ ва f лар x, y нинг функциялари ҳисобланади; агарда тенгламанинг коэффициентлари x, y га боълиқ бўлмаса, тенглама *ўзгармас*

коэффициентли дейилади. Тенгламада $f(x, y) = 0$ бўлса, тенглама **бир жинсли** дейилади.

Агар (1.2) кўринишдаги тенгламада ўзгарувчиларни $\xi = \varphi(x, y)$ ва $\eta = \psi(x, y)$ тенгликларга асосан алмаштирсак, олдинги тенгламага **эквивалент янги тенглама** ҳосил бўлади.

Шуни эслатиб ўтамизки, тенгламада юқорида айtilган алмаштириш бажарилганда иккинчи тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлардан иккинчи тартибли ҳосилалар пайдо бўлмайди; агар бу ҳадлар чизиқли бўлса, чизиқлилигича қолади, яъни алмаштириш бажарилгач,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{33}u + f$$

ифода яна

$$\bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \bar{a}_{13} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{a}_{23} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{a}_{33}u + \bar{f}$$

кўринишга келади, бу ерда $\bar{a}_{13}, \bar{a}_{23}, \bar{a}_{33}, \bar{f} - \xi$ ва η ўзгарувчиларнинг функциялари. Шу сабабли келгусида бу ҳадларнинг ёйилган ифодасини олмасдан ихчам шаклдагисини ишлатамиз, яъни (1.1) кўринишдаги тенглама билан шуғулланамиз.

Энди қуйидаги саволни қўйиш мумкин: ўзгарувчилар қандай алмаштирилганда, эквивалент тенглама олдинги тенгламага нисбатан соддароқ кўринишга келади?

Бу саволга жавоб топиш учун юқоридаги мулоҳазаларни инобатга олиб, (1.1) тенгламада ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Бунда $u(x, y)$ функциянинг ҳосилалари янги ўзгарувчилар орқали

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

тенгликлар билан аниқланиб, (1.1) тенглама

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.3)$$

кўринишга келади. Бунда

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\
\bar{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
\bar{a}_{22} &= a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.
\end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.3) тенглама (1.1) тенгламага нисбатан содда кўринишда бўлиши учун ўзгарувчиларни шундай алмаштириш керакки, бунда $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$ ва $\bar{a}_{22}$ коэффицентлардан бири ёки икkitаси (лекин учаласи эмас) нолга айлансин. Бу масалани ечиш учун қуйидаги иккита леммани кўриб чиқамиз.

1-лемма. Агар $z = \varphi(x, y)$ функция ушбу

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (1.5)$$

тенгламанинг хусусий ечимларидан бири бўлса, $\varphi(x, y) = C$ ифода

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (1.6)$$

қўринишдаги оддий дифференциал тенгламанинг умумий интеграл бўлади.

2-лемма. Агар $\varphi(x, y) = C$ ифода (1.6) оддий дифференциал тенгламанинг умумий интеграл бўлса, $z = \varphi(x, y)$ функция (1.5) тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Биринчи лемманинг исботи. Лемманинг шартига асосан $z = \varphi(x, y)$ функция берилган соҳанинг ихтиёрий нуқтасида

$$a_{11}(\varphi_x)^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}(\varphi_y)^2 = 0 \quad (1.7)$$

тенглик ўринли. Умумийликни чегараламай $\varphi_y \neq 0$ деб ҳисоблаб, охириги тенгликни φ_y га бўлсак,

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (1.8)$$

тенгликка эга бўламиз.

$\varphi(x, y) = C$ ифода (1.6) нинг умумий интеграл бўлиши учун ундан ошкор шаклда топилган $y = f(x, C)$ функция (1.6) ни қаноатлантириши керак. Бу функциянинг ҳосиласи, $\varphi(x, y) = C$ га асосан,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \quad (1.9)$$

тенглик билан аниқланади. Буни эотиборга олсак, (1.8) тенгликдан

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0, \quad (1.10)$$

яъни (1.6) тенгликнинг тўйрилиги келиб чиқади. Бу билан 1-лемма исбот бўлди.

Энди иккинчи леммани исбот қиламиз. $\varphi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг умумий интеграли бўлсин. У ҳолда, $\varphi(x, y) = C$ нинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай (x, y) нуқтада (1.10) тенглик бажарилади.

Буни эотиборга олсак, (1.9) га асосан, бу нуқтада (1.8) тенглик ҳам бажарилади. Бундан эса (1.7) тенгликнинг ўринлилиги келиб чиқади. Шу билан 2-лемма ҳам исбот бўлди.

(1.6) тенглама (1.1) тенгламанинг *характеристик тенгламаси*, бу тенгламанинг интеграллари эса (1.1) тенгламанинг *характеристикалари* дейилади. (1.6) тенглама билан аниқланувчи (dx, dy) вектор йўналиши (1.1) тенгламанинг *характеристик* йўналиши дейилади.

Демак, 1- ва 2-леммаларга асосан, $\varphi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг интегралларидан бири бўлганда, $\xi = \varphi(x, y)$ деб олинса, (1.3) тенгламадаги $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ олдидаги коэффициент нолга айланар экан, яъни $\bar{a}_{11} = 0$ бўлади; шунингдек, $\psi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг иккинчи интеграли бўлса, $\eta = \psi(x, y)$ деб олинса, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ олдидаги коэффициент ҳам нолга айланади, яъни $\bar{a}_{22} = 0$ бўлади.

Характеристик тенглама қуйидаги иккита биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ажралади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (1.11)$$

Бу тенгламалардаги радикал остидаги ифоданинг ишорасига қараб, (1.1) тенглама типларга ажратилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **гиперболик типдаги** тенглама дейилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **эллиптик типдаги** тенглама дейилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **параболик типдаги** тенглама дейилади.

Таорифдан фойдаланиб кўрсатиш қийин эмаски,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.12)$$

тенгламалар, масалан, $O(0,0)$ нуктада мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишли тенгламалардир.

Тенглама турли нукталарда турли типга тегишли бўлиши мумкин, масалан,

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.13)$$

тенглама $M_1(1,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,-1)$ нукталарда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишлидир.

Агар тенглама бирор (тенгламанинг коэффицентлари ва озод ҳади аниқланган) D соҳанинг ҳар бир нуктасида бир хил типга тегишли бўлса, у ҳолда уни D соҳада шу типдаги тенглама дейилади. Масалан, (1.12) тенгламалар текисликнинг ихтиёрий нуктасида бир хил типга тегишли бўлгани учун улар бутун текисликда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типдаги тенглама ҳисобланади. (1.13) тенглама эса юқори ярим текисликда эллиптик, қуйи ярим текисликда эса гиперболик тенглама бўлади.

Агар (1.1) тенглама бирор D соҳада эллиптик типга тегишли бўлиб, ихтиёрий λ_1 , λ_2 сонлар учун шундай мусбат k_0, k_1 сонлар топилсаки, D соҳанинг барча нукталарида

$$k_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \leq a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \leq k_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1.1) тенглама D соҳада **текис эллиптик тенглама** дейилади.

Масалан, (1.12) даги биринчи тенглама ихтиёрий соҳада текис эллиптик, (1.13) тенглама эса юқори ярим текисликда текис эллиптик эмас.

Агар тенглама D соҳанинг турли қисмида турлича типларга тегишли бўлса, уни шу соҳада аралаш типдаги тенглама дейилади. Масалан, (1.13) тенглама $D_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ соҳанинг $D_1 = D_0 \cap (y > 0)$ қисмида эллиптик, $D_2 = D_0 \cap (y < 0)$ қисмида гиперболик, $D = \cap (y = 0)$ қисмида эса параболик типга тегишли бўлгани учун, у D_0 соҳада аралаш типдаги тенглама ҳисобланади.

(1.4) га асосан

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2.$$

Бундан кўринадики (1.1) ва (1.3) тенгламалар бир хил типга тегишли бўлиши, яъни ўзгарувчиларни алмаштиришда тенглама типи ўзгармаслиги учун

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлиши керак экан. Бу тенгсизлик эса $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функцияларнинг чизикли боълиқ бўлмаслигини кўрсатади.

Демак, ўзгарувчиларни чизикли боълиқ бўлмаган $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ формулалар ёрдамида алмаштирганда тенгламанинг типи ўзгармайди.

Бундан ташқари, юқоридагилардан келиб чиқадики, (1.1) тенглама бирор нуктада эллиптик бўлса, бу нуктада ҳақиқий характеристик йўналишга эга эмас, гиперболик (параболик) бўлса эса, иккита (битта) характеристик йўналишга эга бўлар экан.

2-§ Математик физика тенгламаларининг типлари

Кўпгина физика ва техника масалаларини ечиш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга олиб келади. Бунда 2-тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар энг кўп учрайди.

$u = u(x, y)$ икки ўзгарувчи функция учун қуйидаги мисолларни келтирамиз.

1. Торда тўлқин тарқалиши тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

бу тенгламани текширишга торнинг кўндаланг тебраниши жараёнини кузатиш, стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлари, газ молекулалари тебранишлари ва бошқаларни кузатиш давомида тўқнаш келамиз. Бу тенгламалар гиперболик типдаги энг содда тенгламалардир.

2. Кесмада иссиқлик тарқалиши тенгламаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

бу тенгламани текширишга иссиқлик тарқалиши жараёнини кузатиш, суюқлик ва газ филтратсияси, еҳтимоллар назариясининг баъзи бир масалалари олиб келадилар. Бу тенглама энг содда кўринишдаги параболик тип тенгламадир.

3. Лаплас тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.16)$$

бу тенгламани текширишга электр ва магнит майдони ҳақидаги масалаларни кузатиш жараёнида, статсионар иссиқлик ҳолатини текшириш, гидродинамика масалалари, диффузия ва бошқа масалаларни ечишда дуч келинади. Бу тенглама энг содда эллиптик типдаги тенгламадир.

1-мисол

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad xy \neq 0$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишига келтиринг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2$ бўлиб, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2 y^2 > 0$. Демак, тенгламамиз гиперболик тип экан.

Унинг характеристик тенгламаси $x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0$ ёки $(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$ бўлиб у иккита дифференциал тенгламадан иборат, уларнинг ўзгарувчиларини ажиратиб, $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ кўринишга эга бўлади, буларни интеграллаб $\ln y + \ln x = \ln c_1$ ва $\ln y - \ln x = \ln c_2$ ёки $xy = c_1$ ва $\frac{y}{x} = c_2$ га эга бўлиб, ва $\zeta = xy, \eta = \frac{y}{x}$ алмаштириш бажарсак, ески ўзгарувчилар бўйича олинган хусусий ҳосилаларни янги ўзгарувчилар орқали оламиз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$$

$$y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) +$$

$$\frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} = y \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \right) - \frac{y}{x^2} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - ларнинг бу қийматларини берилган дифференциал тенгламага

қўйиб ва уни соддалаштириб, қуйидаги каноник тенгламага эга бўламиз.

$$x^2(y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - y^2(x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})) = 0$$

$$\text{ёки} \quad -4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{xy} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$\text{бундан} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

2-мисол

$$\sin^2 x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y \sin x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (сода) кўринишга келтиринг.

Ечиш:

Бу ерда $a_{11} = \sin^2 x$, $a_{12} = -y \sin x$, $a_{22} = y^2$ бўлиб,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 \cdot \sin^2 x - y^2 \cdot \sin^2 x = 0$. Демак, тенглама параболик тип экан.

Характеристик тенглама куйидаги кўринишга эга:

$$\sin^2 x \cdot dy^2 + 2y \cdot \sin x \cdot dx dy + y^2 \cdot dx^2 = 0,$$

ёки

$$(\sin x \cdot dy + y dx)^2 = 0.$$

Куйидаги

$$\sin x \cdot dy + y dx = 0.$$

тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0.$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Уни интеграллаб

$$\ln y + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \ln C,$$

ёки

$$y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C$$

ечимни оламир.

Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз: $\xi = y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\eta = y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ &= \frac{1}{4} y^2 \sec^4 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ ларнинг қийматларини дифференциал}$$

тенгламага қўямиз:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} y^2 \sec^4 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial \xi} - \\ &- y^2 \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right) - y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi} + \\ &+ y^2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Осонгина кўрсатиш мумкинки, $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$ -ларни ўз ичига олган ҳадлар

Ўзаро қисқаради ва тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{1}{2}y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial \xi} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0,$$

ёки

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

лекин

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta},$$

бўлганлиги учун

$$\sin x = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Натижада

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

3-мисол

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишга келтиринг.

Ечиш: Бу ерда $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 2$, бўлиб, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$. Демак тенгламамиз эллиптик тип экан. Характеристик тенглама $dy^2 + 2 \cdot dx dy + 2 \cdot dx^2 = 0$, ёки $y'^2 + 2y' + 2 = 0$.

Бундан $y' = -1 \pm i$; Демак иккита комплекс ечимлар оиласини ҳосил қиламиз:

$$y + x - ix = C_1 \quad \text{и} \quad y + x + ix = C_2.$$

Ўзгарувчиларни алмаштирамиз: $\xi = y + x$, $\eta = x$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dy} + \frac{dz}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = \frac{dz}{d\xi};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Дифференциал тенгламага хусусий ҳосилаларнинг топилган ифодаларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0.$$

яъни

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

4-мисол

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишга келтиринг.

Жавоб: $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$

5-мисол

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишга келтиринг.

Жавоб: $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x + y.$

6-мисол

$$xy \neq 0 \text{ бўлганда } \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (соdda) кўринишга келтиринг.

Жавоб:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi = y^2, \quad \eta = x^2.$$

3-§ Асосий масалаларнинг қўйилиши:

Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалалар.

Физик жараёнларни математик тилда ёзиш учун аввало масала қўйилиши шарт, яъни жараённи бир қийматли аниқлаб берувчи шартлар баён қилиниши керак. Оддий дифференциал тенгламалар ва айниқса хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар умуман олганда чексиз кўп ечимга эга.

Шунинг учун физик масала хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга олиб келинадиган ҳолда, жараённи бир қийматли аниқлаш учун тенгламага баъзи бир қўшимча шартлар қўйилади. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар бўлган ҳолда, ечим бошланғич шартлар орқали аниқланиши мумкин, яъни аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи функциянинг ва унинг биринчи ҳосиласининг қийматлари берилади (Коши масаласи).

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун ҳам турли кўринишдаги қўшимча шартлар қўйилиши мумкин.

Энг аввало қуйидаги соdda масалани қараймиз: учлари маҳкамланган торнинг кўндаланг тебраниши масаласи; Бу масалада $u(x, t)$ деб торнинг ОХ ўқидан четланишини қараймиз. Агар торнинг учлари $0 \leq x \leq \ell$ кесманинг учларида маҳкамланган бўлса, у ҳолда қуйидаги «чегаравий шартлар» бажарилиши зарур

$$u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad (1.17)$$

Тор тебраниши унинг $t = t_0$ вақтдаги бошланғич формасига ва тезлик тақсимланишига боғлиқ бўлганлиги сабабли қуйидаги “бошланғич шарт” лар берилиши зарур:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x) \\ u_t(x, t_0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

Шундай қилиб, қўшимча шартлар «чегаравий» ва «бошланғич» шартлардан иборат бўлади, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар берилган функциялар. Бу шартлар тор тебраниши жараёнини, яъни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1.19)$$

тенглама учун (1.17), (1.18) чегаравий масала ечимини тўлиқ аниқлаб беради. Бошқа кўринишдаги чегаравий шартлар ҳам берилиши мумкин. (1.17) чегаравий шартлар биринчи тур шартлар деб аталади. $u(x, t)$ функциянинг x бўйича ҳосиласи $u_x(x, t)$ га қўйилган чегаравий шартлар

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(\ell, t) = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

иккинчи тур чегаравий шартлар деб аталади. Агар чегаравий шартлар $u(x, y)$ нинг ўзининг қийматларига ва унинг ҳосиласи $u_x(x, t)$ га қўйилган бўлса:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right)_{x=\ell} = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

учинчи тур чегаравий шартлар деб аталади. (1.17) - (1.21) шартлардан ташқари, бундан сўнг учта асосий тур чегаравий шартлар ҳақида гапирамиз:

- биринчи тур чегаравий шарт: $u(0, t) = \mu(t)$ – берилган режим,
- иккинчи тур чегаравий шарт: $u_x(0, t) = \nu(t)$ – берилган куч,
- учинчи тур чегаравий шарт: $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$ – эластик маҳкамланиш.

Худди шундай торнинг иккинчи учи $x = \ell$ га ҳам чегаравий шартлар

қўйилади. Агар $\mu(t)$, $\nu(t)$ ва $\theta(t)$ лар нолга тенг бўлса, у ҳолда бу шартлар бир жинсли деб аталади. Енди $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ тенглама учун биринчи чегаравий масалани келтирамиз: $0 \leq x \leq \ell$ ва $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

тенгламани,

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(\ell, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

чегаравий шартларни ва

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ функцияни топиш масаласи.

Агар торнинг учлари учун иккинчи ёки учинчи чегаравий шартларни олсак, буларга мос келувчи масалалар иккинчи ёки учинчи чегаравий масалалар деб аталади. Агар $x=0$ ва $x=\ell$ лардаги чегаравий шартлар турлича типларга мансуб бўлса, у ҳолда аралаш чегаравий масалаларга келамиз.

Агар бизни кичик вақт оралиғидаги торнинг ўзгариши қизиқтирса, у ҳолда чегаранинг таъсири кам бўлади ва тўлиқ масала ўрнига чексиз узунликдаги тор учун бошланғич шартлар остидаги чегаравий масалалар қаралади:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

тенгламанинг

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty$$

бошланғич шартларга бўйсунувчи ечимини топиш масаласи. Бу масала Коши масаласидир.

II. БОБ. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ЕЧИШ

II.1. Дирихле масаласининг қўйилиши

Ушбу $AB = \{(x, y) : 0 < y < 1, x = 0\}$, $BC = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 1\}$,
 $CD = \{(x, y) : 0 < y < 1, x = 1\}$, $AD = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ тўғри чизиклар
 билан чегараланган Ω квадрат соҳада Лаплас тенгламаси деб аталувчи

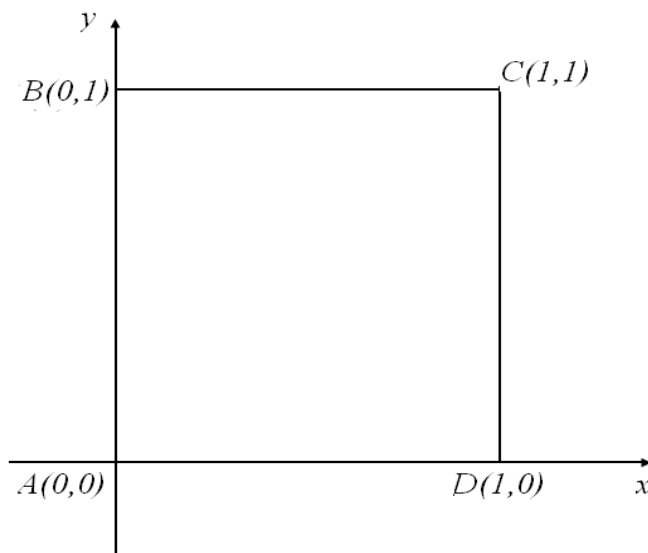
$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

тенгламанинг

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y) \\ u(1, y) &= \varphi_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \psi_1(x), \\ u(x, 1) &= \psi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

чегаравий шартларни
 қаноатлантирувчи ечими
 топилсин.



Ω соҳада (2.1) тенгламанинг коэффициентлари орасида $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
 ($a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = 1$) муносабат ўринли бўлганлиги учун, бу тенгламани шу
 соҳада эллиптик типга тегишли дейилади.

II.2. Масала ечимининг топилиши

Масала ечимини ўзгаручиларни ажратиш усулидан фойдаланиб
 топамиз.

Бунинг учун (2.1)-(2.3) масалани иккита масалаларга ажратамиз. Ажратишни шундай танлаймизки, бу масалаларда ўзгарувчилардан бири буйича бир жуфт чегаравий шартлар бир жинсли бўлсин. Айтайлақ, ечимни

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

кўринишда қидирайлик, бу ерда u_1 ва u_2 лар мос ҳолда Ω соҳада қуйидаги масалаларнинг ечимлари:

$$\left. \begin{aligned} u_{1xx} + u_{1yy} &= 0, \\ u_1(0, y) &= u_1(1, y) = 0, \\ u_1(x, 0) &= \psi_1(x), \\ u_1(x, 1) &= \psi_2(x), \end{aligned} \right\}$$

ва

$$\left. \begin{aligned} u_{2xx} + u_{2yy} &= 0, \\ u_2(x, 0) &= u_2(x, 1) = 0, \\ u_2(0, y) &= \varphi_1(y), \\ u_2(1, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \right\}$$

Бу масалаларнинг ҳар бирини стандарт масала деб атаймиз. Биринчи бўлиб, $u_1(x, y)$ функция учун стандарт масалани кўриб чиқамиз. Сўнгра Лаплас тенгламаси учун

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad (2.4)$$

x буйича бир жинсли чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (2.5)$$

кўринишда топамиз.

(2.5) ни (2.1) Лаплас тенгламасига олиб бориб қўямиз ва ўзгарувчиларни ажртаганимиздан кейин қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \quad (2.6)$$

Бу ердан $X(x)$ ва $Y(y)$ ларга нисбатан иккита тенгламаларга эга бўламиз. Кўриш мумкинки, x ўзгарувчи буйича бир жинсли (2.4) шартни

қаноатлантиради ва $X(x)$ функцияга нисбатан бир ўлчовли Штурм-Лиувил масаласига келамиз:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0.$$

Бу масала математик физика курсидан муълум, яъни хос қийматларни ва унга мос хос функцияларни топиш ҳақидаги Штурм-Лиувил масаласи деб ном олган. Бу масаланинг хос сонлари ва уларга мос хос функциялари қуйидаги кўринишда топилган

$$X = X_n(x) = \sin p_n x, \quad \lambda = \lambda_n = (p_n)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Топилган λ_n ларни инобатга олиб, (2.6) дан $Y(y)$ функцияни аниқлаймиз:

$$Y'' + \lambda_n Y = 0, \quad 0 < y < 1 \quad (2.7)$$

(2.7) нинг умумий ечими қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$Y = C_1 e^{p_n y} + C_2 e^{-p_n y}.$$

Кейинги ёзувлар учун бу қийинчиликлар туғдириши мумкин. Буни ва бир жинсли чегаравий шартларни инобатга олиб, яъни $Y_1(0) = 0$ ва $Y_1(1) = 0$ ларни инобатга олиб ёзамиз:

$$Y_1(y) = \operatorname{sh} p_n y, \quad Y_2(y) = \operatorname{sh} p_n (1 - y),$$

бу ерда sh - гиперболик синус.

Буларга асосланиб, (2.7) тенгламанинг ечимини қулай ҳолда ёзиб оламиз:

$$Y = C_1 \operatorname{sh} p_n y + C_2 \operatorname{sh} p_n (1 - y).$$

Шундай қилиб, Лаплас тенгламасининг хусусий ечимлари системасини ҳосил қилдик.

$$u_n = \sin \sqrt{\lambda_n} x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y \quad (2.8)$$

ва

$$u_n(x, y) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (1 - y) \quad (2.9)$$

Энди эса $u_1(x, y)$ функция учун қуйилган масаланинг ечимини (2.8) ва (2.9) хусусий ечимлардан фойдаланган ҳолда ёзамиз:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} \sin \sqrt{I_n} x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} (1-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} \sin \sqrt{I_n} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} (1-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} \sin \sqrt{I_n} x. \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.10) олиб бориб $y = 0$ ли чегаравий шартга қўямиз

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \sqrt{I_n} x = y_1(x),$$

Бу ердан кўринадикки, B_n лар $y_1(x)$ функция учун $\{\sin p_n x\}_1^{\infty}$ хос функциялар системасига Фурье коэффицентлари ҳисобланади. Улар қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$B_n = 2 \int_0^1 y_1(x) \sin p_n x dx. \quad (2.11)$$

Энди (2.10) олиб бориб $y = 1$ ли чегаравий шартга қўямиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \sqrt{I_n} x = y_2(x),$$

бу ердан

$$A_n = 2 \int_0^1 y_2(x) \sin p_n x dx \quad (2.12)$$

лигини топамиз.

Шундай қилиб, $u_1(x, y)$ функция учун қуйилган стандарт масаланинг ечими (2.10) билан аниқланади, A_n ва B_n коэффицентлари эса мос ҳолда (2.11) ва (2.12) орқали топилади.

Худди шунга ўхшаш усул билан $u_2(x, y)$ функция учун қўйилган стандарт масала ҳам ечилади.

Унинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} x}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} + D_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{I_n} (1-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{I_n}} \sin \sqrt{I_n} y, \quad (2.13)$$

бу ерда

$$I_n = (pn)^2,$$

$$D_n = 2 \int_0^1 j_1(x) \sin \sqrt{I_n} y dy,$$

$$C_n = 2 \int_0^1 j_2(x) \sin \sqrt{I_n} y dy.$$

Демак, (2.1)-(2.3) масаланинг ечими куйидаги кўринишда

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

бу ерда u_1 ва u_2 лар мос равишда (2.10) ва (2.13) формулалар орқали аниқланади.

Шу метод билан тўғри тўртбурчак соҳада ёки квадрат соҳада Лаплас тенгламаси учун бошқа чегаравий шартларни олиб ишлашимиз ҳам мумкин.

Қаторларнинг яқинлашиши ҳақидаги фикрларни [3] дан олиш мумкин.

III. БОБ. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ ТҶРЛАР УСУЛДА ЕЧИШ

III.1. ТҶрлар усулининг ғояси

Математикада типик математик масалаларнинг ечимларини етарлича аниқликда ҳисоблаш имконини берувчи усулларни яратишга ва шу мақсадда ҳозирги замон ҳисоблаш воситаларидан фойдаланиш йўллари ишлаб чиқишга бағишланган соҳа ҳисоблаш математикаси дейилади.

Ҳисоблаш математикаси қамраган масалалар турли жуда ҳам кўп. Табиийки, бу масалаларни ечиш усуллари ҳам хилма-хилдир, шунга қармай бу усулларнинг умумий ғояси ҳақида сўз юритиш мумкин [4,5].

Ҳисоблаш математикасида учрайдиган кшп масалаларни

$$y = Ax$$

шаклида ёзиш мумкин, бу ерда x ва y берилган R_1 ва R_2 функционал фазоларнинг элементлари бўлиб, A -оператор ёки хусусий ҳолда функционалдир. Агар A оператор ва x элемент ҳақида маълумот берилган бўлиб, y ни топиш лозим бўлса, бундай масала тўғри масала дейилади. Аксинча A ва y ҳақида маълумот берилган бўлиб, x ни топиш лозим бўлса, бундай масала тесқари масала дейилади. Одатда тесқари масалани ечиш анча мураккабдир. Бу масалалар ҳар доим ҳам аниқ ечилавермайди. Бундай ҳолларда ҳисоблаш математикасига мурожаат қилинади.

Баъзан масалани аниқ ечиш ҳам мумкин, лекин классик математика методлари билан керакли сонли қиймат олишда жуда кўп ҳисоблашлар талаб қилинади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш математикаси зиммасига конкрет масалаларни ечиш учун оқилона ва тежамкор усуллар ишлаб чиқиш юкланади.

Дифференциал тенгламаларнинг аниқ ечимини топиш жуда қамдан-қам ҳоллардагина мумкин бўлади. Амалиётда учрайдиган кўпдан-кўп масалаларнинг аниқ ечимини топишнинг иложи бўлмайди. Шунинг учун

дифференциал тенгламаларни ечишда тақрибий усуллар муҳим рол ўйнайди. Ечимлар қай тарзда ифодаланишига қараб, бундай усуллар гуруҳларга бўлинадилар:

1. *Аналитик усуллар.* Бунда тақрибий ҳисоблашда ечим формула кўринишида чиқади.
2. *График усуллар.* Бу ҳолларда топилган ечимлар график кўринишларда ифодаланади.
3. *Рақамли усуллар.* Бунда ечим сонли жадвал кўринишида олинади.

Ҳисоблаш математикасида мазкур уч гуруҳга кирувчи бир канча усуллар ишлаб чиқилган. Бу усулларнинг бир-бирига нисбатан муаян камчиликлари ва устунликлари мавжуд. Муҳандислик масалаларини ечишда шуларни ҳисобга олган ҳолда у ёки бу усулни танлаб олиш лозим бўлади.

XX аср ўрталарида электрон ҳисоблаш машиналарининг кашф этилиши математиканинг имкониятларини ва таъсир доирасини жуда кенгайтириб юборди. Бугунда секундига бир неча миллионлаб амаллар бажара оладиган янги машиналар яратилган ва кенг ишлаб чиқаришга татбиқ қилинмоқда. Программалаштиришнинг автоматлаштиришга, ҳисоблаш машиналарининг янги турларини ишлаб чиқаришга, янгидан-янги математик комплексни бошқарувчи машиналар қуришга алоҳида эътибор берилмоқда. Айниқса, электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида математикани механикага, физикага, техникага, шунингдек химия, биология, медицина, экономика, социология, лингвистика каби фанларга татбиқ қилишда кенг имкониятлар очилди. Қисқа қилиб айтганда, ҳозирги вақт бирор фан ёки ишлаб чиқариш соҳаси йўқки, унда математик қонуниятларга асосланган электрон ҳисоблаш машинаси ишлатилмасин.

Масалани ЭҲМда ечишнинг ўзига хос томонлари бор. Ҳар бир ҳисоблаш иши пухта режалаштиришни талаб қилади, яъни ҳисоблаш схемасини шундай тузиш керакки, у оралиқдаги ва охириги натижаларни

назорат қилиш учун имкон берсин. Акс ҳолда турли хатоларга йўл қўйилиши мумкин. Ҳозирги ЭҲМлар секундига миллиардлаб амалларни бажара олади ва бу ҳисоблашлар автоматик равишда, ҳисобловчининг иштирокисиз бажарилади. Шунинг учун ҳам ҳисобловчи ҳисоблаш машинасининг барча ишини шундай режалаштириши керакки, масалани ечиш жараёнида учрайдиган ҳар бир махсус ҳолларга машина эътибор берадиган бўлсин. У керакли алгоритмнинг бажарилишини таъминлаши, масала ечишнинг эффектив ва коррект дастурини тузиши керак бўлади.

Шу мақсадда чекли айирмалар ёки тўрлар усулини келтирмоқчимиз.

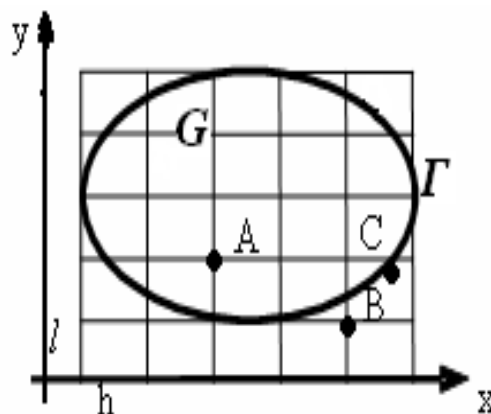
Чекли айирмалар усули хусусий ҳосилали тенгламаларнинг сонли ечимини топишда энг қулай усуллардан биридир.

Бу усулнинг асосида ҳосиларни чекли айирмалар нисбати билан алмаштириш қоидаси ётади.

Айталик, xOy координаталар текислигида чегараси Γ чизиқ билан чегараланган ёпиқ G соҳа берилган бўлсин. G соҳани кесиб ўтувчи ўқларга параллел бўлган тўғри чизиқлар оиласини кураимиз:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$$

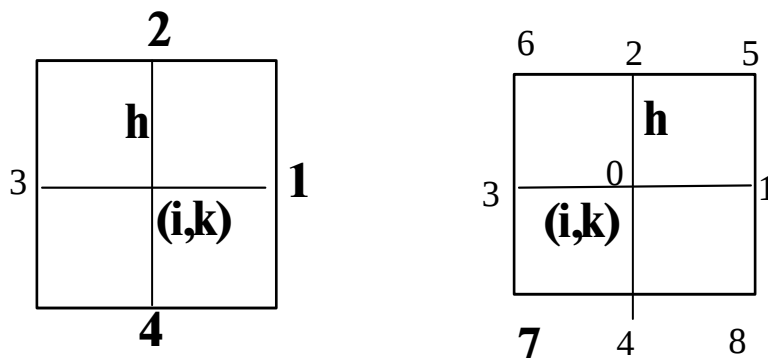
$$y_i = y_0 + kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m$$



Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарни тугунлар деб аталади. Ҳосил бўлган тўрда икки тугунни қўшни тугун деб аталади. Агар улар бири икинчисидан Ox ёки Oy координата ўқлари йуналишида h ёки l масофада жойлашган бўлса $G + \Gamma$ соҳага тегишли бўлган ва соҳанинг чегараси Γ дан, қадамдан кичик масофада турган тугунларни ажратамиз.

Соҳанинг бирор тугуни ва унга қўшни бўлган тўртта тугун ажратилган тугунларига тегишли бўлса, бу тугунни ички тугун деб аталади. (А тугун). Ажратилгандан қолганлари чегара тугунлари деб аталади (В, С тугунлар).

Номалум $u = u(x, y)$ функциянинг тўрнинг 5 ёки 9 тугунли схемаларининг



тугунларидаги қийматини $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ орқали белгилаймиз. Ҳар бир $(x_0 + ih, y_0 + kl)$ ички нуқтадаги хусусий ҳосилаларни айирмалар нисбати билан қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} &\approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Чегаравий нуқталарда эса аниқлиги камроқ бўлган қуйидаги формулар билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{ik,k+1} - u_{ik}}{l} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Худди шунингдек, иккинчи тартибли хусусий ҳосиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1}}{4hl} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Юқорида кетирилган алмаштиришлар хусусий ҳосиласи тенгламаларни ўрнига чекли айримали системасини ечишга олиб келади.

Юқорида кўрсатилган соҳада қуйидаги Дирихле масалани кўрайлик.

Қулайлик учун

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y)$$

тенгламадан Γ чизик билан чегараланган G боғламли соҳада аниқланган эллиптик типдаги тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$Lu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f(x, y) \quad (3.4)$$

бу ерда a, c, d, e, g лар x ва y ларнинг функциялари бўлиб $a(x, y) > 0$, $b(x, y) > 0$ ва $g(x, y) \leq 0$ бўлсин. (x_i, y_k) тугунда тенгламадаги $f(x, y)$ функция ва коэффициентларни a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , g_{ij} , f_{ij} , u_{ij} каби белгилаймиз.

Бу (3.4) тенглама учун қуйидаги Дирихле масаласининг чегаравий шarti

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma$$

кўйилган бўлсин.

Беш нуқтали тугунлар схемаси бўйича (3.1), (3.3) формулалар асосида чекли айирмалар ёрдамида (3.4) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} a_{ik} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + b_{ik} \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} + c_{ik} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + \\ + d_{ik} \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} - g_{ik} u_{ik} = f_{ik} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Шунингдек Γ чегара(чизик) функцияси $\phi(x, y)$ асосида чегара тугунлари $(x_i \pm \theta h, y_i)$ ёки $(x_i, y_i \pm \theta h)$ ($0 < \theta < 1$) учун қуйидаги муносабатларни ёзамиз:

$$u(x_i \pm \theta h, y_k) \approx \frac{\theta u(x_{i+1}, y_k) + \phi(x_i \pm \theta h, y_k)}{\theta + 1} = \frac{1}{\theta + 1} (\theta u_{i+1,k} + \phi_{i \pm \theta, k})$$

ёки

$$u(x_i, y_k \pm \theta h) \approx \frac{\theta u(x_i, y_{k+1}) + \phi(x_i, y_k \pm \theta h)}{\theta + 1} = \frac{1}{\theta + 1}(\theta u_{i,k+1} + \phi_{i,k \pm \theta}).$$

Агар тенглама таркибида $2e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ иштирок этса уни тўққиз нуқтали тугунлар схемаси бўйича чекли айирмалар билан қуйидагича алмаштириб (3.5) тенгламага қўшамиз:

$$(e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})_{ik} = e_{ij} \frac{u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1}}{2hl}.$$

Чекли айирмалар ёрдамида (3.4) тенгламани, (x_i, y_k) тугунга нисбатан ҳосил бўладиган тенгламалар системасини қуйидагича ёзамиз:

$$A_{i,k}u_{i,k} + B_{i,k}u_{i,k} + C_{i,k}u_{i,k} + D_{i,k}u_{i+1,k} + E_{i,k}u_{i,k+1} = f_{i,k} \quad (3.6)$$

$$A_{i,k} = \frac{b_{i,k}}{h^2} - \frac{d_{i,k}}{2h}, \quad B_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{h^2} - \frac{c_{i,k}}{2h}, \quad C_{i,k} = \frac{2(a_{i,k} + b_{i,k})}{h^2} + g_{i,k},$$

$$D_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{h^2} + \frac{c_{i,k}}{2h}, \quad E_{i,k} = \frac{b_{i,k}}{h^2} + \frac{d_{i,k}}{2h}$$

Фаразимишга асосан $a(x, y) > 0, b(x, y) < 0, g(x, y) < 0$ лар силлик функциялар бўлса, етарлича кичик h учун

$$g_{i,k} < 0, A_{i,k} > 0, B_{i,k} > 0, C_{i,k} < 0, D_{i,k} > 0, E_{i,k} > 0$$

бўлганда қуйидаги тенгликка ега бўламиз:

$$A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k} + D_{i,k} + E_{i,k} = g_{i,k}.$$

Ҳосил бўлган чизиқли тенгламалар система (3.6) си учун юқоридаги шартлар бажарилганда бу соҳанинг ички тугунларида системани ечимини топишда итерация усулини қўллаш учун уни қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$u_{i,k} = -\frac{A_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1} - \frac{B_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i-1,k} - \frac{D_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i+1,k} - \frac{E_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1} + \frac{f_{i,k}}{C_{i,k}}$$

Шунингдек чегаравий тугунлар учун

$$u_{i,k} \approx \frac{\theta}{\theta+1} u_{i+1,k+1} + \frac{1}{\theta+1} \phi_{i \pm \theta, k \pm \theta}$$

Берилган бошланғич $u_{i,k}^{(0)}$ ечим асосида аниқ ечимга яқинлашиш жараёнини

оддий итерация усулида қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$u_{ik}^{(p+1)} = -\frac{A_{i,k}}{C_{i,k}} u_{i,k+1}^{(p)} - \frac{B_{i,k}}{C_{i,k}} u_{i-1,k}^{(p)} - \frac{D_{i,k}}{C_{i,k}} u_{i+1,k}^{(p)} - \frac{E_{i,k}}{C_{i,k}} u_{i,k+1}^{(p)} + \frac{f_{i,k}}{C_{i,k}}$$

$$u_{i,k}^{(p+1)} \approx \frac{\theta}{\theta+1} u_{i+1,k+1}^{(p)} + \frac{1}{\theta+1} \phi_{i \pm \theta, k \pm \theta}, \quad p=0,1,2,\dots$$

Юқоридаги шартлар асосида бу жараённи $u_{i,k}$ аниқ ечимга яқинлашиш шarti қуйидагича танланади:

$$\max_{i,k} |u_{i,k}^{(p)} - u_{i,k}| \leq \frac{q^p}{1-q} \max_{i,k} |u_{i,k}^{(0)}|$$

$$q = \max_{i,k} \left(\frac{\theta_{i,k}}{1 + \theta_{i,k}}, -\frac{A_{i,k} + B_{i,k} + D_{i,k} + E_{i,k}}{C_{i,k}} \right).$$

III.2. Тўрлар усули ёрдамида масала тақрибий ечимининг сонли натижаларини топиш

Биринчи чегаравий масала ёки Пуассон тенгламаси:

$$\Delta u = \frac{\nabla^2 u}{\nabla x^2} + \frac{\nabla^2 u}{\nabla y^2} = f(x, y) \quad (3.7)$$

учун Дирихле масаласи қуйидагича қўйилади Γ соҳанинг ички нуқталарида (3.7) тенгламани ва Γ - чегарасида эса

$$u|_{\Gamma} = j(x, y)$$

шартни канотлантирувчи $u = u(x, y)$ функция топилсин. Мос равишда Ох ва Оу ўқларида h ва l қадамларни танлаб,

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y_k = y_0 + kl, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

тўғри чизиклар ёрдамида тўр кураимиз ва соҳанинг ички тугунларидаги

$$\frac{\nabla^2 u}{\nabla x^2}, \frac{\nabla^2 u}{\nabla y^2}$$

ҳосиларни (3.3) формула асосида (3.7) тенгламани эса қуйидаги чекли айирмалар тенгламалари билан алмаштирамиз:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \quad (3.8)$$

бу ерда $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ (3.8) тенглама соҳанинг чегаравий нукталаридаги u_{ik} қийматлари билан биргаликда (x_i, y_k) тугунларидаги $u(x, y)$ функция қийматларига нисбатан чизикли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қилади. Бу система тўғрибурчакли соҳада ва $l = k$ бўлганда энг содда кўринишга келади. Бу ҳолда (3.8) тенглама қуйидагича ёзилади.

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik} \quad (3.9)$$

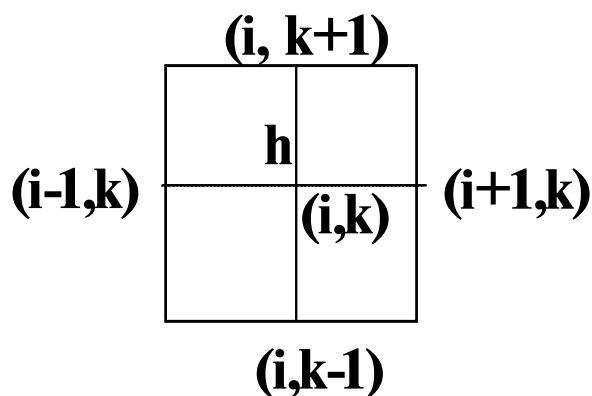
Чегаравий тугунлардаги қийматлар эса чегаравий функция қийматларига тенг бўлади. Агар (3.7) тенгламада $f(x, y) = 0$ бўлса

$$\Delta u = \frac{\nabla^2 u}{\nabla x^2} + \frac{\nabla^2 u}{\nabla y^2} = 0$$

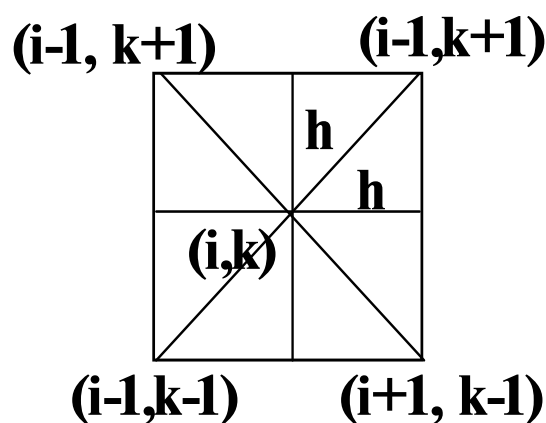
Лаплас тенгламаси ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг чекли айирмалар тенгламаси қуйидагича:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}). \quad (3.10)$$

Бу (3.9) ва (3.10) тенгламаларни 1-расмдаги тугунлар схемасидан фойданилади. Бундан буён расмлардарда (x_i, y_i) тугунларни уларнинг индекслари билан



1-расм



2-расм

алмаштириб ёзамиз. Баъзан 2-расмдаги каби тугунлар схемасидан фойдаланиш қулай бўлади. Бу ҳолда Лаплас тенгламасининг чекли айрималар орқали ёзилган тенгламаси қуйдагича ёзилади.

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) \quad (3.11)$$

Пуассон тенгламаси учун эса:

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{i,k} \quad (3.12)$$

Дифференциал тенгламаларни айрималар билан алмаштириш хатолиги яъни (3.11) тенглама учун колдик ҳад $R_{i,k}$ қуйдагича баҳоланади.

$$R_{i,k} < \frac{h^2}{6} M_4,$$

бу ерда

$$M_4 = \max_G \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\}$$

Айрималар усули билан топилган тақрибий ечим хатолиги учта хатолигидан келиб чиқади:

- 1) дифференциал тенгламаларни айрималар билан алмаштиридан
- 2) чегаравий шартни аппроксимация қилишдан.
- 3) ҳосил бўлган айримали тенгламаларни тақрибий ечишлардан.

Биламиз иккинчи бобда Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини аналитик усулда ечим кўринишини топган эдик. Энди эса бу бобда Дирихле масаласини тўрлар усули ёрдамида ечимни сонли топамиз. Иккинчи бобда Дирихле масаласи квадрат соҳада чегаравий шартлари умумий бўлган ҳолда ечилган эди. Ҳозирги қилинадиган ишда эса чегаравий шартлар аниқ берилганда кўриб чиқилади.

Дирихле масаласи. Қуйидаги Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

учун учлари $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$ нуқталарда бўлган квадратга Дирихле масаласини

$$u|_{AB} = 45y(1-y); \quad u|_{BC} = 25x; \quad u|_{CD} = 25; \quad u|_{AD} = 25x \sin \frac{\pi x}{2};$$

бўлганда, тўр усули билан 0.01 аниқликда ечимини топинг, $h = 0,2$.

Ечиш. I. Ечим соҳасини $h = 0,2$ қадам билан катакларга ажратамиз ва соҳанинг чегара нуқталарида ноъмалум функция қийматларини ҳисоблаймиз.

1-жадвал

B						C
1						
0.8						
0.6						
0.4						
0.2						
A	0.2	0.4	0.6	0.8	1	D

1) $u(x, y)$ функция қийматини АВ томонда $u(x, y) = 45y(1 - y)$ формула ёрдамида топамиз.

$$u(0;0)=0,$$

$$u(0;0.2)=7.2,$$

$$u(0;0.4)=10.8,$$

$$u(0;0.6)=10.8,$$

$$u(0;0.8)=7.2,$$

$$u(0;1)=0.$$

2) ВС тамонда $u(x, y) = 25x$

$$u(0.2;1)=5,$$

$$u(0.4;1)=10,$$

$$u(0.6;1)=15,$$

$$u(0.8;1)=20,$$

$$u(1,1)=25.$$

3) CD томонда : $u(x, y) = 25$

$$u(1;0.8)=u(1;0.6)=u(1;0.4)=u(1;0.2)=25.$$

4) AD томонда $u(x, y) = 25 \sin \frac{px}{2}$

$$u(0,2;0)=1.545,$$

$$u(0,4;0)=5.878,$$

$$u(0,6;0)=12.35,$$

$$u(0,8;0)=19.021.$$

II. Ечим соҳа ичидаги нуқталарда изланаётган функция қийматларини топиш учун Лаплас тенгламаси учун чекли орттормаларни қўллашдан ҳосил бўлган

$$u_{ij} = u(x_i, y_j) = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

формула ёрдамида қуйидагича топамиз.

2-жадвал

0		5	10	15	20	25
7.2		u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	25
10.8		u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	25
10.8		u_5	u_6	u_7	u_8	25
7.2		u_1	u_2	u_3	u_4	25
0		1.54	5.878	12.13	15.02	

$$u_1 = \frac{1}{4}(7,2 + 1,545 + u_2 + u_5);$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(5,878 + u_1 + u_3 + u_6)$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(12,135 + u_2 + u_4 + u_7);$$

$$u_4 = \frac{1}{4}(19,021 + 25 + u_3 + u_8);$$

$$u_5 = \frac{1}{4}(10,8 + u_1 + u_6 + u_9);$$

$$u_6 = \frac{1}{4}(u_2 + u_5 + u_7 + u_{10});$$

$$u_7 = \frac{1}{4}(u_3 + u_6 + u_8 + u_{11});$$

$$u_8 = \frac{1}{4}(25 + u_4 + u_7 + u_{10});$$

$$u_9 = \frac{1}{4}(10,8 + u_5 + u_{10} + u_{13});$$

$$u_{10} = \frac{1}{4}(u_6 + u_9 + u_{11} + u_{14});$$

$$u_{11} = \frac{1}{4}(u_7 + u_{10} + u_{12} + u_{15});$$

$$u_{12} = \frac{1}{4}(25 + u_8 + u_{11} + u_{16});$$

$$u_{13} = \frac{1}{4}(7,2 + 5 + u_9 + u_{16});$$

$$u_{14} = \frac{1}{4}(10 + u_{10} + u_{13} + u_{15});$$

$$u_{15} = \frac{1}{4}(15 + u_{11} + u_{14} + u_{16});$$

$$u_{16} = \frac{1}{4}(20 + 25 + u_{12} + u_{15}).$$

Бу ҳосил бўлган системани Зейделнинг итерация усули билан ечамиз.

$$u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(k)}, \dots$$

Кетма –кетликни тузамиз ва яқинлашишни 0.01 аниқлик билан оламиз. Бу кетма –кетликлар элементларини қуйидаги боғланишлардан топамиз:

$$u_1^{(k)} = \frac{1}{4}(8,745 + u_2^{(k-1)} + u_5^{(k-1)});$$

$$u_2^{(k)} = \frac{1}{4}(5,878 + u_1^{(k)} + u_3^{(k-1)} + u_6^{(k-1)});$$

$$u_3^{(k)} = \frac{1}{4} \left(12,135 + u_2^{(k)} + u_4^{(k-1)} + u_7^{(k-1)} \right);$$

$$u_4^{(k)} = \frac{1}{4} \left(44,021 + u_3^{(k)} + u_8^{(k-1)} \right);$$

$$u_5^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10,8 + u_1^{(k)} + u_6^{(k)} + u_9^{(k-1)} \right);$$

$$u_6^{(k)} = \frac{1}{4} \left(u_2^{(k)} + u_6^{(k)} + u_7^{(k-1)} + u_{10}^{(k-1)} \right);$$

$$u_7^{(k)} = \frac{1}{4} \left(u_3^{(k)} + u_6^{(k)} + u_8^{(k-1)} + u_{11}^{(k-1)} \right);$$

$$u_8^{(k)} = \frac{1}{4} \left(25 + u_4^{(k)} + u_7^{(k)} + u_{12}^{(k-1)} \right);$$

$$u_9^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10,8 + u_5^{(k)} + u_{10}^{(k-1)} + u_{13}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{10}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(u_6^{(k)} + u_9^{(k)} + u_{11}^{(k-1)} + u_{14}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{11}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(u_7^{(k)} + u_{10}^{(k)} + u_{12}^{(k-1)} + u_{15}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{12}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(25 + u_8^{(k)} + u_{11}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{13}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(12,2 + u_9^{(k)} + u_{14}^{(k-1)} \right);$$

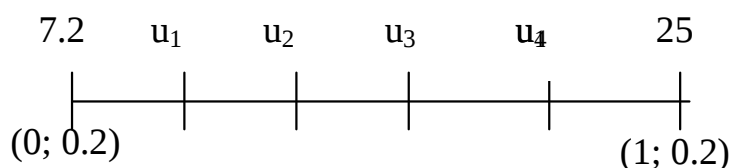
$$u_{14}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10 + u_{10}^{(k)} + u_{13}^{(k)} + u_{15}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{15}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(15 + u_{11}^{(k)} + u_{14}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)} \right);$$

$$u_{16}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(45 + u_{12}^{(k)} + u_{15}^{(k)} \right);$$

Юқоридаги формулалар ёрдамида ечимни топиш учун бошланғич $u_i^{(0)}$ қийматларни аниқлаш керак бўлади. Шу бошланғич тақрибий ечимни аниқлаш учун $u(x, y)$ функция соҳа горизанталлари буйича текис тақсимланган деб ҳисоблаймиз. Чегара нуқталари $(0;0.2)$ ва $(1;0.2)$ бўлган

горизантал ички $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_4^{(0)}$ нуқталарини, кесмани 5 та бўлакка бўлиб $K_1=(25-7,2)/5=3,56$ қадам билан қуйидагича топамиз.



$$u_1^{(0)} = 7,2 + K_1 = 7,2 + 3,56 = 10,76$$

$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} + K_1 = 10,76 + 3,56 = 14,32$$

$$u_3^{(0)} = u_2^{(0)} + K_1 = 14,32 + 3,56 = 17,88$$

$$u_4^{(0)} = u_3^{(0)} + K_1 = 17,88 + 3,56 = 21,44$$

Шунингдек қолган горизонталларда ҳам қадамларини аниқлаб ички нуқталардаги қийматларини топамиз ва қуйидаги бошланғич яқинлашиш бўйича ечим жадвални тузамиз:

3-жадвал

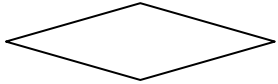
1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0,6	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,4	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,2	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0	0	1,545	5,878	12,135	19,021	25
y_i / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

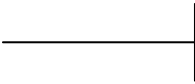
Бу бошланғич яқинлашишдан фойдаланиб ҳисоблаш жараёнидаги биринчи, иккинчи ва ҳоказо яқинлашишларни аниқлаш ва жадвалини тузиш мумкин. Натижа 0.01 аниқлик билан ҳисобланган қуйидги ечим жадвалини топамиз:

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	8,63	11,77	15,80	20,30	25
0,6	10,8	10,56	12,64	16,14	20,40	25
0,4	10,8	10,17	12,10	15,69	20,18	25
0,2	7,2	7,20	9,88	14,34	19,64	25
y_i / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

III.3. Масала ечимини ЭХМда қайта ишлаш

Энди масалага мос блок схема ва блок сеҳама мос Бейсик ва Паскал тилларида дастурларни тузиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун блок схемаларнинг қисқача таъриф ва хоссаларини келтиришни лозим деб топдик.

Номи	Белгиланиши	Бажарадиган вазифаси
Жараён		Бир ёки бир нечта амалларни бажариши натижасида маълумотларнинг ўзгариши
Қарор		Бирор шартга боғлиқ равишда алгоритмнинг бажарилиш йўналишини танлаш
Шакл ўзгартириш		Дастурни ўзгартирувчи буйруқ ёки буйруқлар туркумини ўзгартириш малини бажариш.
Аввал аниқланган жараён		Олдиндан ишлаб чиқилган дастур ёки алгоритмдан фойдаланиш

Киритиш-чиқариш		Ахборотларни қайта ишлаш мумкин бўлган шаклга ўтказиш ёки олинган натижани тасвирлаш
Дисплей		ЭХМга уланган дисплейдан ахборотларни киритиш ёки чиқариш
Ҳужжат		Ахборотларни қоғозга чиқариш ёки қоғоздан киритиш
Ахборотлар оқими чизиғи		Блоклар орасидаги боғланишларни тасвирлаш
Боғлагич		Узулиб қолган ахборот оқимларини улаш белгиси
Бошлаш Тугатиш		Ахборотни қайта ишлашни бошлаш, вақтинча ёки бутунлай тўхтатиш
Изоҳ		Блокларга тегишли турли хилдаги тушунтиришлар

ХУЛОСА

Ҳозирги кунда секундига миллиардлаб математик амалларни бажара оладиган ЭХМларнинг яратилиши ва кенг ишлаб чиқаришга тадбиқ қилиниши математик масалаларнинг ечимларини етарлича аниқликда ҳисоблаш имконини берувчи янги ҳисоблаш схемаларини қуриш, алгоритмик усулларни ишлаб чиқишга йўл очиб бермоқда. Табиий фанларнинг назарий ва амалий масалалари кўп ҳолларда иккинчи тартибли хусусий дифференциал тенгламаларни ечишга келтирилади. Дифференциал тенгламаларнинг ечимини яхши ўрганилган маълум элементар функциялар олрқали ифодалаш мумкин бўлмаган ҳолда тақрибий ҳисоблаш усулларида фойдаланиш талаб этилади.

Ушбу ишда сонли ҳисоб тўрлар усули ўрганиб чиқилди. Бу усул ёрдамида эллиптик типдаги тенглама учун қўйилган масала, яъни Лапалас тенгламаси учун квадрат соҳада Дирихле масаласи ўрганиб чиқилди. Масала даставвал аналитик усулда, сўнгра эса тўрлар усули ёрдамида ҳисобланиб, натижалар жадваллар кўринишида сонли топилди.

Тўрлар усули ёрдамида қилинган ҳисоб китобларга мос алгоритм блок-схема шаклида тасвирланди ва алгоритмга мос масаланинг ечимини топувчи дастурлар Бейсик ва Паскал дастурлаш тилларида келтирилди. Дастурлар биринчи бўлиб, Лаплас тенгламаси учун тузилган бўлса, сўнгра Пуассон тенгламаси учун тузилган.

Хулоса ўрнида шуни айтишим керакки, мен ушбу битирув малакавий ишида тенгламалар типлари, хусусий ҳосилали эллиптик типдаги тенглама, бундай тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ва бу масалаларни тўрлар усули ёрдамида ечишни ҳамда масала ечиш жараёнини ифодаловчи алгоритмлар ва дастурларни тузишни ўргандим.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Кримов И.А. Жаҳон молиявий-иқтисодий инқироzi, Ўзбекистон шароитида уни баргараф этишининг йўллари ва чоралари / И.А.Каримов. – Т: Ўзбекистон, 2009. – 56 б.
2. Каримов И.А.- Ўзбекистон ХХI аср бўсағасида: хавфсизликка тахдид, барқарорлик шартлари ва тараккиёт кафолатлари, Т.: Ўзбекистон, 1997.
3. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике.М.1998.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численный метод анализа.–М.: Наука. 1967.–368 с.
5. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. –Тошкент: Ўқитувчи. 1988.–324 б.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука. 1977. -546 с.
7. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. –Минск: Наука. 1977. –227 с.
8. Тешабоева Н. Математика физика методлари. – Тошкент: Ўқитувчи. 1993. –315 б.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука. 1974. -724 с.
10. Шоҳамидов Ш.Ш. Амалий математика унсурлари. –Тошкент: Ўзбекистон. 1997. –315 б.

ИНТЕРНЕТ ТАРМОҒИДАН ФОЙДАЛАНИЛГАН WEB-САҲИФАЛАР

1. <http://referat.ru/document/2921>
2. http://collection.pp.ru/f36_106.htm
3. www.elibrary.ru
4. www.ziyonet.uz
5. www.math-net.ru
6. http://library.tuit.uz/lectures/afu/togri_tortburchakli.htm
7. <http://sapr.mgsu.ru/biblio/kps/mkr.htm>