ГЛАВА 4.
ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЁВ С УЧЁТОМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ И АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

В данной главе монографии изложена уточненная теория осесимметричных колебаний предварительно-напряженных вязкоупругих круговых цилиндрических слоёв. В первом и третьем параграфах разработаны теория продольно-радиальных и крутильных колебаний круговых цилиндрических слоёв из изотропного материала с учётом предварительной напряжен-ности и вязких свойств материала. Во втором и четвёртом параграфах результаты предыдущих двух параграфов обобщены на случай круговых цилиндрических слоёв, материал которых трансверсально-изотропен и предварительно-напряжён (одно-родное напряженное состояние), с учётом вязких свойств материала слоя.

4.1. Уравнения продольно-радиальных колебаний предварительно-напряженных изотропных круговых цилиндрических слоёв

Предварительно-напряженное состояние в деформиру-емых телах возникает в результате физико-химических про-цессов и технологических операций, а также оно может быть создано целенаправленно, исходя из определенных конструк-тивных соображений. В связи с этим возникает необходимость учёта предварительно-напряженного состояния элементов при их расчёте на воздействия динамических нагрузок.

В создании основ современной линеаризованной динамической теории в предварительно-напряженных телах существенный вклад внесли А.Н. Гузь [42, 43], И.Г.Филиппов [106, 112] и ряд других учёных. Результаты исследований по указанной проблеме нашли отражение в большом числе публикаций [3, 33, 34], где при описании движения упругих тел принимались двумерные прикладные теории, построенные с привлечением гипотез Кирхгофа-Лява, Тимошенко и т.д.

4.1.1. Вывод общих уравнений колебания кругового цилиндрического вязкоупругого слоя, с учётом начальных напряжений

Ниже разрабатываются уравнения продольно-радиальных колебаний изотропного кругового цилиндрического слоя, находящегося под действием внешних нестационарных нагрузок, с учетом начальных напряжений.

Отнесем слой к цилиндрической системе координат (r,θ,z), направив ось z по оси симметрии цилиндра, а поляр-ную ось r - произвольно, в плоскости поперечного сечения.

Продольно-радиальные колебания цилиндрического слоя возбуждаются напряжениями на его поверхностях $r=r_i$ $(i=1,2)$

$$\sigma_{rr} = f_{rr}^{(i)}(z,t), \quad \sigma_{rz} = f_{rz}^{(i)}(z,t) \tag{4.1}$$

Движение слоя описывается уравнением

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Предположим материал слоя вязкоупругий, изотропный, однородный и предварительно-напряжен таким образом, что выполняются зависимости (1.37) (то есть частный случай $1^0{}_a$). Рассматриваемая задача является осесимметричной и поэтому напряжения и деформации от координаты θ не зависят. В этом случае отличны от нуля перемещения $U_r=U_r(z,r)$ и $U_z=U_z(z,r)$, ненулевые напряжения выражаются через ненулевые перемещения посредством формул (1.38), подстановка которых в уравнения движения (4.1) приводит к следующим уравнениям движения точек слоя

$$(1+c_2)\left\{[\mathrm{L}+2\mathrm{M}]\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r\right)+M\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2}\right)\right\}+$$

$$+(1+a_0)[L+M]\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2},$$

$$(1+c_2)[L+M]\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial U_r}{\partial z}+(1+a_0)\left\{M\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+[L+2M]\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\right)\right\}=\rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \qquad (4.3)$$

Представив перемещения как [83]

$$U_r=\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz\\ -\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int\limits_{(l)}\overline{U}_r e^{pt}dp,\quad U_z=\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kz\\ \sin kz\end{matrix}\right\}dk\int\limits_{(l)}\overline{U}_z e^{pt}dp \qquad (4.4)$$

и подставив в уравнения движения (4.3), для преобразованных перемещений получим уравнения

$$(1+c_2)\left\{[\overline{\mathrm{L}}+2\overline{\mathrm{M}}]\left(\frac{\partial^2\overline{U}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{U}_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\overline{U}_r\right)+\overline{M}\left(\frac{\partial^2\overline{U}_r}{\partial z^2}\right)\right\}+$$

$$+(1+a_0)[\overline{L}+\overline{M}]\left(\frac{\partial^2\overline{U}_z}{\partial r\partial z}\right)=\rho\, p^2\overline{U}_r,$$

$$(1+a_0)\left\{\overline{M}\left(\frac{\partial^2\overline{U}_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{U}_z}{\partial r}\right)+[\overline{L}+2\overline{M}]\left(\frac{\partial^2\overline{U}_z}{\partial z^2}\right)\right\}+$$

$$+(1+c_2)[\overline{L}+\overline{M}]\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\overline{U}_r}{\partial z}=\rho\, p^2\overline{U}_z. \qquad (4.5)$$

Продифференцировав один раз по r второе уравнение системы (4.5) получим

$$\begin{aligned}&\Delta_0\overline{U}_r-\left[\overline{G}_3k^2+\frac{1}{1+c_2}[L+2M]^{-1}\rho p^2\right]\overline{U}_r-\frac{1+a_0}{1+c_2}k\overline{G}_1\frac{d\overline{U}_z}{dr}=0,\\&\Delta_0\frac{d\overline{U}_z}{dr}-\left[\overline{G}_4k^2+\frac{1}{1+a_0}\overline{A}_{44}^{-1}\rho p^2\right]\frac{d\overline{U}_z}{dr}+k\frac{1+c_2}{1+a_0}\overline{G}_2\Delta_0\overline{U}_r=0,\end{aligned} \qquad (4.6)$$

где

$$\overline{G}_1=(\overline{L}+\overline{M})(\overline{L}+2\overline{M})^{-1};\quad \overline{G}_2=(\overline{L}+\overline{M})(\overline{M})^{-1};\quad \overline{G}_3=(\overline{M})(\overline{L}+2\overline{M})^{-1};$$

$$\overline{G}_4=(\overline{L}+2\overline{M})(\overline{M})^{-1};\quad \Delta_0=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}.$$

Из первого уравнения системы (4.6) имеем

$$\frac{d\overline{U}_z}{dr} = \frac{1+c_2}{1+a_0}\overline{G}_1^{-1}k^{-1}\left[\Delta_0 - \overline{G}_3 k^2 - \frac{1}{1+c_2}[L+2M]^{-1}\rho p^2\right]\overline{U}_r ,$$

подставив которое во второе уравнение системы (4.6),получим

$$\Delta_0^2\overline{U}_r - \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\Delta_0\overline{U}_r + \alpha_1^2\cdot\alpha_2^2\overline{U}_r = 0, \tag{4.7}$$

$$\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2 = k^4 + k^2p^2\rho\left[\frac{1}{1+c_2}\overline{M}^{-1} + \frac{1}{1+a_0}\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1}\right]+$$

$$+\frac{p^4\rho^{\ 2}}{(1+a_0)(1+c_2)}\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1}\overline{M}^{-1};$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2 = p^2\rho_1\left[\frac{1}{1+a_0}\overline{M}^{-1} + \frac{1}{1+a_0}\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1}\right]+$$

$$+k^2\left[\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]\overline{M}^{-1} + \overline{M}\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1} - \left[\overline{M}+\overline{L}\right]^2\overline{M}^{-1}\left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1}\right].$$

Уравнение (4.7) можно записать в следующем виде

$$(\Delta_0-\alpha_1^2)(\Delta_0-\alpha_2^2)\overline{U}_r = 0\,. \tag{4.8}$$

На основании теоремы T. Boggio[78] общее решение уравнения (4.6) равно сумме общих решений уравнений

$$\frac{d^2\overline{U}_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\overline{U}_i}{dr}-\left(\alpha_i^2+\frac{1}{r^2}\right)\overline{U}_i = 0, \quad (i=1,2)$$

т.е. $\overline{U}_r = \overline{U}_1 + \overline{U}_2$.

Отсюда следует, что общее решение уравнения (4.8) равно

$$\overline{U}_r = C_1I_1(\alpha_1 r) + D_1K_1(\alpha_1 r) + C_2I_1(\alpha_2 r) + D_2K_1(\alpha_2 r)\,; \tag{4.9}$$

Подстановка решения (4.9) в первое уравнение системы (4.6) даёт

$$\frac{1+a_0}{1+c_2}\overline{G}_1 k\,\frac{d\overline{U}_z}{dr} = \left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)[C_1I_1(\alpha_1 r) + D_1K_1(\alpha_1 r)] +$$

$$+\left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)[C_2I_1(\alpha_2 r) + D_2K_1(\alpha_2 r)],$$

где $\alpha^2 = \left[\overline{L}+2\overline{M}\right]^{-1}\left\{p^2\rho/(1+c_2)+\overline{M}k^2\right\}$.

Отсюда с точностью до постоянного интегрирования находим, что

$$\overline{U}_z = \frac{1+c_2}{1+a_0}\overline{G}_1^{-1}\left\{\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{k\alpha_1}\left[C_1 I_0(\alpha_1 r) - D_1 K_0(\alpha_1 r)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{k\alpha_2}\left[C_2 I_0(\alpha_2 r) - D_2 K_0(\alpha_2 r)\right]\right\}. \quad (4.10)$$

Разложим в степенные ряды, по степеням радиальной координаты r, выражения для перемещений (4.9) и (4.10) получим

$$\overline{U}_z = \frac{1+c_2}{1+a_0}\overline{G}_1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{k\alpha_1}\alpha_1^{2n}C_{10} + \frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{k\alpha_2}\alpha_2^{2n}C_{20}\right]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} + \right.$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{6,n}(r)\left[\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{k\alpha_1}\alpha_1^{2n}D_1 + \frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{k\alpha_2}\alpha_2^{2n}D_2\right]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}; \quad (4.11)$$
$$\overline{U}_r = \frac{1}{r}\left(\frac{D_1}{\alpha_1} + \frac{D_2}{\alpha_2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_1^{2n+1}C_{10} + \alpha_2^{2n+1}C_{20}\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{7,n}\left[\alpha_1^{2n+1}D_1 + \alpha_2^{2n+1}D_2\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

где $\quad [C_{10}, C_{20}] = [C_1, C_2] + [D_1, D_2]\cdot\left[\ln\frac{(\alpha_1,\alpha_2)\xi}{2} - \psi(1)\right];$

$$\eta_{6,n}(r) = \ell n\frac{r}{\xi} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}; \qquad \eta_{7,n}(r) = \eta_{6,n}(r) - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Рассмотрим главные части преобразованных перемещений (4.11) при $r=\xi$, которые равны первым слагаемым в рядах, при этом радиус промежуточной поверхности ξ определяется по формулам [119]

$$\xi = \frac{r_1}{2}\left(\chi - \frac{r_1}{r_2}\right), \quad (4.12)$$

где постоянное χ удовлетворяет неравенству $2+\frac{r_1}{r_2} \le \chi \le$ $\le 2\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}$. Введём вспомогательные функции $\overline{U}_{r,0}, \overline{U}_{r,1}, \overline{U}_{z,0}, \overline{U}_{z,1}$ по формулам

$$\overline{U}_{r,0} = \alpha_1 C_{10} + \alpha_2 C_{20}, \qquad \overline{U}_{r,1} = \xi^{-1}\left(\alpha_1^{-1} D_1 + \alpha_2^{-1} D_2\right),$$

$$\overline{U}_{z,0} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \overline{G}_1} C_{10} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \overset{(0)}{B}_1} C_{20}, \tag{4.13}$$

$$\xi \overline{U}_{z,1} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \overline{G}_1} D_1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \overline{G}_1} D_2.$$

Для определения четырёх неизвестных постоянных интегрирования C_j, D_j $(j = 1, 2)$ имеются четыре граничных условия (4.1), которые после применения преобразований с учётом формул (3.10) запишутся как

$$\overline{\sigma}_{rz} = (1 + a_0) M \left(\frac{\partial \overline{U}_z}{\partial r} \right) + k(1 + c_2) M \overline{U}_z = \bar{f}_{rz}^{(i)}(k, p), \tag{4.14}$$

$$\overline{\sigma}_{rr} = (1 + c_2)(L + 2M)\left(\frac{\partial \overline{U}_r}{\partial r} \right) - k(1 + a_0) L\left(\overline{U}_z\right) + \frac{1}{r}(1 + c_2) L\left(\overline{U}_r\right) = \bar{f}_r^{(i)}(k, p)$$

или

$$\left(\alpha_1^2 - \alpha^2 + k^2 \overline{G}_1\right)\left[C_1 I_1(\alpha_1 r_i) + D_1 K_1(\alpha_1 r_i)\right] + \left(\alpha_1^2 - \alpha^2 + k^2 \overline{G}_1\right) \times$$

$$\times \left[C_2 I_1(\alpha_2 r_i) + D_2 K_1(\alpha_2 r_i)\right] = \frac{1}{1 + c_2} \overline{G}_1 \overline{M}^{-1} \bar{f}_{rz}^{(i)}(k, p),$$

$$\left(\alpha_1 \overline{G}_1 (\overline{L} + 2\overline{M}) - \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{\alpha_1} \overline{L} \right)\left[C_1 I_0(\alpha_1 r_i) - D_1 K_0(\alpha_1 r_i)\right] +$$

$$+ \left(\alpha_2 \overline{G}_1 (\overline{L} + 2\overline{M}) - \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{\alpha_2} \overline{L} \right)\left[C_2 I_0(\alpha_2 r_i) - D_2 K_0(\alpha_2 r_i)\right] +$$

$$- \frac{1}{r} 2\overline{M}\ \overline{G}_1 \left[C_1 I_1(\alpha_1 r_i) + D_1 K_1(\alpha_1 r_i) + C_2 I_1(\alpha_2 r_i) + \right.$$

$$\left. + D_2 K_1(\alpha_2 r_i) \right] = \frac{1}{1 + c_2} \overline{G}_1 \left[\bar{f}_r^{(i)}(k, p) \right].$$

Решив эту систему находим постоянные интегрирования

$$C_{10} = \frac{1}{\alpha^2 \Delta}\left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \overline{G}_1} \overline{U}_{r,0} - \alpha_2 \overline{U}_{z,0} \right); \; C_{20} = \frac{1}{\alpha^2 \Delta}\left(\alpha_1 \overline{U}_{z,0} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \overline{G}_1} \overline{U}_{r,0} \right);$$

$$D_1=\frac{\xi}{\Delta}\left(\frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{k\alpha_2\bar{G}_1}\bar{U}_{r,1}-\frac{1}{\alpha_2}\bar{U}_{z,1}\right);\ D_2=\frac{\xi}{\Delta}\left(\frac{1}{\alpha_1}\bar{U}_{z,1}-\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{k\alpha_1\bar{G}_1}\bar{U}_{r,1}\right), \quad (4.15)$$

где $\Delta=\dfrac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{k\alpha_1\alpha_2^2\bar{G}_1}$.

Выразим преобразованные перемещения $\bar{U}_r$, $\bar{U}_z$ через введенные главные части $\bar{U}_{r,0},\bar{U}_{r,1},\bar{U}_{z,0},\bar{U}_{z,1}$. Выражения для перемещений (4.11) после подстановки в них последних значений постоянных (4.15) примут вид

$$\bar{U}_z=\frac{1+c_2}{1+a_0}\left\{\frac{1}{\alpha^2k\bar{G}_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{k\bar{G}_1\alpha_1^2\alpha_2^2\left(\bar{P}_n-\alpha^2\bar{P}_{n-1}\right)\bar{U}_{z,0}-\right.\right.$$

$$\left.-\left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)\left(\alpha_2^2-\alpha^2\right)\bar{P}_n\bar{U}_{r,0}\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}+\frac{\xi}{k\bar{G}_1}\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{6,n}(r)\times$$

$$\times\left[k\bar{G}_1\left(\bar{P}_{n+1}-\alpha^2\bar{P}_n\right)\bar{U}_{z,1}-\left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)\left(\alpha_2^2-\alpha^2\right)\bar{P}_n\bar{U}_{r,1}\right]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\bar{U}_r=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\alpha^2\bar{P}_{n+1}-\alpha_1^2\alpha_2^2\bar{P}_n\right)\bar{U}_{r,0}+k\bar{G}_1\alpha_1^2\alpha_2^2\bar{U}_{z,0}\right]\times$$

$$\times\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)(n+1)!}+\xi\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{7,n}(r)\left[\left(\alpha^2\bar{P}_{n+1}-\alpha_1^2\alpha_2^2\bar{P}_n\right)\bar{U}_{r,1}+\right.$$

$$\left.+k\bar{G}_1\bar{P}_{n+1}\bar{U}_{z,1}\right]\frac{(r/2)^{2n}}{n!(n+1)!}+\frac{\xi}{r}\bar{U}_{r,1}. \quad (4.16)$$

Здесь

$$\bar{P}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_2^{2(n-i-1)}\alpha_1^{2i};\quad \bar{P}_0\equiv 0;\quad \bar{P}_1\equiv 1;\quad \bar{P}_2=\alpha_1^2+\alpha_2^2;\quad \alpha_1^2\alpha_2^2\bar{P}_{-1}=-1.$$

Подставив общие решения (4.16) в преобразованные по Лапласу и Фурье граничные условия (4.14) и разложив в ряды по степеням r_i модифицированные функции Бесселя в последних формулах и подставив их в полученные разложения значения постоянных по формулам (4.16) получены четыре алгебраических уравнения. Обратив эти уравнения по Фурье и Лапласу получаем четыре интегро-дифференциальных уравнения продольно-радиальных колебаний слоя относительно главных частей перемещений U_z и U_r промежуточной поверхности кругового цилиндрического слоя

$$a_{1i}U_{z,0} + a_{2i}U_{r,0} + \xi\left(a_{3i}U_{z,1} + a_{4i}U_{r,1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_{rz}^{(i)}(z,t)}{\partial z}\right], \quad (i=1,2)$$

$$b_{1i}U_{z,0} + b_{2i}U_{r,0} + \xi\left(b_{3i}U_{z,1} + b_{4i}U_{r,1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_{r}^{(i)}(z,t)}{\partial z}\right], \quad (i=1,2) \qquad (4.17)$$

где операторы

$$a_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[P_{n+1} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_n\right] \frac{\left(r_i/2\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$a_{2i} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_n \lambda_2^2\right] \frac{\left(r_i/2\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$a_{3i} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n}(r_i) G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}\left[P_{n+2} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1}\right] \frac{\left(r_i/2\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} +$$

$$+ \frac{1}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z};$$

$$a_{4i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \xi \eta_{7,n}(r_i) \lambda_1 \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_n \lambda_2^2\right] \frac{\left(r_i/2\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$b_{1i}=-\sum_{n=0}^{\infty}G_1\lambda_2^2\,\frac{\partial}{\partial z}\left[G_1P_n-\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}G_1\right)P_n\right]\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$b_{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ G_1[L+2M]\left(\lambda_1P_{n+1}-P_n\lambda_2^2\right)+L\left(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2^2\right)P_n-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{G_1M}{n+1}\left(\lambda_1P_{n+1}-\lambda_2^2P_n\right)\right]\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}\right];$$

$$b_{3i}=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1\left\{\eta_{6,n}(r_i)\frac{\partial}{\partial z}\left[G_1(L+2M)-G_1L\left(P_{n+1}-\lambda_1P_n\right)\right]+\right.$$

$$\left.+G_1\eta_{7,n}(r_i)\frac{\partial}{\partial z}\frac{M}{n+1}P_{n+1}\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$b_{4i}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\ \eta_{6,n}(r_i)\left[G_1(L+2M)\left(\lambda_1P_{n+1}-\lambda_2^2P_n\right)+L\left(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2^2\right)P_n\right]+\right.$$

$$\left.+G_1\eta_{7,n}(r_i)\frac{M}{n+1}\left(\lambda_1P_{n+1}-\lambda_2^2P_n\right)\right\}\lambda_1\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}-\xi\frac{2M}{r_i^2}\lambda_1G_1.$$

При этом операторы λ_1^n, λ_2^{2n}, λ_3^n, P_n имеют вид

$$\lambda_1^n=[L+2M]^{-n}\left\{\frac{\rho}{1+c_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-M\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^n,$$

$$\lambda_2^{2n}=\left\{\frac{\partial^4}{\partial z^4}+N_1\rho^2\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}-N_2\rho\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right\}^n,$$

$$\lambda_3^n=\left\{N_3\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}-N_4\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^n,\quad N_1=[L+2M]^{-1}M^{-1}\frac{1}{(1+a_0)(1+c_2)},$$

$$N_2=\frac{1}{1+c_2}M^{-1}+\frac{1}{1+a_0}(L+2M)^{-1},\ N_3=\frac{1}{1+a_0}M^{-1}+\frac{1}{1+c_2}(L+2M)^{-1},$$

$$N_4=M^{-1}\left(L+2M\right)+M(L+2M)^{-1}-(M+L)^2M^{-1}(L+2M)^{-1},$$

$$\lambda_2^2P_{-1}=-1;\quad P_0\equiv 0;\quad P_1=1;\quad P_2=\lambda_3;\quad P_3=\lambda_3^2-\lambda_2^2;$$

$$P_4=\lambda_3(\lambda_3^2-2\lambda_2^2);\quad P_5=\lambda_3^4-3\lambda_3^2\lambda_2^2+\lambda_2^4.$$

Система уравнений (4.17) являются общими уравнениями продольно-радиальных колебаний предварительно-напряжен-ного вязкоупруго цилиндрического слоя, выведенные для произвольных ядер вязкоупругих операторов (на ядра никакие ограничения не налагаются, кроме их интегрируемости). В соответствии с выражениями операторов $\lambda_i^n, a_{ij}, b_{ij}$ в переменных (*z, t*) система (4.17) содержит производные любого порядка по координате z и времени t от главных частей перемещения точек промежуточной поверхности слоя. Следовательно, для их применения при решении прикладных задач следует ограничится нулевым, первым и т.д. приближениями в вырыжениях для операторов a_{ij}, b_{ij}. Выбор порядка приближения здесь также зависит от отношения длины распространяющихся волн к внешнему диаметру слоя. Кроме того, общие уравнения (4.17) по своей структуре неотличаются от аналогических уравнений для цилиндрического слоя, без учёта предварительной напряженности [119]. На самом деле их различие является существенным благодаря виду операторов λ_i^n.

4.1.2. Формулы для определения перемещений и напряжений в сечениях слоя с учётом начальных напряжений при его продольно-радиальных колебаниях

Обратив выражения (4.16) по *z* и *k* выведены формулы для перемещений U_z, U_r , имеющие следующий вид

$$U_z = \frac{1+c_2}{1+a_0} \cdot \left\{ (G_1 \cdot \lambda_1)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_4 \cdot G_1 \cdot (P_{.n} - \lambda_1 \cdot P_{n-1}) U_{z,0} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} \cdot \left[\lambda_4 - \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_1^2 \right] Q_n U_{r,0} \right] \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{(n!)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(P_{.n+1} - \lambda_1 \cdot P_n) U_{z,1} + G_1^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \left[\lambda_4 - \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_1^2 \right] P_n U_{rf,1} \right] \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{(n!)^2} \right\},$$

$$U_r = \lambda_1^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_1 \left(P_{.n+1} - \lambda_4 \cdot P_n \right) \cdot U_{r,0} - G_1 \cdot \lambda_4 \cdot \left(\frac{\partial u_{z,0}}{\partial z} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{z,n}(r) \cdot \left[(\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_4 P_n) U_{r,1} - P_{n+1} \left(\frac{\partial u_{z,1}}{\partial z} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{n!(n+1)!} + \frac{1}{r} \cdot U_{r,1} \cdot \qquad (4.18)$$

Ограничиваясь нулевым приближением из (4.18) получим

$$U_z = \frac{1+c_2}{1+a_0} \left[U_{z,0} + \ln r U_{z,1} \right];$$

$$U_r = \frac{1}{r} U_{r,1} + \frac{r}{2} \left[U_{r,0} - G_1 \lambda_4 \lambda_1^{-1} \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} \right] + \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \left[\lambda_1 U_{r,1} - \frac{\partial}{\partial z} G_1 U_{z,1} \right] \frac{r}{2};$$

Аналогичные формулы имеют место для компонент напряжений

$$\sigma_{rr} = \lambda_1^{-1} B_1^{-1} \left[b_1 U_{z,0} + b_2 U_{r,0} + \xi \left(b_3 U_{z,1} + b_4 U_{r,1} \right) \right],$$

$$\sigma_{rz} = B_1^{-1} \lambda^{-1} \left[a_1 U_{z,0} + a_2 U_{r,0} + \xi \left(a_3 U_{z,1} + a_4 U_{r,1} \right) \right],$$

где $a_i = a_{ij} \big|_{r_i = r}$, $\quad b_i = b_{ij} \big|_{r_i = r}$, $\quad B_1 = G_1 M^{-1} \dfrac{\partial}{\partial z}$.

4.1.3. Предельные и частные виды уравнений продольно-радиальных колебаний предварительно-напряжённого слоя

Полученные уравнения колебания (4.17) и формулы для напряжений и перемещений допускают следующие предельные и частные случаи:

1. Если материал слоя упругий, т.е. $M = \mu, \quad L = \lambda$, то уравнения (4.17) переходят в соответствующие уравнения для упругого слоя;

2. Если $r_1 = 0$, тогда $\xi = 0$ и из (4.17) следует уравнение продольного колебания предварительно-напряженного круглого цилиндра:

$$a_1 U_{z,0} + a_2 U_{r,0} = \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_{rz}^{(2)}(z,t)}{\partial z} \right],$$

$$b_1 U_{z,0} + b_2 U_{r,0} = \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_{r}^{(2)}(z,t)}{\partial z} \right], \qquad (4.19)$$

где $a_i = a_{ij}\Big|_{r_i=r}$, $\quad b_i = b_{ij}\Big|_{r_i=r}$.

3. Если $r_2 = r_1(1+\varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$ малая величина, то из (4.17) следуют уравнения для предварительно-напряженной цилиндрической оболочки, при нулевом приближении и постоянстве коэффициента Пуассона эти уравнения в безразмерных переменных (r, z, t) примут вид

$$\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial t^2 \partial z}\right) - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z^3} - q_1 \frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial z^2} + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z \partial t^2}\right) - \frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z^3}\right) + q_1 d_2 \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \times$$

$$\times \left(\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial t^2 \partial z^2}\right) - \frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial z^4}\right) + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2} = 0; \quad (i = 1, 2) \qquad (4.20)$$

$$\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu}\cdot U_{r,0} - \frac{1}{2}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} - \frac{2U_{r,1}}{r_i^2} +$$

$$+\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\left(d_2 \tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2}\right) = 0; \qquad (i = 1, 2)$$

где ν -коэффициент Пуассона,

$$q_1 = \frac{1-2\nu}{2\nu} - \frac{4(1-\nu)^2}{1-2\nu}; \quad d_1 = \frac{1}{(1+c_2)^2(1+a_0)^2}; \quad d_2 = \frac{1}{(1+c_2)^3(1+a_0)};$$

безразмерные переменные введены по формулам

$$z = z^*\xi; \quad bt = t^*\xi; \quad r_1 = r_2^*\xi; \quad r_2 = r_2^*\xi;$$

$$U_{r,1} = U^*_{r,1}\xi; \quad U_{z,0} = U^*_{z.0}\xi; \quad U_{z,1} = U^*_{z.1}; \quad U_{r,0} = U^*_{r,0},$$

b - скорость распространения поперечных волн в материале слоя.

4. Если $a_0 = 0$ и $c_2 = 0$, то уравнения (4.17) совпадают с уточненными уравнениями цилиндрического слоя без учёта предварительной напряженности [119].

4.2. Уравнения продольно-радиальных колебаний транверсально-изотропных круговых цилиндрических слоев, с учётом начальных напряжений

В данном параграфе результаты предыдущих параграфов этой главы обобщены на случай круговых цилиндрических слоёв, материал которых трансверсально-изотропен, вязко-упругий и предварительно-напряжён. Предположем, что плоскости изотропии, проходящие через каждую точку тела, нормальны к оси цилиндра, а распределение усилий обладает симметрией относительно той же оси.

Допустим материал слоя предварительно-напряжен таким образом, что выполняются зависимости (1.33). В этом случае зависимости $\varepsilon \div u$ имеют вид (1.35), зависимости $\sigma \div \varepsilon$ принимают вид (1.43). В случае когда толщина рассматриваемого цилиндрического слоя постоянна, начальные перемещения определяются по формулам (1.30). На поверхностях слоя $r = r_i \quad (i = 1,2)$ граничные условия имеют вид (4.1).

Поставив значения выражений (1.43) в уравнения движения (4.2), получим уравнение движения материала слоя в перемещениях

$$(1+c_2)\left\{A_{11}\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r\right)+A_{44}\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2}\right)\right\}+$$

$$+(1+a_0)(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2},$$

$$(1+c_2)(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial U_r}{\partial z}+(1+a_0)\times$$

$$\times\left\{A_{44}\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)+A_{33}\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\right)\right\}=\rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \qquad (4.21)$$

Представив перемещения в виде (4.4) и подставив их в уравнения движения (4.1), после некоторых несложных преобразований получим

$$\Delta_0 \overline{U}_r - \left[\overline{A}_{44} \overline{A}_{11}^{\,-1} k^2 + \frac{1}{1+c_2} \overline{A}_{11}^{\,-1} \rho p^2 \right] \overline{U}_r - \frac{1+a_0}{1+c_2} k \overline{G}_1 \frac{d\overline{U}_z}{dr} = 0,$$

$$\Delta_0 \frac{d\overline{U}_z}{dr} - \left[\overline{A}_{44}^{\,-1} \overline{A}_{33} k^2 + \frac{1}{1+a_0} \overline{A}_{44}^{\,-1} \rho p^2 \right] \frac{d\overline{U}_z}{dr} +$$

$$+ k \frac{1+c_2}{1+a_0} \overline{A}_{44}^{\,-1} \left(\overline{A}_{13} + \overline{A}_{44} \right) \Delta_0 \overline{U}_r = 0, \qquad (4.22)$$

где $\overline{G}_1 = \overline{A}_{11}^{\,-1} \left(\overline{A}_{13} + \overline{A}_{44} \right)$; $\Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$.

Из первого уравнения системы (4.22) имеем

$$\frac{dU_z}{d\,r} = \frac{1+c_2}{1+a_0} \overline{G}_1^{\,-1} k^{-1} \left[\Delta_0 - A_{44} A_{11}^{-1} k^2 - \frac{\rho}{1+c_2} \overline{A}_{11}^{-1} \right] \overline{U}_r,$$

подставив которое во второе уравнение системы (4.22) получим уравнение вида

$$(\Delta_0 - \alpha_1^2)(\Delta_0 - \alpha_2^2) \overline{U}_r = 0, \qquad (4.23)$$

где α_1, α_2 - корни алгебраического уравнения $\Delta_0^2 - \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \right) \Delta_0 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 0,$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \left[\frac{\rho}{1+a_0} \overline{A}_{44}^{\,-1} + \frac{\rho}{1+c_2} \overline{A}_{11}^{\,-1} \right] p^2 - \overline{N}_3 k^2,$$

$$\overline{N}_3 = -\overline{A}_{44} \overline{A}_{11}^{\,-1} - \overline{A}_{33} \overline{A}_{44}^{\,-1} + \overline{A}_{44}^{-1} \overline{A}_{11}^{\,-1} \left(\overline{A}_{13} + \overline{A}_{44} \right)^2,$$

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 = \frac{\rho^2}{(1+a_0)(1+c_2)} \overline{A}_{11}^{\,-1} \overline{A}_{44}^{\,-1} p^4 +$$

$$+ \left[\frac{\rho}{1+c_2} \overline{A}_{44}^{\,-1} \overline{A}_{33} + \frac{\rho}{1+a_0} \right] \overline{A}_{11}^{\,-1} p^2 k^2 + \overline{A}_{33} \overline{A}_{11}^{\,-1} k^4.$$

Общее решение уравнения (4.23) на основнии теоремы Boggio равно

$$\overline{U}_r = C_1 I_1 (\alpha_1 r) + D_1 K_1 (\alpha_1 r) + C_2 I_1 (\alpha_2 r) + D_2 K_1 (\alpha_2 r). \qquad (4.24)$$

Подставив последнее решение в первое уравнение системы (4.22) и интегрировав с точностью до постоянного интегрирования находим, что

$$\overline{U}_z = \frac{1+c_2}{1+a_0}\overline{G}_1\left\{\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{k\alpha_1}\left[C_1 I_0(\alpha_1 r) - D_1 K_0(\alpha_1 r)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{k\alpha_2}\left[C_2 I_0(\alpha_2 r) - D_2 K_0(\alpha_2 r)\right]\right., \quad (4.25)$$

где $\alpha^2 = \dfrac{\rho}{1+c_2}\overline{A}_{11}^{-1} p^2 + \overline{A}_{44}\overline{A}_{11}^{-1} k^2$.

Разложив в степенные ряды по степеням радиальной координаты r выражения (4.24), (4.25) и введя вспомогательные неизвестные переменные по формулам (4.13), можно выразить неизвестные $\overline{U}_r$, $\overline{U}_z$ через эти вспомогательные функции по формулам (4.16). Подставив общие решения (4.16) в преобразованные по Лапласу и Фурье граничные условия и разложив их в ряды по степеням r_i получены четыре алгебраических уравнения относительно преобразованных главных частей перемещений промежуточной поверхности слоя $\overline{U}_{r,0}$, $\overline{U}_{z,0}$, $\overline{U}_{r,1}$, $\overline{U}_{z,1}$. Затем в уравнениях осуществив обратный переход в пространство оригиналов получена следующая система уравнений

$$c_{1i}U_{z,0} + c_{2i}U_{r,0} + \xi\left(c_{3i}U_{z,1} + c_{4i}U_{r,1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+c_2}G_1 A_{11}^{-1}\lambda_1\left[\frac{\partial\, f_{rz}^{(i)}(z,t)}{\partial z}\right], \quad (i=1,2)$$

$$d_{1i}U_{z,0} + d_{2i}U_{r,0} + \xi\left(d_{3i}U_{z,1} + d_{4i}U_{r,1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+c_2}G_1\lambda_1\left[\frac{\partial\, f_r^{(i)}(z,t)}{\partial z}\right], \quad (i=1,2) \quad (4.26)$$

где операторы c_{ij}, b_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ определяются по формулам

$$c_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty} G_1\lambda_2^2\frac{\partial}{\partial z}\left[P_{n+1} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}G_1\right)P_n\right]\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$c_{2i} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_n \lambda_2^2\right] \frac{(r_i / 2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$c_{3i} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n}(r_i) G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}\left[P_{n+2} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1}\right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{1}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z};$$

$$c_{4i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \xi \eta_{7,n}(r_i) \lambda_1 \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1\right) P_{n+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_n \lambda_2^2\right] \frac{(r_i / 2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$d_{1i} = -\sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[G_1 (A_{11} - A_{13}) P_n + \lambda_1 A_{13} P_{n-1} + \frac{G_1 (A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} P_n\right] \frac{(r_i / 2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$d_{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[G_1 A_{11}\left(\lambda_1 P_{n+1} - P_n \lambda_2^2\right) + A_{13}\left(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2\right) P_n - \right.$$

$$\left. - \frac{G_1 (A_{12} - A_{11})}{2(n+1)}\left(\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n\right)\right] \frac{(r_i / 2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$d_{3i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 \left\{\eta_{6,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z}\left[G_1 A_{11} - G_1 A_{13} (P_{n+1} - \lambda_1 P_n)\right] + \right.$$

$$\left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z} \frac{(A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} P_{n+1}\right\} \frac{(r_i / 2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$d_{4i} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 \left\{\eta_{6,n}(r_i)\left[G_1 A_{11}\left(\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n\right) + A_{13}\left(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2\right) P_n\right] + \right.$$

$$\left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{(A_{12} - A_{11})}{2(n+1)}\left(\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n\right)\right\} \frac{(r_i / 2)^{2n}}{(n!)^2} + \xi \frac{(A_{12} - A_{11})}{r_i^{\,2}} \lambda_1 G_1 .$$

При этом операторы $\lambda_1^n, \lambda_2^{2n}, \lambda_3^n, P_n$ имеют вид

$$\lambda_1^n = A_{11}^{\;-n}\left\{\frac{\rho}{1 + c_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^n,$$

$$\lambda_2^{2n} = A_{11}{}^{-n}\left\{A_{33}\frac{\partial^4}{\partial z^4} + N_1\rho^2\frac{\partial^4}{\partial t^4} - N_2\rho\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right\}^n,$$

$$\lambda_3^n = \left\{N_3\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - N_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^n, \quad N_1 = \frac{1}{(1+a_0)(1+c_2)}A_{44}^{-1},$$

$$N_2 = \frac{1}{1+a_0} + \frac{1}{1+c_2}A_{44}^{-1}A_{33}, \qquad N_3 = \frac{1}{1+c_2}A_{11}{}^{-1} + \frac{1}{1+a_0}A_{44}{}^{-1},$$

$$N_4 = A_{11}^{-1}A_{44}^{-1}(A_{13}+A_{44})^2 - A_{44}A_{11}^{-1} - A_{33}A_{44}^{-1},$$

$$\lambda_2^2 P_{-1} = -1; \quad P_0 \equiv 0; \quad P_1 = 1; \quad P_2 = \lambda_3; \quad P_3 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2;$$

$$P_4 = \lambda_3(\lambda_3^2 - 2\lambda_2^2); \quad P_5 = \lambda_3^4 - 3\lambda_3^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4.$$

Система уравнений (4.26) являются общими уравнениями продольно-радиальных колебаний цилиндрического слоя, из предварительно-напряженного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала. Ограничиваясь тем или иным приближением из них можно получить приближенные уравнения, которые можно использовать при решение конкретных прикладных задач. Так ограничиваясь нулевым приближением выведена следующая система интегро-дифференциальных уравнений продольно-радиальных колебаний слоя

$$\frac{r_i}{2}\left(\frac{\rho}{1+a_0}A_{11}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial t^2\partial z}\right] - A_{33}A_{44}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z^3}\right]\right) - \frac{r_i}{2}N_5G_1^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial z^2}\right] +$$

$$+\frac{\xi}{r_i}\cdot\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} + \xi\frac{r_i}{2}\left(\ln\frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\rho}{1+a_0}A_{44}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - N_6\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} -$$

$$-\xi N_5G_1^{-1}(L+2M)^{-1}\left(\frac{\rho}{1+c_2}A_{11}^{-1}\left[\frac{\partial^4 U_{z,1}}{\partial t^2\partial z^2}\right] - A_{11}^{-1}A_{44}\frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial z^4}\right)\times$$

$$\times\frac{r_i}{2}\left(\ln\frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\xi}{r_i}\cdot\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2} = \frac{1}{1+c_2}A_{44}^{-1}\left[\frac{\partial f_{rz}^{(i)}(z,t)}{\partial z}\right], \quad (i = 1,2)$$

$$-\xi\left(\ln\frac{r_i}{\xi}\left[\frac{1+A_{12}A_{11}^{-1}}{2} - A_{11}^{-1}A_{13}\right] - \frac{1}{4}\left(A_{12}A_{11}^{-1} - 1\right)\right)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} +$$

$$+\left(A_{12}A_{11}^{-1}+1\right)U_{r,0}+\left(\ln\frac{r_i}{\xi}A_{12}A_{11}^{-1}-\frac{1}{2}\left(A_{12}A_{11}^{-1}-1\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\rho}{1+c_2}A_{11}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2}\right]-A_{44}A_{11}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2}\right]\right)+A_{13}A_{11}^{-1}\left[\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}\right]-$$

$$-\frac{\xi}{r_i^2}\left(A_{12}A_{11}^{-1}-1\right)U_{r,1}=\frac{1}{1+c_2}A_{11}^{-1}\left[f_{rz}^{(i)}(z,t)\right],\quad (i=1,2) \qquad (4.27)$$

где

$$N_5G_1^{-1}=A_{13}^{-1}A_{44}+2A_{11}A_{33}A_{44}^{-1}(A_{13}+A_{44})^{-1};\quad N_6=N_5-A_{33}A_{44}^{-1};$$

$$N_5=A_{11}^{-1}A_{44}+2A_{33}A_{44}^{-1}-A_{13}A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{44}^{-1}(A_{13}+A_{44})^2.$$

4.3. Уравнения крутильных колебаний кругового цилиндрического слоя, с учётом начальных перемещений

В цилиндрической системе координат (r,θ,z) рассматривается круговой цилиндрический слой с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами, причем $r_2>r_1$.

Считается, что крутильные колебания цилиндрического слоя возбуждаются напряжениями на его поверхности

$$\sigma_{r\theta}=f_{r\theta}^{(i)}(r,t),\quad r=r_i\quad (i=1{,}2) \qquad (4.28)$$

Движение слоя описывается уравнением

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}=\rho\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \qquad (4.29)$$

При крутильных колебаниях перемещения с учётом начальных перемещений имеют вид (3.11). Зависимости напряжений от малых возмущенных и однородных начальных перемещений имеют вид (3.12). Подстановка последних в уравнения движения (4.29) приводит к следующему уравнению

$$(1+b_1)\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}U_\theta=\rho M^{-1}\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \qquad (4.30)$$

Положим

$$U_\theta = \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int\limits_l \overline{U}_\theta e^{pt} dp\,, \tag{4.31}$$

тогда из (4.30) имеем

$$\frac{d^2\overline{U}_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\overline{U}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{U}_\theta}{\partial r} - k^2\overline{U}_\theta - (1+b_1)^{-1}\rho\, p^2 \overline{M}^{-1}\overline{U}_\theta = 0$$

или если ввести обозначение

$$\beta^2 = k^2 + (1+b_1)^{-1}\rho\, p^2\overline{M}^{-1}, \quad \overline{M} = \mu\left[1 - \bar{f}(p)\right],$$

то получим уравнение

$$\frac{d^2\overline{U}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{U}_\theta}{\partial r} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2}\right)\overline{U}_\theta = 0, \tag{4.32}$$

общее решение которого равно

$$\overline{U}_\theta = A_1 I_1(\beta r) + A_2 K_1(\beta r)\,. \tag{4.33}$$

Представив внешние воздействующие напряжения $f_{r\theta}^{(i)}(z,t)$ также в виде

$$f_{r\theta}^{(i)}(z,t) = \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int\limits_l \bar{f}_{r\theta}^{(i)} e^{pt} dp, \quad r = r_i \ (i = 1,2) \tag{4.34}$$

и подставив их в граничные условия (4.28) будем иметь уравнения

$$\frac{\partial \overline{U}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\overline{U}_\theta = \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}\right], \quad r = r_i \quad (i = 1,2) \tag{4.35}$$

которые после подстановки в них общих решений (4.33) принимают вид

$$\beta\left[A_1 I_0(\beta r_i) - A_2 K_0(\beta r_i)\right] - \frac{2}{r^2}\left[A_1 I_1(\beta r_i) + A_2 K_1(\beta r_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}\right], \quad (i = 1,2)$$

или

$$\beta\left[A_1 I_1(\beta r_i) - A_2 K_2(\beta r_i)\right] = \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}\right], \quad (i = 1,2). \tag{4.36}$$

Разложим в ряды по r решение (4.33)

$$\overline{U}_\theta = \frac{A_2}{\beta^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_1 + A_2\left[\ln\frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}\psi(n+2)\right]\right\}\frac{(\beta r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.$$

и введем главные части преобразованного крутильного перемещения $\overline{U}_\theta$ промежуточной поверхности слоя, радиус которой как и в предыдущих параграфах определяется по формуле (4.12). Положим

$$A_{10} = \frac{2}{\beta}\overline{U}_{\theta,0}; \quad A_2 = \beta\xi\overline{U}_{\theta,1}, \tag{4.37}$$

где $A_{10} = A_1 + A_2\left[\ln\frac{\beta\xi}{2} - \frac{1}{2}\psi(1) - \frac{1}{2}\psi(2)\right].$

Подставив последние значения постоянных интегриро-вания A_i в разложения преобразованного крутильного перемещения, получим

$$\overline{U}_\theta = \left[\frac{r}{\xi} + \xi\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{4,n}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\beta^{2n+2}\right]\overline{U}_{\theta,1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\beta^{2n}\overline{U}_{\theta,0}. \tag{4.38}$$

где

$$\eta_{4,n}(r) = \ln\frac{r}{\xi} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}. \tag{4.39}$$

В выражении (4.38) функция $\overline{U}_{\theta,1}$ имеет размерность перемещения, а $\overline{U}_{\theta,0}$ размерность деформации, т.е. безразмерная величина.

Аналогично, разложив в степенные ряды по степеням r_i граничные условия (4.36) получим

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{\beta^2 r_i^2}\right)\beta A_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{10} + \eta_{5,n}(r_i)A_2\right]\frac{\beta^{2n+3}(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} =$$

$$= \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k,p)\right]; \quad (i = 1,2), \tag{4.40}$$

где $\eta_{5,n}(r_i) = \eta_{4,n}(r_i) = \dfrac{1}{n+2}.$

Подставив значения выражения (4.37) в разложения граничных условий (4.40) получим

$$\xi\left(\frac{\beta^2}{2}-\frac{2}{r_i^{\,2}}\right)\overline{U}_{\theta,1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(r/2\right)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\beta^{2n+2}\overline{U}_{\theta,0}+ \qquad (4.41)$$

$$+\xi\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{5,n}\frac{\left(r/2\right)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\beta^{2n+4}\overline{U}_{\theta,1}==\frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k,p)\right],\quad (i=1,2).$$

Обратив последние уравнения по r и p получим систему уравнений

$$c_{1i}\,U_{\theta,0}+\xi\,c_{2i}\,U_{\theta,1}=\frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k,p)\right],\quad (i=1,2) \qquad (4.42)$$

где

$$c_{1i}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(r_i/2\right)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\lambda_1^{n+1};\qquad \lambda_1^n=\left\{\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^n;$$

$$c_{2i}=\frac{1}{2}\left(\lambda_1-\frac{4}{r_i^2}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{5,n}(r_i)\frac{\left(r_i/2\right)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\lambda^{n+1}.$$

Система уравнений (4.42) являются общими уравнениями крутильных колебаний изотропного вязкоупругого кругового цилиндрического слоя, с учётом начальных напряжений. При нулевом приближении система (4.42) примет вид

$$\frac{r_1^{\,2}}{4}\lambda_1U_{\theta,0}+\xi\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_1-\frac{2}{r_1^{\,2}}\right)+\left(\ln\frac{r_1}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\frac{r_1^{\,2}}{8}\lambda_1^2\right\}U_{\theta,1}=$$

$$=\frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(1)}(k,p)\right], \qquad (4.43)$$

$$\frac{r_2^{\,2}}{4}\lambda_1U_{\theta,0}+\xi\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_1-\frac{2}{r_2^{\,2}}\right)+\left(\ln\frac{r_2}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\frac{r_2^{\,2}}{8}\lambda_1^2\right\}U_{\theta,1}=$$

$$=\frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(2)}(k,p)\right],$$

где $$\lambda_1 = \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Далее приведем формулы для определения напряженнно-деформированного состояния слоя. Обратив по Фурье и Лапласу выражение (4.38) получим формулу для перемещения U_θ через искомые функции $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$

$$U_\theta(r,z,t) = g_1 U_{\theta,0} + g_2 U_{\theta,1}, \tag{4.44}$$

где $g_1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda^n, \quad g_2 = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{4,n}(r\ ) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda^{n+1}.$

Используя вышеуказанную аналогию легко записать формулы для компонент напряжения через искомые функции

$$\sigma_{r\theta} = (1+b_1)M\left\lfloor c_1 U_{\theta,0} + \xi c_2 U_{\theta,1} \right\rfloor,$$

$$\sigma_{z\theta} = (1+b_1)M\left[g_1 \frac{\partial U_{\theta,0}}{\partial z} + \xi g_2 \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} \right], \tag{4.45}$$

где $c_1 = c_{1i}\Big|_{r_i = r}; \quad c_2 = c_{2i}\Big|_{r_i = r}.$

Формулы (4.44) и (4.45) позволяют определить значения перемещений и напряжений в той или иной точке произвольного сечения слоя.

4.4.Уравнения крутильных колебаний трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, с учетом начальных перемещений

Как и в предыдущем параграфе рассмотрим предвари-тельно-напряженный цилиндрический слой постоянной толщи-ны, при этом ось z направим по оси симметрии цилиндрического слоя, полярную ось r – произвольно, в плоскости поперечного сечения.

Процедура разработки уравнений аналогично методу, приведённому в предыдущем параграфе, результаты которого здесь будут обобщены на случай учёта трансверсально-изотропных свойств материала слоя. Начальные крутильные перемещения определяются по формуле (3.5), с учётом которых зависимости напряжений от малых возмущенных и однородных конечных деформаций имеют вид (3.16).

Введем обозначение

$$A_{11} - A_{12} = 2M, \quad A_{44} = M',$$

$$(M, M')\zeta = (\mu, \mu')\left\{\zeta(t) - \int_0^t [f_1(t-\xi), f_2(t-\xi)]\zeta(\xi)d\xi\right\},$$

где $f_1(t) = a_{44} f_{44}(t)$, $f_2(t) = \dfrac{a_{11} f_{11}(t) - a_{12} f_{12}(t)}{2\mu}$, a_{11}, a_{12}, a_{44} - уп-ругие константы определяемые по формулам (3.14). С учётом этих обозначений напряжения $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$ имеют вид

$$\sigma_{r\theta} = M\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_r}{r}\right], \quad \sigma_{z\theta} = M'\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right],$$

подстановка которых в уравнения движения (4.29) приводит к следующему

$$M\left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2}\right] + \frac{1}{r}M\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right] - \frac{1}{r^2}M\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r}\right] + M'\left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2}\right] = \frac{\rho}{1+b_1}\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (4.46)$$

Представив крутильное перемещение в виде (4.31) и подставив его в (4.46) получим уравнение для определения $\overline{U}_\theta$

$$\frac{d^2\overline{U}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{U}_\theta}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2}\right)\overline{U}_\theta = 0, \quad (4.47)$$

общее решение которого равно

$$\overline{U}_\theta = A_1 I_1(\beta r) + A_2 K_1(\beta r), \quad (4.48)$$

где $\beta^2 = \overline{M}^{-1}\left(\overline{M}' k^2 + (1+b_1)^{-1}\rho p^2\right)$, $\overline{M} = \mu\left[1 - \bar{f}(p)\right]$, $\overline{M}' = \mu'\left[1 - \bar{f}(p)\right]$.

Подставив в преобразованные по Фурье и Лапласу граничные условия общее решение (4.48), получим

$$\beta\left[A_1 I_2(\beta r_i) + A_2 K_2(\beta r_i)\right] = \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}(z,t)\right]. \quad (4.49)$$

В выражениях (4.48) разложив функции Макдональда в степенные ряды по степеням радиальной координаты r и введя вспомогательные функции по формулам (4.37) можно получить выражение для преобразованного крутильного перемещения имеющий вид (4.38), которое после обращения примет вид

$$U_\theta(r,z,t) = g_1 U_{\theta,0} + g_2 U_{\theta,1}, \tag{4.50}$$

где

$$g_1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda^n, \quad g_2 = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{4,n}(r\ )\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda^{n+1},$$

$$\lambda = \frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - M^{-1}M'\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аналогично разложив в степенные ряды по степеням r_i граничные условия (4.28) получены уравнения вида (4.40), и сделав обратний переход в последнем получена следующая система уравнений

$$€_{1i}\,U_{\theta,0} + \xi\,€_{2i}\,U_{\theta,1} = \frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k,p)\right], \quad (i=1,2) \tag{4.51}$$

где

$$€_{1i} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - M^{-1}M'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^{n+1}\frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!};$$

$$€_{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - M^{-1}M'\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4}{r_i^2}\right) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{5,n}(r_i)\left\{\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - M^{-1}M'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}^{n+1}\frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!}.$$

Уравнения (4.51) являются общими уравнениями крутильных колебаний кругового цилиндрического слоя из предварительно-напряженного трансверсально-изотропного вязкоупру-гого материала, которые выведены для произвольных ядер вязкоупругих операторов. При $n = 0$ эта система приводится к виду

$$\frac{r_i^2}{4}\left[\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial t^2}\right] - M^{-1}M'\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right] + \frac{2}{r_i^2}U_{\theta,1} -$$

$$\xi\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial t^2}\right]-M^{-1}M'\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2}\right]+\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\frac{r_i^{\,2}}{8}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\rho^2}{(1+b_1)^2}M^{-2}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^4}\right]-2M^{-2}M'\frac{\rho}{1+b_1}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^2\partial z^2}\right]-\right.$$

$$\left.\left.-M^{-2}(M')^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right]\right\}=\frac{1}{1+b_1}\overline{M}^{-1}\left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k,p)\right],\quad (i=1,2) \qquad (4.52)$$

где $M=(A_{11}-A_{12})/2;\quad M'=A_{44}.$