

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА –МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

“Дифференциал тенгламалар” кафедраси

5А 480107 – “Математик - физика” мутахассислиги бўйича магистрлик
даражасини олиш учун

Газиева Ҳилола Жумабоевнанинг

“Карралаи характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик
тенгламалар учун 2-чегаравий масала” мавзусида

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий раҳбар _____ ф.-м. ф. н. доц. Ҳ. Ҳ. Аҳмедов
“ _____ ” _____ 2012 й.

Магистрлик диссертацияси “Дифференциал тенгламалар” кафедрасининг 2012 йил
_____ № _____ сонли йиғилишида кўриб чиқилди ва ҳимояга рухсат берилди.

Кафедра мудири _____ ф.-м. ф. н. доц. Ҳ. Ҳ. Аҳмедов
“ _____ ” _____ 2012 й.

Такризчи: _____ ф.-м.ф.н.доц.Д.Қ.Дурдиев
“ _____ ” _____ 2012 й.

Такризчи: _____ доц. Бозоров П.
“ _____ ” _____ 2012 й.

“Ҳимоя қилишга рухсат берилди”
Факультет декани _____ Ш. М. Мирзаев
“ _____ ” _____ 2012 й.

Бухоро-2012

Кириш

Йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун турли чегаравий масалалар XX-асрда ўрганила бошланди.

Бу соҳада С.А.Терсеновнинг ишлари биринчи илмий тадқиқотлар бўлиб, у бу соҳада қилинган ишларини асосан [7-10] ишларида баён этган. У $u_t = \operatorname{sign} x \quad u_{xx}$ тенглама учун $\Omega = \{(x; t): 0 < |x| < +\infty, 0 < t < T\}$ йўлакда ва $Q = \{(x, t): 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$ соҳада коррект қўйилган масалаларни аниқлаган ва Гёльдер функциялар синфларида қўйилган масалаларнинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги шартларини топган. Унинг ишларини давом эттириб Ҳ.Ҳ.Ахмедов юқори тартибли йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун турли чегаравий масалаларини тадқиқ қилган [1,2,3].

$\prod_{k=1}^p (D_t - \alpha_k^2 \operatorname{sign} x D_x^2) u = f)_{x,t} \quad \alpha_k \operatorname{const} > 0, \quad \alpha_j \neq \alpha_i, \quad \text{агар } i \neq j$ тенглама учун $\Omega = \{(x; t): 0 < |x| < +\infty, 0 < t < T\}$ йўлакда ва $Q = \{(x, t): 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$ соҳада коррект қўйилган масалаларни аниқлаган ва Гёльдер функциялар синфларида қўйилган масалаларнинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги шартларини топган.

Ҳ.Ҳ.Ахмедов [4] ишда эса $(D_t - \alpha^2 \operatorname{sign} x D_x^2)^2 u = 0$ икки каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенглама учун $\Omega = \{(x; t): 0 < |x| < +\infty, 0 < t < T\}$ йўлакда ва $Q = \{(x, t): 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$ соҳада коррект қўйилган масалаларни аниқлаган ва Гёльдер функциялар синфларида қўйилган масалаларнинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги шартларини топган.

Йўналиши ўзгарадиган каррали характеристикали параболик тенгламалар учун қўйиладиган чегаравий масалалар ҳамма вақт ҳам коррект қўйилган бўлмайди.

Мен бу ишимда уч каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган
параболик тенглама $(D_t - \alpha^2 \text{Sign} x D_x^2)^3 U(x, t) = 0$ учун

$\Omega = \{(x; t); 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$ соҳада қўйилган иккинчи чегаравий масалани

$H_{x, t}^{6+\beta, 3+\frac{\beta}{2}}$ Гельдер функциялар синфига тегишли бўлиш шартларини
аниқладим. Учинчи тартибли каррали характеристикали йўналиши
ўзгарадиган параболик тенгламалар учун иккинчи чегаравий масаланинг
корректлигини таъминловчи шартлар топилган.

Олинган натижалар каррали бўлмаган йўналиши ўзгарадиган
параболик тенгламалар учун ҳозиргача олинган шартларга ўхшашлиги ва
ечимнинг Гельдер функциялар синфида тегишлилиги кўрсатилган. Юқори
тартибли каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик
тенгламалар учун шу усулни қўллаб, Гельдер функциялар синфида ечими
мавжуд бўлиши ва ягоналиги таъминловчи шартларни топиш мумкин.

Магистрлик диссертацияси икки бобдан иборат бўлиб, биринчи бобда
масалани ечиш учун керак бўладиган бир неча мавзуларга тўхталиб ўтилган.
Иккинчи бобда эса масаланинг ечими, зарурийлиги, ягоналиги ва мавжудлик
шартлари кўрсатилган. Охирида хотима ва фойдаланган адабиётлар
киритилган.

I боб

Параболик типдаги тенгламалар.

1.1 Иккинчи чегаравий масала экстремум принципи.

Биз бу бобда параболик типдаги тенгламаларнинг типик вакили бўлган ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.1)$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини текшираемиз. E фазода ($t = 0$ текислиқда) чегарасини $x = 0$, $x = 1$ бўлган чекли D соҳани олаемиз. $D = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ соҳада p тартиблигича x бўйича, q тартиблигича t бўйича узлуксиз хусусий ҳосилалари мавжуд бўлган функциялар синфини $C_{x, t}^{p, \varepsilon}(D)$ деб белгилаймиз.

Иккинчи чегаравий масала қуйидагича қўйилади. (1.1) тенгламани $C_{x, t}^{2, 1}(D) \cap C(\overline{D})$ синбфига тегишли ва

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0; 1) \quad (1.3)$$

бошланғич ва

$$u_x(0, t) = v_1(t), \quad u_x(1, t) = v_2(t) \quad (1.4)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Экстремум принципи:

(1.2) тенгламанинг D соҳадаги $C(\overline{D}) \cap C_{xt}^{2,1}(D)$ синфга тегишли бўлган $u(x,t)$ ечими ўзининг максимум ёки минимум қийматларини

$$x = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad x = 1, \quad 0 \leq t < T \quad \text{ва} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t = 0$$

кесмаларида қабул қилади. Бу кесмалар бирлашмасини S_1 деб белгилаймиз.

Агар бу принципда кўрсатилган $u(x,t)$ функция бирор нуқтада максимумга эришса, у ҳолда $-u(x,t)$ функция минимумга эришади. Шу туфайли экстремум ҳол учун исботлаш билан чегараланамиз.

Ушбу

$$M = \max_{(x,t) \in D} u(x,t), \quad \mu = \max_{(x,t) \in S_1} u(x,t)$$

белгилашларни киритамиз. Равшанки $\mu \leq M$. Экстремум принципи $\mu = M$ эканлигини кўрсатишдан иборат.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\mu < M$ бўлсин. Бу ҳолда $u(x,t)$ функция D да узлуксиз бўлгани учун максимум қийматга D ёки $\overline{D}$ да ётувчи бирор (x_0, t_0) нуқтада эришади, яъни

$$u(x_0, t_0) = M \quad (x_0, t_0) \in \overline{D}$$

Ёрдамчи

$$V(x,t) = u(x,t) + \frac{M - \mu}{2T}(t_0 - t)$$

функцияни текширамиз.

Агар $(x,t) \in S_1$ бўлса, $t_0 - t \leq t_0 < T$ бўлади. Бунга асосан

$$V(x,t) \Big|_{(x,t) \in S_1} < \mu + \frac{M - \mu}{2} = \frac{M + \mu}{2} < M$$

Иккинчи томондан

$$V(x_0, t_0) = M.$$

Демак, S_1 дан ташқарида шундай нуқта борки, бунда $V(x, t)$ функция M қийматни қабул қилади, ваҳолангки S_1 да $V(x, t)$ нинг қиймати M дан кичик. Бундан $V(x, t)$ функция $\bar{D}$ ёки D да максимумга эришиши келиб чиқади. $V(x, t)$ функция максимумга эришган нуқтани $(x_1, t_1) \in \bar{D}$ бўлсин. Бу нуқтада максимумнинг зарурий

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leq 0$$

шарти бажарилади. Бунга асосан (x_1, t_1) нуқтада

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \geq 0$$

Иккинчи томондан,

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{M - \mu}{2T} < 0 \quad (1.5)$$

Бу қарама-қаршиликдан $(x_1, t_1) \in \bar{D}$ келиб чиқади.

Энди, $(x_1, t_1) \in D_t$ бўлсин. Бу эса $t_1 = T$, $x_1 \in D$ эканлигини билдиради.

У ҳолда, t_1 нуқта $(0, T)$ оралиқнинг чегара нуқтаси, x_1 эса D соҳанинг ички нуқтаси бўлгани учун (x_1, t_1) нуқтадаги максимумнинг зарурий шартига асосан

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leq 0 \quad (1.6)$$

Иккинчи томондан яна (1.5) тенгсизлик бажарилади. Бу қарама-қаршилик $(x_1, t_1) \in \bar{D}_t$ эканлигини кўрсатади.

Шундай қилиб, S_1 га тегишли бўлиши керак бўлган нукта D га ҳам, D_1 га ҳам тегишли бўлмайди.

Бу қарама-қаршилик $\mu < M$ деган фаразимишни нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $\mu < M$. Шу билан экстремум принципи исбот бўлди. Айрим адабиётларда бу принцип максимум принципи деб ҳам юритилади.

Биринчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги: (1) тенглама учун қўйилган биринчи чегаравий масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

(1.1) тенгламанинг (1.3) ва (1.4) шартларни қаноатлантирувчи иккита $u_1(x, t)$ ва $u_2(x, t)$ ечимлари мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз.

У ҳолда бу ечимларнинг айирмаси, $V(x, t) = u_1 - u_2$ функция (1.2) тенгламани ва бир жинсли, яъни нолга тенг бўлган бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантиради. Бундан дарҳол экстремум принципига асосан $V(x, t)$ функция максимум ва минимум қийматлари нолга тенглиги келиб чиқади. Демак, $V(x, t) = 0$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

Агар $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ ечимлар бошланғич ва чегаравий шартларининг фарқи модули бўйича ε дан ($\varepsilon > 0$) кичик бўлса, у ҳолда экстремум принципига асосан $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ бўлади, бу эса биринчи чегаравий масала ечимининг бошланғич ва чегаравий шартларга узлуксиз боғлиқлигини, яъни бу масала ечимининг турғунлигини билдиради.

1.3 Коши масаласи ечими. Фундаментал ечим

Чегаланган стерженда иссиқлик тарқалиши

Бизга маълумки, чегараланмаган бир жинсли стерженда иссиқлик тарқалиши ҳақидаги Коши масаласи қуйидагича эди $\{-\infty < x < \infty, t > 0\}$ соҳада

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

тенгламани ва

$$U(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty \quad (1.16)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $U(x, t)$ функцияни топилсин.

Аввало (1.15) тенгламанинг тривиал бўлмаган

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (1.17)$$

кўринишдаги хусусий ечимини топамиз.

(1.17) ни (1.15) га қўйсак

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \text{const}$$

ёки

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

тенгламаларни оламиз ва буларнинг ечимлари мос равишда

$$T(t) = \exp(-a^2 \lambda^2 t), \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

бўлиб A, B ихтиёрий ўзгармаслар λ га боғлиқ бўлиши мумкин. У ҳолда (1.17) га кўра ихтиёрий $A(\lambda), B(\lambda)$ учун ҳам

$$U(x, t, \lambda) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \cdot \exp(-a^2 \lambda^2 t) \quad (1.18)$$

ифода (1.15) тенгламанинг хусисий ечими бўлади.

Агар барча λ лар бўйича жамласак

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, \lambda) d\lambda \quad (1.19)$$

ва бу интеграл яқинлашувчи бўлса, уни t бўйича бир марта, x бўйича икки марта дифференциаллаш мумкин бўлса, унда (1.19) функция (1.15) тенгламанинг ечими бўлади.

$A(\lambda)$, ва $B(\lambda)$ коэффициентларни шундай танлаймизки, (1.19) функция (1.16) бошланғич шартни ҳам бажарсин, яъни

$$U(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (1.20)$$

Энди $\varphi(x)$ функция учун Фурье интегралини ёзайлик:

$$\begin{aligned}
 U(x,0) &= \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) [\cos \lambda\xi \cdot \cos \lambda x + \sin \lambda\xi \cdot \sin \lambda x] d\xi.
 \end{aligned}$$

Кўриниб турибдики, (1.20) да

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi d\xi; \quad A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi d\xi. \quad (1.21)$$

деб олсак ўринли бўлади.

(1.21) ни (1.19) га қўйиб, қуйидаги ечимни оламиз:

$$\begin{aligned}
 U(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \cdot \exp(-a^2 \lambda^2 t) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \cdot \exp(-a^2 \lambda^2 t) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \cdot \exp(-a^2 \lambda^2 t) d\lambda
 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ички интегрални ҳисоблаймиз. Бунинг учун

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(\xi - x) = \mu z$$

алмаштиришлар бажариб,

$$d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \mu = \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}.$$

ларни инобатга олсак,

$$\int_0^{+\infty} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cdot \cos \lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cdot \cos \mu z d\mu = \frac{J(\mu)}{a\sqrt{t}}, \quad (1.23)$$

тенгликка эга бўламиз.

$J(\mu)$ интегрални μ параметр бўйича дифференциалласак:

$$J'(\mu) = - \int_0^{+\infty} z e^{-z^2} \cdot \sin \mu z dz = - \frac{\mu}{2} \int_0^{+\infty} z e^{-z^2} \cdot \cos \mu z dz = - \frac{1}{2} \mu J(\mu).$$

Бу ерда бир марта бўлаклаб интегралланди. Бундан эса

$$J(\mu) = c \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{4}\right)$$

c ўзгармасни $c = J(0)$ дан аниқлаймиз.

$$\begin{aligned} c &= \left[\int_0^{+\infty} \exp(-e^{-z^2}) dz \right]^2 = \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-e^{-z^2}) dz \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \end{aligned}$$

Қутб координаталар системасига ўтсак

$$c^2 = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} r \cdot \exp(-r^2) dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) d(r^2) = \frac{\pi}{4}$$

ёки $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Демак

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{4}\right)$$

ва (1.23) га биноан

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cdot \cos \lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \cdot \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right].$$

Ниҳоят (1.22) га асосан, масаланинг ечимини оламиз:

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \quad (1.24)$$

Фундаментал ечим

1. Таъриф. Ушбу

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] \quad (1.25)$$

функция (1.15) тенгламанинг фундаментал ечими дейилади. Бу функция (1.15) (1.16) Коши масаласининг Грин функцияси деб ҳам юритилади.

Агар бошланғич шарт $t = 0$ да эмас $t = \tau$ да берилса, (1.25) формулада $t = \tau$ ва $t - \tau$ лар билан алмаштириш лозим.

2. Фундаментал ечимни кўришнинг бошқа бир усулини келтирамиз.

Шу мақсадда бошланғич шарт махсус $U(x, 0) = \delta(x - x_0)$ кўринишидаги

Коши масаласини қарайлик. Бу ерда δ Диракнинг δ функцияси. Унинг

Фурье интеграли

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda(x - x_0) d\lambda$$

ни эътиборга олган ҳолда $U(x - x_0, t)$ фундаментга ечимни

$$U(x - x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} A_\lambda(t) \cos \lambda(x - x_0) d\lambda$$

кўринишда излаймиз. Бундан ва тенгламадан

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)}(t) \cdot \exp(-a^2 \lambda^2 t)$$

ҳамда $t = 0$ да бошланғич шартга кўра $A_\lambda^{(0)} = 1$.

Шундай қилиб

$$\begin{aligned} U(x - x_0, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cdot \cos \lambda(x - x_0) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] \end{aligned}$$

Шу ўринда δ функциянинг айрим хоссаларини келтириб ўтамиз.

1. $\forall x \in D$ учун

$$\int_D \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in D \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x \notin D \text{ бўлса} \end{cases}$$

$$2. \int_B \delta(x, x_0) \varphi(x) dx = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 \in D \\ 0, & x_0 \notin D \end{cases} \quad \varphi \in C(\overline{D})$$

Бу хоссалардан кейинчалик фойдаланамиз

1. Бир жинсли тенглама учун бир жинсли чегаравий шартли масала. Чекли l узунликка эга бўлган бир жинсли стерженда иссиқлик тарқалиши

тенгламаси учун биринчи чегаравий масалани қарайлик: $\{0 < x < l, t > 0\}$
соҳада

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, 0 < x < l, t > 0 \quad (1.26)$$

тенгламанинг

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.27)$$

чегаравий ва

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.28)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$

берилган функция бўлиб, $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$.

Фурье усулига биноан (1.26) тенгламанинг тривиал бўлмаган ечимини

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (1.29)$$

кўринишда излаймиз ва (1.28) ни (1.26) га қўйиб, ушбу

$$\begin{aligned} T'(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0 \\ X''(t) + \lambda X(x) &= 0, \quad \lambda = \text{const} \end{aligned} \quad (1.30)$$

оддий дифференциал тенгламаларни оламир.

Ўз навбатида $X(x)$ функцияни аниқлаш учун (1.30) тенгламанинг

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (1.31)$$

Шартларни бажарувчи ечимини топиш хос сонлар ҳақидаги масалага келамиз.

Биламизки λ параметрнинг фақат

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

қийматлардагина (1.30), (1.31) масаланинг тривиал бўлмаган

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ечимлари мавжуд бўлади.

Шунингдек (1.30) тенгламанинг $\lambda = \lambda_0$ хос сонларга мос ечимлари

$$T_n(t) = a_n \cdot \exp \left(- \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 t \right)$$

кўринишда бўлади, бу ерда a_n ихтиёрий ўзгармас коэффициент.

$$U_n(x, t) = a_n \cdot \exp \left(- \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (1.32)$$

функция (1.26) тенгламани ва (1.27) шартларни қаноатлантиради

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \exp \left(- \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (1.33)$$

катор ҳам (1.26) тенгламани ва (1.27) шартларни қаноатлантиради.

Энди (1.33) қаторнинг (1.27) шarti бажаришини ҳам талаб қиламиз яъни

$$U(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (1.34)$$

Бу қатор берилган $\varphi(x)$ функциянинг (0.1) ораликдаги синуслар бўйича Фурье қаторига ёйилмасини ифодалайди. У ҳолда a_n коэффициентлар куйидагича маълум

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (1.35)$$

формула билан аниқланади.

Энди (1.33) қатор (1.26), (1.27), (1.28) масаланинг ҳамма шартларини бажаришини кўрсатамиз. Бунинг учун эса, (1.33) қатор билан ифодаланган $U(x, t)$ функциянинг дифференциалланувчанлигини ва $\{0 < x < l, t > 0\}$ соҳада тенгламани қаноатлантириб, $x = 0, x = l, t = 0$ чегараларда узлуксиз эканлигини кўрсатиш керак.

Агар (1.26) қатор яқинлашувчи бўлиб, уни x бўйича икки марта, t бўйича бир марта ҳадма – ҳад дифференциаллаш мумкин бўлса, бу қатор (1.26) тенгламани қаноатлантиради, чунки (1.26) тенглама чизиқли бўлгани учун унинг хусусий ечимларидан тузилган қатор ҳам ечим бўлади.

1.4 Масалани ечиш учун керак бўладиган баъзи маълумотлар

Гёльдер функциялар синфи.

Параболик тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг Гёльдер функциялар синфига тегишлилигини текшириш кенг тарқалган.

Биз ҳам йўналиши ўзгарадиган параболик тенглама учун чегаравий масала ечимини Гёльдер функциялар синфига тегишли бўлиш шартларини аниқлаймиз.

Шунинг учун Гёльдер функциялар синфларининг таърифларини келтирамиз [6;10].

Таъриф: (a,b) ораликда аниқланган $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар (a,b) ораликдан олинган ихтиёрий x' ва x'' нуқталар учун шундай 0 сон мавжуд бўлсаки

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq c(x' - x'')^\lambda, 0 < \lambda \leq 1 \quad (1.37)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\varphi(x)$ функция (a,b) ораликда λ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантиради дейилади. $\varphi(x)$ функцияга эса $H^\lambda(a,b)$ функциялар синфига тегишли дейилади. $\lambda=1$ бўлганда (1.1) Липшиц шarti дейилади.

$\psi(x, y)$ икки ўзгарувчи функция

$\Omega = \{(x, t), a < x < b, c < y < d\}$ соҳада аниқланган бўлсин. Ҳар бир

y учун $\psi(x, y)$ функция x ўзгарувчи бўйича λ кўрсаткичли Гёльдер

шартини, ҳар бир x учун y ўзгарувчи бўйича (c, d) ораликда $\mu (0 < \mu < 1)$ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирса, $\psi(x, y)$ функция Ω соҳада x ўзгарувчи бўйича λ , y ўзгарувчи бўйича μ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантиради дейилади, $\psi(x, y)$ функция эса $H_{x,y}^{\lambda,\mu}(\Omega)$ функциялар синфига тегишли дейилади.

$\psi(x, y)$ функция Ω соҳада аниқланган бўлиб,
 $D_x^p D_y^q \psi(x, y) \in H_{x,y}^{\lambda,\mu}(\Omega)$, $p + q \leq \max\{m, k\}$ бўлса
 $\psi(x, y) \in H_{x,y}^{m+\lambda,k+\mu}(\Omega)$ дейилади.

Биз асосан $H_{x,t}^{2l+\beta,l+\beta/2}(\Omega)$, $0 < \beta < 1$, $l = 0, 1, 2$ функциялар синфи билан иш кўрамиз. Бу ерда, агар $D_x^p D_t^q U \in H_{x,t}^{\beta,\beta/2}(\Omega)$, $p + 2q \leq 2l$ бўлса
 $U \in H_{x,t}^{2l+\beta,l+\beta/2}(\Omega)$ дейилади.

Гёльдер функциялар синфларининг хоссалари.

1°. $(a, b) = (a, t_0) \cup (t_0, b)$ бўлиб, $\varphi(x)$ функция $(a, t_0); (t_0, b)$ ҳар бирида $H^\mu(a, b)$ шартни қаноатлантирса, (a, b) да ҳам $H^\mu(a, b)$ шартни қаноатлантиради.

2°. $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялари (a, b) да $H^\mu(a, b)$ ва $H^\nu(a, b)$, шартларни қаноатлантирса, $\varphi(t) + \psi(t)$ ва $\varphi(t) \cdot \psi(t)$ функциялари $H^\lambda(a, b)$, $\lambda = \min(\mu, \nu)$ шартни қаноатлантиради.

3°. $\varphi(t) \in H^\mu(a, b)$, $0 < \nu < \mu \leq 1$ бўлса,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda} \in H^{\mu-\lambda}(a, b), t_0 \in (a, b) \text{ бўлади.}$$

$$\Omega = \{x, t\}; 0 < x < T, t > 0 \text{ соҳада}$$

$$U_1 - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1.38)$$

теннгламани $t = 0$ да

$$U(x, 0) = \varphi(x), x \geq 0 \quad (1.39)$$

бошланғич, $x = 0$ да

$$U_x(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.40)$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласини А масала деб атаймиз.

Теорема ([6]): $\varphi(x) \in H^{2+\beta}[0; +\infty)$ бўлиб,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (1.41)$$

шарт бажарилганда $H^{2+\beta, 1+\beta/2}_x(\Omega)$ функциялар синфида ягона ечими мавжуд бўлади. Бу ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$U(x, t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) (G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t)) d\xi, \quad (1.42)$$

бу ерда

$$G(x, t) = \begin{cases} \alpha(\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}\right), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (1.43)$$

$\Omega = \{(x, t); 0 < x < +\infty, t > 0\}$ соҳада

$$U_t - \alpha^2 U_{xx} = f(x, t) \quad (1.44)$$

тенгламани $t = 0$ да

$$U(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < +\infty \quad (1.45)$$

бошланғич шартни, $x = 0$ да

$$u_x(0, t) = 0, t > 0 \quad (1.46)$$

чегаравий шартни қаноатлантирадиган $H^{2+\beta, 1+\beta/2}_{xt}(\Omega)$ функциялар синфида ягона ечими мавжуд ва у қуйидаги

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{t+\infty} \int_0^\infty f(\xi \tau) (g(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \quad (1.47)$$

кўринишда бўлади, [6;10].

$$\Omega = \{(x, t); 0 < x < +\infty, t > 0\} \quad \text{сохада}$$

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1.48)$$

тенгламани, $t = 0$ да

$$U(x, 0) = 0, 0 \leq x < +\infty \quad (1.49)$$

бошланғич шартни, $x = 0$ да

$$U_x(0, t) = v(t), t > 0 \quad (1.50)$$

чегаравий шартни қаноатлантирадиган $h_{xt}^{2+\beta, 1+\beta/2}(\Omega)$ функциялар синфида
ягона ечими мавжуд ва у қуйидаги кўринишда бўлади

$$U(x, t) = - \int_0^t v(\tau) G(x, t - \tau) d\tau, \quad (1.51)$$

1.5. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда

қўлланадуган айрим бошқа усуллар

Иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама

Ечимларининг интеграл ифодаси. Ечимлари элементар функциялар орқали ёзиладиган дифференциал тенгламалар синфи жуда ҳам тор. Аввалги бобда биз хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимларини чексиз қатор йиғиндиси кўринишида ифодалашга ҳаракат қилдик. Баъзан текширилаётган тенгламанинг ечимини берилган функцияни ҳамда соддароқ. Тенгламанинг ечимини ўз ичига олган интеграл кўринишида топиш қулай бўлади.

Ушбу

$$L(y) = p(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0 \quad (1.52)$$

Иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама қаралаётган бўлиб, унинг коэффициентлари барча комплекс текисликда з комплекс ўзгарувчининг берилган аналитик функциялари бўлсин. (1.52)

Тенгламанинг $y(z)$ ечимини

$$y(z) = \int_C k(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta \quad (1.53)$$

интеграл кўринишда излаймиз, бу ерда C - бўлакли силлиқ контур,

$v(\zeta)$ – ҳозирча номаълум аналитик функция, $k(z, \zeta)$ эса

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + q(z) \frac{\partial k}{\partial z} + r(z)k = \\ &= a(\zeta) \frac{\partial^2 k}{\partial \zeta^2} + b(\zeta) \frac{\partial k}{\partial \zeta} + c(\zeta)k \end{aligned} \quad (1.54)$$

тенгламани қаноатлантирувчи z, C ўзгарувчиларнинг аналитик функцияси, шу билан бирга $a(\zeta), b(\zeta)$ ва $c(\zeta)$ – берилган аналитик функциялар.

Қуйида бажариладиган барча амалларни қонуний деб фараз қилиб, (1.53) дан

$$L(y) = \int_c L(K)V(\xi)d\xi$$

ёки (1.54) га асосан,

$$L(y) = \int_c M(K)V(\xi)d\xi \quad (1.55)$$

тенгламани ҳосил қиламиз бу ерда M дифференциал оператор:

$$M = a(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} + c(\xi)$$

(1.55) ифодани бўлаклаб интеграллаб ҳамда интеграл ташқарисидаги барча қўшилувчиларни нолга тенг деб ҳисоблаб,

$$L(y) = \int_c k(z, \xi)m \cdot (V)d\xi \quad (1.56)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда

$$m \cdot (v) = \frac{d^2}{d\xi^2}(aV) - \frac{d(b)V}{d\xi} + c(\xi)V$$

– m операторга қўшма бўлган дифференциал оператор. Агар $v(x)$ функция

$$M * (V) = 0 \quad (1.57)$$

тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда (2) формула билан тасвирланган

$y(z)$ функция шубҳасиз (1.52) тенгламанинг ечи-ми бўлади .

мисол сифатида Бессел

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0 \quad (1.58)$$

тенгламасини қараймиз.

(7) тенгламанинг $y(z)$ ечимини (1.53) формула бўйича излаймиз, бунда

$$K(z, \xi) = + \frac{1}{\pi} e^{-iz \sin \xi}$$

бу ҳолда

$$L(k) = z^2 K_{zz} + zK_z + (z^2 - n^2)K = (-z^2 \sin^2 \xi - iz \sin \xi + (z^2 - n^2))K(z, \xi) \quad (1.59)$$

иккинчи томондан

$$K_{\zeta\zeta} = (iz \sin \zeta - z^2 \cos^2 \zeta) K(z, \zeta),$$

бундан

$$iz \sin \zeta K(z, \zeta) = K_{\zeta\zeta} + z^2 \cos^2 \zeta K(z, \zeta)$$

буни (1.59) га қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$L(K) = z^2 K_{zz} + z K_z + (z^2 - n^2) K = -K_{\zeta\zeta} - v^{2K}$$

бунга асосан (1.55) ва (1.56) тенгликлар қуйидагича ёзилади:

$$L(y) = - \int_c (K \zeta \zeta + v^2 K) V(\zeta) d\zeta = \pm \frac{1}{\pi} \int_c (V_{\zeta\zeta} + v^2 V) e^{-iz \sin \zeta} d\zeta$$

бу тенгликдан, (1.57) тенглама

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + v^2 V = 0$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади

охирги тенгламанинг ечими эса $e^{\pm ini}$ дан иборатдир

шундай қилиб, (1.53) формула билан аниқланадиган функциялар, бунда

$$K(z, \zeta) = \pm \frac{1}{\pi} e^{-iz \sin \zeta} \quad V(\zeta) = e^{iv\zeta}$$

(1.58) Бессел тенгламасининг ечимлари бўлади

Агар $\text{Re} z > 0$ деб ҳисоблаб, (1.53) формулада интеграллаш ёъли C сифатида, масалан,

$$\begin{aligned} \xi &= 0, -\infty < \eta \leq 0; \\ \eta &= 0, -\pi \leq \xi \leq 0 \\ \xi &= -\pi, 0 \leq \eta < \infty \end{aligned} \quad (1.60)$$

Ёки

$$\begin{aligned} \xi &= 0, -\infty < \eta \leq 0; \\ \eta &= 0, -\pi \leq \xi \leq 0 \\ \xi &= \pi, 0 \leq \eta < \infty, \zeta = \xi + i\eta \end{aligned} \quad (1.61)$$

синик, чизикларни олсак, юқоридаги бажарилган барча амаллар ўринли бўлади. Интеграллаш ёъли C (1.60) синик, чизик, билан устма-устушиб,

$K(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} e^{-iz \sin \zeta}$ бўлганда, $\text{Re} z > 0$ ярим текисликда (1.53) формула билан аниқланган (1.58) тенгламанинг ечими учун қуйидаги

$$H_v^1(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-iz \sin i\eta - v\eta) d\eta - \frac{1-\pi}{\pi} \exp(iz \sin \xi + iv\xi) d\xi - \\ - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(iz \sin i\eta - v\eta - \pi i) d\eta \quad (1.62)$$

белгилашни С йўл (1.61) синик, чизик, билан устма – уст тушганда

$K(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} e^{-iz \sin \zeta}$ ва бўлганда

$$H_v^2(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(iz \sin i\eta - v\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-iz \sin \xi + iv\xi + iv\xi) \quad (1.63)$$

$$d\xi + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(iz \sin i\eta - v\eta + \pi i) d\eta$$

белгилашни киритамиз. Ушбу

$$\sin i\eta = \frac{e^{-\eta} - e^{\eta}}{2i} = -\frac{\sinh \eta}{i}$$

формулага асосан (1.62) ва (1.63) формулалар

$$H_v^1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \exp(z \sinh \eta - v\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \exp(-iz \sin \xi + iv\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \exp(-z \sinh \eta - v\eta - \pi i) d\eta \quad (1.64)$$

$$H_v^2(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \exp(z \sinh \eta - v\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-iz \sin \xi + iv\xi) d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \exp(-zsh\eta - v\eta + \pi vi) d\eta \quad (1.65)$$

Кўринишда ёзилади

(1.64) ва (1.65) формулалар билан аниқланган (1.58) Бессел тенгламасининг ечимлари ханкел функциялари дейилади, уларнинг

$$J_v(z) = \frac{1}{2} [h_v^1(z) + h_v^2(z)], \quad (1.66)$$

$$y_v(z) = \frac{1}{2i} [h_v^1(z) - h_v^2(z)],$$

Комбинациялари эса, бизга маълум бўлган Бессел ва Вебер функцияларидан иборатдир.

(1.64), (1.65) ва (1.66) тенгликларга асосан

$$j_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz \sin \xi + iv\xi) d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \exp(-zsh\eta - v\eta) (e^{iv\pi} - e^{-iv\pi}) d\eta$$

ёки

$$j_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz \sin \xi + iv\xi) d\xi - \frac{\sin v\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-zsh\eta - v\eta) d\eta \quad (1.67)$$

Агар $v = n$ бутун сон бўлса, (1.67) нинг ўнг томондаги иккинчи қўшилувчи нолга тенг бўлади ва

$$\begin{aligned}
j_v(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz \sin \xi + iv\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [\exp(-iz \sin \xi + iv\xi)] d\xi + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\exp(-iz \sin \xi + iv\xi)] d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [\exp(iz \sin \xi - iv\xi) + \exp(-iz \sin \xi + iv\xi)] d\xi
\end{aligned}$$

тенглик келиб чиқади. ушбу

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

формулага биноан

$$j_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \xi - n\xi) d\xi$$

формулага эга бўламиз

2. Лаплас, Фурье ва Меллин алмаштиришлари. Ҳақиқий $t, 0 < t < \infty$, ўзгарувчининг ҳақиқий ёки комплекс $f(t)$ функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантирсин : 1) чекли сондаги биринчи турдаги узилиш мумкин бўлган нуқталардан бошқа барча нуқталарда $f(t)$ узлуксиз, 2) шундай $M > 0$ ва $\xi > 0$ узлукмаслар мавжудлиги, барча t лар учун $|f(t)| < M e^{\xi_0 t}$ тенгсизлик ўринли.

Бу шартлар бажарилганда

$$F(\zeta) = \int_0^{\infty} f(t) e^{\zeta t} dt \quad (1.68)$$

интеграл ҳақиқий қисми $\operatorname{Re} \zeta > \zeta_0$ бўлган барча ζ лар учун мавжуд бўлиб, $\operatorname{Re} \zeta > \zeta_0$ ярим текисликда $\zeta = \xi + i\eta$ комплекс ўзгарувчининг аналитик функциясидан иборат бўлади.

(1.68) формула билан аниқланган $F(\zeta)$ функциянинг Лаплас алмаштириши, тасвири ёки трансформанти деб аталади, $f(t)$ нинг ўзи эса оригинал функция дейилади.

Лаплас алмаштириши қўлланилганда кўп ҳолларда оригинал функцияни унинг тасвири $F(\zeta)$ билан ифодалашга тўғри келади.

Исбот қилинадики, агар;

- 1) $\operatorname{Re} \zeta > \zeta_0$ ярим текисликда $F(\zeta)$ аналитик функция,
- 2) ихтиёрий $a > \zeta_0$ учун $\operatorname{Re} \zeta \geq a$ бўлганда $\arg \zeta$, га нисбатан

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} F(\zeta) = 0$$

Лимит текис бўлса ва

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta) d\eta$$

Интеграл абсолют яқинлашса, у ҳолда (1.68)га тескари алмаштириш мавжуд бўлиб, у

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta) e^{(a+i\eta)t} d\eta \quad (1.69)$$

Кўринишга эга бўлади, бу ерда интеграл бош қиймат маъносида тушунилади.

Ушбу

$$g(t) = f(t)e^{-at}, G(\eta) = \frac{1}{2\pi} F(a + i\eta)$$

Белгилашларни киритсак, (1.68)ва (1.69) формулалар

$$G(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\eta t} g(t) dt \quad (1.70)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} G(\eta) d\eta \quad (1.71)$$

кўринишда ёзилади.

(1.70) формула билан аниқланган $G(r')$ функциянинг Фурье алмаштириши ёки трансформанти номи билан юритилади. Агар $-\infty < t < 0$ да $g(t) = 0$ бўлса, у ҳолда (1.70) формуланинг ўнг томонидаги интегралнинг қуйи чегараси учун, равшанки $-\infty$ ни олиш мумкин.

Агар $g(t)$ функция барча $-\infty < t < 0$ да аниқланган бўлса-ю, аммо $-\infty < t < 0$ да нолга тенг бўлмаса бу функциянинг Фурье алмаштириш деб

$$G(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} g(t) dt \quad \text{интегралга айтилади.}$$

II. Боб.

**Каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик
тенгламалар учун биринчи чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва
ягоналиги.**

2.1. Масаланинг қўйилиши.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^3 u = 0 \quad (2.1)$$

тенгламани $\Omega = \{(x, t); \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < t < T\}$ соҳада

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, T) = u_t(x, T) = 0, \quad u_{tt}(x, T) = \varphi_2(x) \quad -1 \leq x \leq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

бошланғич

$$\begin{aligned} u_x(1, t) = u_{xxx}(1, t) = u_{xxxx}(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(-1, t) = u_{xxx}(-1, t) = u_{xxxx}(-1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.3)$$

чегаравий ва

$$\begin{aligned} u(+0, t) &= u(-0, t), \\ u_x(+0, t) &= u_x(-0, t), \\ u_{xx}(+0, t) &= -u_{xx}(-0, t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_{xxx}(+0, t) &= -u_{xxx}(-0, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$u_{xxx}(+0, t) = u_{xxx}(-0, t),$$

$$u_{xxxx}(+0, t) = u_{xxxx}(-0, t),$$

ёпиштириш шартларини қаноатлантирувчи ечимнинг Гёльдер функциялар синфида $([1, 2, 3])$ мавжудлик ва ягоналик шартларини излаймиз.

**2.2. (2.2)-(2.4) масала ечимини тенгламалар системаси
ечимига келтириш.**

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \vartheta_1(x, t) \quad (2.5.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vartheta_1(x, t) = \vartheta_2(x, t) \quad (2.5.2) \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vartheta_2(x, t) = 0 \quad (2.5.3)$$

тенгламалар системасини,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, T) &= 0, & -1 \leq x \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(x, 0) &= D_t u(x, 0) - \alpha^2 D_x^2 u(x, 0) = 0 - \alpha^2 0 = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \vartheta_1(x, T) &= D_t u(x, T) + \alpha^2 D_x^2 u(x, T) = 0 + \alpha^2 0 = 0, & -1 \leq x \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2) \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2(x, 0) &= (D_t - \alpha^2 D_x^2) (D_t - \alpha^2 D_x^2) u(x, 0) = D_t^2 u(x, 0) - \\ &\quad - 2\alpha^2 D_t D_x^2 u(x, 0) + \alpha^4 D_x^4 u(x, 0) = \varphi_1(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ \vartheta_2(x, T) &= (D_t + \alpha^2 D_x^2) (D_t + \alpha^2 D_x^2) u(x, 0) = D_t^2 u(x, 0) + \\ &\quad + 2\alpha^2 D_t D_x^2 u(x, 0) + \alpha^4 D_x^4 u(x, 0) = \varphi_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.3)$$

БОШЛАНҒИЧ

$$\left. \begin{aligned} u(1, t) &= 0, \\ u(-1, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{1x}(1, t) &= D_x D_t u(1, t) - \alpha^2 D_x^3 u(1, t) = 0 - \alpha^2 0 = 0, \\ \vartheta_{1x}(-1, t) &= D_x D_t u(-1, t) + \alpha^2 D_x^3 u(-1, t) = 0 + \alpha^2 0 = 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.7.2) \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{2x}(1, t) &= D_x (D_t - \alpha^2 D_x^2) (D_t - \alpha^2 D_x^2) u(1, t) = \\ &= D_x D_t^2 u(1, t) - 2\alpha^2 D_t D_x^3 u(1, t) + \alpha^4 D_x^5 u(1, t) = 0, \\ \vartheta_{2x}(-1, t) &= D_x (D_t + \alpha^2 D_x^2) (D_t + \alpha^2 D_x^2) u(-1, t) = \\ &= D_x D_t^2 u(-1, t) - 2\alpha^2 D_t D_x^3 u(-1, t) + \alpha^4 D_x^5 u(-1, t) = 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

чегаравий ва

$$u(+0, t) = u(-0, t), \quad (2.8.1)$$

$$D_x u(+0, t) = D_x u(-0, t), \quad (2.8.2)$$

$$\vartheta_1(+0, t) = \vartheta_1(-0, t), \quad (2.8.3) \quad (2.8)$$

$$D_x \vartheta_1(+0, t) = D_x \vartheta_1(-0, t), \quad (2.8.4)$$

$$\vartheta_2(+0, t) = \vartheta_2(-0, t), \quad (2.8.5)$$

$$D_x \vartheta_2(+0, t) = D_x \vartheta_2(-0, t), \quad (2.8.6)$$

ёпиштириш шартларини қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига эквивалент бўлади.

(2.1) – (2.4) чегаравий масала ечими (2.5) масала ечимига

$\vartheta_2 \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\Omega)$ $\vartheta_1 \in H^{4+\beta, 2+\frac{\beta}{2}}(\Omega)$, $u \in H^{6+\beta, 3+\frac{\beta}{2}}(\Omega)$ бўлганда эквивалент бўлади.

(2.5) – (2.8) масалани ечимини излаймиз.

2.3 (2.5)-(2.8) чегаравий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги.

Лемма. (2.5)-(2.8) масаланинг $H^{6+\beta, 3+\beta/2}(\Omega)$ синфида ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Исбот. Йўналиши ўзгарадиган параболик тенглама учун иккинчи чегаравий масала ечимининг ягоналигига кўра ([1]), $H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\Omega)$ функциялар синфида (2.5.3), (2.6.3), (2.7.3) (2.8.5), (2.8.6) масалани $u \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}$ ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Худди шундай (2.5.2), (2.6.2), (2.7.2), (2.8.3), (2.8.4) ва (2.5.1), (2.6.1), (2.7.), (2.8.1), (2.8.2) масалаларнинг ечими мос равишда $H^{4+\beta, 2+\beta/2}(\Omega)$ ва $H^{6+\beta, 3+\beta/2}(\Omega)$ синфларда мавжуд бўлса, у ягоналиги кўрсатилади.

(2.1)-(2.4) масаланинг $H^{6+\beta, 3+\beta/2}(\Omega)$ функциялар синфида мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун (2.5.3), (2.6.3), (2.7.3), (2.8.5), (2.8.6) масалани ечиш учун (2.8.5) ёпиштириш шартидан

$$v_{2x}(+0, t) = v_{2x}(-0, t) = v(t)$$

ноъмалум функцияни киритамиз. Унда агар $v(t) \in H^{1+\beta/2}(0, \tau)$ ва

$$v(0) = \varphi_1(0), \quad v(\tau) = \varphi_2(0).$$

бўлса, (2.5.3), (2.6.3), (2.7.3), (2.8.5), (2.8.6), (2.9) масаланинг ечими ([1],[2])

$$\begin{aligned}\vartheta_2^+(x, t) &= - \int_0^t v(\tau) D_x \theta_3(x, t - \tau) \cdot d\tau + \omega_1(x, t), \\ \vartheta_2^-(x, t) &= \int_t^x v(\tau) D_x \theta_3(x, \tau - t) \cdot d\tau + \omega_2(x, t).\end{aligned}$$

бу ерда

$$\left. \begin{aligned}\omega_1(x_1, t) &= \int_0^t \int_0^1 \varphi_1(\xi) (\theta_3(x - \xi, t - \tau) + \theta_3(x + \xi, t - \tau)) d\tau d\xi \\ \omega_2(x_2, t) &= \int_0^T \int_{-1}^0 \varphi_2(\xi) (\theta_3(x - \xi, \tau - t) + \theta_3(x + \xi, \tau - t)) d\tau d\xi\end{aligned}\right\}$$

(2.13)

$$\theta_3\left(\frac{x}{2}/i\pi\alpha^2t\right) = \alpha^{-2}G(x, t) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{\alpha^2t}} \cdot \left(e^{\frac{nx}{\alpha^2t}} + e^{-\frac{nx}{\alpha^2t}} \right) \right\}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2t}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_2(x, t) = \begin{cases} \vartheta_2^+(x, t) & x \geq 0 \\ \vartheta_2^-(x, t) & x \leq 0 \end{cases}$$

Маълумки [6]

$$\left. \begin{aligned} \left| \vartheta_2^+ \right|_{\Omega}^{(2+\beta)} &\leq c_1 \left(\left| \varphi_1 \right|_{\Omega}^{(\beta)} + \left| \nu \right|_{(0,T)}^{(1+\beta/2)} \right), \\ \left| \vartheta_2^- \right|_{\Omega}^{(2+\beta)} &\leq c_2 \left(\left| \varphi_1 \right|_{\Omega}^{(\beta)} + \left| \nu \right|_{(0,T)}^{(1+\beta/2)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

θ_3 функцияга параболик тенгламани қаноатлантиргани учун 7 мос равишда ϑ_2^+ , ϑ_2^- функциялар (2.5.3) тенгламани қаноатлантиришини текшириш қийин эмаслиги кўриниб турибди. Бундан ташқари

$$D_x \omega_1(0, t) = D_x \omega_2(0, t) = 0 \quad (2.15)$$

$$D_t \omega_1(x, 0) = D_t \omega_2(x, T) = 0 \quad (2.16)$$

(2.16) тенгликни қўллаб қуйидаги тенгликларни келтириб чиқарамиз.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \vartheta_2^+ = \int_0^t \nu(t)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau + \int_0^t \nu(\tau) E_1(t-\tau) d\tau$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \vartheta_2^- = -\int_t^T \nu(t)(\tau-t)^{-\frac{1}{2}} d\tau + \int_t^T \nu(\tau) E_1(\tau-t) d\tau$$

(2.1) масаланинг ечимни (2.11) ва (2.12) кўринишда излаймиз ва бу ерда $N(t)$ ноъмалум функция бўлиб, $N(t) \in H^{1+\beta/2}(0, T)$ тегишли

$$\int_0^T v(\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau + \int_0^T v(\tau) \cdot E_1(|t-\tau|) d\tau = \omega(t) \quad (2.18)$$

бу ерда

$$\omega(t) = \lim_{x \rightarrow -0} \omega_2(x, t) - \lim_{x \rightarrow +0} \omega_1(x, t) \quad (*)$$

ва $\omega(t) \in H^{1+\beta/2}(0, T)$ (2.10) шартни қаноатлантирувчи (2.18) тенгламани

$v \in H^{\frac{1+\beta}{2}}(0, T)$ соҳада ечимини излаш керак.

Қуйидаги шартни қўллаб $v \in H^{1+\beta/2}(0, T)$ соҳада ечимини излаймиз.

$$v(0) = v(T) = 0 \quad (2.19)$$

(2.18) тенгламага Абель операторини қўллаб $v(t)$ га нисбатан қуйидаги сингуляр-интеграл тенгламани келтириб чиқарамиз.

$$\sqrt{t}v(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sqrt{\tau}v(t)d\tau}{\tau-t} + 2\sqrt{\pi}L_1(v(t), t) = 2\sqrt{t}\omega_1 t \quad (2.20)$$

Бу ерда

$$L_1(v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T v(\tau) \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$E(|\tau_1 - \tau|) d\tau_1 d\tau$$

$$\omega_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau_1)^{-\frac{1}{2}} \omega(\tau_1) d\tau_1$$

(2.20) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\sqrt{t}v(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sqrt{\tau}v(\tau)d\tau}{\tau-t} = 2\sqrt{t}(\omega_1(t) - L_1(v,t)),$$

Тенгламанинг ўнг қисмини маълум функция деб олсак (2.20) тенгламадаги $\sqrt{t}v(t)$ ни $(0,T)$ да чегараланган функциялар синфида излаймиз.

У.ҳолда $\chi = -1$ да каноник ечими $X(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-T)^{\frac{1}{4}}$ кўринишда бўлади. Шунинг учун [4,5] шартларнинг бажарилиши

$$\int_0^T \frac{L_1(v,t)}{\Lambda_1(\tau)} = \int_0^T \frac{\omega(\tau)d\tau}{\Lambda_1(\tau)} \quad (2.21)$$

(2.20) тенглама қуйидаги тенгламага эквивалент бўлади.

$$\begin{aligned} v(t) + L_1(v,t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{L_1(v,t)d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau-t)} = \\ = \omega_1(t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{\omega(\tau)d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau-t)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Бу ерда ва бошқа жойларда $\Lambda_1(t) = t^{\frac{1}{4}}(T-t)^{\frac{1}{4}}$ бўлади.

$L_1(v,t)$ ва $\omega_1(t)$ функцияларни қуйидагича тасвирлаймиз.

$$\begin{aligned} L_1(v,t) &= \frac{L(v,0)}{2\pi} t^{\frac{1}{2}} + L_2(v,t) \\ \omega_1(t) &= \frac{\omega(0)}{2\pi} t^{\frac{1}{2}} + \omega_2(t) \end{aligned}$$

Бу ерда

$$L_2(v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T v(\tau) \int_0^t (t - \tau_1)^{-\frac{1}{2}} E'(|\tau_1 - \tau|) d\tau_1 d\tau$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \omega_1'(\tau) d\tau$$

Агар

$$\frac{L_1(v, 0)}{\sqrt{2}} + \int_0^T \frac{L_2(v, \tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)} = \frac{\omega_1(0)}{\sqrt{2}} + \int_0^T \frac{\omega_2(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)} \quad (2.23)$$

(2.21) ва (2.22) шарт бажарилса, тенгламалар қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$v(t) + L_2(v, t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{L_2(v, \tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)}$$

$$= \psi_3(t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{\psi_3(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)} \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_a^b (x-a)^{v-1} (b-x)^{-v} (x-y)^{-1} dx = \\ & = -(y-a)^{v-1} (b-y)^{-v} \operatorname{ctg} v\pi \\ & \frac{1}{\pi} \int_a^b (x-a)^{s-1} (b-x)^{\delta-1} (x-y)^{-1} dx = \\ & = -(y-a)^{s-1} (b-y)^{\delta-1} \operatorname{ctg} \delta\pi - \\ & - \frac{\Gamma(s)\Gamma(\delta-1)}{\pi\Gamma(s+\delta-1)} (b-a)^{s+\delta-2} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

$$0 < \operatorname{Re} v < 1,$$

$$a < y < b.$$

(*) формулаларни қўлласак,

$$L_2(v, t) = \frac{L'(v, 0)}{\pi} t^{\frac{1}{2}} + L_3(v, t)$$

$$\omega_2(t) = \frac{\omega'(0)}{\pi} t^{\frac{1}{2}} + \omega_3(t)$$

бу ерда

$$L_3(v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T v(\tau) d\tau \int_0^t (t - \tau_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot [E'(|\tau_1 - \tau|) - E'(\tau)] d\tau_1$$

$$\omega_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{2}} [\omega'(\tau) - \omega'(0)] d\tau.$$

(*) формулани кўллаб (2.24) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\begin{aligned} v(t) + L_3(v, t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{L_3(v, \tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)} + \\ + \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} L'(v, 0) \Lambda_1(t) = \omega_3(t) + \\ + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{\omega_3(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)} + \frac{2}{\pi} \omega(0) \Lambda_1(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} v(t) + \int_0^T v(\tau) k^{(1)}(t, \tau) d\tau + \frac{\sqrt{2}\Lambda_1(t)}{\pi} \cdot \\ \cdot \int_0^T v(t) E'(\tau) d\tau = \omega_3(t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{\omega_3(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)} + \\ + \frac{\sqrt{2}\Lambda_1(t)}{\pi} \omega(0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

бу ерда

$$k^{(1)}(t, \tau) = k(t, \tau) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{k(\tau, \tau) d\tau_1}{\Lambda_1(\tau_1)(\tau_1 - \tau)}$$

$$k(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T (t - \tau_1)^{-\frac{1}{2}} [E'(|\tau_1 - \tau|) + E'(\tau)] d\tau_1$$

Бу тенгламалар учун қуйидаги тенгликни текширамыз.

$$k^{(1)}(0, \tau) = k^{(1)}(T, \tau) = 0 \quad (2.27)$$

ҳақиқатдан ҳам

$$k^{(1)}(t, \tau) = k(t, \tau) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{k(\tau_1, \tau) - k(0, \tau) d\tau_1}{\Lambda_1(\tau_1)(\tau_1 - t)} +$$

$$\frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{k(0, \tau) d\tau_1}{\Lambda_1(\tau_1)(\tau_1 - t)} = [(t, \tau) - k(0, \tau)] +$$

$$\frac{\Lambda_1(t) \Gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)}{4\pi\sqrt{\pi T}} F\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{5}{4}; \frac{T-t}{T}\right) +$$

$$\frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{k(\tau_1, \tau) - k(0, \tau) d\tau_1}{\Lambda_1(\tau_1)(\tau_1 - t)} d\tau_1$$

бу ерда БИЗ (*) формулани ишлатдик. $k^{(1)}$ дан кўриниб турибдики $k^{(1)}(0, \tau) = 0$.

худди шундай $k^{(1)}(T, \tau) = 0$ ни ҳам кўрсатиш мумкин.

$$g(t) = \omega_3(t) + \frac{\Lambda_1(t)}{\pi} \int_0^T \frac{\omega_3(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau - t)}$$

(2.27) тенгликка ўхшаган ҳолда қуйидаги тенгликни ҳам исботлаш мумкин.

$$g(0) = g(T) = 0 \quad (2.28)$$

(2.27) ва (2.28) тенгликлар (2.26) тенгламанинг ихтиёрий ечими $t = 0$ ва $t = T$ да нолга айланади.

Энди (2.19) тенгликни қаноатлантирувчи шартни топамиз.

$$E'(|\tau_1 - \tau|) - E'(\tau) = \frac{E^{(3)}\tau_1^2}{2} + \int_0^{\tau} (\tau_1 - \tau_2)' E^{(1)}(\tau_2, \tau) d\tau_2$$

бу ерда

$$E^{(1)}(\tau_2, \tau) = E(|\tau_2 - \tau|) + E(\tau)$$

$k(t, \tau)$ ни қуйидагича ёзамиз.

$$k(t, \tau) = \frac{-E^{(3)}(\tau)}{2\pi\left(\frac{7}{2}\right)} t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{5}{2}} E^{(1)}(\tau_1, \tau) d\tau$$

$$v(t, \tau) = f^{(1)}(\tau) \cdot t'$$

$v(t, \tau)$ тенгликдаги $f(\tau)$ ни шундай танлаймизки, қуйидаги шартлар уни қаноатлантирсин.

$$D_t v(0, \tau) = 0.$$

$$D_t v(T, \tau) = \frac{1}{2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)} \int_0^T (\tau - \tau_1)^{-\frac{3}{2}} E^{(1)}(\tau_1, \tau) d\tau_1$$

$k(t, \tau)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$k(t, \tau) = \frac{-1E^{(3)}(\tau)}{2\pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)} t^{\frac{5}{2}} + v(t, \tau) + k^{(2)}(t, \tau)$$

бу ерда

$$k^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi \left(\frac{9}{2}\right)} \cdot \int_0^e (t - \tau_1)^{\frac{3}{2}} E^{(1)}(\tau_1, \tau) d\tau_1 - v(t, \tau)$$

$k^{(2)}(t, \tau)$ учун қуйидаги шартлар ўринли.

$$D_t k^{(2)}(t, \tau) \Big|_{t=0}^{t=T} = 0.$$

$k^{(2)}(t, \tau)$ ни $k^{(1)}(t, \tau)$ тенгликка этиб қўйиб ва (*) формулани ишлатиб қуйидагига эришамиз.

$$k^{(1)}(t, \tau) = k^{(2)}(t, \tau) + \Lambda_1(t) \cdot \left[k^{(3)}(t, \tau) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{k^{(2)}(\tau_1, \tau) d\tau_1}{\Lambda_1(\tau_1)(\tau_1 - t)} \right]$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
k^{(3)}(t, \tau) = & -\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)}{2\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{E^{(3)}(\tau)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\omega\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot \\
& \cdot T^2 \cdot F\left(-1; 1; \frac{5}{4}; \frac{T-t}{T}\right) - \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)}{\pi^2} f^{(2)}(\tau) T^{\frac{1}{2}} \cdot \\
& \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot F\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{5}{4}; \frac{T-t}{T}\right)
\end{aligned}$$

(2.26) тенгламанинг ўнг томонини бир неча алмаштириш бажариб, қуйидаги охирги натижага келамиз.

$$\begin{aligned}
& \omega_3(t) + \Lambda_1(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\omega_3(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau-t)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \omega'(0) \right\} = \\
& g_5(t) + \Lambda_1(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{g_5(\tau) d\tau}{\Lambda_1(\tau)(\tau-t)} + g_6(t) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \omega'(0) \right\}
\end{aligned}$$

бу ерда $g_5 \in H^{\beta/2}(0, T)$ ва

$$g_5(0) = g_5(T) = 0.$$

$$k^{(4)}(t, \tau) = [\Lambda_1(t)]^{-1} \cdot k^{(2)}(t, \tau)$$

$$g_7(t) = [\Lambda_1(t)]^{-1} g_5(t)$$

Бажарилган ҳамма ишлардан кейин (2.16) тенгламамиз қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$v(t) + \int_0^T k^{(5)}(t, \tau) v(\tau) d\tau = g_8(t). \quad (2.29)$$

Бу ерда

$$k^{(5)}(t, \tau) = k^{(2)}(t, \tau) + \Lambda_1(t) [k^{(3)}(t, \tau) -$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{k^{(4)}(\tau_1, \tau) d\tau}{\tau_1 - \tau} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} E'(\tau)]$$

$$g_8(t) = g_5(t) + \Lambda_1(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{g_7(\tau) d\tau}{\tau - t} + \right. \\ \left. + g_6(t) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \omega'(0) \right\}$$

$g_8 \in H^{1+\beta/2}(0, T)$ бўлгани учун (2.29) тенгламанинг ечими $H^{1+\beta/2}(0, T)$ синфига тегишли бўлади.

(2.29) Фредгольм тенгламаси бўлгани сабабли унинг ечими мавжуд бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши зарур ва етарли.

$$\int_0^T v(\tau) g_8(\tau) d\tau = 0. \quad (2.30)$$

(2.30) шартли умумий ҳолда $n(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ деб белгилаб оламиз.

Юқоридагилардан N φ_1 ва φ_2 га боғлиқ маълум интеграллар бўлади.

Бажарилган ишлар натижасида умумий ечимни топиш учун $N(\varphi_1, \varphi_2)$ га боғлиқ бўлган N топиладики, $H^{\beta/2}(0, T)$ синфида ечим мавжуд бўлиши учун ([1],[3])

$$N(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (2.31)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Худди шундай (2.5.2), (2.6.2), (2.7.2), (2.8.3), (2.8.4) масаланинг

$\vartheta_1(x, t) \in H^{4+\beta, 2+\beta/2}$ ечим мавжуд бўлиши учун

$$N_1(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (2.32)$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу ерда N_1 ҳам N га ўхшаш интегралдир.

Худди шундай (2.5.1), (2.6.1), (2.7.1), (2.8.1), (2.8.2) масалани

$u(x, t) \in H^{6+\beta, 3+\beta/2}$ ечими мавжуд бўлиши учун мос равишда.

$$N_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (2.33)$$

Тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли. Бу ерда N_2 ҳам N га ўхшаш интегралдир. Биз қуйидаги теоремани исботладик.

Теорема: (1)- (4) чегаравий масаланинг $H^{6+\beta, 3+\beta/2}(\Omega)$ функциялар синфида ечими мавжуд бўлиши учун (2.31), (2.32), (2.33) шартларининг бажарилиши зарур ва етарли.

Хотима

Хулоса қилиб айтадиган бўлсак мен ишлаган масала яъни йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун турли чегаравий масалала ХХ – асрда ўрганила бошланди. Одатда йўналиши ўзгарадиган каррали характеристикали параболик тенгламалар учун қўйиладиган чегаравий масалалар ҳамма вақт ҳам коррект қўйилган бўлмайди. Мен бу ишимда уч каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун йўлакда қўйилган иккинчи чегаравий масаланинг Гёлдер функциялар синфида ечимга эга бўлиши шартларини аниқладим.

Магистрлик диссертациясида долзарб чегаравий масала ўрганилган. охирги пайтда каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун иккинчи чегаравий масалалрни ўрганишга катта қизиқиш мавжуд.

Бундан ташқари менга қўйилган масала $(D_t - \alpha^2 \text{Sign} x D_{x_2})^3 U(x, t) = 0$ тенглама учун $\Omega = \{(x, t); 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$ соҳада қўйилган иккинчи чегаравий масалани

$H_{x \ t}^{6+\beta, 3+\frac{\beta}{2}}$ Гёлдер функциялар синфига тегишли бўлиш шартларини аниқладим. Учинчи тартибли каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун иккинчи чегаравий масаланинг корректлиги таъминловчи шартлар топилган. Олинган натижалар каррали бўлмаган йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун иккинчи чегаравий масаланинг корректлигини таъминловчи шартлари топилган. Олинган натижалар каррали бўлмаган йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун ҳозиргача олинган шартларга ўхшашлиги ва ечимнинг Гёлдер функциялар синфига тегишлилиги кўрсатилган. Юқори тартибли каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун шу усулни қўллаб, Гёлдер функциялар синфида ечими мавжуд бўлиши ва ягоналиги таъминловчи шартларни топиш мумкин.

Мен бу ишимда уч каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенглама $(D_t - \alpha^2 \text{Sign} x D_{x_2})^3 U(x, t) = 0$ учун $\Omega = \{(x, t); 0 < |x| < 1, 0 < t < T\}$

соҳада қўйилган иккинчи чегаравий масалани $H_{x\ t}^{6+\beta, 3+\frac{\beta}{2}}$ Гёльдер функциялар синфига тегишли бўлиш шартларини аниқладим. Учинчи тартибли каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун иккинчи чегаравий масалалнинг корректлигини таъминловчи шартлари топилган.

Олинган натижалар каррали бўлмаган йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун ҳозиргача олинган шартларга ўхшашлиги ва ечимнинг Гёльдер функциялар синфида тегишлилиги кўрсатилган. Юқори тартибли каррали характеристикали йўналиши ўзгарадиган параболик тенгламалар учун шу усулни қўллаб, Гёльдер функциялар синфида ечими мавжуд бўлиши ва ягоналиги таъминловчи шартларни топиш мумкин.

Бу ишимни бажариш давомида мен математик физика тенгламалари, дифференциал тенгламалар, сингуляр интеграл тенгламалар ва уларни ечиш усуллариини ўргандим.

Шунинг билан бирга бу усулларни математик физика тенгламаларига қўллашга эришдим.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ахмедов Х. Х. Об одной задаче неклассического уравнения четвертого порядка // Теория и методы решения не корректно поставленных задач и их приложения Новосибирск, 1983. – с. 244-247.
2. Ахмедов Х. Х. Разрешимость некоторых краевых задачах для прямо и обратно параболических уравнений. –Новосибирск. 1984.-30с.
3. Ахмедов Х. Х. О некоторых краевых задачах для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. 1988. – Вып.86: Фильтрация неоднородной жидкости.
4. Ахмедов Х. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Диссертация. Новосибирск 1989г.
5. Ахмедов Х. Х. Краевых задачи для уравнения параболического типа с кратными характеристиками. Матфиз. Владивосток. 1990г.
6. Ладыженская О. А. Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1967-736с.
7. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. – Новосибирск. 1978.-54с.
8. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. – Новосибирск, 1982 168с.
9. Терсенов С. А. разрешимость краевых задач для уравнения $U_t = U_{xx} \sin x$ в классах $H_{x,t}^{p,p/2}$. Новосибирск, - 1984. – 40с.
10. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, - 1985.-104с.
11. М. Салохитдинов. Математик физика тенгламалари. Тошкент «Узбекистон» 2002.

