

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi

Farg'ona davlat universiteti

Qo'lyozma huquqi asosida

UDK 519.21

Qurbonov Akmal Abdullojonovichning

Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari yig'indisini limitik xossalari

5A 460104 – ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

Magistirlilik
akademik darajasini olish uchun yozilgan
dissertatsiya

Ilmiy rahbar: fiz.mat.fan.nom.

Madraximov.E.A

Farg'ona – 2012

MUNDARIJA

Kirish.....3

**I bob. Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari uchun
kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.....15**

**1-§. Masalaning
qo'yilishi.....15**

**2-§. Asosiy
natijalar.....16**

**II bob. Musbat tasodifiy sonlar minimumlari yig'indisi
konsentratsiya funksiyasining bahosi.....34**

**1-§. Masalaning
qo'yilishi.....34**

**2-§. Yordamchi
lemmalar.....36**

**3-§ Asosiy
natijalar.....40**

Xulosa.....51

**Adabiyotlar
ro'yxati.....52**

Kirish

Ishning umumiy tavsifnomasi. Mustaqil O'zbekiston o'z xalqi tanlab olgan yo'l – ochiq, erkin bozor iqtisodiyotiga asoslangan odil jamiyat, kuchli demokratik huquqiy davlat qurish yo'lidan bosqichma – bosqich olg'a bormoqda. Davlatimiz oldida turgan g'oyat muhim vazifalar – mamlakatni ijtimoiy va iqtisodiy jihatdan isloh qilish, iqtisodiy munosabatlarni demokratiyalash, kelajak poydevori bo'lmish yuksak ma'naviyatimizni rivojlantirishdan, ta'lim – tarbiya tizimini shakli va mazmunini tubdan isloh qilib o'zgartirish, uni yangi zamon darajasiga ko'tarishdan iborat.

Zero, O'zbekiston ta'lim tizimining asosiy mohiyati yoshlarda mustaqil fikrlash qobiliyatini tarbiyalash, o'qituvchi bilan o'quvchi munosabatlarini tubdan o'zgartrish, o'quv jarayoniga yangi innovatsiyalar kiritish, uni insonparvarlashtirishdan iboratdir. Bu bevosita yoshlarimizning tafakkuriga, ongiga, ruhiyatiga ta'sir etish bilan amalga oshirilib o'z navbatida yangi pedagogik texnologiyalarni, yangi innovatsiyalarni joriy etishni talab qiladi.

Ommaviy tasodifiy hodisalarning turg'unlik xossasi insoniyatga juda qadimdan ma'lum. U qaysi sohada namoyon bo'lmasin, mazmuni quydagicha:

Har bir ayrim hodisaning aniq xususiyatlari bunday hodisalar majmuning o'rtacha natijasiga deyarli ta'sir etmaydi;

O'rtacha natijadan har bir ayrim hodisada bo'ladigan tasodifiy chetlanishlar o'zaro yo'qotiladi, silliqlanadi. Ayni shu o'rtacha natijalar turg'unligi keng ma'noda tushuniladigan ushbu katta sonlar qonunining asosiy mazmuninig tashkil etib tasodifiy hodisalarda ularning o'rtacha natijasi tasodifiyligini yo'qotadi va uni tasodiy

bo'lmagan o'rtacha bilan almashtirish mumkinligini ishonchlilik ehtimoli bilan tasdiqlaydi.

Ehtimollar nazariyasida “katta sonlar qonuni ” deyilganda tor ma'noda bir qator matematik teoremlar tushuniladi va ularning har birida katta sondagi tajribalar o'rtacha xarakteristikalarining u yoki bu shartlarda biror ma'lum o'zgarmas miqdorlarga yaqinlashish fakti belgilanadi.

Katta sonlar qonun va shuningdek katta sonlarning kuchaytirilgan qonuni ehtimollar nazariyasining amaliyotga tatbiqlari uchun nazariy asos bo'ladi.

Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun katta sonlar qonuni o'rinlilikini tasdiqlovchi yetarli va hatto zaruriy shartlar juda ko'plab xorijiy hamda vatandosh olimlar tomonidan ko'plab o'rganilgan fikrimizning dalili sifatida shu mavzuga oid monografiya V.V Petrov “Суммы независимых случайных величин”, М.1972 va elektorlik hamda nomzodlik dissertatsiyalarini keltirish kifoya . Bular jumlasiga Erdisi, Rene, V.V.Petrov, O.V. Nagayev, AN Kolmagorov, V.V. Gnedenko, M.U. G'ofurov, A.E Madrahimov va boshqalar bir qator olimlarning qilgan ishlari kiradi.

Matematik statistikaning juda ko'p masalalarini hal qilishda tartiblangan statistikalar muhim rol o'ynaydi: Masalan: N.V.Smirnov va A.N.Kolmogorovlar o'zlarining noparametrik kreteriyalar haqidagi tatqiqot ishlarida tartiblangan statistikalar bog'liq bo'lgan statistikalar keng foydalanilgan.

O'z navbatida tartiblangan statistikalar mustaqil matematik obyekt sifatida ham o'ranilgan .

Tartiblangan statistiklarni o'rganishga doir alohida jurnal materiallari va bir qancha monografiyalar yozilgan.

Aytaylik, $X_1, X_2, \dots, X_n$ bog'lanmagan bir xil taqsimlangan n – hajmli tanlanma bo'lib,

$$X_{1,n} \leq X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$$

unga mos variatsion qator bo'lsin.

i – tartibli statistika deb, qiymati bo'yicha i - o'rinda joylashgan $X_{i,n}$ miqdorga aytiladi.

$X_{i,n}$ tartiblangan statistika nafaqat kuzatilyotgan natijalar qiymatiga bog'liq bo'lib qolmay, u joylashgan o'rniga ham bog'liqligi bilan alohida obyekt sifatida o'rganishga loyiqdur. Masalan: tanlanma medianasi variatsion qatordagi o'rta qiymatga teng tartibli statistikadan iborat. Tanlamaning o'rta arifmetik qiymati tartiblangan statistika bo'la olmaydi. Sababi uning uchun qiymatlarning joylashish ketma – ketligini farqi yo'q.

Shuni takidlash kerakki $X_1, X_2, \dots, X_n$ bog'lanmagan va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa ham, ulardan hosil qilingan $X_{i,n}$

i – tartibli statistika turli taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lib, bundan tashqari, joylashgan o'rniga ham bo'liqligi bilan tanlanmadan tubdan farq qiladi.

Variatsion qator elementlarining taqsimot funksiyalarini asimptotik xususiyatlari **B.V.Gnedonko , I.V. Smirnov, D.M.**

Chibisov, G.I.Ichenko va boshqalarning fundamental ishlarida tartibli

statistika nazariyasiga asoslangan holda sodda hamda amaliyotga tatbiq qilishga osonligi bilan muhimdir.

Ba'zi bir statistik xulosalar tartibli statistikaning chiziqli kombinatsiyalari va ularning funksiyalari yordamida keltirib chiqarilgan. Shuning uchun bunday chiziqli kombinatsiyalarning limitik xususiyatlarini o'rganish ma'lum bir qiziqish kasb etadi.

$$Q(\xi, \lambda) = \sup_x P(x \leq \xi \leq x + \lambda), \quad \lambda \geq 0$$

funksiyani ξ tasodifiy miqdorning konsentratsiya funksiyasi deb ataladi.

P. Levi, A.N.Kolmogorov, B.A.Ragozin, K.Esseen, V.V.Petrov va boshqalarning ko'p ilmiy ishlari bog'lanmagan ta'sodifiy miqdorlar yig'indisi konsentratsiya funksiyasi bahosini topishga bag'ishlangan. Olingan natijalar ichida esa bizningcha asosiysi **Kolmogorov Ragozin** tengsizligidir. Bu tengsizlik hamda bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi konsentratsiya funksiyasining turli ko'rinishdagi baholari **V.V. Petrov, Xo'ngarter** va **Teodorski** monografiyalarida keltirilgan.

Endi bu bobning asosiy mazmunini yoritishga o'tamiz.

Ushbu magistirlilik dissertatsiyasida musbat tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun katta sonlar qonuni hamda katta sonlar qonunidagi ehtimolliknik nolga intilish tezligi o'rganilgan. Bundan tashqari ushbu musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari yig'indisining konsentratsiya funksiyasining yuqoridagi bahosi topilgan.

Ishning maqsadi.

Ishning asosiy maqsadi musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari yig'indisi uchun katta sonlar qonunidagi ehtimollikning nolga intilish tezligini aniqlash hamda kontsentratsiya funktsiyasining yuqori bahosini topishdan iborat.

Ilmiy yangiligi.

Magistrlilik dissertatsiyasida musbat tasodifiy miqdor minimumlari yig'indisini "x" dan katta ehtimolliklarildan tuzilgan qatorlarning yaqinlashishi haqidagi teoremlar isbotlangan. Xususiyl holda ushbu teoremadan ehtimolliklar uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladigan baholarni olish mumkin. Bundan tashqari, ushbu musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari chiziqli ifodasi uchun kontsentratsiya funktsiyasining bahosi topilgan. Ushbu oxirgi masala bizningcha birinchi marta ushbu ishda o'rganilgan.

Nazariyl va amaliyl ahamiyati.

Olingan natijalarni deyarli barchasi yangi natijalar bo'lib, ular nazariyl va amaliyl xarakterga ega. ulardan statistik kriteriyalartuzishda hamda sifat nazorati statistic masalalarini va ommaga xizmat ko'rsatish nazariylalarida foydalanish mumkin.

Aprobatsiya.

Olingan natijalar kafedra qoshidagi ilmiyl – metodik seminarda, fakultet qoshidagi ilmiyl seminarda va Farg'ona davlat universitetidagi an'anaviyl talabalar, magistrilar, professor o'qituvchilar ilmiyl – metodik konferentsiyalarida ma'ruzalar qilingan.

Chop etilgan magistrlik dissertatsiyasining maqolalari.

Asosiy natijalar ikkita ilmiyl maqola sifatida e'lon qilingan va ularning ro'yxati avtoreferatning oxirida ilova qilingan.

Ishning tuzilishi va hajmi.

Magistrlik dissertatsiya 52 betdan iborat. U kirish va ikkita bobdan iborat va hammasi bo'lib 2 ta bob hamda 5 ta paragrafni tashkil etadi.

Adabiyotlar ro'yxati. 15 ta

Ishning mazmuni.

Kirish qismida magistrlik dissertatsiyaga oid adabiyotlar tavsifi va qisqacha olingan natijalar keltirilgan.

Birinchi bobda: 1-§

1-Lemma

Har bir berilgan “ k ” chun $Z_{1,k}$ va $\frac{Z_k}{k}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi.

2-Lemma

Har bir berilgan k uchun $F^{-1}\left(1 - e^{-\frac{Z_k}{k}}\right)$ va $X_{1,k}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi.

2-§

1-Teorema:

Aytaylik $H(x)$ funksiya $\frac{1}{k}$ nuqta atrofida 2- tartibli hosilaga ega bo'lib, $H'(x)$ funksiya 1- tartibli lipshits shartini qanoatlantirsin.

Bundan tashqari, shunday musbat $C_1, C_2, >1$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsinki, ular uchun

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_{k,n}}{k} \leq C_1 (\log n)^{-1} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H' \left(\frac{1}{k} \right) \leq C_2 (\log n)^{-1} \quad (4)$$

munosabatlar o'rinli bo'sin. U holda

$$\sum_{k=1}^n P(|S_{(n)} - M_n| > \varepsilon \log n) < \infty$$

bu yerda

$$M_n = \sum_{k=1}^n C_{kn} H \left(\frac{1}{k} \right); \quad \varepsilon > 0$$

Keyinchalik, $C_1, C_2, \dots$ lar va har biri doimiy sonlar hamda bir xil bo'lmagan o'zgarmas sonlarni bildiradi, ya'ni

$$C + C = C$$

$$C * C = C$$

2-Teorema:

(1) va (2) shartli o'zaro teng kuchli

$$1) \quad \frac{S_{(n)} - MS_{(n)}}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{deyarli ehtimollik bilan yaqinlashadi.}$$

2) (A) va (B) shartlar bajarilsin.

3-Teorema:

Aytaylik $H(x) = F^{-1}(1 - e^{-x})$ funksiya $\frac{1}{k}$ nuqta atrofida

ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan va $H'(x)$ birinchi tartibli **Lipshits** shartini qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin.

U holda shunday $\hat{\alpha}_{kn}$ va $C_1 > 0$ ($k = \overline{1, n}$, $n = \overline{1, \infty}$) son mavjud bo'lsinki, ular uchun

$$\sum \hat{\alpha}_{kn} = C \log n ; \quad (k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty})$$

o'rinli bo'lsin, u holda

$$\frac{\hat{S}_{(n)} - \sum_{k=1}^n C_{kn} H'(\frac{1}{k})}{\log n} \rightarrow 0$$

munosabatning 1 – ehtimollik bilan bajarilishi uchun

$$\max_{1 \leq k \leq n} \hat{\alpha}_{kn} \rightarrow 0 , \quad n \rightarrow \infty$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Ushbu olingan natija Grenander natijasini umumlashtiradi.

Natija:

Aytaylik $H(x)=x$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

va

$$\sum_{k=1}^n \leq C_2 (\log n)^{-1} ,$$

u holda $\forall (\varepsilon > 0)$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(| \sum_{k=1}^n C_{k,n} \min(z_1, \dots, z_k) - \\ - \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} | > \varepsilon \log n) < \infty$$

o'rinlidir.

Ikkinch bob. 1-§

Aytaylik, $U_1, U_2 \dots U_n$ $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan n – hajmli tanlanma bo'lib,

$$U_{1,n} < U_{2,n} < \dots < U_{n,n}$$

unga mos variatsion qator bo'sin. Qo'ydagi

$$S_{(n)} = C_1 U_1 \min(U_1 U_2) + \dots + \\ + C_n \min(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

yig'indini qaraymiz va uning konsentratsiya funksiyasining yuqori bahosini topishga e'tiborli qaratamiz. Bu yerda C_i -hozircha musbat doimiy sonlar bo'lib, ular tegishli bo'lgan sinf keyinchalik aniqlanadi.

2-§

1-lemma: Har bir tayinlangan i ($1 \leq i \leq n$) uchun $U_{i,n}$ tasodifiy miqdor bilan

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n+1}}$$

tasodifiy miqdor bir xil taqsimlangan bo'ladi.

Bu yerda $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n+1}$ standart eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

2-lemma. Quydagi tengsizliklar o'rinli.

$$\left| A_\delta(x) \cap F \right| \leq 2\delta n C^{-1} + 1$$

$$\left| \bar{B}_\delta \cap F \right| \leq 2\delta n C^{-1} + 1$$

3-lemma. Aytaylik $|F| \geq n\alpha$, ($0 < \alpha < 1$) bo'lsin δ va ε ($0 < \varepsilon < 1$) musbat sonlar

$$\frac{4\delta}{c} + \varepsilon < \alpha$$

tengsizlikni qanoatlantirsin,

u holda $n \geq 2\varepsilon^{-1}$ uchun $\left| I_n \geq n\beta \right|$ munosabat o'rinli.

Bu yerda
$$0 < \beta < \alpha - \frac{4\delta}{C} - \varepsilon$$

3-§

Teorema:

Aytaylik F to'plamdagi elementlar soni $n\alpha$ ham sonda bo'lmasin. U holda ixtiyoriy musbat $\lambda \geq 0$ son uchun

$$Q(S_{(n)}; \lambda) \leq \frac{C\lambda}{\sqrt{n}}$$

munosabat o'rinli.

Bu yerda C – absolyut o'zgarmas son.

Natija 1. Agar asosiy teoremada

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = 1$$

bo'lsa, u holda $\lambda \geq 0$ uchun

$$\begin{aligned}
& Q(U_1 + \min(U_1, U_2) + \dots + \min(U_1, U_2, \dots, U_n); \lambda) = \\
& = \sup_x P\{x \leq U_1 + \min(U_1, U_2) + \dots + \min(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq x + \lambda\} \leq \\
& \leq \frac{C_1 \lambda}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

C_1 – absolyut doimiy son.

Magistrlik dissertatsiyasining asosiy mazmuni qo'yidagi ishlarda e'lon qilingan:

1. Madrahimov A.E, Qurbonov A.A. FarDU, Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari chiziqli ifodasi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni 2011 yil, 9-bet.

2. Madrahimov A.E, Qurbonov A.A. Tartiblangan statistiklarning limitik xossalari, “Matematika fani va uni o'qitishning dolzarb muammolari”, 2011 yil, 53-54 betlar.

I bob. Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.

1-§ Masalaning qo'yilishi

Taqdim etilayotgan ushbu magistirlilik disertatsiyaning ushbu bobida tasodifiy miqdorlar minimumlari chiziqli ifodasi uchun katta sonlar qonunidagi yaqinlashish tezligining turli baholari topilgan.

Aytaylik $X_1, X_2, \dots, X_n$ musbat tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan n hajimli tanlanma bo'lsin va

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$$

Unga mos keladigan variatsion qator bo'lib,

$$S_{(n)} = \sum_{k=1}^n C_{k,n} \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yig'indini qaraylik.

Bu yerda $C_{k,n}$ — qandaydir musbat o'garmas sonlar bo'lib, ularning sinfi keyinroq keltiriladi. Ushbu ko'rinishidagi qatorlarning yaqinlashishini o'rganishgan.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} P \left(\left| S_{(n)} - M S_{(n)} \right| > \varepsilon \log n \right) \right| \quad (*)$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ tayinlangan son,

$$\log n = \begin{cases} \ln n & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

ni bildiradi.

(*) ko'rinishidagi qatorlarning yaqinlashishi katta sonlar qonunidagi yaqinlashish tezligini topish, yani har bir berilgan $\varepsilon > 0$ uchun

$$P \left(\left| S_{(n)} M S_{(n)} \right| > \varepsilon \log n \right)$$

miqdorning nolga intilishi tezligining tartibini topish imkonini beradi.

Olingan natijalarni bayon qilish uchun ba'zi bir ma'lumot va belgilashlar kiritamiz.

Aytaylik $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ eksponensial taqsimlangan tasodifiy

$$Z_{1,n} < Z_{2,n} < \dots < Z_{n,n}$$

miqdorlardan tuzilgan n hajmli tanlanma va unga mos variatsiyon qator bo'lsin.

2-§ Asosiy natijalar

1-Lemma

Har bir berilgan “ k ” chun $Z_{1,k}$ va $\frac{Z_k}{k}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi.

Isboti:

1 – lemmani isbotlash uchun k hajmli eksponensial

$$Z_{1,k} = \min (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

tasodifiy miqdorning zichlik funksiysi bilan $\frac{Z_k}{k}$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiysi ustma – ust tushishini isbotlash kifoya.

$Z_{1,k}$ ning zichlik funksiyasi $f_k(x)$ deb belgilasak

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{k!}{(1-1)!(k-1)!} (1-e^{-x})^{1-1} [1-(1-e^{-x})]^{k-1} = \\ &= ke^{-(k-1)x} e^{-x} = ke^{-kx} \end{aligned}$$

(1)

bir qatorda $z_1, z_2, \dots, z_n$ lar bir xil eksponensial taqsimotga ega ekanligidan $\frac{Z_1}{k}$ va $\frac{Z_k}{k}$ lar bir xil taqsimlanganligi kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki,

$$P(Z_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

edi, shunga asosan

$$P\left(\frac{Z_1}{k} < x\right) = \begin{cases} 1 - e^{-kx} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

bo'ladi.

Bundan $f_{\frac{Z_1}{k}}(x) = ke^{-kx}$ (2) ekanligini kelib chiqadi.

(1) va (2) lardan $\frac{Z_1}{k}$ va $\frac{Z_k}{k}$ larning zichlik funksiyalari ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Oxirgini e'tiborga olsak lemmaning o'rinliligiga ishonch hosil qilamiz.

Aytaylik, $H(x) = F^{-1}(1 - e^{-x})$ musbat aniqlangan funksiya bo'lib, bu yerda $F^{-1} - F(x)$ funksiya teskari funksiyaning bildiradi. Endi bevosita keyingi tasdiqlarimiz uchun zarur bo'lgan 2-lemmani keltiramiz.

2-Lemma

Har bir berilgan k uchun $F^{-1}\left(1 - e^{-\frac{z_k}{k}}\right)$ va $X_{1,k}$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi.

Isboti:

Bizga ma'lumki,

$$P(z_k < x) = 1 - e^{-x}$$

$F^{-1}\left(1 - e^{-\frac{z_k}{k}}\right)$ va $X_{1,k}$ tasodifiy miqdorlarning bir xil taqsimlangan bo'lishini ko'rsatish uchun biz 1-lemmaning isbotidan foydalanamiz, ya'ni

$$\begin{aligned}
& P \left(F^{-1} \left(1 - e^{-\frac{z_k}{k}} \right) < x \right) = \\
& = P \left(\left(1 - e^{-\frac{z_k}{k}} \right) < F(x) \right) = \\
& = P \left(-e^{-\frac{z_k}{k}} < F(x) - 1 \right) = \\
& = P \left(e^{-\frac{z_k}{k}} > 1 - F(x) \right) = \\
& = P \left(-\frac{z_k}{k} > \ln(1 - F(x)) \right) = \\
& = P \left(\frac{z_k}{k} < \ln(1 - F(x)) \right) = \\
& = P(Z_k < k \ln(1 - F(x))) = \\
& = 1 - e^{-[k \ln(1 - F(x))]} = \\
& = 1 - e^{k \ln(1 - F(x))} = \\
& = 1 - e^{\ln(1 - F(x))^k} = \\
& = 1 - (1 - F(x));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_{1,k} < x) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_k) < x) = \\
&= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_k) \geq x) = \\
&= 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_k \geq x) = \\
&= 1 - [1 - P(X_1 < x)][1 - P(X_2 < x)] * \\
&* \dots * [1 - P(X_k < x)] = 1 - [1 - F(x)]^k ;
\end{aligned}$$

Yuqoridagilardan 2-lemmaning isboti kelib chiqadi.

Endi ushbu bobda olingan asosiy natijalarni bayon qilamiz.

1-Teorema:

Aytaylik $H(x)$ funksiya $\frac{1}{k}$ nuqta atrofida 2- tartibli hosilaga ega bo'lib, $H'(x)$ funksiya 1- tartibli lipshits shartini qanoatlantirsin.

Bundan tashqari, shunday musbat $C_1, C_2 > 1$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsinki, ular uchun

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_{k,n}}{k} \leq C_1 (\log n)^{-1} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H\left(\frac{1}{k}\right) \leq C_2 (\log n)^{-1} \quad (4)$$

munosabatlar o'rinli bo'sin. U holda

$$\sum_{k=1}^n P(|S_{(n)} - M_n| > \varepsilon \log n) < \infty$$

bu yerda

$$M_n = \sum_{k=1}^n C_{kn} H\left(\frac{1}{k}\right); \quad \varepsilon > 0$$

Keyinchalik, $C_1, C_2, \dots$ lar va har biri doimiy sonlar hamda bir xil bo'lmagan o'zgarmas sonlarni bildiradi, ya'ni

$$C + C = C$$

$$C * C = C$$

Natija:

Aytaylik $H(x)=x$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

va

$$\sum_{k=1}^n \leq C_2 (\log n)^{-1} ,$$

u holda $\forall (\varepsilon > 0)$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(| \sum_{k=1}^n C_{k,n} \min(z_1, \dots, z_k) - \\ - \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} | > \varepsilon \log n) < \infty$$

o'rinlidir.

Teoremaning isboti.

Teorema shartlari asosida $S_{(n)}$ ni 1-lemmani e'tiborga olib
Teylar qatoriga yoyishimiz mumkin.

$$\begin{aligned}
S_{(n)} &= \sum_{k=1}^n C_{kn} H\left(\frac{1}{k}\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^n C_{kn} H^1\left(\frac{1}{k}\right) \left(Z_{1,k} - \frac{1}{k}\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_{kn} H''\left(\frac{1}{k}\right) \left(Z_{1k} - \frac{1}{k}\right)^2 = \\
&= M_n + \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H'\left(\frac{1}{k}\right) (Z_k - 1) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H''\left(\frac{1}{k}\right) (Z_k - 1)^2 = \\
&= M_n + \bar{S}_{(n)} + R_n
\end{aligned}$$

Bu yerda,

$$S_{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H'\left(\frac{1}{k}\right) (Z_k - 1)$$

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{C_{kn}}{k} H''\left(\frac{1}{k}\right) (Z_k - 1)^2$$

Oxiridan

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{(n)} - M_n| > \varepsilon) \leq \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|\bar{S}_{(n)}| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} P(|R_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = \\
& = \Sigma + \Sigma_2 \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{kn} = \frac{C_{kn}}{k} \quad \text{belgilash kiritib Nagayev – Fukning}$$

tengsizligini qo'llab

$\sum_i < \infty$ ekanligini ko'rsataylik, ya'ni

$$\Sigma \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P\left(Z_k - 1 \geq \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha_{kn}}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}^2 \right\}^{\frac{1}{2\gamma}} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{32 e^{2 \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}^2}} \right\} =$$

$$= \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} \tag{6}$$

(3) shartini qo'llab,

$$\sum_{13} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-c \log n\} < \infty \quad (7)$$

Ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Ko'rinib turibdiki,

$$\begin{aligned} P\left(|Z_k - 1| \geq \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha_{k,n}}\right) &\leq P\left(|Z_k - 1| \geq \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha_n}\right) \leq \\ &\leq P\left(Z_k \leq 1 + \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha_n}\right) + P\left(Z_k \leq 1 - \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha_n}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

bu yerda

$$\alpha_n = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_{k,n} \quad (7)$$

ga asosan

$$\begin{aligned}
\sum_{11} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(Z_k \geq 1 + \frac{\varepsilon\gamma}{\alpha_n}) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(Z_1 \leq 1 - \frac{\varepsilon\gamma}{\alpha_n}) = \\
&= \sum_{11}^1 + \sum_{11}^2
\end{aligned} \tag{9}$$

(3) shartdan

$$\sum_{11}^1 \leq C \sum_n^{\infty} n^{-1} \exp \left\{ -C \log n^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty \tag{10}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ko'rish osonki, $\sum_{11}^2$ chekli sondagi noldan farqli qo'shiluvchilarni o'z ichiga oladi. (8) dan va aytilganlardan $\sum_{11}$ ning yaqinlashishi kelib chiqadi.

γ - ixtiyoriy ekanligidan uni

$$0 < \gamma < \frac{1}{2} \tag{11}$$

deb tanlasak $\left(\alpha\gamma < \frac{1}{2} \right)$

va (1) shartni e'tiborga olsak

$$\sum_{12} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\log n)^{-\frac{1}{2\alpha}} < \infty \quad (12)$$

(7) va (12) dan $\sum_1 < \infty$ ekanligi kelib chiqadi. $\sum_2$ qatorning yaqinlashishi (2) ishdagi kabi amalgam oshiriladi.

Teorema isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi o'xshash yana bir masalani ko'rib o'taylik.

Bizga n hajmli eksponentsial taqsimotdan olingan $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ tanlanma berilgan bo'lib,

$$Z_{1,n} < Z_{2,n} < \dots, Z_{n,n}$$

unga mos variatsion qator bo'lsin.

Ushbu yig'indini qaraymiz

$$S_{(n)} = Z_1 + \min(Z_1, Z_2) + \dots + \min(Z_1, \dots, Z_n)$$

Grenander(1965) bir ehtimollik bilan

$$\frac{S_{(n)} - MS_{(n)}}{\log n} \rightarrow 0$$

isbot qilgan edi.

Yuqoridagidan o'laroq, biz ushbu

$$S_{(n)} = C_{1,n}Z_1 + \dots + C_{kn} \min(Z_1, \dots, Z_n)$$

Yig'indini qaraymiz, bu yerda $C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{kn}$ lar qandaydir manfiymas o'zgarmas sonlar.

$$\begin{aligned} S_{(n)} &= C_{1n}Z_{1,1} + C_{2n}Z_{1,2} + \dots + \\ &+ C_{nn}Z_{1,n} = \sum_{k=1}^n C_{kn}Z_{1,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MS_{(n)} &= \sum_{k=1}^n C_{kn} MZ_{1,k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \end{aligned}$$

Aytaylik, shunday manfiymas C o'zgarmas son mavjud bo'lsinki, uning uchun

$$(A) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \leq C \log n, n = 1, 2, \dots$$

bu yerda

$$\log n = \begin{cases} \ln n, & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

bildiradi, hamda

$$\max_{1 \leq k \leq n} \alpha_{kn} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

shartlar o'rinli bo'sin, u holda quydagi shartlar ekvivalent bo'ladi.

2-Teorema:

(1) va (2) shartli o'zaro teng kuchli

1) $\frac{S_{(n)} - MS_{(n)}}{\log n} \rightarrow 0$ deyarli ehtimollik bilan yaqinlashadi.

2) (A) va (B) shartlar bajarilsin.

Isboti:

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $F(x)$ uzliksiz taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan, musbat va bog'liqmas tasodifiy miqdorlardan tuzilgan tanlanmani qaraymiz.

$$\begin{aligned} S_{(n)} &= \sum_{k=1}^n C_{kn} X_{1,k} = \\ &= C_{1n} X_1 + C_{2n} \min(X_1, X_2) + \\ &+ C_{3n} \min(X_1, X_2, \dots, X_3) + \\ &+ \dots + C_{nn} \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Oxirgini quydagicha yozish mumkin.

$$\hat{S}_{(n)} = \sum_{k=1}^n C_{kn} F^{-1}(1 - e^{-Z_{1,k}}) ;$$

$$H(z) = F^{-1}(1 - e^{-z})$$

desak

$$\hat{S}_{(n)} = \sum_{k=1}^n C_{kn} H(Z_{1,k})$$

ga ega bo'lamiz.

$H(x)$ funksiya $\frac{1}{k}$ nuqtaning atrofida ikkinchi tartibli, hosilaga ega bo'lsin va $H'(x)$ birinchi tartibli **Lipshits** shartini qanoatlantirsin, u holda $S_{(n)}$ ni **Taylor** qatoriga yoyib, quydagiga ega bo'lishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{(n)} &= \sum_{k=1}^n C_{kn} H\left(Z \frac{1}{k}\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^n C_{kn} H'\left(\frac{1}{k}\right) \left(Z_{1,k} - \frac{1}{k}\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_{kn} H''\left(\frac{1}{k}\right) \left(Z_{1,k} - \frac{1}{k}\right)^2
\end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{(n)} - M_n &= \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} (Z_k - 1) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_{kn} (Z_k - 1)^2 = \bar{S}_{(n)} + R_n
\end{aligned}$$

$$\frac{S_{(n)} - MS_{(n)}}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{Grenander ishida koefitsientlar}$$

qandaydir shartlarni qanoatlantirganda R_n ning 1 ehtimol bilan nolga yaqinlashishi ko'rsatilgan. Shu sababli $\max_{1 \leq k \leq n} \alpha_{kn} \rightarrow 0$ va

$\sum_{k=1}^n \alpha_{kn} < C \log n$ shartlar bajarilsa $\frac{S_{(n)} - MS_{(n)}}{\log n} \rightarrow 0$ munosabat

1 ehtimollik bilan o'rinli bo'ladi. Shunday qilib biz quyidagi teorema ega buldik:

3-Teorema:

Aytaylik $H(x) = F^{-1}(1 - e^{-x})$ funksiya $\frac{1}{k}$ nuqta atrofida

ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan va $H'(x)$ birinchi tartibli

Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin.

U holda shunday $\hat{\alpha}_{kn}$ va $C_1 > 0$ ($k = \overline{1, n}$, $n = \overline{1, \infty}$) son mavjud bo'lsinki, ular uchun

$$\sum \hat{\alpha}_{kn} = C \log n ; \quad (k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty})$$

o'rinli bo'lsin, u holda

$$\frac{\hat{S}_{(n)} - \sum_{k=1}^n C_{kn} H'(\frac{1}{k})}{\log n} \rightarrow 0$$

munosabatning 1 – ehtimollik bilan bajarilishi uchun

$$\max_{1 \leq k \leq n} \hat{\alpha}_{kn} \rightarrow 0 , \quad n \rightarrow \infty$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Ushbu olingan natija Grenander natijasini umumlashtiradi.

II bob. Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari yig'indisi konsentratsiya funksiyasining bahosi.

1-§ Masalaning qo'yilishi

Aytaylik, $U_1, U_2 \dots U_n$ $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan n – hajmli tanlanma bo'lib,

$$U_{1,n} < U_{2,n} < \dots < U_{n,n}$$

unga mos variatsion qator bo'sin. Qo'ydagi

$$S_{(n)} = C_1 U_1 \min(U_1 U_2) + \dots + \\ + C_n \min(U_1, U_2, \dots U_n)$$

yig'indini qaraymiz va uning konsentratsiya funksiyasining yuqori bahosini topishga e'tiborli qaratamiz. Bu yerda $C_{i_}$ -hozircha musbat doimiy sonlar bo'lib, ular tegishli bo'lgan sinf keyinchalik aniqlanadi.

Endi ushbu yig'indini qarashga olib keluvchi misollardan birini keltiramiz.

Misol: Qandaydir biror murakkab mexanizmni tashkil qiluvchibirorta detalni ishdan chiqishga bo'g'liq bo'lib, ulardan hech bo'lmaganda bittasi ishdan chiqsa butun mexanizm ishdan chiqadi deb hisoblaylik.

Aytaylik, $\xi_j - j$ - detalning ishdan chiqish vaqtini belgilasin hamda xizmat qilish muddati taqsimot funksiyasi.

$$P(\xi_j > x) = e^{-\alpha_j x}$$

qonuni bilan aniqlangan bo'lsin, bu erda $\alpha_j > 0$

U holda butun mexanizmning xizmat qilish muddati

$$\eta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_{1,n}$$

miqdor bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{1,n}$ n – hajmli tanlanmadan hosil qilingan birinchi tartibli minimal statistika. Demak, butun mexanizmini ma’lum bir “ x ” muddatdan so’ng ishdan chiqishining taqsimot funksiyasi

$$\begin{aligned} P(\eta_n > x) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\xi_j > x\}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^n P\{\xi_j > x\} = e^{-x \sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{aligned}$$

kabi ifodalanadi.

Ushbu bobda

$$\begin{aligned} Q(S_{(n)}; \lambda) &= \sup_{x \geq 0} P(x \leq S_{(n)} \leq x + \lambda), \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

konsentratsiya funksiyasini yuqori bahosi topiladi. Eng avvalo qaralayotgan $S_{(n)}$ obyektini tartiblangan statistikalar bilan bog’laymiz.

$$\begin{aligned}
S_{(n)} &= C_1 U_1 + C_2 \min(U_1, U_2) + \dots + \\
&+ C_n \min(U_1, U_2, \dots, U_n) = \\
&= C_1 U_{1,1} + C_2 U_{1,2} + \dots + C_n U_{1,n}
\end{aligned} \tag{1}$$

bu yerda $U_{1,k}$ $k = \overline{1, n}$ - hajmli tanlanmadan hosil qilingan i – tartibli, ya’ni minimal statistikalar.

Asosiy maqsadga o’tishdan avval bizga zarur bo’ladigan yordamchi lemmalarni keltiramiz.

2-§ Yordamchi lemmalar.

1- lemma: Har bir tayinlangan i ($1 \leq i \leq n$) uchun $U_{i,n}$ tasodifiy miqdor bilan

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n+1}}$$

tasodifiy miqdor bir xil taqsimlangan bo’ladi.

Bu yerda $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n+1}$ standart eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Lemmani isboti matematik induksiya metodili orqali [10] da isbotlangan.

Quydagilarni kiritamiz.

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$A_{\delta}(x) = \{k : k \in N, |b_k - x| \geq \delta_n\}$$

$$A_{\delta}(x + \lambda) = B_{\delta}(x, \lambda)$$

$$\bar{A}_{\delta}(x) = N \setminus A_{\delta}, \quad \bar{B}_{\delta} = N \setminus B_{\delta}$$

$$\bar{I}_n = A_{\delta}(x) \cap B_{\delta}$$

$|M| - M$ to'plamining elementlari sonini ifodalaydi.

bu yerda δ - qandaydir musbat son

$$F = \{K : K \in N, \quad C_k \geq C > 0$$

$$\bar{F} = N \setminus F$$

2-lemma. Quydagi tengsizliklar o'rinli.

$$\left| A_{\delta}(x) \cap F \leq 2\delta n C^{-1} + 1 \right|$$

$$\left| \bar{B}_{\delta} \cap F \right| \leq 2\delta n C^{-1} + 1$$

Isboti. (q.[10] 44-bet)

3-lemma. Aytaylik $|F| \geq n\alpha$, ($0 < \alpha < 1$) bo'lsin δ va ε ($0 < \varepsilon < 1$) musbat sonlar

$$\frac{4\delta}{c} + \varepsilon < \alpha$$

tengsizlikni qanoatlantirsin,

u holda $n \geq 2\varepsilon^{-1}$ uchun $\left| I_n \geq n\beta \right|$ munosabat o'rinli.

Bu yerda $0 < \beta < \alpha - \frac{4\delta}{C} - \varepsilon$

Isbot. Aniqlanishiga ko'ra

$$|I_n| = N \setminus \left(\bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \right)$$

(1) dan

$$\begin{aligned} \left| \bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \right| &= \left| \bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \cap F \right| + \\ &+ \left| \bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \right| \leq \left| \left(\bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \right) \cap F \right| + \left| \bar{F} \right| \end{aligned} \quad (2)$$

Lemma shartiga asosan, $\left| \bar{F} \right| \leq n(1 - \alpha)$ dan qudagini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{A}_\delta \cup \bar{B}_\delta \right| \leq \left| \bar{A}_\delta \cap F \right| + \\
& + \left| \bar{B}_\delta \cap F \right| + n(1 - \alpha) \leq \\
& \leq \frac{4\delta n}{C} + 2 + n(1 - \alpha)
\end{aligned} \tag{3}$$

(2) munosabatga asoslanib, (1) ni quydagicha yozish mumkin.

$$\begin{aligned}
& \left| I_n \right| \geq n - n \left[\frac{4\delta}{C} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{n} + (1 - \alpha) \right] \geq n\beta
\end{aligned}$$

bu yerda $0 < \beta < \alpha - \frac{4\delta}{C} - \varepsilon$

3 – lemma isbotlandi.

3-§ Asosiy natijalar.

1- lemmaga asosan

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n C_k U_{1,k} = \\
&= \sum_{k=1}^n C_k \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{k+1}} = \\
&= \sum_{k=1}^n C_k \frac{Z_k}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{k+1}}
\end{aligned}$$

endi $b_k = \sum_{i=k}^n C_i$, $k = \overline{1, n}$, $b_{n+1} = 0$

Almashtirish qilsak Abel almashtirishga ko'ra

$$S_{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} b_k Z_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Z_k}$$

ko'rinishga keladi.

Teorema:

Aytaylik F to'plamdagi elementlar soni $n\alpha$ ham sonida bo'lmasin. U holda ixtiyoriy musbat $\lambda \geq 0$ son uchun

$$Q(S_{(n)}; \lambda) \leq \frac{C\lambda}{\sqrt{n}}$$

munosabat o'rinli.

Bu yerda C – absolyut o'zgarmas son.

Isbot:

$$\begin{aligned}
Q(S_{(n)}; \lambda) &= \sup_{-\infty < x < \infty} \{P(S_{(n)} \leq x + \lambda) - P(S_{(n)} \leq x)\} = \\
&= \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} b_k Z_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Z_k} \leq x + \lambda \right) - P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} b_k Z_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Z_k} \leq x \right) \right\} = \\
&= \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ P\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k Z_k \leq (x + \lambda) \sum_{k=1}^{n+1} Z_k \right) - P\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k Z_k \leq x \sum_{k=1}^{n+1} Z_k \right) \right\} = \\
&= \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ P\left(\sum_{k=1}^{n+1} (b_k - x - \lambda) Z_k \leq 0 \right) - P\left(\sum_{k=1}^{n+1} (b_k - x) Z_k \leq 0 \right) \right\} = \\
&= \sup_{-\infty < x < \infty} \{P(\beta \sum^{(1)} \leq 0) - P(\sum^{(2)} \leq 0)\} \quad (1)
\end{aligned}$$

Bu yerda β son va u keyinchalik tanlab olinadi. Soddalik uchun

$$\sum^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1} (b_k - x - \lambda) Z_k$$

$$\sum^{(2)} = \sum_{k=1}^{n+1} (b_k - x) Z_k$$

belgilashlarni kiritamiz.

Agar $b_k \neq x \quad k = \overline{1, n}$ bo'lsa, u holda $\beta(b_k - x) Z_k$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$\frac{1}{\beta |b_k - x|} e^{-\frac{u}{\beta |b_k - x|}}, \quad u > 0 \quad (2)$$

ifodaga teng va bu funksiya biror tayinlangan x - nuqtada chegaralangan. Xuddi shu sababga asosan, $\beta \sum^{(2)}$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ham chegaralangandir.

Shuni eslatib o'tish kerakki, $\{b_k\}$ ketma ketlik k bo'yicha kamayuvchi ketma – ketlik. Shuning uchun $b_k = x$ tenglik faqat bitta $k = k'$ qiymatda bajarilishi mumkin.

Agar $b_{k'} = x$ bo'lsa, u holda yig'indidagi $\sum^{(2)}$ indeksli ifoda 0 ga aylanadi. Shuning uchun hamma hollarda $\beta \sum^{(2)}$ tasodifiy

miqdor zichlik funksiyasi chegaralangandir. Xuddi shuningdek $\beta \sum^{(1)}$ tasodifiy miqdor zichlik funksiyasining chegaralanganligini ko'rishimiz mumkin.

Natijada 2 – teorema ([7], 137-bet) ga asosan, (1) dan $Q(S_{(n)}; \lambda)$ uchun quydagini yoza olamiz.

$$\begin{aligned}
 Q(S_{(n)}; \lambda) &= \\
 &= \sup_{x \geq 0} \{P(\beta \sum^{(1)} \leq 0) - P(\beta \sum^{(2)} \leq 0)\} \leq \\
 &\leq \sup_{x \geq 0} C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_1(t) - f_2(t)|}{|t|} dt
 \end{aligned} \tag{3}$$

bu yerda

$$f_1(t) = Me^{it\beta \sum^{(1)}} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 - it\beta(b_k - x - \lambda)}$$

$$f_2(t) = Me^{it\beta \sum^{(2)}} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 - it\beta(b_k - x)}$$

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k - \prod_{k=1}^n \beta_k = \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k (\alpha_j - \beta_j) \prod_{k=j+1}^n \beta_k$$

(*) munosobatdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned}
 f_1(t) - f_2(t) &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 - it(b_k - x - \lambda)\beta} - \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 - it(b_k - x)\beta} = \\
 &= \lambda\beta \sum_{j=1}^{n+1} (-it)^* \prod_{k=1}^{j-1} \frac{1}{1 - it(b_k - x - \lambda)\beta} * \\
 &\quad * \prod_{k=j+1}^{n+1} \frac{1}{1 - it(b_k - x)\beta}
 \end{aligned}$$

Oxirgini e'tiborga olsak (3) dan

$$Q(S_{(n)}; \lambda) \leq \sup_{x \geq 0} \lambda C \beta^*$$

$$* \sum_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{j-1} \frac{1}{1 - it(b_k - x - \lambda)\beta} \right| dt =$$

$$* \prod_{k=j+1}^{n+1} \frac{1}{1 - it(b_k - x)\beta} \Big| dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \sup_{x \geq 0} C \beta \sum_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(b_k-x-\lambda)^2 \beta^2}}^* \\
&\quad * \prod_{k=j+1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(b_k-x)^2 \beta^2}} dt = \\
&= 2\lambda \sup_{x \geq 0} C \beta \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(b_k-x-\lambda)^2 \beta^2}}^* \\
&\quad * \prod_{k=j+1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(b_k-x)^2 \beta^2}} dt \tag{4}
\end{aligned}$$

endi $\beta = \frac{1}{n+1}$ deb tanlab (4) dan quydagini hosil qilamiz:

$$Q(S_{(n)}; \lambda) \leq 2\lambda C \int_0^{\infty} \prod_{k \in I_n} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2 \delta^2}}$$

natijada,

$$Q(S_{(n)}; \lambda) \leq 2\lambda C \int_{\delta^2 t^2 < \varepsilon} \prod_{k \in I_n} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2 \delta^2}} +$$

$$+ 2\lambda C \int_{\delta^2 t^2 \geq \varepsilon} \prod_{k \in I_n} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2 \delta^2}} =$$

$$= 2\lambda C \int_{\delta^2 t^2 < \varepsilon} \left(\frac{1}{1+t^2 \delta^2} \right)^{\frac{|I_2|}{2}} dt +$$

$$+ 2\lambda C \int_{\delta^2 t^2 \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{1+t^2 \delta^2} \right)^{\frac{|I_n|}{2}} dt = J_1 + J_2$$

J_i ($i=1,2$) larni alohida baholaymiz.

$$\frac{1}{1+z^2} \leq e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad |z| \leq 1$$

elementar tengsizlik va 3 – lemmaga asosan,

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq 2\lambda C \int_{\delta^2 t^2 < \varepsilon} e^{\frac{\delta^2 t^2}{4} |I_n|} dt \leq \\
&\leq 2C\lambda \int_{\delta^2 t^2 < \varepsilon} e^{\frac{n\delta^2 t^2 \bar{\beta}}{4}} dt \leq \frac{C\lambda}{\sqrt{n}} \quad (5)
\end{aligned}$$

J_2 ni baholaymiz.

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2 C \lambda \int_{\delta^2 t^2 \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{1 + \delta^2 t^2} \right)^{\frac{|I_n|}{2}} dt = \\
&= \int_{\delta^2 t^2 \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{1 + \delta^2 t^2} \right)^{\frac{|I_n|}{2}-1} \left(\frac{dt}{1 + \delta^2 t^2} \right) \leq \\
&\leq 2 C \lambda \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^{\frac{|I_n|}{2}-1} \int_{\delta^2 t^2 \geq \varepsilon} \frac{dt}{1 + \delta^2 t^2} \leq \\
&\leq 2 C \lambda \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^{\frac{|I_n|}{2}-1} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + \delta^2 t^2} \leq \\
&\leq \lambda C \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^{\frac{|I_n|}{2}-1} \tag{6}
\end{aligned}$$

3 – lemmaga ko'ra va (5) – (6) munosobatlarga asosan,

$$Q(s_{(n)}; \lambda) \leq \frac{C\lambda}{\sqrt{n}}$$

munosabatni yozish mumkin.

Teorema isbotlandi.

Natija 1. Agar asosiy teoremada

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = 1$$

bo'lsa, u holda $\lambda \geq 0$ uchun

$$\begin{aligned} Q(U_1 + \min(U_1, U_2) + \dots + \min(U_1, U_2, \dots, U_n); \lambda) = \\ = \sup_x P\{x \leq U_1 + \min(U_1, U_2) + \dots + \min(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq x + \\ \leq \frac{C_1 \lambda}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

C_1 – absolyut doimiy son.

Xulosa

Qaralayotgan ob'ekt oldingi qaralgan statistikalarni umumlashtiradi, yani ma'lum bir muddatda mexanizm ishdan chiqib qolsa konstanta hisobiga yangisini almashtirguncha uning ishlash muddatini tiklash mumkin.

Agar mexanizmni xizmat qilish muddatining taqsimot funktsiyasi biror noma'lum parametrga bog'liq bo'lsa olingan natija orqali noma'lum parametr uchun qandaydir statistic bahoni qurish mumkin.

Statistik baholarning siljigan, siljimagan, effektiv eng yaxshi baho bo'lish shartlarini o'rganishga yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlarlar

1. Karimov I. A. “Barkamol avlod orzusi”, “Sharq” nashriyotmatbaa kontserini bosh tahririyati, Toshkent 1999y.
2. Gumbel E. “Статистика экстремальных значений”. М. “Мир” 1965g.
3. Uilks S. Математическая статистика. М. “ Nauka” 1967g.
4. Sarxan E., B. Grinberg. “Введение в теорию порядковых статистик” М. 1970g.
5. Nagayev S.B., Fuk D.X. “Теория вероятностей и её применения”, XVI 1971g.
6. Borovkov A.A. “Курс теории вероятности”. М. “Nauka” 1972g
7. Petrov V.V. “Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин” М. 1972g.
8. Deyvid G. “Порядковые статистика”, М. 1979g.
9. Xengartner V, Teodoresku R. “Функции концентрации” М. 1980g.
10. Madraximov A.E. Кандидатская диссертация. Toshkent. 1983y.
11. Galambosh Ya. “Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик” М. 1984g.
12. “Введение в теорию вероятностей и её приложения” Moskva, “Mir”, 1984g, I tom.
13. “Введение в теорию вероятностей и её приложения” Moskva, “Mir”, 1984g, II tom.
14. Madrahimov A.E, Qurbonov A.A. FarDU, Musbat tasodifiy miqdorlar minimumlari chiziqli ifodasi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni 2011 yil, 9-bet.
15. Madraximov A.E., Qurbonov A.A. Tartiblangan statistikalarining limitik xossalari, “Matematika fani va uni o’qitishning dolzarb muammolari”, 2011 yil, 53-54 betlar.