ГЛАВА 1.
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СООТНОШЕНИЯ И ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЕВ И ОБОЛОЧЕК

1.1. Состояние вопроса. Обзор литературных источников

Современное состояние исследований, посвященных проблемам, затрагиваемым в монографии, связано с развитием новых технологий и техники, которые постоянно выдвигают перед исследователями новые теоретические и прикладные задачи механики контактного взаимодействия**.** В частности, к ним относятся задачи взаимодействия механических и температурных полей в конструкционных элементах типа цилиндрических оболочек, пластин и стержней. К таким можно отнести и задачи по расчету элементов инженерных конструкций на действие различных динамических нагрузок, вызванных источниками различной природы, в частности, действием акустических и нестационарных волн, распространяющихся в среде, окружающей рассматриваемый элемент или содержащейся (заполняющей) в его полости.

Далеки от решения задачи по совершенствованию моделей нестационарного деформирования материалов и конструкций из них с учетом различных физико-механических свойств материалов, влияния взаимодействующей сплошной среды, в частности, различных (температурных, электромагнитных и т.д.) полей. К этому же классу относятся и разработки методов исследования деформативных и прочностных характеристик материалов в рамках усовершенствованных моделей, ориентированных для работы в условиях контактного взаимодействия с физическим полем, окружающей или содержащейся средой при действии динамических внешних нагрузок.

Фундаментальные подходы в развитии математических моделей описания процессов нестационарного деформирования твердых тел принадлежат Ж.Д. Ахенбаху [142] ,В.З. Власову [25], А.Г. Горшкову [31, 32], Э.И. Григолюку [33, 34, 35], А.Н. Гузю [42, 43], А. Ляву [65], В. Новацкому [78], С.П. Тимошенко [97], Д.Б. Релею [89], и многим другим [2, 14, 15, 17, 26, 28, 48, 58, 68, 69, 83, 90, 107, 119, 156, 168, 172, 173, 181, 195].

Экспериментальные и теоретические исследования в области динамики элементов конструкций и строительных сооружений связаны с работами таких учёных, как В.В. Васильев [20], В.Г. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга [39], В.Д. Кубенко [60], А.А. Дудченко и С.А. Лурье [46], Г.И. Петрашень [84, 85], К.З. Галиев [28], И.Г. Филиппов [103-111] и других.

Последние десятилетия связаны с появлением новых материалов-полимерных, композитных, керамических и др., применяемых в современной технике, исследование которых привело к появлению тенденций к значительному увеличению параметров и свойств материалов, к которым прежде всего относится анизотропия, реология, температура, электроупругость и т.д., а также изменяемая геометрия исследуемого объекта. Поэтому исследования в таких областях как вязкоупругость, термодинамика, композитные материалы и электроупругость приобретают все возрастающее значение.

Математическая сложность волновых задач в механике деформируемого тела, исследуемых методами математической физики, обусловлена рядом причин, связанными со сложными свойствами материалов и геометрическими особенностями механической системы. Вопросы распространения волн в упругих и вязкоупругих средах изучались в работах А.Н. Гузь [42, 43], А.Г. Сагомоняна [90, 91], М.И. Собирова [94], И.Г. Филиппова и О.А. Егорычева [104], R.P. Darmond, W.G. Rouleau [165].

При изучении процессов колебания элементов конструкции и сооружений важным моментов является проблема учёта более сложных факторов, связанных с учетом анизотропии, вязкости и других характеристик материала, теория которых развивалась многими учеными и являлась предметом многих исследований. Фундаментальные результаты в этой области получены С.Б. Лехницким [62], Р. Кристенсеном [58, 59], С.М. Амбарцумяном [4], Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко [36], А.А. Дудченко и С.А. Лурье [46], А.К. Малместером, В.П. Тамужом и Г.А. Тетерсом [67], G. Ben [151, 152], Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova [201], Н.А. Шульга [204], K.R. Sivak [205], и многие другие [193, 207, 211, 215].

Проблемы нестационарного взаимодействия элементов инженерных конструкций в виде оболочек, пластин и стержней со сплошной средой, в частности, с идеальной жидкостью, исследованы многочисленными авторами и обобщены в большом количестве монографий. Сюда относятся работы А.Я. Сагомоняна, С.Л. Соболева, Б.А. Боровикова и других. Подробный анализ и исчерпывающий обзор работ, посвященных этой теме содержаться в обзорных статьях А.Г. Горшкова и его учеников.

При решении задач о динамическом взаимодействии деформируемых твердых тел, в частности, цилиндрических оболочек, со сплошной средой в качестве основных разрешающих уравнений для оболочки принимаются приближенные уравнения колебания. В подавляющем большинстве научных работ применяются уравнения колебания, основанные, на гипотезах, приводящих и существенным упрощениям в структурах уравнений движения, в частности, на гипотезах Кирхгоффа-Лява. Применяются также уточненные уравнения типа С.П. Тимошенко, которые в свою очередь также допускают те или иные гипотезы и предпосылки геометрического или физического характера. Поэтому, в зависимости от применяемой теории появились различные направления исследований, основанных на уточненных и классических теориях колебаний.

В работах И.Г. Филиппова и его учеников на основе трехмерной постановки задач линейной теории вязкоупругости выведены общие уравнения продольного и поперечного колебаний вязкоупругих цилиндрических оболочек, пластин и круглых стержней, а также уравнения колебания с учетом влияния окружающей среды и сил трения. Из общих уравнений, получены приближенные уравнения типа уравнений С.П. Тимошенко и другие, содержащие производные по координатам и времени более высокого порядка, на основе которых решены частные задачи о колебаниях стержней, пластин и оболочек.

Проблеме изучения динамического поведения цилиндрических оболочек и стержней переменной толщины при действии внешних нестационарных нагрузок на основе уравнений колебаний выведенных с помощью строгого математического аппарата посвящено небольшое количество работ [31, 33, 119].

Обзоры работ посвященных исследованиям динамического поведения цилиндрических оболочек и пластин переменной толщины с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига при внешних нестационарных нагрузках приведены в известных, цитированных выше монографиях Э.И. Григолюка, А.Г.

Горшкова, Я.М. Гринченко, А.Г. Василенко и в работе [119]. Кроме них можно указать на работы И. Г. Филиппова и В.Г. Чебана [108], где рассматривались нестационарные колебания кусочно-неоднородных вязкоупругих пластин и фундаментов переменной толщины.

За последние несколько десятилетий, в связи с появлением композиционных материалов, большой интерес представляют задачи о колебаниях трехслойных (многослойных) стержней и пластин. При этом общим для всех расчетных схем технической теории многослойных конструкций является учет влияния деформации поперечного сдвига заполнителя. Этот учет производится на основе различных допущений. Одной из расчетных схем приведения к двумерным уравнениям является допущение о линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине каждого слоя. Для жестких слоев учитывается гипотеза Кирхгоффа-Лява, для маложестких слоев учитывается отклонения сечения от нормали за счет сдвига. Другая схема вывода уравнений многослойных конструкций с учетом деформации сдвига основана на введении допущения о законе распределения касательных напряжений по толщине слоев.

Полученные при становлении, развитии и применении теории колебаний анизотропных слоёв, стержней и оболочек результаты фундаментального и прикладного характера весьма обширны и разнообразны. Они изложены в большом количестве публикаций, в том числе ряде обобщающих монографий и отражены в обзорах [33, 34, 35].

Учёт других факторов на процесс колебания элементов конструкций и сооружений в частности влияния температуры, можно найти в работах В. Новацкого [78], А.В. Лыкова [63], и других [5, 6, 64, 87, 140, 145, 191, 199].

Несмотря на большое количество исследований, и основополагающих работ остается значительный круг недостаточно исследованных вопросов, сохраняющих свою актуальность: создание точных и эффективных приближенных аналитических и численных методов изучения влияния взаимодействия идеальных и вязких жидкостей на напряженно - деформированное состояние элементов конструкций с учётом многообразия граничных условий и сложности внешнего воздействия. Исходя из сказанного выше, можно констатировать, что теории колебаний упругих и вязкоупругих плоских, стержневых и оболочечных элементов требуют дальнейшего обоснования и развития.

В настоящей монографии на основе рассмотрения плоских, стержневых и оболочечных элементов как трехмерных деформируемых тел строится новые приближенные теории колебаний этих элементов, формулируются граничные и начальные условия без привлечения каких либо гипотез и предположений механического и геометрического характера, с учетом ряда усложняющих факторов, перечисленных выше. Рассматривается широкий класс краевых задач колебания, имеющих прикладной интерес. Развиваются математические методы построения решений и приводятся аналитические и числовые решения исследуемых задач.

1.2. Постановки краевых задач для цилиндрических слоёв и оболочек с учётом температуры, переменности толщины и начальных перемещений

К рассматриваемым в монографии задачам изучения динамических процессов в цилиндрических структурах относятся задачи о нестационарных крутильных, продольно-радиальных и поперечных колебаниях круговых цилиндрических слоёв и оболочек, с учётом температуры, переменности толщины, предварительной напряженности, анизотропных, электроупругих и вязкоупругих свойств материала слоя. При выводе уравнений колебания считается, что цилиндрический слой в точной постановке описывается трехмерными уравнениями линейной теории вязкоупругости.

В цилиндрической системе координат рассматривается круговой цилиндрический слой с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами. Компоненты вектора малых вязкоупругих смещений точек слоя обозначаются через $U_i(r,\theta,z,t),\ (i=r,\theta,z)$. Компоненты тензоров напряжений и деформаций обозначаются, соответственно, $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(r,\theta,z,t)$, и $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(r,\theta,z,t)$, $(i,j=r,\theta,z)$.

В цилиндрической системе координат (r,θ,z) уравнения движения точек цилиндрического слоя при отсутствии объемных сил используются в виде [119]:

$$L\left(\Delta\Phi\right) = \rho\ddot{\Phi}, \quad L = L_1 + 2M, \quad M\left(\Delta\vec{\Psi}\right) = \rho\ddot{\vec{\psi}}, \qquad (1.1)$$

где ρ – плотность материала слоя, Δ – трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При этом потенциалы продольных Φ и поперечных $\vec{\Psi}$ волн введены по формуле [60]:

$$\vec{U} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\left[\vec{e}_z\Psi_1 + \operatorname{rot}(\vec{e}_z\Psi_2)\right], \qquad (1.2)$$

Условия соленоидальности $\operatorname{div}\vec{\Psi} = 0$ векторных полей $\vec{\Psi}$ выполняются автоматически, когда они представлены в виде [60]:

$$\vec{\Psi} = \vec{e}_z\Psi_1 + \operatorname{rot}\left(\vec{e}_z\Psi_2\right),$$

где $\vec{e}_z$ – единичный вектор по оси z.

При представлении векторов смещений $\vec{U}$ в виде (1.2) их компоненты определяются формулами

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[\Phi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi_2\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1,$$

$$U_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi - \frac{\partial}{\partial r}\Psi_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta}\Psi_2,$$

$$U_z = \frac{\partial}{\partial z}\Phi - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Psi_2, \qquad (1.3)$$

а деформации равны

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1 + \frac{\partial^3}{\partial r^2\partial z}\Psi_2,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\Psi_1 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_2,\right.$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_2,$$

$$\varepsilon_{rz} = 2\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\Psi_1 + \\ + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Psi_2, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Phi + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\Psi_1 + \\ + \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Psi_2,$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi - \frac{\partial}{\partial r}\Psi_1\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_2,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \Delta\Phi.$$

В случае осесимметричных колебаний формулы (1.3) и (1.4) принимают вид

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi_2\right), \qquad U_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\Psi_1, \\ U_z = \frac{\partial}{\partial z}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_2 \tag{1.5}$$

и

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi_2\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi_2\right),$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_2\right],$$

$$\varepsilon_{rz} = 2\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\Phi + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\Psi_2,$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_1, \quad \varepsilon_{z\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\Psi_1. \quad (1.6)$$

Рассмотрим следующие варианты постановки краевых задач динамики круговых цилиндрических вязкоупругих слоёв, с учётом температуры, переменности толщины и начальных перемещений.

1.2.1. Термовязкоупругий цилиндрический слой

Влияние температурных напряжений оказывается существенным во многих прикладных задачах по расчету колебаний оболочек, пластин и стержней при зависимости напряженно-деформированного состояния системы от температуры. Изменениями температуры, появляющимися при деформации самого тела, будем пренебрегать, т.е. постановку задачи осуществим в рамках несвязной теории.

В цилиндрической системе координат (r,θ,z) рассматривается термовязкоупругий, однородный, изотропный круговой цилиндрический слой с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами. Для вязкоупругого и термически изотропного материала при повышении температуры на $\Delta T = T - T_0$ изменения длин по всем направлениям равны, т.е. появляются только удлинения, а сдвиги отсутствуют. Поэтому, связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также температурой принимаются в виде [63,79,116]

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = L_1(\varepsilon) + 2M\left(\varepsilon_{jj}\right) - \alpha_0 N(T), \\ &\sigma_{ij} = M\left(\varepsilon_{jj}\right) \quad \left(i \neq j; \quad i, j = r, \theta, z\right), \end{aligned} \qquad (1.7)$$

где ε - объемные деформации; L_1, M - вязкоупругие операторы $\left(L_1, M\right)\varsigma = \left(\lambda, \mu\right)\left[\varsigma(t) - \int\limits_0^t \left[f_1(t-\tau), f_2(t-\tau)\right]\varsigma(\tau)d\tau\right]$; λ, μ – коэффициенты Ламэ; $f_1(t), f_2(t)$ – ядра вязкоупругих операторов, α_0 – коэффициент теплового расширения тела; $N = L_1 + \dfrac{2}{3}M$. Предполагается, что операторы L_1, M – обратимы; ядра $f_1(t)$, $f_2(t)$ – произвольные.

Движение точек цилиндрического слоя как трехмерного термовязкоупругого тела в цилиндрической системе координат (r,θ,z) при малых деформациях описывается уравнениями [108]

$$\begin{gathered}\left(L_1+2M\right)\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{U}\right)-M\left[\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{U}\right)\right]=\\=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{U}+\alpha_0 N\left(\operatorname{grad}T\right),\end{gathered}\tag{1.8}$$

где $\vec{U}$ – вектор перемещения.

Температура T в случае несвязной теории термоупругости и конечности скорости распространения тепла удовлетворяет уравнению [63]

$$\Delta T-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0,\tag{1.9}$$

где Δ – трехмерный оператор Лапласа:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad C_0^2=\frac{k_0}{\rho C_p};\quad C^2=\frac{C_0^2}{\tau_0};$$

C – скорость распространения температуры; k_0 – коэффициент теплопроводности; c_p – теплоемкость при постоянном давлении; τ_0 – время релаксации тепловых потоков; C_0 – коэффициент температуропроводности.

Представляя вектор перемещения в виде [60]:

$$\vec{U}=\operatorname{grad}\,\Phi+\operatorname{rot}\left[\vec{e}_z\Psi_1+\operatorname{rot}(\vec{e}_z\Psi_2)\right]\tag{1.10}$$

и подставляя в уравнение (1.8), для потенциалов продольных Φ и поперечных Ψ_i волн, получаем уравнения

$$L(\Delta\Phi)=\rho\ddot{\Phi}+\alpha_0 N(T);\quad M(\Delta\Psi_i)=\rho\ddot{\Psi}_i,\quad i=1,2.\tag{1.11}$$

Колебания цилиндрического слоя возбуждаются внешними усилиями, когда на его поверхностях при $r=r_i$ $(i=1,2)$ заданы напряжения:

а) продольно – радиальные колебания

$$\sigma_{rr} = f_r^{(i)}(z,t), \qquad \sigma_{rz} = f_{rz}^{(i)}(z,t) \tag{1.12}$$

б) поперечные колебания

$$\sigma_{rr} = F_i(z,\theta,t), \qquad \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0. \tag{1.13}$$

условия для температурного режима на поверхностях слоя имеют вид

$$T = G_0^{(i)}(z,t), \quad r = r_i \quad (i = 1{,}2) \tag{1.14}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} T = G_1^{(i)}(z,t), \qquad r = r_i \quad (i = 1{,}2) \tag{1.15}$$

или

$$H\frac{\partial T}{\partial r} = T - G_2^{(i)}(z,t), \quad r = r_i \quad (i = 1{,}2) \tag{1.16}$$

где $H = k_0 / h_0$; h_0 - коэффициент теплообмена или внешняя теплопроводность материала.

Начальные условия предполагают нулевыми, в том числе и для температуры T.

Для нахождения общего решения уравнений для Φ и T исключим из уравнений (1.9) и (1.11) температуру T, т.е. из (1.11) имеем

$$T = (\alpha_0 N)^{-1}\left[L(\Delta\Phi) - \rho\ddot{\Phi}\right] \tag{1.17}$$

подставляя которое в (1.9), получим

$$L(\Delta^2\Phi) - \left[L\left(\frac{1}{C_0^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) + \rho\frac{d^2}{dt^2}\right]\Delta\Phi +$$

$$+\rho\left(\frac{1}{C_0^2}\frac{d^3}{dt^3} + \frac{1}{C^2}\frac{d^4}{dt^4}\right)\Phi = 0 \tag{1.18}$$

Таким образом, для решения задачи о продольно – радиальных колебаниях кругового цилиндрического вязкоупругого слоя с учётом температуры имеем уравнения (1.18) и

$$M(\Delta\Psi_2) = \rho\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2} \tag{1.19}$$

а также граничные условия (1.12), одно из условий (1.14) – (1.16), и нулевые начальные условия.

Для решения задачи о поперечных колебаниях такого слоя имеем уравнения (1.17) – (1.19) и уравнение

$$M(\Delta\Psi_1) = \rho\ddot{\Psi}_1, \tag{1.20}$$

граничные условия (1.13), одно из условий для температуры (1.14) – (1.16) и нулевые начальные условия.

1.2.2. Вязкоупругая цилиндрическая оболочка переменой толщины

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, толщина которой изменяется в зависимости от продольной координаты, т.е. внутренний r_1 и внешний r_2 радиусы оболочки являются заданными функциями координаты z: $r_1 = F_1(z),\quad r_2 = F_2(z)$. При этом функции $F_i(z)$ предполагаются дифференцируемыми необходимое число раз. Кроме того, очевидно, что функции $F_i(z)$ должны удовлетворять неравенству

$$\max F_1(z) < \min F_2(z)\,.$$

Зависимости между компонентами тензоров напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r,\theta,z,t),\ (i,j=r,\theta,z)$ и деформаций $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(r,\theta,z,t)$, $(i,j=r,\theta,z)$ в точках цилиндрического слоя считаются заданными в виде соотношений Больцмана-Вольтерра [119]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= M\,(\varepsilon_{ij}) \quad i \neq j, \\ \sigma_{ii} &= L_1(\varepsilon\,) + 2M\,(\varepsilon_{ii}), \end{aligned} \tag{1.21}$$

где ε – объемная деформация; L_1, M – вязкоупругие операторы

$$(L_1, M\,)\varsigma = (\lambda\,,\mu\,)\left[\varsigma(t) - \int_0^t [\,f_1(t-\tau),\;\; f_2(t-\tau)]\varsigma(\tau)d\tau\right]; \qquad \lambda\,,\,\mu\,-$$

коэффициенты Ламэ; $f_1(t),\;\; f_2(t)$ – ядра вязкоупругих операторов. Предполагается, что операторы L_1, M – обратимы; ядра $f_1(t),\;\; f_2(t)$ – произвольные.

Нормальные и касательные напряжения на поверхностях оболочки в ортогональной системе координат (n, s_1, s_2) выразятся через напряжения в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в следующем виде:

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{\Delta_0}\left\{\sigma_{rr} + \left[F_i^{'}(z)\right]^2 \sigma_{zz} - 2F_i^{'}(z)\sigma_{rz}\right\},$$

$$\sigma_{ns_1} = \frac{1}{\Delta_0}\left[\sigma_{r\theta} - F_i^{'}(z)\sigma_{z\theta}\right], \tag{1.22}$$

$$\sigma_{ns_2} = \frac{1}{\Delta_0}\left\{F_i^{'}(z)(\sigma_{rr} - \sigma_{zz}) + \left[1 - F_i^{'2}(z)\right]\sigma_{rz}\right\},$$

где $\Delta_0 = 1 + F_i^{'2}(z)$; n – нормаль к поверхности оболочки; s_1 и s_2 – ортогональные к нормали координаты в касательной плоскости, проведенной к поверхности оболочки в той или иной точке. При этом s_1 направлена в окружном, а s_2 в продольном направлениях.

Приведем постановки задач по всем трем видам колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки переменной толщины. Начальные условия во всех задачах примем нулевыми.

а) Крутильные колебания оболочки возбуждаются напряжениями на поверхностях $r = F_i(z)$:

$$\sigma_{r\theta} - F_i^{'}(z)\sigma_{z\theta} = \Delta_0 f_{ns_1}^{(i)}(z,t), \quad (i = 1, 2), \tag{1.23}$$

а движение оболочки описывается уравнением

$$M\left(\Delta\Psi_1\right) = \rho\ddot{\Psi}_1. \tag{1.24}$$

б) Продольно-радиальные колебания цилиндрической оболочки возбуждаются напряжениями на ее внутренней и внешней поверхностях при $r = F_i(z)$ $(i = 1,2)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} + \left[F_i^{'}(z)\right]^2\sigma_{zz} - 2F_i^{'}(z)\sigma_{rz} = \Delta_0 f_n^{(i)}(z,t), \\ &F_i^{'}(z)\left(\sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right) + \left[1 - F_i^{'2}(z)\right]\sigma_{rz} = \Delta_0 f_{ns_2}^{(i)}(z,t). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Движение точек оболочки описывается системой уравнений

$$L(\Delta\Phi) = \rho\ddot{\Phi};\ M\left(\Delta\Psi_2\right) = \rho\ddot{\Psi}_2. \tag{1.26}$$

в) Поперечные колебания оболочки возбуждаются условиями на ее поверхностях $r = F_i(z)$ $(i = 1,2)$:

$$\sigma_{nn} = f_n^{(i)}(z,t), \qquad \sigma_{ns_1} = \sigma_{ns_2} = 0. \tag{1.27}$$

Движение оболочки описывается системой уравнений:

$$L(\Delta\Phi) = \rho\ddot{\Phi}; \;\; M\left(\Delta\Psi_1\right) = \ddot{\Psi}_1; \quad M\left(\Delta\ddot{\Psi}_2\right) = \rho\ddot{\Psi}_2. \tag{1.28}$$

1.2.3. Предварительно-напряженный цилиндрический слой

а) Зависимости между напряжениями и деформациями для изотропного предварительно-напряженного материала.

Предположим, что материал рассматриваемого цилиндрического слоя предварительно-напряжен, при этом зависимости между напряжениями и деформациями линейны и, кроме того, возмущенное состояние материала по отношению к однородному напряженному состоянию линейно геометрически и физически. Если материал слоя обладает вязкими свойствами, то эти зависимости имеют вид

$$\sigma_{ij} = M(\varepsilon_{ij}); \;\; \sigma_{ij} = L(\varepsilon) + 2M(\varepsilon_{ii}); \qquad i \neq j, \tag{1.29}$$

где ε – объёмное расширение; L, M – вязкоупругие операторы, имеющие вид:

$$(L,M)\zeta = (\lambda,\mu)\left[\zeta(t) - \int_0^t \left[f_1(t-\tau), f_2(t-\tau)\right]\zeta(\tau)d\tau\right],$$

λ, μ – коэффициенты Ламэ; $f_1(t)$, $f_2(t)$ – произвольные ядра вязкоупругих операторов. Предполагается, что операторы L, M обратимы.

Запишем соотношения (1.29) в цилиндрических координатах, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = L(\varepsilon) + 2(\varepsilon_{rr}); && \sigma_{r\theta} = M(\varepsilon_{r\theta});\\
&\sigma_{zz} = L(\varepsilon) + 2M(\varepsilon_{zz}); && \sigma_{z\theta} = M(\varepsilon_{z\theta});\\
&\sigma_{\theta\theta} = L(\varepsilon) + 2M(\varepsilon_{\theta\theta}); && \sigma_{rz} = M(\varepsilon_{rz});\\
&\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Линейные зависимости деформаций от перемещений без учёта начальных перемещений имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}; \qquad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta}; \tag{1.31}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}.$$

Допустим, что предварительно напряженное состояние однородно. Тогда, в общем случае, когда толщина слоя переменна начальные перемещения имеют вид

$$U_z^{(0)} = a_0 z + b\theta + c_0 r;$$

$$U_\theta^{(0)} = a_1 z + b_1\theta + c_1 r;$$

$$U_r^{(0)} = a_2 z + b_2\theta + c_2 r\,. \tag{1.32}$$

Отметим некоторые частные случаи, когда зависимости (1.32) принимают более простой вид:

Случай 1^0**.** Допустим, что толщина рассматриваемого цилиндрического слоя постоянна. Тогда в выражениях (1.32) $a_2 = b_2 = c_0 = c_1 = 0$, начальные перемещения равны

$$U_z^{(0)} = a_0 z + b_0\theta; \quad U_\theta^{(0)} = a_1 z + b_1\theta; \quad U_r^{(0)} = c_2 r, \tag{1.33}$$

где a_i, b_i, c_2 – в общем случае постоянны и не малы, при этом c_2 не независима, а является функцией a_i, b_i.

Обозначим через U_z, U_r, U_θ соответственно, возмущенные продольное, радиальное и крутильное перемещения, и считать их малыми, тогда перемещения с учётом начальных перемещений (1.31) примут вид

$$\overline{U}_z = (1 + a_0)U_z + a_1 U_\theta;$$

$$\overline{U}_\theta = (1 + b_1)U_\theta + b_0 U_z; \tag{1.34}$$

$$\overline{U}_r = (1 + c_2)U_r\,,$$

и в дальнейшем для удобства записи опустим «чёрточки» над перемещениями.

Подставив последние соотношения в (1.31), получим

$$\varepsilon_{rr} = (1+c_2)\frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{zz} = (1+a_0)\frac{\partial U_z}{\partial z} + a_1\frac{\partial U_\theta}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left((1+b_1)\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + b_0\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}(1+c_2)U_r;$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r}\left[(1+a_0)\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + a_1\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right] + (1+b_1)\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + b_0\frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}(1+c_2)\frac{\partial U_r}{\partial \theta} + (1+b_1)\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + b_0\frac{\partial U_z}{\partial r} - \frac{1}{r}((1+b_1)U_\theta + b_0 U_z);$$

$$\varepsilon_{rz} = (1+a_0)\frac{\partial U_z}{\partial r} + a_1\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + (1+c_2)\frac{\partial U_r}{\partial z}; \tag{1.35}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta} = (1+c_2)\frac{\partial U_r}{\partial r} + (1+a_0)\frac{\partial U_z}{\partial z} + a_1 U_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left((1+b_1)\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + b_0\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}(1+c_2)U_r + a_1\frac{\partial U_\theta}{\partial z}.$$

Подставив последние выражения в (1.30) получим зависимости напряжений от малых возмущенных и однородных конечных деформаций, которые примут вид

$$\sigma_{rr} = (1+c_2)(L+2M)\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0)L\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + a_1 L(U_\theta) + a_1 L\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{1}{r}\left[(1+b_1)L\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + b_0 L\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + (1+c_2)L(U_r)\right];$$

$$\sigma_{zz} = (1+c_2)L\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0)(L+2M)\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + a_1(L+2M)U_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left[(1+b_1)L\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + b_0 L\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + (1+c_2)L(U_r)\right] + a_1 L\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1+c_2)L\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0)L\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + a_1 L(U_\theta) + \frac{1+b_1}{r}(L+2M)\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) +$$

$$+\frac{b_0}{r}(2M+L)\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + \frac{1+c_2}{r}(L+2M)(U_r) + a_1 L\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right); \tag{1.36}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1+c_2}{r} M\left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right) + (1+b_1) M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right) + b_0 M\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) - \frac{1+b_1}{r} M(U_\theta) - \frac{b_0}{r} M(U_z);$$

$$\sigma_{rz} = (1+a_0) M\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) + a_1 M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right) + (1+c_2) M\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{z\theta} = (1+b_1) M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right) + \frac{1+a_0}{r} M\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) + \frac{a_1}{r} M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right).$$

Аналогично, плотность предварительно напряженного материала слоя отличается от исходного материала, т.е. его плотность ρ равна

$$\rho_1 = \frac{\rho}{(1+a_0)(1+c_2)^2}\,.$$

Случай $1^0{}_a$. При продольно-радиальных колебаниях $U_\theta = 0, \quad b_0 = b_1 = 0$, перемещения с учётом начальных перемещений (1.2.34) примут вид

$$\overline{U}_z = (1+a_0) U_z; \qquad \overline{U}_r = (1+c_2) U_r, \tag{1.37}$$

а зависимости напряжений от деформаций

$$\sigma_{rr} = (1+c_2)(L+2M)\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0) L\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}(1+c_2) L(U_r);$$

$$\sigma_{zz} = (1+c_2) L\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0)(L+2M)\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}(1+c_2) L(U_r);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1+c_2) L\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + (1+a_0) L\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}(L+2M)(U_r); \tag{1.38}$$

$$\sigma_{rz} = (1+a_0) M\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) + (1+c_2) M\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}\right).$$

Случай $1^0{}_b$. При крутильных колебаниях $U_z = U_r = 0$, $a_1 = 0$. Перемещение с учётом начальных перемещений имеют вид

$$\overline{U}_\theta = (1+b_1) U_\theta\,, \tag{1.39}$$

а зависимости $\sigma \div \varepsilon$ с учётом начальных перемещений примут следующий вид

$$\sigma_{r\theta} = (1+b_1)M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right) - \frac{1+b_1}{r}M(U_\theta);\ \sigma_{z\theta} = (1+b_1)M\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right). \quad (1.40)$$

b) Зависимости между напряжениями и деформациями для трансверсально-изотропного материала, с учетом предварительной напряженности.

Допустим, что материал слоя однородный, трансверсально-изотропный, вязкоупругий и предварительно напряжен, причем предварительно-напряженное состояние однородно. При этом, как и в предыдущем пункте, зависимости между напряжениями и деформациями линейны, а возмущённое состояние материала слоя по отношению к однородному напряженному состоянию линейно геометрически и физически.

Зависимости между напряжениями и деформациями для вязкоупругого материала имеют вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = A_{11}(\varepsilon_{rr}) + A_{12}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz}); \qquad \sigma_{z\theta} = A_{44}(\varepsilon_{z\theta});\\
\sigma_{\theta\theta} = A_{12}(\varepsilon_{rr}) + A_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz}); \qquad \sigma_{rz} = A_{44}(\varepsilon_{rz}); \qquad (1.41)\\
\sigma_{zz} = A_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + A_{33}(\varepsilon_{zz}); \qquad \sigma_{r\theta} = ((A_{11} - A_{12})(\varepsilon_{r\theta}))/2,
\end{gathered}$$

где A_{ij} – вязкоупругие операторы вида

$$A_{ij}(\zeta) = a_{ij}\left[\zeta(t) - \int_0^t f_{ij}(t-\xi)\xi(\xi)d\xi\right];$$

$f_{ij}(t)$ – ядра вязкоупругих операторов, удовлетворяющих условиям интегрируемости функции времени t; $a_{ij} = \text{const}$ – упругие постоянные материала, которые имеют вид

$$a_{11} = \frac{E^{'}E - (\nu^{'}E)^2}{(1-\nu^2)E^{'} - 2(1+\nu)\nu^{'}E0}; \qquad a_{44} = \mu^{'};$$

$$a_{12} = \frac{\nu E^{'}E - (\nu^{'}E)^2}{(1-\nu^2)E^{'} - 2(1+\nu)\nu^{'}E}; \qquad a_{11} - a_{12} = 2\mu; \qquad (1.42)$$

$$a_{13} = \frac{\nu' E E'}{(1-\nu)E' - 2\nu' E}; \qquad a_{33} = \frac{(1-\nu)E'^2}{(1-\nu)E' - 2\nu' E};$$

E, E' – модули Юнга для растяжения и сжатия в плоскости изотропии и в направлении перпендикулярной к ней; ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν' – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости; $\mu = (E/2)(1-\nu)^{-1}$; μ' – модули сдвига для плоскостей изотропии и перпендикулярных к ним.

В случае, когда толщина рассматриваемого цилиндрического слоя постоянна, начальные перемещения имеют вид (1.33). В этом случае подставив значения выражений (1.35) в (1.31) получим

$$\sigma_{rr} = (1+c_2)A_{11}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left\{(1+b_1)A_{12}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + b_0 A_{12}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + (1+c_2)A_{12}(U_r)\right\} +$$

$$+(1+a_0)A_{13}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + a_1 A_{13}(U_\theta);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1+c_2)A_{12}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left[(1+b_1)A_{11}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + b_0 A_{11}\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) +\right.$$

$$\left. + (1+c_2)A_{11}(U_r) - \right] + a_1 A_{13}(U_\theta);$$

$$\sigma_{zz} = (1+c_2)A_{13}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left\{(1+b_1)A_{13}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right) + b_0 A_{13}\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta}\right) +\right.$$

$$\left. + (1`+c_2)A_{13}(U_r)\right\} + (1+a_0)A_{33}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + a_1 A_{33}(U_\theta); \quad (1.43)$$

$$\sigma_{z\theta} = (1+b_1)A_{44}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\left[(1+a_0)A_{44}\left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + a_1\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\right)\right];$$

$$\sigma_{rz} = (1+a_0)A_{44}\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) + a_1 A_{44}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right) + (1+c_2)A_{44}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2r}(1+c_2)(A_{11} - A_{12})\left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2}(1+b_1)(A_{11} - A_{12})\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{b_0}{2}(A_{11}-A_{12})\frac{\partial U_z}{\partial r}-\frac{1+b_1}{2r}(A_{11}-A_{12})U_\theta-\frac{b_0}{2r}(A_{11}-A_{12})U_z.$$

При продольно-радиальных колебаниях, зависимости напряжений от малых возмущенных и однородных конечных деформаций примут следующий вид

$$\sigma_{rr}=(1+c_2)A_{11}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}(1+c_2)A_{12}(U_r)+(1+a_0)A_{13}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right);$$
$$\sigma_{\theta\theta}=(1+c_2)A_{12}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}(1+c_2)A_{11}(U_r)+(1+a_0)A_{13}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right);$$
$$\sigma_{zz}=(1+c_2)A_{13}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}(1+c_2)A_{13}(U_r)+(1+a_0)A_{33}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right); \tag{1.44}$$
$$\sigma_{zr}=(1+a_0)A_{44}\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)+(1+c_2)A_{44}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}\right).$$

При крутильных колебаниях предварительно-напряжен-ного кругового цилиндрического слоя постоянной толщины зависимости напряжений от деформаций примут вид

$$\sigma_{z\theta}=(1+b_1)A_{44}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right);$$
$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{2}(1+b_1)(A_{11}-A_{12})\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right)-\frac{1+b_1}{2r}(A_{11}-A_{12})U_\theta. \tag{1.45}$$

Как видно из зависимостей (1.43), (1.44) и (1.45) при однородно-напряженном состоянии для возмущенных деформаций эти зависимости соответствуют анизотропному материалу с более сложной анизотропией, чем трансверсальная изотропия.

с) Зависимости между напряжениями и деформациями для ортотропного материала, с учетом начальных напряжений.

Допустим, что материал слоя ортотропен и вязкоупругий, в этом случае эти зависимости имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=A_{11}(\varepsilon_{rr})+A_{12}(\varepsilon_{\theta\theta})+A_{13}(\varepsilon_{zz}), & \sigma_{z\theta}&=A_{44}(\varepsilon_{\theta z}),\\ \sigma_{\theta\theta}&=A_{12}(\varepsilon_{rr})+A_{22}(\varepsilon_{\theta\theta})+A_{23}(\varepsilon_{zz}), & \sigma_{rz}&=A_{55}(\varepsilon_{rz}),\\ \sigma_{zz}&=A_{13}(\varepsilon_{rr})+A_{22}(\varepsilon_{\theta\theta})+A_{33}(\varepsilon_{zz}), & \sigma_{r\theta}&=A_{66}(\varepsilon_{r\theta}),\end{aligned} \tag{1.46}$$

при этом $A_{ij}(\zeta)=a_{ij}\left[\zeta(t)-\int\limits_0^t f_{ij}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi\right]$, где $a_{ij}=\text{const}$, имеющие следующие значения

$$a_{11}=\frac{1}{E_1};\quad a_{12}=-\frac{\nu_{21}}{E_2};\quad a_{13}=-\frac{\nu_{31}}{E_3};\quad a_{33}=\frac{1}{E_3};\quad a_{22}=\frac{1}{E_2};$$

$$a_{23}=-\frac{\nu_{32}}{E_1};\quad a_{44}=\frac{1}{G_{23}};\quad a_{55}=\frac{1}{G_{13}};\quad a_{66}=\frac{1}{G_{12}}.$$

d) Постановка задач для предварительно-напряжен-ного кругового вязкоупругого цилиндрического слоя.

Далее приведем постановки задач по всем трем видам колебаний кругового цилиндрического вязкоупругого изотропного и трансверсально-изотропного слоя, с учётом начальных перемещений.

а) Крутильные колебания предварительно-напряженного кругового цилиндрического слоя возбуждаются напряжениями на его поверхностях

$$\sigma_{r\theta}=f_{r\theta}^{(i)}(z,t),\qquad r=r_i\quad(i=1,2),\tag{1.47}$$

движение слоя при отсутствии объёмных сил описывается уравнением

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}=\rho\frac{\partial^2U_\theta}{\partial t^2}.\tag{1.48}$$

Начальные условия нулевые.

б) Продольно-радиальные колебания цилиндрического слоя возбуждаются усилиями, действующими на граничных поверхностях $r=r_i$ $(i=1,2)$:

$$\sigma_{rr}=f_{rr}^{(i)}(z,t),\quad \sigma_{rz}=f_{rz}^{(i)}(z,t),\tag{1.49}$$

а уравнения движения при продольно-радиальных колебаниях примут вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2U_r}{\partial t^2},\\&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2U_z}{\partial t^2}.\end{aligned}\tag{1.50}$$

Начальные условия нулевые.

в) Поперечные колебания слоя возбуждаются условиями на его поверхностях $r = r_i \quad (i = 1{,}2)$

$$\sigma_{rr} = f_{rr}^{(i)}(z,t), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad r = r_i \quad (i = 1{,}2)\,. \tag{1.51}$$

Начальные условия нулевые. Уравнения движения точек слоя при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}.
\end{gathered} \tag{1.52}$$

1.3. Метод вывода уравнений колебания

Метод выводимых в данной работе уравнений колебания цилиндрического слоя и оболочки основан на использовании точных решений трехмерных динамических задач линейной теории вязкоупругости с последующим разложением, составляющих тензора напряжений и вектора смещений в степенные ряды по радиальной координате, а также на применении преобразований Фурье по координате и Лапласа по времени.

Для вывода уравнений колебания внешние воздействующие функции $f_r^{(i)}(z,t),\ f_{rz}^{(i)}(z,t),\ f_{r\theta}^{(i)}(z,\theta)$ в приведенных в параграфе 1.2 при граничных условиях рассматриваются в классе функций, представимых в виде

$$\begin{gathered}
\left[f_r^{(i)}(z,t),\ f_{r\theta}^{(i)}(z,t)\right] = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} \left[f_r^{(i0)}, f_{r\theta}^{(i0)}\right] e^{pt}\,dp, \\
f_{rz}^{(i)}(z,t) = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kz \\ \sin kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} f_{rz}^{(i0)} e^{pt}\,dp,
\end{gathered} \tag{1.53}$$

где (ℓ) - разомкнутый контур [83] в плоскости p, прилегающий справа к участку $(-i\omega_0,\quad i\omega_0)$ мнимой оси. Кроме того, функции

$f_r^{(i)}$, $f_{rz}^{(i)}$, $f_{r\theta}^{(i)}$ $(i=1,2)$ предполагаются такими, что $f_r^{(i0)}, f_{rz}^{(i0)}, f_{r\theta}^{(i0)}$ $(i=1,2)$ пренебрежимо малы вне области $k \le k_0$, $|\mathrm{Im}\, p| \le \omega_0$, что необходимо при выводе уравнений колебания оболочки.

Аналогично потенциалы Φ, Ψ_1, Ψ_2 ищутся также в виде

$$\begin{gathered}
[\Phi\ ,\Psi_1] = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz\\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} \left[\Phi^{(0)}, \Psi_1^{(0)}\right] e^{pt} dp,\\
\Psi_2 = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kz\\ \sin kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} \Psi_2^{(i)} e^{pt} dp.
\end{gathered} \tag{1.54}$$

Форма представления (1.54) при указанных выше предположениях позволяет строго дифференцировать функции Φ, Ψ_1, Ψ_2 по координатам *r*, *z* и по времени *t* под знаком интеграла.

Рассмотрим вначале осесимметричные колебания цилиндрического слоя; в этом случае величины напряжений и смещений не зависят от угла θ и для них справедливы формулы (1.5), (1.7), а оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Подставляя (1.54) в уравнения движения (1.1), для $\Phi^{(0)}$ и $\psi_i^{(0)}$ получаем уравнения Бесселя

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)\Phi^{(0)} &= 0,\\
\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \beta^2\right)\psi_i^{(0)} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (i=1,2) \tag{1.55}$$

где

$$\alpha^2 = k^2 + \rho\, p^2 L_0^{-1};\ \beta^2 = k^2 + \rho\ p^2 \mathrm{M}_0^{-1};$$

$$\mathrm{M}_0 = \mu\ \left[1 - f_2^{(0)}(p)\right];\ f_0(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt; \tag{1.56}$$

$$L_0 = (\lambda\ + 2\mu\ )\left[1 - f_0(P)\right];\ f(t) = \frac{\lambda\ f_1(t) + 2\mu\ f_2(t)}{\lambda\ + 2\mu}.$$

Общие решения уравнений (1.55) выражаются через модифицированные функции Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{(0)}(r) &= A^{(1)} I_0(\alpha\, r) + A^{(2)} K_0(\alpha\, r), \\ \psi_i^{(0)}(r) &= B_i^{(1)} I_0(\beta\, r) + B_i^{(2)} K_0(\beta\, r), \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} m &= 0,1, \\ i &= 1,2, \end{aligned} \tag{1.57}$$

где $A^{(i)}(k,p),\ B_i^{(j)}(k,p)$ – произвольные относительно переменной r постоянные.

Преобразуем компоненты тензора напряжений точек слоя.

Для этого представим все напряжения σ_{ij} $(i, j = r, \theta, z)$ в виде (1.53). Затем с использованием формул (1.21), (1.6) и (1.54) для напряжений $\sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{rz}^{(0)}, {}_{r\theta}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}, \sigma_{z\theta}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ получаем выражения через потенциалы продольных $\Phi_m^{(0)}$ и поперечных $\psi_i^{(0)}$ волн:

$$\sigma_{rr}^{(0)} = M_0 \left\{ \left(\frac{\beta^2 - k^2}{\alpha^2 - k^2} - 2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - k^2 \right) \Phi^{(0)} + 2 \frac{d^2}{dr^2} \left(\Phi^{(0)} - k \Psi_2^{(0)} \right) \right\},$$

$$\sigma_{rz}^{(0)} = M_0 \left\{ 2k \frac{d}{dr} \Phi^{(0)} - \left(k^2 \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d^3}{dr^3} \right) \Psi_2^{(0)} \right\},$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = M_0 \left\{ \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{d^2}{dr^2} \right) \Psi_1^{(0)} \right\},$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = M_0 \left\{ \left(\frac{\beta^2 - k^2}{\alpha^2 - k^2} - 2 \right) \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] \Phi^{(0)} \right\} +$$

$$+ 2k \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \Psi_2^{(0)} - k \Phi^{(0)} \right] \Bigg\}, \tag{1.58}$$

$$\sigma_{z\theta}^{(0)} = M_0\left\{k\left(\frac{2}{r}\Phi^{(0)} - \frac{d}{dr}\Psi_1^{(0)}\right) - \frac{1}{r}\left[k^2 - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right]\Psi_2^{(0)}\right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = M_0\left\{\left(\frac{\beta^2 - k^2}{\alpha^2 - k^2} - 2\right)\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\right]\Phi^{(0)} + \right.$$

$$\left. + 2\left[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\Phi^{(0)} - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\Psi_1^{(0)}\right] - k\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\psi_2^{(0)}\right\},$$

где $$\left[\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}\right] = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz\\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \left[\sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{r\theta}^{(0)}\right] e^{pt} dp,$$

$$\sigma_{rz} = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kz\\ \sin kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \sigma_{rz}^{(0)} e^{pt} dp.$$

Подстановка решений (1.57) в формулы (1.58), дает

$$\sigma_{rr}^{(0)} = M_0\left\{\left[\left(\beta^2 + k^2\right) I_0(\alpha r) - 2\frac{\alpha}{r} I_1(\alpha r)\right] A^{(1)} + \right.$$

$$+ \left[\left(\beta^2 + k^2\right) K_0(\alpha r) + 2\frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r)\right] A^{(2)} -$$

$$\left. -2k\left[\beta^2 I_0(\beta r) - \frac{\beta}{r} I_1(\beta r)\right] B_2^{(1)} - 2k\left[\beta^2 K_0(\beta r) + \frac{\beta}{r} K_1(\beta r)\right] B_2^{(2)}\right\},$$

$$\sigma_{rz}^{(0)} = M_0\left\{2\alpha k\left[I_1(\alpha r) A^{(1)} - K_1(\alpha r) A^{(2)}\right] - \right.$$

$$\left. -\beta\left(\beta^2 + k^2\right)\left[I_1(\beta r) B_2^{(1)} - K_1(\beta r) B_2^{(2)}\right]\right\},$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = M_0\left\{\left[\frac{2\beta}{r} I_1(\beta r) - \beta^2 I_0(\beta r)\right] B_1^{(1)} - \right.$$

$$\left. -\left[\beta^2 K_0(\beta r) + \frac{2\beta}{r} K_1(\beta r)\right] B_1^{(2)}\right\}, \tag{1.59}$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = M_0\left\{\left(\beta^2 - 2\alpha^2 - k^2\right) \times \left[I_1(\alpha r) A^{(1)} + K_1(\alpha r) A^{(2)}\right] + \right.$$

$$\left. + 2\beta^2 k\left[I_1(\beta r) B_2^{(1)} + K_1(\beta r) B_2^{(2)}\right]\right\},$$

$$\sigma_{z\theta}^{(0)} = M_0 \left\{ \frac{2k}{r} \left[I_1(\alpha r) A^{(1)} + K_1(\alpha r) A^{(2)} \right] - \right.$$

$$-k \left[\beta I_0(\beta r) - \frac{1}{r} I_1(\beta r) \right] B_1^{(1)} + k \left[\beta K_0(\beta r) + \frac{1}{r} K_1(\beta r) \right] B_2^{(2)} -$$

$$\left. - \frac{\beta^2 + k^2}{r} \left[I_1(\beta r) B_2^{(1)} + K_1(\beta r) B_2^{(2)} \right] \right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = M_0 \left\{ \left(\beta^2 - 2\alpha^2 + k^2 - \frac{4}{r^2} \right) \left[I_1(\alpha r) A_1^{(1)} + K_1(\alpha r) A^{(2)} \right] + \right.$$

$$+ \frac{2}{r} \left[\beta I_0(\beta r) - \frac{2}{r} I_1(\beta r) \right] B_1^{(1)} - \frac{2}{r} \left[\beta K_0(\beta r) + \frac{2}{r} K_1(\beta r) \right] B_1^{(2)} -$$

$$- \frac{2k}{r} \left[\beta I_0(\beta r) - \frac{2}{r} I_1(\beta r) \right] B_2^{(1)} + \frac{2k}{r} \left[\beta K_0(\beta r) + \frac{2}{r} K_1(\beta r) \right] B_2^{(2)} -$$

$$\left. - \frac{2\alpha}{r} \left[I_0(\alpha r) A^{(1)} + K_0(\alpha r) A^{(2)} \right] \right\}.$$

Представив перемещения U_r, U_θ, U_z также в виде

$$\left[U_r, U_\theta \right] = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(\ell)} \left[U_r^{(0)}, U_\theta^{(0)} \right] e^{pt} dp,$$

$$U_z = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(\ell)} U_z^{(0)} e^{pt} dp, \tag{1.60}$$

для преобразованных величин $U_r^{(0)}, U_\theta^{(0)}, U_z^{(0)}$, получим выражения

$$U_r^{(0)} = \frac{d}{dr} \Phi^{(0)} + k \frac{d}{dr} \Psi_2^{(0)}, \; U_\theta^{(0)} = -\frac{d}{dr} \Psi_1^{(0)},$$

$$U_z^{(0)} = k\Phi^{(0)} - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \Psi_2^{(0)}. \tag{1.61}$$

Подставив в последние выражения значения потенциалов по формуле (1.57), выразим перемещения через модифицированные функции Бесселя следующим образом:

$$U_r^{(0)} = \alpha \left[I_1(\alpha r) A^{(1)} - K_1(\alpha r) A^{(2)} \right] -$$
$$- \beta k \left[I_1(\beta r) B_2^{(1)} - K_1(\beta r) B_2^{(2)} \right],$$
$$U_z^{(0)} = k \left[I_0(\alpha r) A^{(1)} + K_0(\alpha r) A^{(2)} \right] -$$
$$- \beta^2 \left[I_0(\beta r) B_2^{(1)} + K_0(\beta r) B_2^{(2)} \right],$$
$$U_\theta^{(0)} = -\beta \left[I_1(\beta r) B_1^{(1)} + K_1(\beta r) B_1^{(2)} \right]. \qquad (1.62)$$

Из формул (1.59) и (1.62) следует, что задача изучения крутильных колебаний оболочки может рассматриваться отдельно от задачи изучения продольно-радиальных колебаний. В дальнейшем для получения уравнений колебания выражения (1.59) и (1.62) подставляются в соответствующие граничные условия.