ГЛАВА 5
НЕУСТАНОВИВЩИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЁННЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЁВ

Настоящая глава монографии посвящена построению решений динамических граничных задач для цилиндрических конструкционных элементов с начальными напряжениями при действии нестационарных нагрузок, в частности, рассмотрены несколько частных задач по распространению волн в вязкоупругих круглых цилиндрических слоях на основе приближенных уравнений, полученных в предыдущем разделе, с учётом предварительной напряженности и анизотропных свойств материала слоя.

5.1. Продольно-радиальные колебания вязкоупругого предварительно-напряженного кругового цилиндрического слоя с жестко защемленным торцом

В данном параграфе определяется напряженно-деформированное состояние полубесконечного цилиндрического слоя с одним жестко защемленным торцом, с учётом начальных напряжений и вязких свойств материала.

Система уравнений продольно-радиальных колебаний такого слоя в случае отсутствия внешних нагрузок (поверхности слоя свободны от нагрузок) и постоянстве коэффициента Пуассона ($M = \mu\tilde{M}, \quad L = (\lambda + 2\mu)\tilde{M}, \qquad \tilde{M} = 1 - \int\limits_0^t k(t-\tau)d\tau$) на основании уравнений (4.17) принимают вид

$$\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial t^2 \partial z}\right) - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z^3} - q_1\frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial z^2} + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} -$$

$$-q_1 d_2\left(\ln r_i - \frac{1}{2}\right)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial t^2 \partial z^2}\right) - \frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial z^4}\right) + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2}$$

$$+\left(\ln r_i - \frac{1}{2}\right)\left(\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z \partial t^2}\right) - \frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z^3}\right) = 0; \qquad (i = 1,2) \qquad (5.1)$$

$$\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\frac{1}{1-2\nu}\cdot U_{r,0}-\left(\ln r_i+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-\frac{2U_{r,1}}{r_i^2}+$$

$$+\left(\frac{\ln r_i}{1-2\nu}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(d_2\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2}\right)=0,\ (i=1,2)$$

где ν - коэффициент Пуассона; безразмерные переменные введены по формулам (3.2);

$$q_1=\frac{1-2\nu}{2\nu}-\frac{4(1-\nu)^2}{1-2\nu};\quad d_1=\frac{1}{(1+c_2)^2(1+a_0)^2};\quad d_2=\frac{1}{(1+c_2)^3(1+a_0)};$$

Напряженно-деформированное состояние слоя определяется по формулам

$$U_z=\frac{1+c_2}{1+a_0}\left[U_{z,0}+\ln r U_{z,1}\right];$$

$$U_r=\frac{1}{r}U_{r,1}+\frac{r}{2}\left[U_{r,0}-G_1\lambda_4\lambda_1^{-1}\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}\right]+\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\left[\lambda_1 U_{r,1}-\frac{\partial}{\partial z}G_1 U_{z,1}\right]\frac{r}{2};$$

$$\sigma_{rz}\cdot\tilde{M}^{-1}=(1+c_2)\left\{\frac{r}{2}\cdot\left[(1+c_2)^2\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{z,0}}{\partial t^2}\right)-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^2 U_{z,0}}{\partial z^2}\right]-\right.$$

$$-\frac{r}{2}q_1\cdot\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+\frac{r}{2}\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\left[(1+c_2)^2\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{z,1}}{\partial t^2}\right)-q_2\frac{\partial^2 U_{z,1}}{\partial z^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{r}U_{z,1}-\frac{r}{2}(\ln r-\frac{1}{2})\,q_1\left[(1+c_2)(1+a_0)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial t^2\partial z}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial z^3}\right]+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}\right\};\qquad(5.2)$$

$$\sigma_{rr}=\tilde{M}(1+c_2)\left\{\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\frac{1}{1-2\nu}\cdot U_{r,0}-\left(\ln r+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r^2}\cdot U_{r,1}+\left(\frac{\ln r}{1-2\nu}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[(1+c_2)(1+a_0)\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2}\right]\right\},$$

$$\lambda_1 = \tilde{M}^{-1}(1+c_2)(1+a_0)\cdot\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Начальные условия задачи нулевые, граничные условия на торце слоя имеют вид

$$\text{при } z = 0 \qquad U_z = f(t), \quad U_r = 0, \tag{5.3}$$

$$\text{при } z \to \infty \quad U_{z,0} = U_{z,1} = 0, \quad U_{r,0} = U_{r,1} = 0.$$

Применив преобразование Лапласа по времени к системе (5.1) получим

$$d_1 Q^2(p)\cdot\frac{\partial\overline{U}_{z,0}}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^3\overline{U}_{z,0}}{\partial z^3} - q_1\frac{\partial^2\overline{U}_{r,0}}{\partial t^2} + \left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left[d_1\cdot Q^2(p)\cdot\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \frac{\partial^3\overline{U}_{z,1}}{\partial z^3}\right] + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)q_1\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\times$$

$$\times\left[d_2 Q^2(p)\frac{\partial^2\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2} - \frac{\partial^4\overline{U}_{z,1}}{\partial z^4}\right] + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$d_1 Q^2(p)\cdot\frac{\partial\overline{U}_{z,0}}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^3\overline{U}_{z,0}}{\partial z^3} - q_1\frac{\partial^2\overline{U}_{r,0}}{\partial t^2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left[d_1\cdot Q^2(p)\cdot\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \frac{\partial^3\overline{U}_{z,1}}{\partial z^3}\right] + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)q_1\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\times$$

$$\times\left[d_2 Q^2(p)\frac{\partial^2\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2} - \frac{\partial^4\overline{U}_{z,1}}{\partial z^4}\right] + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2} = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu}\overline{U}_{r,0} - \left(\ln r_1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \frac{2}{r_1^2}\cdot\overline{U}_{r,1} +$$

$$+\left(\ln r_1\frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{2}\right)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left\{Q^2(p)\overline{U}_{r,1} - \frac{\partial^2\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}\right\} = 0;$$

$$\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu}\overline{U}_{r,0} - \left(\ln r_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z} - \frac{2}{r_2^2}\cdot\overline{U}_{r,1} +$$

$$+\left(\ln r_2 \frac{1}{1-2\nu}+\frac{1}{2}\right)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left\{Q^2(p)\overline{U}_{r,1}-\frac{\partial^2 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}\right\}=0;$$

где $Q^2(p)=\dfrac{p^2}{1-\overline{f}_{20}(p)}$; $\quad \overline{f}_{20}(p)\div f_{20}(t)$;

$$\overline{U}_{r,1}=U_{r,1};\quad \overline{U}_{z,1}=U_{z,1};\quad \overline{U}_{r,0}=U_{r,o}.$$

Рассмотрим первое и второе уравнения системы (5.4), отнимем из первого уравнения системы второе, в результате получим следующее уравнение

$$\ln\frac{r_1}{r_2}\left[d_1 Q^2(p)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\partial \overline{U}_{z,1}}{\partial z}+\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\left(\frac{\partial \overline{U}_{z,1}}{\partial z}+\frac{\partial^2 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}\right)-$$

$$-\ln\frac{r_1}{r_2}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(d_2 Q^2(p)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}=0. \tag{5.5}$$

Теперь рассмотрим третье и четвертое уравнения системы (5.4), разность этих двух уравнений дает

$$\frac{\partial \overline{U}_{z,1}}{\partial z}=\left[\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\frac{2\left(r_1^2-r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}d_2 Q^2(p)-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\overline{U}_{r,1}. \tag{5.6}$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (5.5) дает однородное уравнение четвертого порядка

$$A\cdot\frac{\partial^4 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^4}+B\cdot\frac{\partial^2 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}+C\cdot\overline{U}_{r,1}=0, \tag{5.7}$$

где $A=\ln\dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{1}{2(1-\nu)}\left(1+(1-2\nu)q_1\right)$;

$$B=-\left\{(d_1+d_2 q_1(1-2\nu)\ln\frac{r_1}{r_2}\frac{1}{2(1-\nu)}Q^2(p)+\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\left(3-\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\right\};$$

$$C=\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\left\{\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\frac{2(r_2^2-r_1^2)}{r_1^2 r_2^2}+\frac{d_2}{2(1-\nu)}Q^2(p)+d_1 Q^2(p)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2(r_1^2-r_2^2)}{r_1^2 r_2^2}+\ln\frac{r_1}{r_2}\frac{d_2}{2(1-\nu)}Q^2(p)\right].\right.$$

Общее решение уравнения (5.7), удовлетворяющее условию затухания возмущений на бесконечности равно

$$\overline{U}_{r,1} = A_1 e^{-\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2 z} \tag{5.8}$$

где α_1, α_2 - корни характеристического уравнения $A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0$, определяемые формулой

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A}.$$

Подставив значение $\overline{U}_{r,1}$ по (5.8) в (5.6) имеем

$$\frac{\partial \overline{U}_{z,1}}{\partial z} = \left\{ \frac{1}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 \cdot r_2^2} + \frac{d_2}{2(1-\nu)} Q^2(p) - \frac{\alpha_1^2}{2(1-\nu)} \right\} \cdot A_1 e^{-\alpha_1 z} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 \cdot r_2^2} + \frac{d_2}{2(1-\nu)} Q^2(p) - \frac{\alpha_2^2}{2(1-\nu)} \right\} \cdot A_2 e^{-\alpha_2}.$$

Проинтегрировав по z это равенство и учитывая условие затухания на бесконечности, получим

$$\overline{U}_{z,1} = \left\{ \frac{1}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 \cdot r_2^2} + \frac{d_2}{2(1-\nu)} Q^2(p) - \frac{\alpha_1^2}{2(1-\nu)} \right\} \cdot A_1 \frac{e^{\alpha_1 z}}{-\alpha_1} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 \cdot r_2^2} + \frac{d_2}{2(1-\nu)} Q^2(p) - \frac{\alpha_2^2}{2(1-\nu)} \right\} \cdot A_2 \frac{e^{-\alpha_2}}{-\alpha_2}. \tag{5.9}$$

Из третьего уравнения системы (5.4) получим

$$\overline{U}_{r,0} = (1-2\nu) \cdot \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \overline{U}_{z,0}}{\partial z} + \left(\ln r_1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\partial \overline{U}_{z,1}}{\partial z} + \frac{2}{r_1^2} \overline{U}_{r,1} - \right.$$

$$\left. - \left(\ln \frac{r_1}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[d_2 Q^2(p) \overline{U}_{r,1} - \frac{\partial^2 \overline{U}_{r,1}}{\partial z^2} \right] \right\}. \tag{5.10}$$

Подставив последнее $\overline{U}_{r,0}$ значение в первое уравнение системы (5.4) получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 \overline{U}_{z,0}}{\partial z^2} + \left[2q_1 \nu - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right]^{-1} \cdot d_1 Q^2(p) \overline{U}_{z,0} = F_1, \tag{5.11}$$

где

$$\overline{F}_1 = q_4 \left\{ \overline{g}_1(p) A_1 e^{-\alpha_1} + \overline{g}_2(p) A_2 e^{-\alpha_2} \right\},$$

$$\bar{g}_i(p) = q_8\alpha_i + q_9\frac{Q^2(p)}{\alpha_i} + q_{10}Q^2(p)\alpha_i - \left(q_6 - \frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\times$$

$$\times\alpha_i^3 + \frac{q_{11}}{\alpha_i} + q_{12}\frac{Q^4(p)}{\alpha_i}, \quad (i=1,2)$$

$$q_4 = \left(2\nu q_1 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right)^{-1}; \quad q_5 = q_1(1-2\nu)(\ln r_1 + 1/2) + (\ln r_1 - 1/2);$$

$$q_6 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}q_1\left[(\ln r_1 + (1-2\nu)/2) - (\ln r_1 - 1/2)\right];$$

$$q_7 = \frac{1}{r_1}(2q_1(1-2\nu) - 1);$$

$$q_8 = -q_5/\ln(r_1/r_2)\left[2\left(r_1^2 - r_2^2\right)/r_1^2r_2^2 - q_7 - \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{1-2\nu}\right];$$

$$q_9 = \left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{d_1}{\ln(r_1/r_2)}\frac{2(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2r_2^2} + \frac{1}{r_1^2}\frac{d_2}{2(1-\nu)};$$

$$q_{10} = \frac{d_2}{2(1-\nu)}\left(q_5 + q_1(1-2\nu)(1-\nu)\right) - d_1\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2(1-\nu)},$$

$$q_{11} = \frac{1}{r_1^2}\frac{1}{\ln(r_1/r_2)}\frac{2(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2r_2^2}; \quad q_{12} = \left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{d_1d_2}{2(1-\nu)}.$$

Общее решение этого уравнения найдём с помощью метода вариации постоянных (детальное изложение которого приведено в п.3.2), имеющий вид

$$\bar{U}_{z,0} = \bar{A}_3e^{-\beta z} - \frac{q_4}{2\beta}\left\{\frac{A_1\bar{g}_1(p)}{\beta - \alpha_1}\left(e^{-\alpha_1 z} - e^{-\beta z}\right) + \frac{A_2\bar{g}_2(p)}{\beta - \alpha_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(e^{-\alpha_2 z} - e^{-\beta z}\right)\frac{A_1\bar{g}_1(p)}{\beta + \alpha_1}e^{-\alpha_1 z} + \frac{A_2\bar{g}_2(p)}{\beta + \alpha_2}e^{-\alpha_2 z}\right\}, \tag{5.12}$$

где $\beta = \sqrt{q_4 d_1 Q^2(p)}$ - положительный корень характеристического уравнения соответствующего (5.4) однородного уравнения.

Подстановка выражений (5.8), (5.9) в (5.10) даёт

$$\overline{U}_{r,0}=2\nu A_3\beta e^{-\beta z}+\sum_{i=1}^{2}A_i\left\{-\left[\left(\frac{\alpha_i}{\beta-\alpha_i}+\frac{\alpha_i}{\beta+\alpha_i}\right)e^{-\alpha_1 z}-\frac{\beta}{\beta-\alpha_i}e^{-\beta z}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{q_4\bar{g}_i(p)}{\beta}+e^{-\alpha_1 z}\left[\left[\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\frac{2\left(r_1^2-r_2^2\right)}{r_1^2r_2^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}d_2Q^2(p)-\frac{1}{2(1-\nu)}\alpha_i^2\right]\times\right.$$

$$\times\left(\ln r_1+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{r_1^2}-\left(\frac{1}{1-2\nu}\ln r_1+\frac{1}{2}\right)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}d_2Q^2(p)+$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{1-2\nu}\ln r_1+\frac{1}{2}\right)\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\alpha_i^2\right]\right\}. \qquad (5.13)$$

Применив преобразование Лапласа к граничным условиям (5.2), получим

$$\overline{U}_z=-\bar{f}(p), \qquad \overline{U}_r=0$$

или

$$\overline{U}_{z,0}+\ln r\overline{U}_{z,1}=-\bar{f}(p),$$

$$\frac{1}{r}\overline{U}_{r,1}+\frac{r}{2}\overline{U}_{r,0}=0, \qquad (5.14)$$

$$(1-2\nu)\left[(1+c_2)(1+a_0)Q^2(p)\overline{U}_{r,1}-\frac{\partial^2\overline{U}_{r,1}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial\overline{U}_{z,1}}{\partial z}=0.$$

Подставив значения (5.8), (5.9), (5.12) и (5.13) в преобразованные граничные условия (5.14) получим систему алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, A_3

$$a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{13}A_3=-\bar{f}(p);$$

$$a_{21}A_1+a_{22}A_2+a_{23}A_3=0; \qquad (5.15)$$

$$a_{31}A_1+a_{32}A_2=0$$

или

$$a_{ij}A_j=-\delta_{ij}\bar{f}(p), \qquad (i,j=1,2,3),$$

где $a_{13}=1$; $a_{23}=r\nu\beta$; $a_{33}=0$;

$$a_{1i} = -\frac{q_4}{2\beta} \cdot \frac{\bar{g}_i(p)}{\beta + \alpha_i} - \ln r \cdot \frac{1}{\alpha_i} \times$$

$$\times \left\{ \left(\ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} d_2 Q^2(p) - \frac{1}{2(1-\nu)} \alpha_i^2 \right\}; \quad (i = 1,2)$$

$$a_{2i} = \frac{r}{2} \left\{ -\frac{\nu q_4 \bar{g}_i(p)}{\beta} \left[\frac{2\beta\alpha_i}{\beta^2 - \alpha_i^2} - \frac{\beta}{\beta - \alpha_i} \right] + \left(\ln r_1 + \frac{1}{2} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\left(\ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} d_2 Q^2(p) - \frac{1}{2(1-\nu)} \alpha_i^2 \right] +$$

$$\left. + \frac{2}{r_1^2} - \left(\frac{1}{1-2\nu} \ln r_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(d_2 Q^2(p) + \alpha_i^2 \right) \right\} + \frac{1}{r}, \quad (i = 1,2)$$

$$a_{3i} = (1-2\nu)\left[d_2 Q^2(p) - \alpha_i^2 \right] -$$

$$- \left[\left(\ln \frac{r_1}{r_2} \right)^{-1} \frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} d_2 Q^2(p) - \frac{1}{2(1-\nu)} \alpha_i^2 \right], \ (i = 1, 2)$$

Полученные выражения для функций $\bar{U}_{z,0}, \bar{U}_{z,1}, \bar{U}_{r,0}, \bar{U}_{r,1}$ обратим при больших p. Представим $Q^2(p)$ в виде (3.29). Полагая p достаточно большим, выражения для α_i и β можно представить в виде

$$\alpha_1 = \gamma_5 \left\{ Q^2(p) + \frac{3\gamma_3}{\gamma_4} \right\}^{\frac{1}{2}}; \ \alpha_2 = \gamma_7 \left\{ Q^2(p) + \frac{3\gamma_3}{\gamma_6} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \beta = \gamma_{10} Q(p)$$

или

$$\alpha_1 = \gamma_5 \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_8^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha_2 = \gamma_7 \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_9^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \beta = \gamma_{10} \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{-\frac{c_1^2}{4} - c_2}; \qquad c_1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{\tau_m}; \qquad c_2 = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1} \alpha_m \alpha_l \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{\tau_l} \right)^2;$$

τ_m, τ_l – времена релаксаций, α_m, α_l - вязкоупругие параметры среды,

$$\gamma_1 = \ln\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{1}{2(1-\nu)}\left(1+(1-2\nu)q_1\right); \quad \gamma_2 = -\ln\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{1}{2(1-\nu)}\left[d_1+d_2+q_1 d_2(1-2\nu)\right];$$

$$\gamma_3 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2\cdot r_2^2}; \quad \gamma_4 = -\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 4\gamma_1\frac{d_1 d_2}{2(1-\nu)}\ln\frac{r_1}{r_2}};$$

$$\gamma_8 = \sqrt{\frac{3\gamma_3}{\gamma_4} - \gamma_0^{\,2}}; \quad \gamma_9 = \sqrt{\frac{3\gamma_3}{\gamma_6} - \gamma_0^2}; \quad \gamma_{10} = \sqrt{\frac{d_1}{2q_1\nu - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}}.$$

Решив систему уравнений относительно A_1, A_2, A_3, получим

$$A_1 = \bar{f}_1(p)\cdot\frac{\gamma_{50}}{Q(p)}, \quad A_2 = -\bar{f}_1(p)\cdot\frac{\gamma_{51}}{Q(p)}, \quad A_3 = -\bar{f}_1(p)\cdot\frac{\gamma_{52}}{Q(p)}, \qquad (5.16)$$

где $\gamma_{11} = -\dfrac{q_4\gamma_5}{2(\gamma_{10}+\gamma_5)}; \quad \gamma_{12} = q_8 + \dfrac{q_9}{\gamma_5^2} - \dfrac{3\gamma_3}{\gamma_4}\gamma_5^2\cdot\left(q_6 - q_5\dfrac{1}{2(1-\nu)}\right);$

$$\gamma_{13} = q_{10} - \gamma_5^2\cdot\left(q_6 - q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right) + \frac{q_{12}}{\gamma_5^2}; \quad \gamma_{15} = \frac{d_2 - \gamma_5^2}{2(1-\nu)};$$

$$\gamma_{16} = -\frac{q_4\gamma_7}{2(\gamma_{10}+\gamma_7)}; \quad \gamma_{18} = q_{10} + \frac{q_9}{\gamma_7^2} - \left(q_6 - q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_7^2;$$

$$\gamma_{20} = \frac{d_2 - \gamma_7^2}{2(1-\nu)};$$

$$\gamma_{22} = \frac{r}{2}\left\{\frac{\nu q_4\gamma_5\gamma_{13}}{\gamma_5+\gamma_{10}} + \left(\ln r_1 + \frac{1}{2}\right)\gamma_{15} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\ln r_1}{1-2\nu} + \frac{1}{2}\right)\left(d_2 - \gamma_5^2\right)\right\};$$

$$\gamma_{25} = \frac{r}{2}\cdot\frac{\nu q_4\gamma_7\gamma_{18}}{\gamma_7+\gamma_{10}} + \left(\ln r_1 + \frac{1}{2}\right)\gamma_{20} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\ln r_1}{1-2\nu} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(d_2 - \gamma_7^2\right);$$

$$\gamma_{27} = \left(d_2 - \gamma_5^2\right)\cdot\frac{2(1-\nu)(1-2\nu)-1}{2(1-\nu)}; \quad \gamma_{29} = \left(d_2 - \gamma_7^2\right)\cdot\frac{2(1-\nu)(1-2\nu)-1}{2(1-\nu)};$$

$$\gamma_{30} = \frac{3\gamma_3}{\gamma_6}\cdot\frac{2(1-\nu)(1-2\nu)-1}{2(1-\nu)}; \qquad \gamma_{32} = \gamma_{16}\cdot\gamma_{18} - \ln r\cdot\frac{\gamma_{10}\cdot\gamma_{20}}{\gamma_5};$$

$$\gamma_{34} = \gamma_{29} \cdot \left(\gamma_{11}\gamma_{13} - \gamma_{15} \cdot \ln r \cdot \frac{\gamma_{10}}{\gamma_5} \right); \quad \gamma_{37} = \gamma_{22}\gamma_{29} + \gamma_{25}\gamma_{27};$$

$$\gamma_{40} = r \cdot \nu \left(\gamma_{32}\gamma_7 - \gamma_{34} \right) + \gamma_{22}\gamma_{29};$$

$$\gamma_{50} = \frac{r \cdot \nu\gamma_{10}\gamma_{29}}{\gamma_{40}}; \quad \gamma_{51} = \frac{r \cdot \nu\gamma_{10}\gamma_{27}}{\gamma_{40}}; \quad \gamma_{52} = \frac{\gamma_{37}}{\gamma_{40}}.$$

Подставив значения A_1, A_2, A_3 по (5.16) в (5.8), (5.9), (5.12) и (5.13) получим

$$\bar{U}_{r,1} = \gamma_5 \cdot \gamma_{50} \cdot \bar{f}_1(p) \cdot \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \gamma_{51} \cdot \gamma_7 \cdot \frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2} \bar{f}(p), \tag{5.17}$$

$$\bar{U}_{z,1} = \gamma_{51}\bar{f}(p)\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\left\{\frac{\gamma_{59}}{p+c_1/2} + \left(p+\frac{c_1}{2}\right)\cdot\left(d_2 - \frac{\gamma_7^{\ 2}}{2(1-\nu)}\right) - \frac{3\gamma_3\gamma_7^2/2(1-\nu)\gamma_6}{p+c_1/2}\right\} -$$

$$-\gamma_{50} f(p)\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}\left\{\frac{\gamma_{59} - 3\gamma_3 \cdot \gamma_5^2/2\gamma_9(1-\nu)}{p+c_1/2} + \left(d_2 - \frac{\gamma_5^2}{2(1-\nu)}\right)\left(p+\frac{c_1}{2}\right)\right\}; \tag{5.18}$$

$$\bar{U}_{z,0} = \bar{f}_1(p)\frac{e^{-\beta z}}{\beta}\left\{\gamma_{60}\cdot(p+c_1/2) + \gamma_{61}\frac{1}{p+c_1/2}\right\} - q_4\left\{\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}\bar{f}_1(p)\left(\gamma_{62}\cdot(p+c_1/2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \gamma_{63}/(p+c_1/2)\right) + \frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\bar{f}_1(p)\left(\gamma_{64}\cdot(p+c_1/2) + \gamma_{65}\frac{1}{p+c_1/2}\right)\right\}, \tag{5.19}$$

$$\bar{U}_{r,0} = \bar{f}_1(p)\frac{e^{-\beta z}}{\beta}\left(\gamma_{70}p^2 + \gamma_{71}p + \gamma_{72}\right) + \gamma_{50}\bar{f}_1(p)\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}\left(\gamma_{73}p^2 + c_1\gamma_{73}p + \gamma_{76}\right) -$$

$$-\gamma_{51}\bar{f}_1(p)\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\left(\gamma_{76}p^2 + c_1\gamma_{76}p + \gamma_{78}\right), \tag{5.20}$$

где $\gamma_{59} = \dfrac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \ln r_1/r_2}$; $\qquad \gamma_{74} = c_1\gamma_{73}$;

$$\gamma_{61} = \frac{q_4\gamma_{50}}{2(\gamma_{10} - \gamma_5)} \cdot \left(q_8\gamma_5 + \frac{q_9}{\gamma_5}\right) + \frac{q_4\gamma_{51}}{2(\gamma_{10} - \gamma_7)}\left(q_8\gamma_7 + \frac{q_9}{\gamma_7}\right);$$

$$\gamma_{60} = -\gamma_{52}\gamma_{10} + q_4\left\{\frac{\gamma_{50}}{2(\gamma_{10} - \gamma_5)} \cdot \left[q_{10}\gamma_5 - \left(q_6 - \frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_5^3 + \frac{q_{12}}{\gamma_5}\right] - \right.$$

$$-\frac{\gamma_{51}}{2(\gamma_{10}-\gamma_7)}\cdot\left[q_{10}\gamma_7-\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_7^3+\frac{q_{12}}{\gamma_7}\right]\Bigg\};$$

$$\gamma_{62}=-\frac{\gamma_{50}}{\gamma_{10}-\gamma_5^2}\cdot\left(\gamma_5^2q_{10}-\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_5^4+\frac{q_2}{\gamma_5}\right);$$

$$\gamma_{63}=-\frac{\gamma_{50}}{\gamma_{10}-\gamma_5^2}\cdot\left(q_8\gamma_5^2+q_9+\gamma_5^2q_{10}\cdot\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-2\gamma_5^4\gamma_8^2\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\right);$$

$$\gamma_{64}=\frac{\gamma_{51}}{\gamma_{10}-\gamma_7^2}\cdot\left(\gamma_7^2q_{10}-\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_7^4+\frac{q_2}{\gamma_7}\right);$$

$$\gamma_{65}=\frac{\gamma_{51}}{\gamma_{10}-\gamma_7^2}\cdot\left(\gamma_7^2q_8+q_9+\gamma_7^2q_0\frac{3\gamma_3}{\gamma_6}-2\gamma_9^2\gamma_7^4\cdot\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\right);$$

$$\gamma_{70}=-2\nu\gamma_{52}\gamma_{10}^2-\left[\left(\gamma_5^3\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)-\frac{q_{12}}{\gamma_5}\right)\cdot\frac{\gamma_{10}\cdot\gamma_{50}}{\gamma_{10}-\gamma_5}+\frac{\gamma_{10}\cdot\gamma_{51}}{\gamma_{10}-\gamma_7}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\gamma_7^3\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)-\frac{q_{12}}{\gamma_7}\right)\right]\cdot\nu\cdot q_4;$$

$$\gamma_{71}=-2\nu c_1\gamma_{52}\gamma_{10}^2+\nu q_4\left[\frac{\gamma_{10}\cdot\gamma_{50}}{\gamma_{10}-\gamma_5}\left(\gamma_5q_{10}-\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_5^3c_1+\frac{q_{12}c_1}{\gamma_5}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_{10}\cdot\gamma_{51}}{\gamma_{10}-\gamma_5}\left(\gamma_7q_{10}-\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\cdot c_1\right)\cdot\gamma_7^3+\frac{q_{12}c_1}{\gamma_7}\right];$$

$$\gamma_{72}=2\nu c_2\gamma_{10}^2\gamma_5+\nu q_4\gamma_{10}\left[\frac{\gamma_{50}}{\gamma_{10}-\gamma_5}\left(q_8\gamma_5+\frac{q_9}{\gamma_5}+\frac{c_1\gamma_5q_{10}}{2}-\gamma_5^3\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)+\frac{q_{11}}{\gamma_5}-\frac{q_{12}c_2}{\gamma_5}\right)-\frac{\gamma_{51}}{\gamma_{10}-\gamma_7}\left(q_8\gamma_7+\frac{q_9}{\gamma_7}+\frac{c_1\gamma_7q_{10}}{2}-\gamma_7^3\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_6}-c_2\right)+\frac{q_{11}}{\gamma_7}-\frac{q_{12}c_2}{\gamma_7}\right)\right];$$

$$\gamma_{73}=-\nu q_4\frac{2\gamma_5^2}{\gamma_{10}^2-\gamma_5^2}\left[\gamma_5q_{10}-\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_5^3+\frac{q_{12}}{\gamma_5}\right]+$$

$$+\gamma_5\left[\eta_1\left(\frac{d_2}{2(1-\nu)}-\gamma_5^2\right)-\gamma_{58}d_2+\gamma_{58}\gamma_5^2\right];$$

$$\gamma_{75}=-\nu q\frac{2\gamma_5^2}{\gamma_{10}^2-\gamma_5^2}\left[(q_8+q_9)\gamma_5-q_{10}\gamma_5c_2-\gamma_5^3\left(q_6-\frac{q_5}{2(1-\nu)}\right)\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)-\frac{\gamma_{12}c_2}{\gamma_5}\right]+$$

$$+\gamma_5\left[\eta_1\left(\gamma_{59}-\frac{d_2c_2}{2(1-\nu)}-\gamma_5^2\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)\right)+\frac{2}{r_1^2}+\gamma_{58}d_2c_2+\gamma_{58}\gamma_5^2\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)\right];$$

$$\gamma_{76}=-\nu q_4\frac{2\gamma_7^2}{\gamma_{10}^2-\gamma_7^2}\left[\gamma_5q_{10}-\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\cdot\gamma_7^3+\frac{q_{12}}{\gamma_7}\right]+$$

$$+\gamma_7\left[\eta_1\left(\frac{d_2}{2(1-\nu)}-\gamma_7^2\right)-\gamma_{58}d_2+\gamma_{58}\gamma_7^2\right];$$

$$\gamma_{78}=-\nu q_4\frac{2\gamma_7^2}{\gamma_{10}^2-\gamma_7^2}\left[\gamma_7(q_8+q_9)-c_2\gamma_5q_{10}-\gamma_7^3\left(q_6-q_5\frac{1}{2(1-\nu)}\right)\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)-\frac{\gamma_{12}c_2}{\gamma_7}\right]+$$

$$+\gamma_7\left[\eta_1\left(\gamma_{59}-\frac{d_2c_2}{2(1-\nu)}-\gamma_7^2\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)\right)+\frac{2}{r_1^2}+\gamma_{58}d_2c_2+\gamma_{58}\gamma_7^2\left(\frac{3\gamma_3}{\gamma_4}-c_2\right)\right];$$

$$\gamma_{80}=\gamma_{59}-\frac{3\gamma_3\gamma_7^2}{2(1-\nu)\gamma_6};\quad \gamma_{81}=d_2-\frac{\gamma_7^2}{2(1-\nu)};$$

$$\gamma_{82}=\gamma_{59}-\frac{\gamma_3\gamma_5^2}{2(1-\nu)\gamma_4};\quad \gamma_{84}=d_2-\frac{\gamma_5^2}{2(1-\nu)}.$$

Применив к выражениям (5.17)-(5.20) обратное преобразование Лапласа по времени, с использованием теорем запаздывания и свертки функций получим следующие выражения для искомых функций являющиеся решением задачи

$$U_{z,1}=\frac{\gamma_{51}}{\gamma_7}\int_{\gamma_7z}^{t}e^{-\frac{c_1}{2}\tau}F_1(t-\tau)I_0\left(\gamma_9\sqrt{\tau^2-\gamma_7^2z^2}\right)d\tau-$$
$$-\frac{\gamma_{50}}{\gamma_5}\int_{\gamma_5z}^{t}e^{-\frac{c_1}{2}\tau}F_2(t-\tau)I_0\left(\gamma_8\sqrt{\tau^2-\gamma_5^2z^2}\right)d\tau, \tag{5.21}$$

$$U_{r,1}=\gamma_{50}\int_{\gamma_5z}^{t}f(t-\tau)e^{-\frac{c_1}{2}\tau}I_0\left(\gamma_8\sqrt{\tau^2-\gamma_5^2z^2}\right)d\tau-$$

$$
-\gamma_{51}\int\limits_{\gamma_7 z}^{t} f(t-\tau)e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_9\sqrt{\tau^2-\gamma_7^2 z^2}\right)d\tau \;; \tag{5.22}
$$

$$
U_{z,0}=\frac{1}{\gamma_{10}}\int\limits_{\gamma_{10}z}^{t}\left[\gamma_{60}F_0(t-\tau)+\gamma_{61}\int\limits_0^{t-\tau} f(\xi)d\xi\right]\cdot e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-\gamma_{10}^2 z^2}\right)d\tau-
$$

$$
-q_4\left\{\frac{1}{\gamma_5}\int\limits_{\gamma_5 z}^{t} e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_8\sqrt{\tau^2-\gamma_5^2 z^2}\right)\cdot\left[\gamma_{62}F_0(t-\tau)+\gamma_{63}\int\limits_0^{t-\tau} f(\xi)d\xi\right]d\tau+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\gamma_7}\int\limits_{\gamma_7 z}^{t}\left[\gamma_{64}F_0(t-\tau)+\gamma_{65}\int\limits_0^{t-\tau} f(\xi)d\xi\right]\cdot e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_9\sqrt{\tau^2-\gamma_7^2 z^2}\right)d\tau\right\}, \tag{5.23}
$$

$$
U_{r,0}=\frac{1}{\gamma_{10}}\int\limits_0^t\left[\gamma_{70}f''(t-\tau)+\gamma_{71}f'(t-\tau)+\gamma_{72}f(t-\tau)\right]I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-\gamma_{10}^2 z^2}\right)e^{-\frac{c_1}{2}\tau}d\tau+
$$

$$
+\frac{\gamma_{50}}{\gamma_5}\int\limits_0^t\left[\gamma_{73}f''(t-\tau)+\gamma_{73}c_1 f'(t-\tau)+\gamma_{75}f(t-\tau)\right]I_0\left(\gamma_8\sqrt{\tau^2-\gamma_5^2 z^2}\right)e^{-\frac{c_1}{2}\tau}d\tau-
$$

$$
-\frac{\gamma_{51}}{\gamma_{10}}\int\limits_{\gamma_7 z}^t\left[\gamma_{76}f''(t-\tau)+\gamma_{76}c_1 f'(t-\tau)+\gamma_{78}\; f(t-\tau)\right]I_0\left(\gamma_9\sqrt{\tau^2-\gamma_7^2 z^2}\right)e^{-\frac{c_1}{2}}d\tau. \tag{5.24}
$$

$$
F_1(t)=\gamma_{80}\int\limits_0^t f(\xi)d\xi+\gamma_{81}\left(f'(t)-\frac{c_1}{2}f(t)\right);\quad F_2(t)=\gamma_{82}\int\limits_0^t f(\xi)d\xi+\gamma_{84}\left(f'(t)+\frac{c_1}{2}f(t)\right);
$$

$$
F_0=f'(t)+\frac{c_1}{2}f(t);
$$

Перемещения и напряжения в слое вычислялись по формулам (5.2) для вязкоупругого материала, физические параметры которого заданы в виде (3.44). Результаты вычислений проведенных для точек внешней поверхности слоя, где r_2=1,2 и r_1=1,0 или оболочки r_2=1,05 и r_1=1,0 , где приведены на рисунках 5.1-5.17. На рис. 5.1-5.8 представлены графики изменения продольного и радиального перемещений и радиального напряжения в зависимости от координаты, когда внешняя нагрузка задана в виде: $f(t)=A_0H(t)$, где $H(t)$ - единичная функция Хевисайда, A_0 - амплитуда колебаний, для фиксированного момента безразмерного времени t=10 и различных значений a_0. На рис.5.1-5.3 приведены зависимости перемещений U_z , U_r и напряжения σ_{rr} от координаты при различных значениях коэффициента Пуассона: $\nu = 0{,}25; 0{,}3; 0{,}33$ без учёта начальных перемещений (a_0 =0). На рис. 5.1 с целью сопоставления пунктирными линиями приведены результаты для тонкостенной оболочки. Из приведённых графиков видно, что с увеличением значений коэффициента Пуассона увеличивается разница значений перемещений в сечениях оболочки и слоя. Так, например, в сечении z=0,5 при $\nu = 0{,}25$ эта разница составляет 5,2 %, при $\nu = 0{,}3$ - 5,4 % , при $\nu = 0{,}33$ - 5.7 %. Если же учитывать также влияние начальных перемещений, то как видно из рис. 5.4 ($\nu = 0{,}25$) это разница становится более ощутимой и при a_0 =*-0,7* разница значений перемещений тонкостенной оболочки и слоя уже составляет 7,5%.

На рис. 5.5 и 5.6 представлены кривые изменения перемещения U_z и напряжения σ_{rr} при $\nu = 0{,}25$ для различных значений начальных перемещений: $a_0 = 0; -0{,}68; -0{,}69; -0{,}7$, а на рис. 5.7 и 5.8 приведены зависимости продольного и радиального перемещения от координаты при $\nu = 0{,}3$ для $a_0 = 0; -0{,}6; -0{,}62; -0{,}64; -0{,}66; -0{,}7$. Из приведённых графиков видно, что в сечениях, близких к торцу $(0 < z < 4)$ влияние коэффициента предварительной напряжённости (a_0) сильное. В зависимости от значения коэффициента a_0 в точках близких к торцу перемещение может увеличиваться в два ($a_0 = -0{,}68$) – три ($a_0 = -0{,}7$) раза. Аналогичная картина наблюдается и для напряжения σ_{rr} (рис.5.6), которое в зависимости от a_0 может принимать большие значения в сечениях близких к торцу, а в сечениях удаленных от торца на расстояние $z = 6$ и больше наблюдается полный спад как перемещения так и напряжения. Отсюда следует, что при $z > 6$ для нагрузок типа *H(t)* влиянием коэффициента предварительной напряженности можно пренебречь.

На рис. 5.9 – 5.17 представлены графики изменения перемещений U_r , U_z и напряжения σ_{rr} в зависимости от координаты и времени, когда внешняя нагрузка задана по формуле (3.42), в виде синусоидальной гладкой функции, при различных фиксированных значениях a_0. На рис. 5.9 и 5.10 приведены кривые изменения перемещений U_r и U_z в зависимости от продольной координаты z с учётом (при $a_0 = 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}03;\ 0{,}04$) и без учёта начальных перемещений (при $a_0 = 0$), а на рис. 5.11-5.13 эти зависимости приведены для $a_0 = 0; -0{,}02; -0{,}04; -0{,}06; -0{,}07; -0{,}08; -0{,}1; -0{,}2; -0{,}3; -0{,}4; -0{,}5; -0{,}7.$ Из графиков представленных на рис. 5.11 - 5.13 следует, что общая картина изменений перемещений U_r и U_z похожи на предыдущие, представленные на рис. 5.5-5.6, но в отличии от них перемещение U_r при $a_0 \geq -0{,}04$ будет больше, а при $a_0 \leq -0{,}07$ меньше по сравнению с U_r при $a_0 = 0$.

Из рис.5.14, где представлена зависимость радиального перемещения U_r от координаты при фиксированных значениях времени t = 3, 10, 20 без учёта начальных перемещений, видно, что с увеличением значения времени перемещения уменьшаются.

На рис. 5.15 – 5.17 приведены графики изменения радиального перемещения во времени. На рис.5.15 приведены кривые изменения радиального перемещения в различных сечениях слоя: z=5, 10, 15 при $a_0 = 0$. С ростом расстояния от торца в сечениях слоя наблюдается уменьшение значений перемещения. Как видно из графиков в сечениях z=10, 15 перемещения затухают с течением времени. На рис. 5.16 - 5.17 представлены результаты в сечении z=5 с учетом ($a_0 = -0{,}04; -0{,}04; -0{,}02; -0{,}01; 0; 0{,}01; 0{,}02; 0{,}03; 0{,}04$) и без учета начальных перемещений ($a_0 = 0$). Как видно из графиков в начальные моменты взаимодействия наблюдается резкое увеличение значения перемещений которое с течением времени при $t \approx 10$ переходит в установившееся состояние, кроме того с увеличением значений начальных перемещений уменьшается значение радиального перемещения.

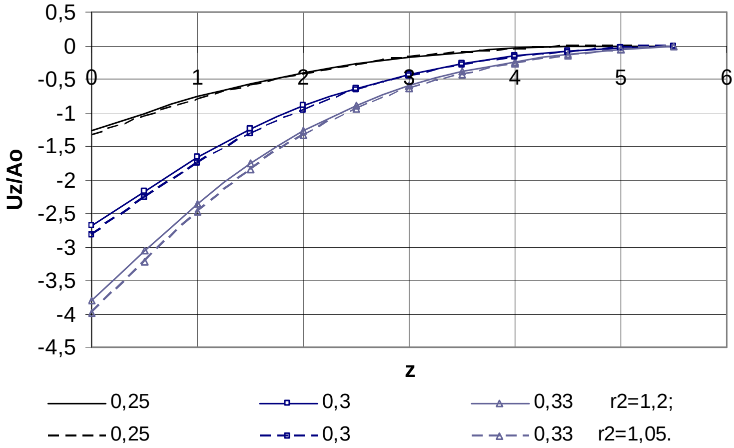

Рис. 5.1. Зависимости продольного перемещения точек внешней поверхности слоя (r_2=1,2; r_1=1,0) и оболочки (r_2=1,05; r_1=1,0) от координаты при различных значениях коэффициента Пуассона (0,25; 0,30; 0,33) без учета начальных перемещений (a_0=0).

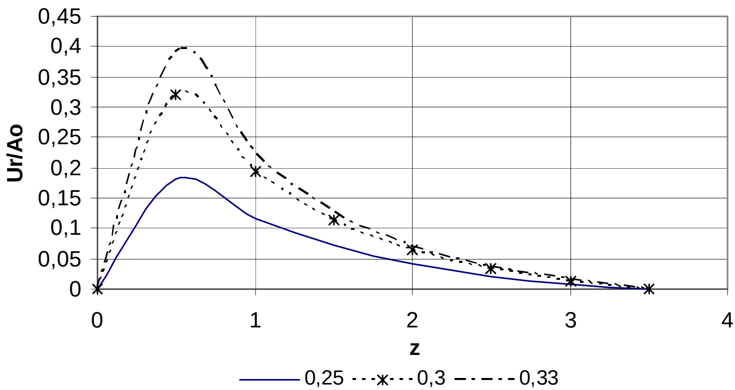

Рис. 5.2. Зависимость радиального перемещения точек внешней поверхности слоя от координаты при различных значениях коэффициента Пуассона (0,25; 0,30; 0,33) без учета начальных перемещений (a_0=0).

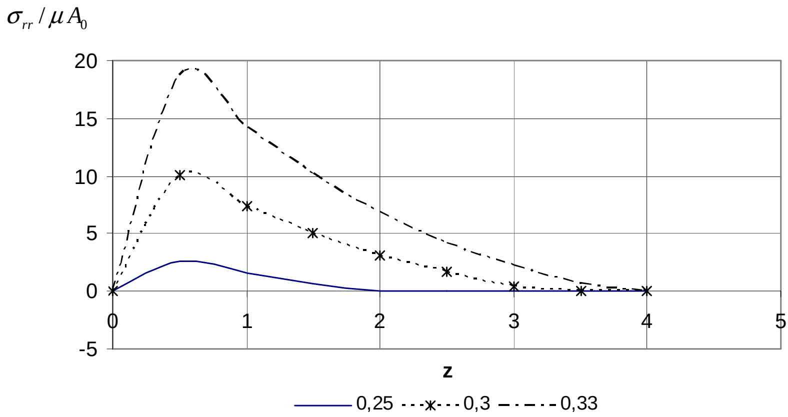

Рис. 5.3. Зависимость напряжения σ_{rr} от координаты в точках внешней поверхности при различных значениях коэффициента Пуассона (0,25; 0,3; 0,33) без учета начальных перемещений (a_0=0).

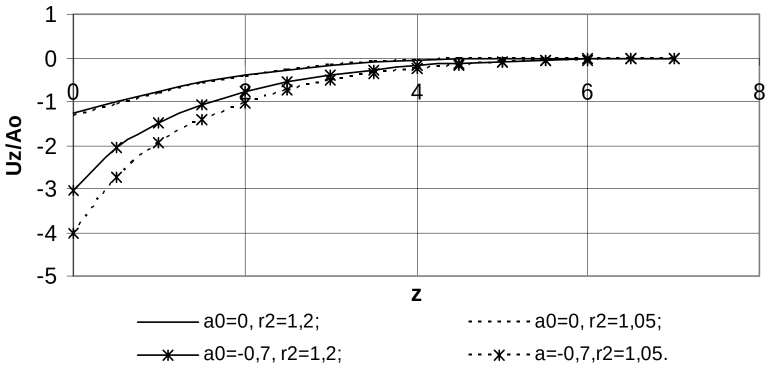

Рис. 5.4. Зависимость U_z от координаты z в точках внешней поверхности слоя (r_2=1,2 и r_1=1,0) и оболочки (r_2=1,05 и r_1=1,0) с учетом (a_0=-0,7) и без учета (a_0=0) начальных перемещений.

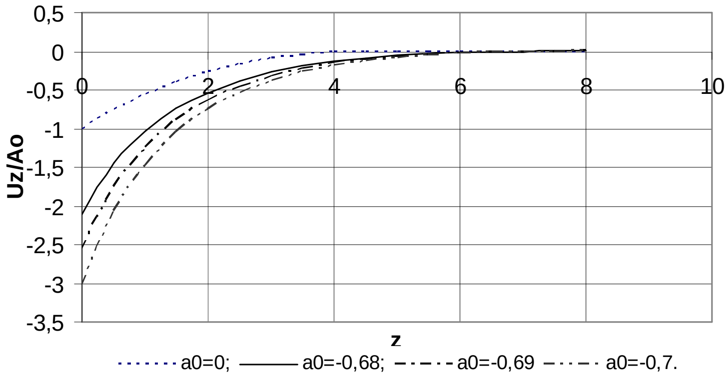

Рис. 5.5. Зависимость U_z от координаты z в точке слоя при ν=0,25 и различных значениях параметра начальных перемещений a_0=0; -0,68; -0,69; -0,70.

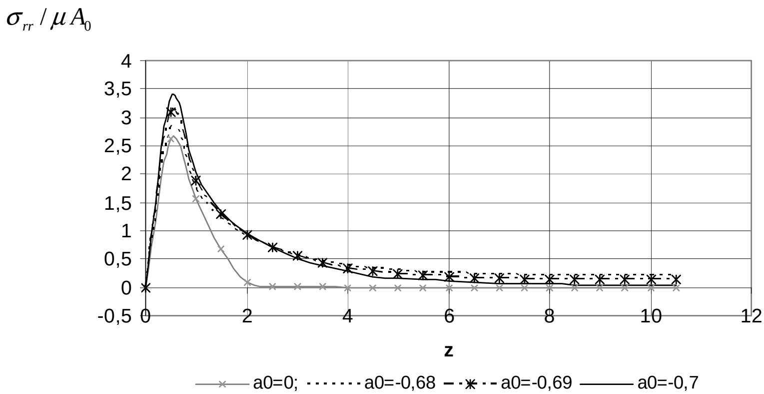

Рис. 5.6. Зависимость σ_{rr} от координаты при ν=0,25 и a_0=0; -0,68; -0,69; -0,70.

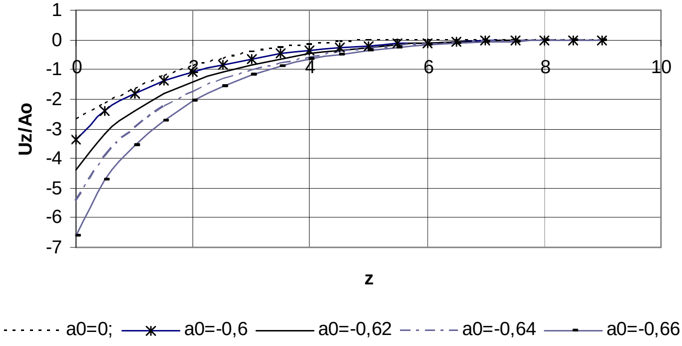

Рис. 5.7 . Зависимость U_z от координаты
при ν=0,3 и a_0=0; -0,6; -0,62; -0,64; -0,66.

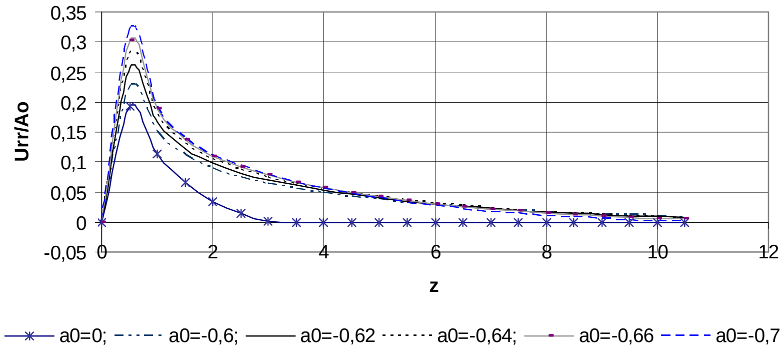

Рис.5.8. Зависимость U_r от координаты
при ν=0,3 и a_0=0; -0,6; -0,62; -0,64; -0,66; -0,70.

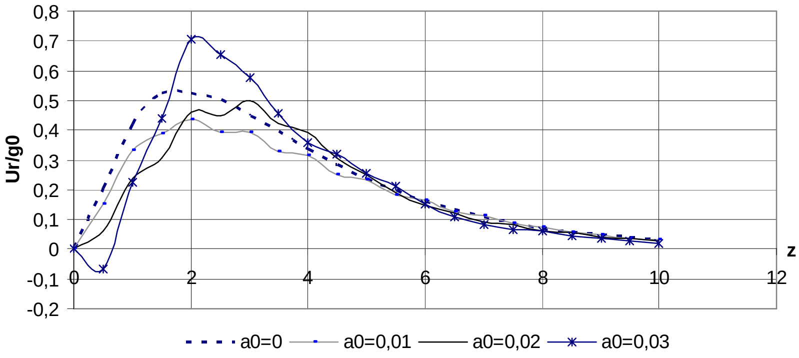

Рис. 5.9. Зависимость U_r от координаты с учетом (a_0=0,01; 0,02; 0,03) и без учета (a_0=0) начальных перемещений.

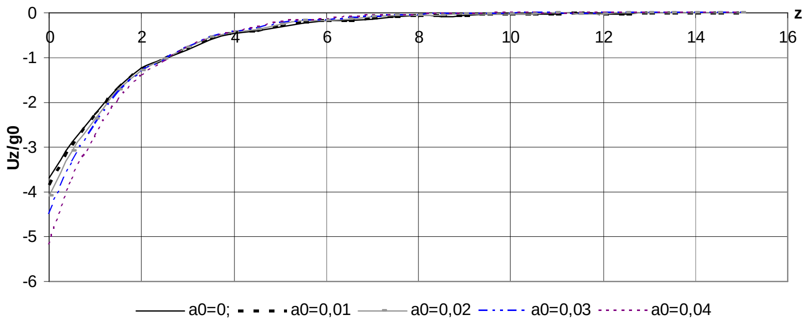

Рис.5.10. Зависимость U_z от координаты с учетом (a_0=0,01; 0,02; 0,03; 0,04) и без учета (a_0=0) начальных перемещений.

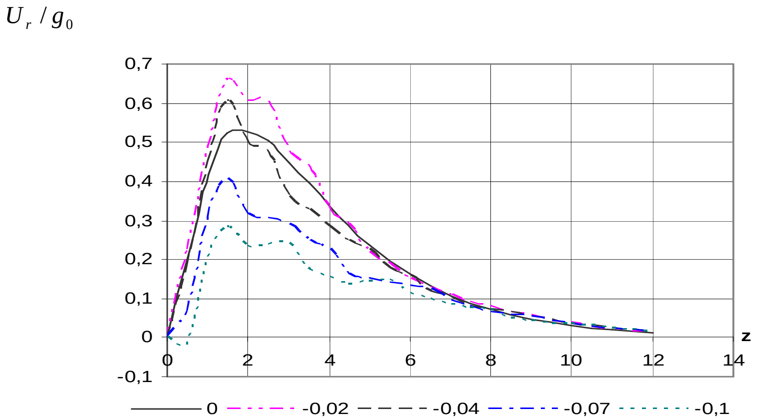

Рис.5.11. Зависимость U_r от координаты z
при a_0=0; 0,02; 0,04; 0,07; 0,1.

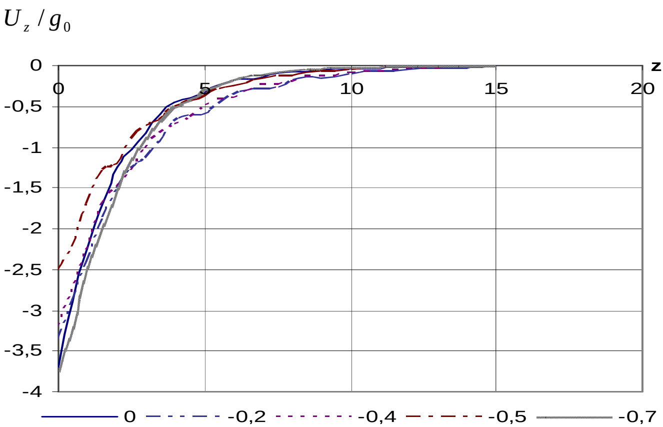

Рис.5..12. Зависимость U_z от координаты z
при a_0=0; -0,02; -0,04; -0,05; -0,07.

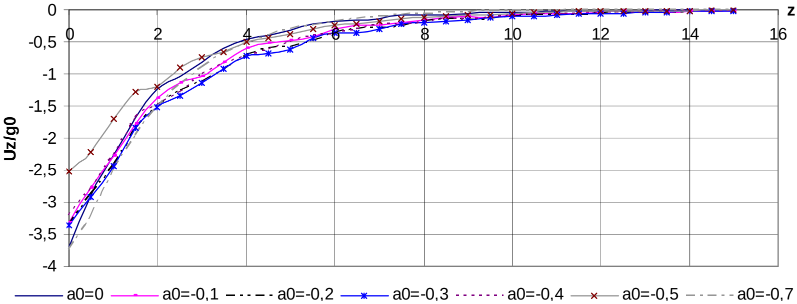

Рис.5.13. Зависимость U_z от координаты z при a_0=0 и a_0= -0,1; -0,2; …; -0,7.

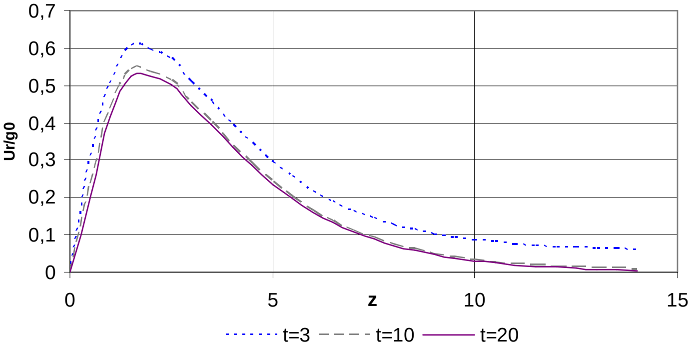

Рис.5.14. Зависимость U_r от координаты при t=3; 10; 20 без учета начальных перемещений.

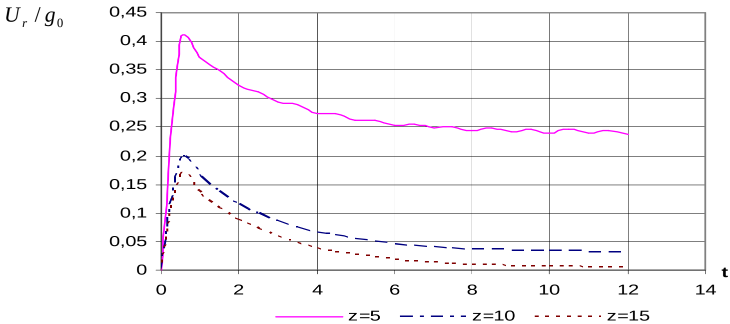

Рис. 5. 15. Зависимость радиальных перемещений точек различных сечений (z=5; 10; 15) от времени.

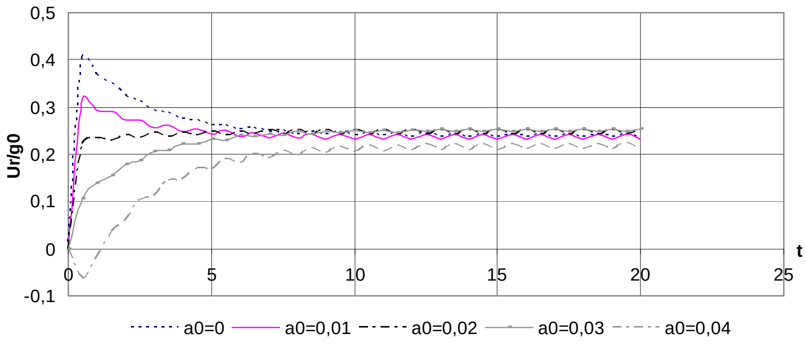

Рис. 5.16. Зависимость U_r точек сечения z=5 от времени с учетом с учетом (a_0=0,01; 0,02; 0,03; 0,04) и без учета (a_0=0) начальных перемещений.

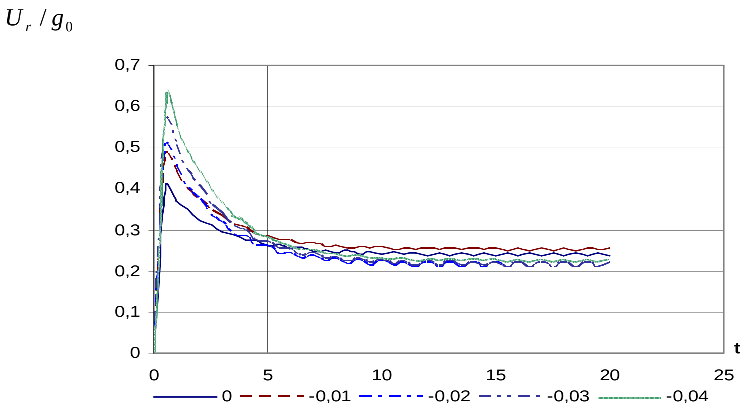

Рис. 5.17. Зависимость U_r точек сечения z=5 от времени с учетом с учетом (a_0=-0,04; -0,03; -0,02; -0,01) и без учета (a_0=0) начальных перемещений.

5.2. Крутильные колебания вязкоупругого кругового цилиндрического слоя с учётом начальных перемещений

Рассмотрим задачу о крутильных колебаниях полубесконечного кругового вязкоупругого цилиндрического слоя с учётом предварительной напряженности материала. Будем считать, что колебания возбуждаются крутильным перемещением f, заданным на торце $z=0$ и затухающим на бесконечности.

В качестве основных разрешающих уравнений примем уточнённые уравнения крутильных колебаний предварительно-напряженных круговых цилиндрических слоёв (4.43) , которые при отсутствии внешних нагрузок и в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{r_1^2}{4}\lambda_1 U_{\theta,0}+\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_1-\frac{4}{r_1^2}\right)+\left(\ln r_1-\frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8}\lambda_1^2\right\}U_{\theta,1}=0,$$

$$\frac{r_2^2}{4}\lambda_1 U_{\theta,0}+\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_1-\frac{4}{r_2^2}\right)+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\lambda_1^2\right\}U_{\theta,1}=0, \tag{5.25}$$

где $\lambda_1=\dfrac{1}{1+b_1}\tilde{M}^{-1}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right]-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; а безразмерные переменные введены по формулам

$$z=z^*\xi;\quad bt=t^*\xi;\quad r_1=r_1^*\xi;\quad r_2=r_2^*\xi;\quad U_{\theta,1}=U_{\theta,1}^*\xi;\quad U_{\theta,0}=U_{\theta.0}^*; \tag{5.26}$$

ξ - радиус промежуточной поверхности слоя; z – продольная координата; r – радиальная координата; t – время; r_1 и r_2 - радиусы внутренней и внешней поверхностей слоя; $U_{\theta,0}$, $U_{\theta,1}$ - главные части крутильного перемещения U_θ; b - скорость распространения поперечных волн в материале слоя.

Напряженно-деформированного состояние слоя определяется по формулам

$$U_\theta = \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln r \, \lambda_1 \right) U_{\theta,1} + r U_{\theta,0};$$

$$\sigma_{r\theta} = (1 + b_1)\mu \tilde{M} \left\{ \frac{r^2}{4} \lambda_1 U_{\theta,0} + \left[\frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \frac{4}{r^2} \right) + \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \frac{r^2}{8} \lambda_1^2 \right] U_{\theta,1} \right\},$$

$$\sigma_{z\theta} = (1 + b_1)\mu \tilde{M} \left\{ r \frac{\partial U_{\theta,0}}{\partial z} + \left[\frac{1}{2} + \ln r \, \frac{r}{2} \lambda_1 \right] \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} \right\}. \qquad (5.27)$$

Начальные условия приняты нулевыми. Граничные условия задачи имеют вид

при $z = 0$: $\quad U_\theta = -f(t); \quad \sigma_{z\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0;$ (5.28)

при $z \to \infty \quad U_\theta = 0.$

Применим преобразование Лапласа по времени к системе уравнений (5.25) и отнимем из первого уравнения второе, в результате получим

$$\overline{U}_{\theta,0} = -\left\{ \frac{8}{r_1^2 \cdot r_2^2} \overline{\lambda}_1^{-1} + \frac{4 \cdot q_1}{r_1^2 - r_2^2} \overline{\lambda}_1 \right\} \overline{U}_{\theta,1}, \qquad (5.29)$$

где

$$q_1 = \left(\ln r_1 - \frac{1}{2} \right) \frac{r_1^2}{8} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8}; \quad \overline{U}_{\theta,1} \div U_{\theta,1}; \quad \overline{U}_{\theta,0} \div U_{\theta,o}.$$

Подставив последнее выражение в первое уравнение преобразованной системы получим уравнение

$$A \frac{\partial^4 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^4} + B \frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^2} + C \overline{U}_{\theta,1} = 0, \qquad (5.30)$$

где

$$A = q_3, \quad B = q_4 Q^2(p) - \frac{1}{2}; \quad C = q_5 Q^4(p) + \frac{Q^2(p)}{2(1 + b_1)} - \frac{2(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 \cdot r_2^2};$$

$$q_2 = -\frac{r_1^2 q_1}{(r_1^2 - r_2^2)}; \quad q_3 = \frac{r_1^2}{8}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2} \right) + q_2; \quad q_4 = \frac{-2 q_3}{(1 + b_1)}; \quad q_5 = \frac{q_3}{(1 + b_1)^2};$$

$$Q^2(p) = \frac{p^2}{1 - \bar{f}_{20}(p)}; \quad \bar{f}_{20}(p) \div f_{20}(t).$$

Общее решение уравнения (5.30), удовлетворяющее условию затухания возмущений на бесконечности равно

$$\overline{U}_{\theta,1} = A_1 e^{-\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2 z} \tag{5.31}$$

где α_1, α_2 -корни характеристического уравнения $A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0$, определяемые формулой $\alpha_{1,2} = \left\{\dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Подставка общего решения (5.31) во второе преобразованное по Лапласу уравнения приводит к следующему неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,0}}{\partial z^2} - \frac{Q^2(p)}{1+b_1}\overline{U}_{\theta,0} = \overline{F}_1, \tag{5.32}$$

где

$$\overline{F}_1 = \frac{4}{r_2^2}\left\{\overline{g}_1(p)A_1 e^{-\alpha_1 z} + \overline{g}_2(p)A_2 e^{-\alpha_2 z}\right\},$$

$$\overline{g}_i(p) = \frac{Q^2(p)}{2(1+b_1)} - \frac{2}{r_2^2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - \alpha_i^{\,2} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{4}\frac{Q^2(p)}{(1+b_1)}\right] - \alpha_i^{\,4}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}, \quad (i = 1,\, 2).$$

Общее решение этого уравнения найдём с помощью метода вариации постоянных

$$\overline{U}_{\theta,0} = \overline{A}_3 e^{-\beta z} + \overline{A}_4 e^{\beta z}, \tag{5.33}$$

где $\beta = \sqrt{Q^2(p)/(1+b_1)}$ - положительный корень характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ функции z, удовлетворяющие следующей системе уравнений

$$\overline{A}_3{}' e^{-\beta z} + \overline{A}_4{}' e^{\beta z} = 0,$$

$$\overline{A}_3{}' e^{-\beta z} - \overline{A}_4{}' e^{\beta z} = -\frac{1}{\beta}\overline{F}_1,$$

из которой находим постоянные

$$\overline{A}_3{}' = e^{-\beta z}\frac{1}{2\beta}\overline{F}_1; \quad \overline{A}_4{}' = e^{\beta z}\frac{1}{2\beta}\overline{F}_1.$$

Проинтегрировав по z последние выражения, находим

$$\overline{A}_3 = A_3 - \frac{1}{2\beta}\int_0^z e^{\beta\xi}\overline{F}_1(\xi)d\xi; \quad \overline{A}_4 = A_4 + \frac{1}{2\beta}\int_0^z e^{-\beta\xi}\overline{F}_1(\xi)d\xi.$$

С учётом последних результатов решение уравнения (5.32) примет вид

$$\overline{U}_{\theta,0} = A_3 e^{-\beta z} - \frac{e^{-\beta z}}{2\beta}\int_0^z \overline{F}_1 e^{\beta\xi}d\xi + \left(A_4 + \frac{1}{2\beta}\int_0^z \overline{F}_1 e^{-\beta\xi}d\xi\right)e^{\beta z}.$$

Из условия затухания возмущений на бесконечности следует, что

$$A_4 = -\frac{1}{2\beta}\int_0^\infty e^{-\beta\xi}\overline{F}_1(\xi)d\xi = -\frac{1}{2\beta}\left[\int_0^z e^{-\beta\xi}\overline{F}_1(\xi)d\xi - \int_z^\infty e^{-\beta\xi}\overline{F}_1(\xi)d\xi\right],$$

подставив это в последнее выражение для $\overline{U}_{\theta,0}$ получим

$$\overline{U}_{\theta,0} = A_3 e^{-\beta z} - \frac{1}{2\beta}\left(e^{-\beta z}\int_0^z \overline{F}_1 e^{\beta\xi}d\xi + e^{\beta z}\int_z^\infty \overline{F}_1 e^{-\beta\xi}d\xi\right). \qquad (5.34)$$

Вычислим интегралы входящие в (5.34)

$$e^{-\beta z}\int_0^z \overline{F}_1(\xi)e^{\beta\xi}d\xi = \frac{4}{r_2^2}\left\{\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1 z} - e^{-\beta z}\right) + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2 z} - e^{-\beta z}\right)\right\},$$

$$e^{\beta z}\int_0^\infty \overline{F}_1(\xi)e^{-\beta\xi}d\xi = \frac{4}{r_2^2}\left\{\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta+\alpha_1}e^{-\alpha_1 z} + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta+\alpha_2}e^{-\alpha_2 z}\right\}.$$

Подставив последние соотношения в (5.34), получим

$$\overline{U}_{\theta,0} = A_3 e^{-\beta z} - \frac{2}{r_2^2\beta}\left\{\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1 z} - e^{-\beta z}\right) + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2 z} - e^{-\beta z}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta+\alpha_1}e^{-\alpha_1 z} + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta+\alpha_2}e^{-\alpha_2 z}\right\}. \qquad (5.35)$$

Применив преобразование Лапласа к граничным условиям (5.28), получим

$$\overline{U}_\theta = -\bar{f}(p), \qquad \overline{\sigma}_{r\theta} = 0, \qquad \overline{\sigma}_{z\theta} = 0 \qquad (5.36)$$

или

$$r\overline{U}_{\theta,0} + \left(\frac{1}{2} + \lambda_1 \ln r\right)\overline{U}_{\theta,1} = -\bar{f}(p),$$

$$\frac{r^2}{4}\lambda_1\overline{U}_{\theta,0} + \left[\frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \frac{4}{r^2}\right) + \left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{8}\lambda_1^2\right]\overline{U}_{\theta,1} = 0, \tag{5.37}$$

$$r\frac{\partial\overline{U}_{\theta,0}}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} + \frac{r}{2}\lambda_1 \ln r\right]\frac{\partial\overline{U}_{\theta,1}}{\partial z} = 0,$$

Подставив значения выражений (5.31), (5.35) в преобразованные граничные условия (5.37) получим систему алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, A_3

$$\begin{aligned} &a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = -\bar{f}(p); \\ &a_{21}A_1 + a_{22}A_2 = 0; \\ &a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = 0, \end{aligned} \tag{5.38}$$

где

$$a_{1i} = \frac{1}{2} + \ln r \cdot \frac{r}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \alpha_i^2\right) - \frac{2r}{\beta(\beta+\alpha_i)}\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2)$$

$$a_{13} = r; \quad a_{23} = 0; \quad a_{33} = -\beta;$$

$$a_{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \alpha_i^2 - \frac{4}{r_2^2}\right) - \left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{8}\left(\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - \frac{2}{1+b_1}Q^2(p)\cdot\alpha_i^2 + \alpha_i^4\right) +$$

$$+\frac{2r}{r_2^2\beta(\beta+\alpha_i)}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \alpha_i^2\right)\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2)$$

$$a_{3i} = \ln r \cdot \frac{r}{2}\alpha_i^3 - \left(\frac{1}{r} + \ln r \cdot \frac{r}{2}\right)\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\alpha_i - \frac{2}{r_2^2\beta}\left(1 - \frac{\alpha_i}{(\beta+\alpha_i)}\right)\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2).$$

Полученные выражения для функций $\overline{U}_{\theta,0}$, $\overline{U}_{\theta,1}$ обратим при больших *p*. Представив $Q^2(p)$ в виде (3.33) и полагая *p* достаточно большим, выражения для α_i и β можно представить в виде

$$\alpha_1 = \gamma_1 \left\{ Q^2(p) + \frac{1}{4q_3\gamma_1} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha_2 = \gamma_2 \left\{ Q^2(p) + \frac{1}{4q_3\gamma_2} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \beta = \gamma_{77}\, Q(p);$$

или

$$\alpha_1 = \gamma_1 \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha_2 = \gamma_2 \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_4^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\beta = \gamma_{77} \left\{ \tilde{p}^2 + \gamma_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \tilde{p} = p + \frac{c_1}{2},$$

где

$$\gamma_0{}^2 = -\frac{c_1^2}{4} - c_2; \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{q_4^2 - 4q_3q_5 - q_4}{2q_3}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{-q_4^2 + 4q_3q_5 - q_4}{2q_3}};$$

$$\gamma_{77} = \sqrt{\frac{1}{1+b_1}}; \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{1}{4q_3\gamma_1} + \gamma_0{}^2}; \quad \gamma_4 = \sqrt{\frac{1}{4q_3\gamma_2} + \gamma_0^2};$$

$$c_1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{\tau_m}; \qquad c_2 = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1}^{n} \alpha_m \alpha_l \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{\tau_l} \right)^2;$$

τ_m, τ_l – времена релаксаций, α_m, α_l - вязкоупругие параметры среды.

Решив систему уравнений (5.30) относительно A_1, A_2, A_3, получим

$$A_1 = \bar{f}(p) \cdot \frac{\gamma_{67}}{Q^2(p)}, \quad A_2 = -\bar{f}(p) \cdot \frac{\gamma_{68}}{Q^2(p)}, \quad A_3 = \gamma_{66} \cdot \bar{f}(p)\cdot, \qquad (5.39)$$

где

$$\gamma_6 = \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_1^2 \gamma_{77}^2 - \gamma_1^4 \right); \qquad \gamma_{10}^0 = \frac{2r}{r_2^2} \left(1 - \gamma_1 / \gamma_{77} \right);$$

$$\gamma_6^0 = \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_2^2 \gamma_{77}^2 - \gamma_2^4 \right); \qquad \gamma_{16} = \frac{2r}{r_2^2} \left(1 - \gamma_2 / \gamma_{77} \right);$$

$$\gamma_{10} = \frac{r}{2} \ln r \left(\gamma_{77}^2 - \gamma_1^2 \right) - \frac{2r(1+b_1)}{1 + \gamma_2 \sqrt{1+b_1}} \gamma_6; \qquad \gamma_{23} = \gamma_{17} + \gamma_6 \gamma_{10}^0;$$

$$\gamma_{13} = \frac{r}{2}\ln r\left(\gamma_{77}^2 - \gamma_2^2\right) - \frac{2r(1+b_1)}{1+\gamma_2\sqrt{1+b_1}}\gamma_6^0; \qquad \gamma_{26} = \gamma_{20} + \gamma_{16}\gamma_6^0;$$

$$\gamma_{17} = -\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_1^2\gamma_{77}^2 + \gamma_1^4\right);$$

$$\gamma_{20} = -\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_2^2\gamma_{77}^2 + \gamma_2^4\right);$$

$$\gamma_{30} = \gamma_{29}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_1^2\gamma_{77}^2 - \gamma_1^4 - \gamma_1\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2}\left(1+\gamma_1^2\right)\ln r\right)\right);$$

$$\gamma_{33} = \gamma_{29}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\gamma_{77}^4 - 2\gamma_2^2\gamma_{77}^2 - \gamma_2^4 - \gamma_2\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2}\left(1+\gamma_2^2\right)\ln r\right)\right);$$

$$\gamma_{40} = \gamma_{10}\gamma_{26}\gamma_{77}; \quad \gamma_{45} = \gamma_{33}\gamma_{23}; \quad \gamma_{50} = \gamma_{26}\gamma_{30}; \quad \gamma_{56} = \gamma_{13}\gamma_{23}\gamma_{77};$$

$$\gamma_{61} = \gamma_{40} + r\gamma_{45} - r\gamma_{50} - \gamma_{56}; \qquad \gamma_{66} = \left(\gamma_{45} + \gamma_{50}\right)/\gamma_{61};$$

$$\gamma_{67} = \gamma_{26}\gamma_{77}/\gamma_{61}; \quad \gamma_{68} = \gamma_{23}\gamma_{77}/\gamma_{61}.$$

Подставив найденные значения A_1, A_2, A_3 в (5.31) и (5.35) получим

$$\overline{U}_{\theta,1} = \bar{f}(p)\left\{\frac{\gamma_{64}\cdot\gamma_1}{p+c_1/2}\cdot\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \frac{\gamma_{68}\cdot\gamma_{21}}{p+c_1/2}\cdot\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\right\},$$

$$\overline{U}_{\theta,0} = \bar{f}(p)\left\{\gamma_{77}\gamma_{66}\cdot\left(p+c_1/2\right)\frac{e^{-\beta z}}{\beta} + \left(\gamma_{71}\cdot\left(p+c_1/2\right) + \gamma_{72} + \gamma_{73}\frac{1}{p+c_1/2}\right)\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1} + \right.$$
$$\left. + \left(\gamma_{74}\cdot\left(p+c_1/2\right) + \gamma_{75} + \gamma_{76}\frac{1}{p+c_1/2}\right)\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\right\}, \qquad (5.40)$$

где $\gamma_{69} = \dfrac{\gamma_{67}\gamma_1}{1-(1+b_1)\gamma_1^2}$; $\gamma_{70} = \dfrac{\gamma_{68}\gamma_2}{1-(1+b_1)\gamma_2^2}$; $\gamma_{72} = \dfrac{4}{r_2^2}\dfrac{\gamma_{69}\gamma_1^2}{2}$;

$$\gamma_{71} = \gamma_{69}\left(\ln r_2 - 1/2\right)\left(-\gamma_{77}^2/2 + \gamma_1^2 + \gamma_1^4/2\right);$$

$$\gamma_{73} = -\frac{2}{r_2^2}\gamma_{69}\left(1 - \gamma_1^2\left(1+b_1\right)\left(1 + \frac{\ln r_2 - 1/2}{4q_3\gamma_1}\right) - \gamma_1^3\left(\ln r_2 - 1/2\right)\frac{r_2^2}{8q_3}\right);$$

$$\gamma_{74} = \gamma_{70}\left(\ln r_2 - 1/2\right)\left(-\gamma_{77}^2/2 + \gamma_1^2 + \gamma_1^4/2\right); \quad \gamma_{75} = \frac{4}{r_2^2}\frac{\gamma_{70}\gamma_2^{\ 2}}{2};$$

$$\gamma_{76} = -\frac{2}{r_2^2}\gamma_{70}\left(1 - \gamma_2^2\left(1+b_1\right)\left(1 + \frac{\ln r_2 - 1/2}{4q_3\gamma_2}\right) - \gamma_2^3\left(\ln r_2 - 1/2\right)\frac{r_2^2}{8q_3}\right).$$

Применим к выражениям (5.40) обратное преобразование Лапласа по времени, с использованием теорем запаздывания и свертки функций. В итоге получим следующие выражения для искомых функций являющиеся решением задачи

$$U_{\theta,1} = \gamma_{64} e^{-\frac{c_1}{2}t}\int_{\gamma_7 z}^{t} F_1(t-\tau) I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 z^2}\right)d\tau - \gamma_{68} e^{-\frac{c_1}{2}t}\int_{\gamma_7 z}^{t} F_1(t-\tau) I_0\left(\gamma_4\sqrt{\tau^2 - \gamma_2^2 z^2}\right)d\tau;$$

$$U_{\theta,0} = \frac{1}{\gamma_1}\int_{\gamma_1 z}^{t} F_2(t-\tau) e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_3\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 z^2}\right)d\tau -$$

$$-\frac{1}{\gamma_2}\int_{\gamma_7 z}^{t} F_3(t-\tau) e^{-\frac{c_1}{2}\tau} I_0\left(\gamma_4\sqrt{\tau^2 - \gamma_2^2 z^2}\right)d\tau +$$

$$+\gamma_{66}\int_{\gamma_7 z}^{t}\left[f'(t-\tau) + \frac{c_1}{2} f(t-\tau)\right] I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2 - \gamma_{77}^2 z^2}\right)e^{-\frac{c_1}{2}} d\tau;$$

$$F_1(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi; \quad F_2(t) = \gamma_{71} f'(t) + \left(\gamma_{71}c_1/2 + \gamma_{72}\right)f(t) + \gamma_{73}F_1(t);$$

$$F_2(t) = \gamma_{74} f'(t) + \left(\gamma_{74}c_1/2 + \gamma_{75}\right)f(t) + \gamma_{76}F_1(t).$$

Подставив последние найденные выражения в формулы (5.27) были вычислены касательные напряжения $\sigma_{z\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ и крутильное перемещение U_θ в зависимости от времени *t* и координаты *z* для вязкоупругого материала физические параметры которых заданы в виде (3.44), при этом внешняя нагрузка была задана в виде гладкой синусоидальной функции по формулам (3.45). Результаты вычислений приведены на рисунках 5.18-5.26.

На рис.5.18-5.24 представлены графики изменения перемещения U_θ и напряжения $\sigma_{z\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ во времени для фиксированного сечения $z=5$ и различных значений коэффициента предварительной напряженности b_1. На рис.5.18-5.21 представлены графики изменения напряжений и перемещения при значениях b_1 от 0 до 0,5 (b_1 =0 соответствует случаю не учёта начальных напряжений), а на рис.5.22 и 5.23 напряжения вычислены при отрицательных значениях b_1. По приведённым рисункам видно влияние коэффициента предварительной напряжённости b_1 на графики изменения напряжений и перемещений, которое существенно в начальные моменты взаимодействия. По этим графикам можно сделать вывод, что в начале взаимодействия наблюдается резкое увеличение значений перемещения и напряжений, а с течением времени колебательный процесс стабилизируется и переходит в установившееся состояние.

На рис.5.24-5.25 представлены графики изменения перемещения U_θ и напряжения $\sigma_{z\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в зависимости от координаты, при фиксированном значении времени *t=1* и различных значениях коэффициента b_1. Из графиков видно, что с ростом расстояния от торца амплитуда напряжения падает и на расстоянии приблизительно 6-7 радиусов от торца ими можно пренебречь, это наблюдается при любом значении коэффициента b_1. Графики крутильного перемещения имеют колеблющийся гармонический характер, которое затухают по мере удаления от торца и приблизительно при $z \approx 5$ стабилизируются.

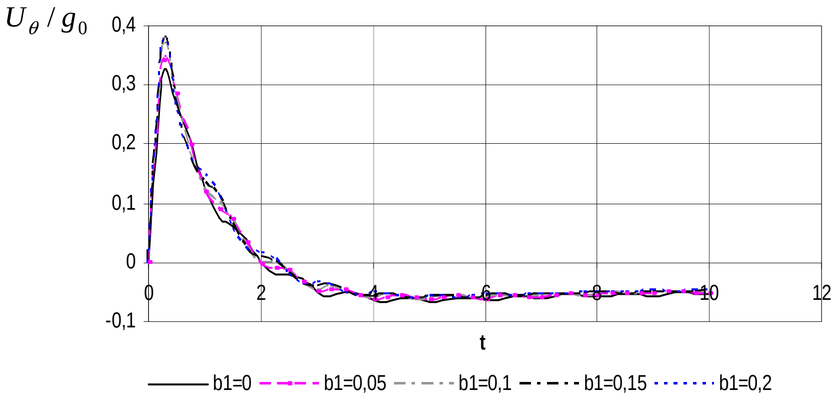

Рис. 5.18. Зависимость U_θ от времени при z=5 и различных b_1 (0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20).

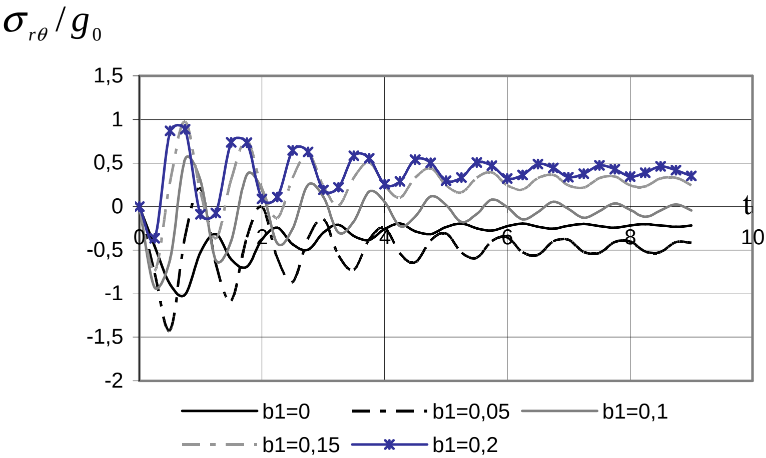

Рис. 5.19. Изменения напряжения $\sigma_{r\theta}$ от времени в сечении z=5 при различных b_1 (0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20).

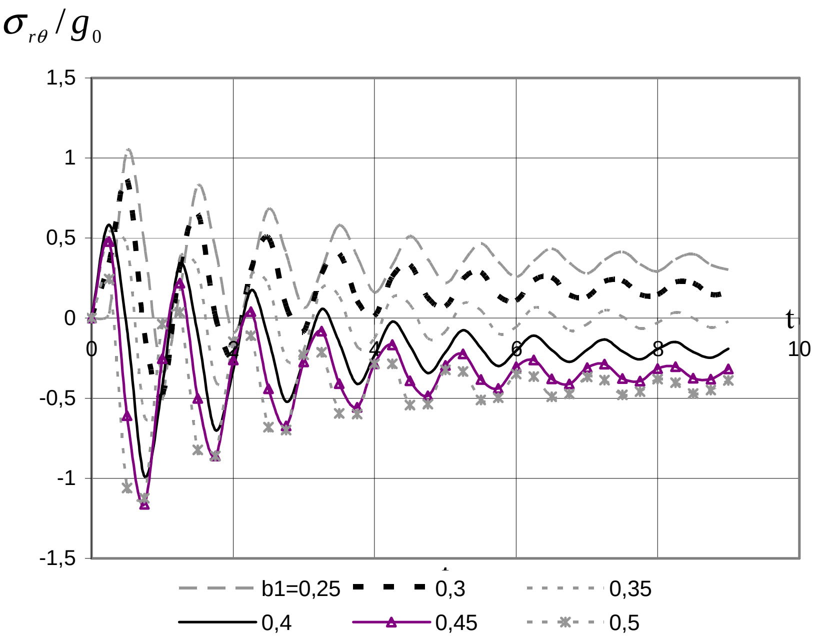

Рис. 5.20. Изменения напряжения $\sigma_{r\theta}$ от времени в сечении z=5 при различных b_1 (0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,45; 0,50).

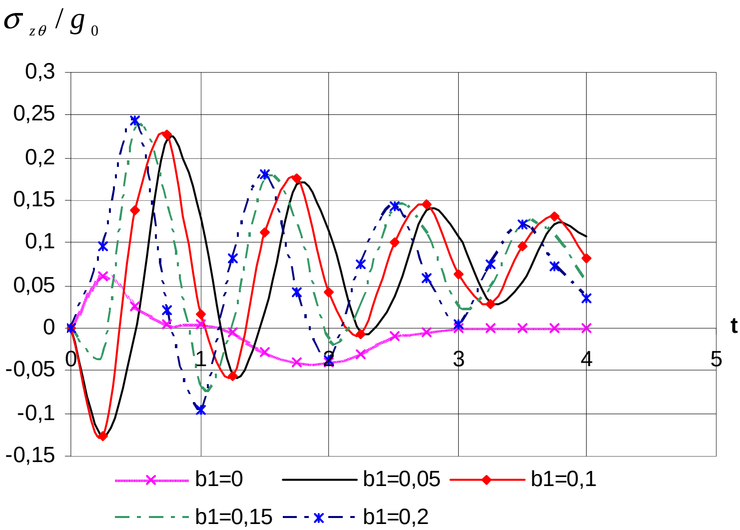

Рис. 5.21. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от времени в сечении z=5 при различных положительных b_1 (0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20).

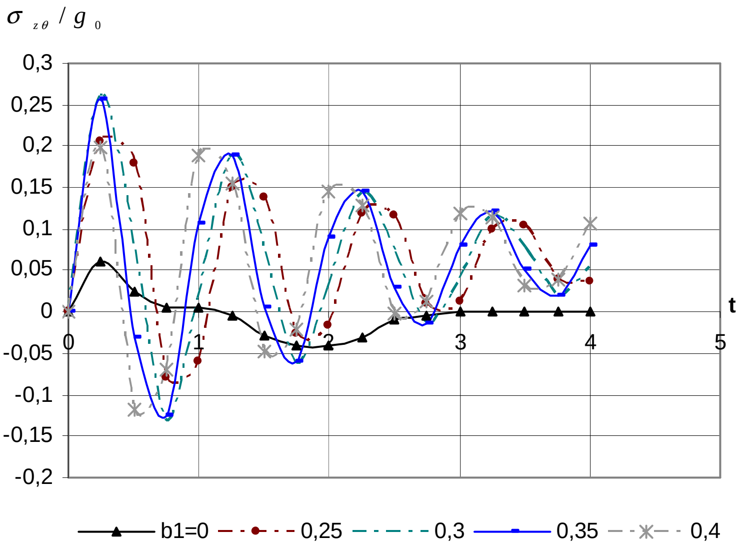

Рис. 5.22. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от времени в сечении z=5 при различных отрицательных b_1 (-0,25; -0,30; -0,35; -0,40).

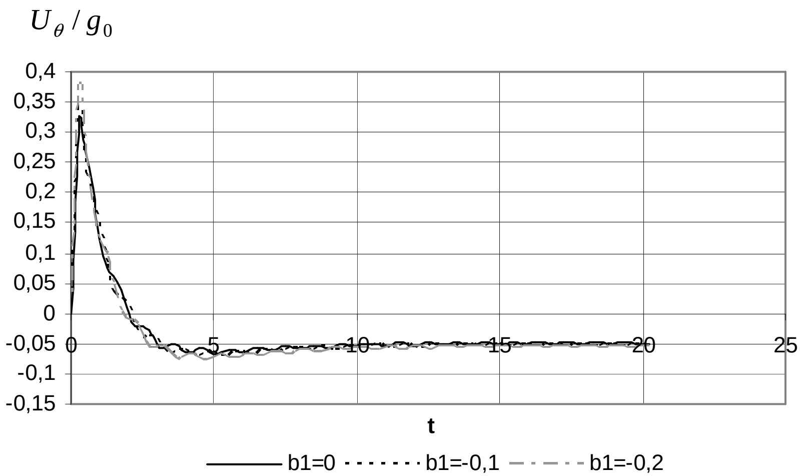

Рис. 5.23. Зависимость перемещения U_θ от времени при различных отрицательных b_1 (0; -0,1; -0,2).

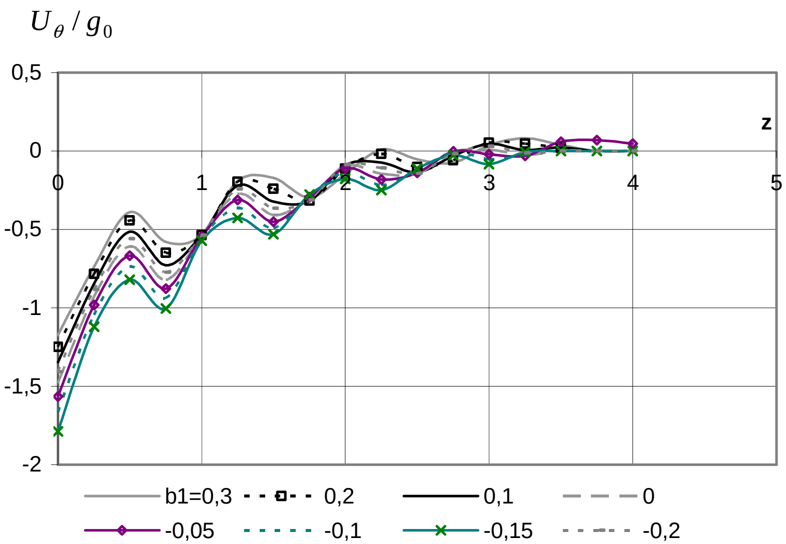

Рис. 5.24. Зависимость перемещения U_θ от продольной координаты z при фиксированном t=1 и различных значениях b_1 (0,3; 0,2; 0,1; 0; -0,05; -0,10; -0,15; -0,20).

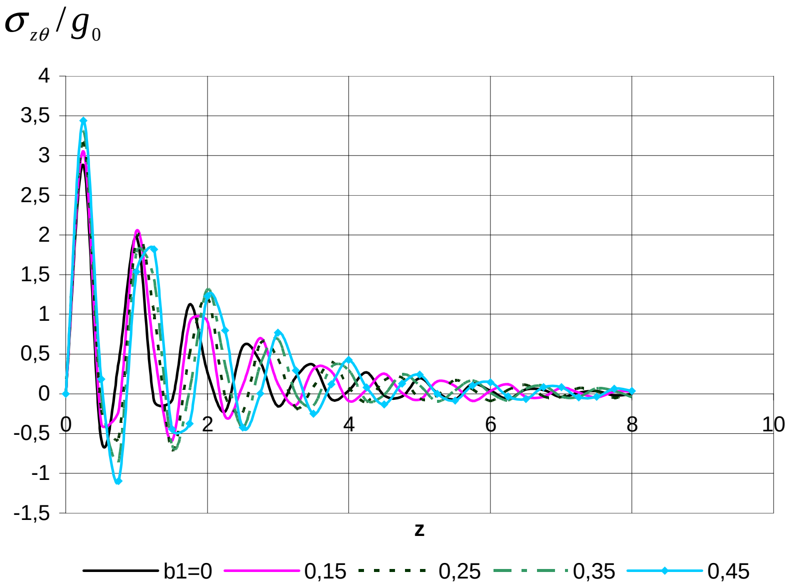

Рис. 5.25. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от продольной координаты z при фиксированном t=1 и различных значениях b_1 (0; 0,15; 0,25; 0,35; 0,45).

5.3. Волны кручения в предварительно-напряженном вязкоупругом цилиндрическом слое при ненулевых начальных условиях

Рассматривается осесимметричная задача о распространении волн кручения в круговом цилиндрическом слое, при кинематическом возбуждении на торце и при ненулевых начальных условиях. Материал, рассматриваемого слоя предполагается вязкоупругим, изотропным, предварительно–наряженным и однородным. При решении задачи в качестве разрешающих уравнений приняты уравнения (5.25). Граничные условия задачи имеют вид:

$$\text{при } z=0 \qquad U_\theta = -f(t); \quad \sigma_{z\theta}=0; \tag{5.41}$$

$$\text{при } z \to \infty \qquad U_\theta = 0.$$

Начальные условия задачи приняты в виде:

при $t=0$: $U_\theta = a_0 \cdot e^{-k_1 z}$

или

$$U_{\theta,0} = a_1 \cdot e^{-k_1 z}; \quad U_{\theta,1} = a_2 \cdot e^{-k_1 z}; \tag{5.42}$$

$$\dot{U}_{\theta,0} = \ddot{U}_{\theta,0} = \dddot{U}_{\theta,0} = \dot{U}_{\theta,1} = \ddot{U}_{\theta,1} = \dddot{U}_{\theta,1} = 0. \qquad (a_1, a_2 = const)$$

Напряженно-деформированное состояние определяется по формулам (4.2.3).

Применив преобразование Лапласа к системе уравнений (5.25), с учетом начальных условий (5.42), получим

$$\frac{r_1^2}{4} \cdot \left[\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \overline{U}_{\theta,0} + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4}{r_1^2}\right) + \left(\ln r_i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{r_i^2}{8} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - \frac{2Q^2(p)}{1+b_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]\right\} \overline{U}_{\theta,1} + \frac{Q^2(p)}{1+b_1} \cdot \frac{r_i^2}{4} \cdot a_1 \cdot e^{-k_1 z} +$$

$$+ \left[\frac{Q^2(p)}{2(1+b_1)} + \frac{r_i^2}{8} \ln r_i - \frac{1}{2} \frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2}\right] \cdot a_2 \cdot e^{-k_1 z} - \frac{Q^2(p)}{1+b_1} a_2 k_1^2 e^{-k_1 z} \times$$

$$\times \left(\ln r_i - \frac{1}{2}\right) \frac{v_i^2}{4} = 0, \qquad (i = 1,2) \tag{5.43}$$

где

$$\overline{U}_{\theta,0} \Leftrightarrow U_{\theta,0}; \quad \overline{U}_{\theta,1} \Leftrightarrow U_{\theta,1}, \quad Q^2(p) = \frac{p^2}{1 - f_{20}(p)}, \quad f_{20}(p) \Leftrightarrow f_2(t).$$

Отнимем из первого уравнения (при $i=1$) последней системы второе (при i=2), и, в результате получим

$$\overline{U}_{\theta,0} = -\left\{\frac{8}{r_1^2 \cdot r_2^2} \cdot \left[\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^{-1} + \frac{4}{r_1^2 - r_2^2} \cdot q_1 \cdot \left[\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\} \overline{U}_{\theta,1} -$$

$$-\left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{4} \cdot \frac{Q^2(p)}{1+b_1} \cdot a_1 \cdot e^{-k_1 z} + q_1 \left(\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)} \cdot a_2 \cdot e^{-k_1 z} - \frac{Q^2(p)}{1+b_1} \cdot a_2 \cdot k_1^2 \cdot e^{-k_1 z}\right)\right] \times$$

$$\times \left[Q^2(p) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^{-1},$$

где $q_1 = \left(\ln z_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}$.

Подставив последнее выражение в первое уравнение системы (5.43), при $i=1$ получим

$$A\frac{\partial^4 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^4} + B\frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^2} + C\overline{U}_{\theta,1} = \overline{F}_1(z,p), \qquad (5.4)$$

где $\overline{F}_1(z,p) = \overline{g}_1(p)\cdot e^{-k_1 z}$,

$$\overline{g}_1(p) = q_6\cdot Q^2(p)\cdot a_1 - \frac{Q^2(p)}{2(1+b_1)}\cdot a_2 + q_8\cdot Q^4(p)\cdot a_2 + q_7\cdot Q^2(p)\cdot a_2 k_1^2;$$

$$A = q_3;\quad B = q_4 Q^2(p) - \frac{1}{2};\quad C = q_5 Q^4(p) + \frac{Q^2(p)}{2(1+b_1)};$$

$$q_3 = q_2 + \frac{r_1^2}{8}\cdot\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right),\quad q_2 = \frac{r_1^2\cdot q_1}{r_1^2 - r_2^2};$$

$$q_4 = \frac{1}{b_1+1}\left(2q_2 - \frac{1}{2}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\right);\quad q_5 = \frac{q_3}{(1+b_1)^2},$$

$$q_6 = \frac{r_1^2}{4(1+b_1)}\cdot\left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{4} - 1\right];\quad q_7 = \left[\ln r_1 - \frac{1}{2} - q_1\right]\frac{r_1^2}{4(1+b_1)};$$

$$q_8 = \left[q_1 - \frac{1}{2}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\right]\frac{r_1^2}{4(1+b_1)^2}.$$

Для решения неоднородного уравнения (5.45) применим метод вариации постоянных. Получим выражение

$$\overline{U}_{\theta,1} = A_1\cdot e^{-\alpha_1 z} + \beta_1\cdot e^{-\alpha_1 z}\int_0^z \overline{F}_1(\xi,p)e^{\alpha_1\xi}d\xi + \beta_1\cdot e^{\alpha_1 z}\int_z^\infty \overline{F}_1(\xi,p)\cdot e^{-\alpha_1 z}d\xi +$$

$$+A_3\cdot e^{-\alpha_2 z} + \beta_2 e^{-\alpha_2 z}\int_0^z \overline{F}_1(\xi,p)e^{-\alpha_2\xi}d\xi + \beta_2 e^{-\alpha_2 z}\int_z^\infty \overline{F}_1(\xi,p)e^{-\alpha_2 z}d\xi, \qquad (5.45)$$

где A_1 и A_3 - постоянные интегрирования, α_1 и α_2 - положительные корни соответствующего однородного уравнения, равные

$$\alpha_{1,2}=\sqrt{\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}};$$

$$\beta_1=\frac{\alpha_2^3-\alpha_1^2\cdot\alpha_2}{2\alpha_1^3\cdot\left(\alpha_1^2\cdot\alpha_2-\alpha_2^3\right)+2\alpha_2^3\left(\alpha_1\alpha_2^2-\alpha_1^3\right)};$$

$$\beta_2=\frac{\alpha_1^3-\alpha_2^2\cdot\alpha_1}{2\alpha_2^3\cdot\left(\alpha_2^2\cdot\alpha_1-\alpha_1^3\right)+2\alpha_1^3\left(\alpha_2\alpha_1^2-\alpha_2^3\right)}.$$

Вычислим интегралы входящие в (5.45)

$$\beta_1\cdot e^{-\alpha_1 z}\int_z^\infty \overline{F_1}(\xi,p)e^{\alpha_1\xi}d\xi=\frac{\beta_1\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_1-k_1}\cdot\left(e^{-k_1 z}-e^{-\alpha_1 z}\right);$$

$$\beta_1\cdot e^{\alpha_1 z}\int_z^\infty \overline{F_1}(\xi,p)e^{-\alpha_1\xi}d\xi=\frac{\beta_1\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_1+k_1}\cdot e^{-k_1 z};$$

$$\beta_2\cdot e^{-\alpha_2 z}\int_z^\infty \overline{F_1}(\xi,p)e^{\alpha_2 z}d\xi=\frac{\beta_2\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_2-k_1}\left(e^{-k_1 z}-e^{-\alpha_2 z}\right);$$

$$\beta_2\cdot e^{\alpha_2 z}\int_z^\infty \overline{F_1}(\xi,p)e^{-\alpha_2\xi}d\xi=\frac{\beta_2\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_2+k_1}\cdot e^{-k_1 z}.$$

Подставив последние выражения в (5.45), получим

$$\overline{U}_{\theta,1}=A_1\cdot e^{-\alpha_1 z}+A_3\cdot e^{-\alpha_2 z}+\frac{\beta_1\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_1-k_1}\cdot\left(e^{-k_1 z}-e^{-\alpha_1 z}\right)+ \qquad (5.46)$$

$$+\frac{\beta_1\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_1+k_1}\cdot e^{-k_1 z}+\frac{\beta_2\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_2-k_1}\cdot\left(e^{-k_1 z}-e^{-\alpha_2 z}\right)+\frac{\beta_2\cdot\overline{g}_1(p)}{\alpha_2+k_1}\cdot e^{-k_1 z}.$$

Подстановка последнего выражения во второе уравнение системы (5.43) даёт следующее неоднородное уравнение.

$$\frac{\partial^2\overline{U}_{\theta,0}}{\partial z^2}-\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\cdot\overline{U}_{\theta,0}=\overline{F}_2(z,p), \qquad (5.47)$$

где

$$\overline{F}_2(z,p)=\overline{g}_2(p)\cdot e^{-k_1 z}+\overline{g}_3(p)\cdot e^{-\alpha_1 z}+\overline{g}_4(p)\cdot e^{-\alpha_2 z},$$

$$\overline{g}_2(p)=Q^2(p)\cdot q_0^2\cdot q_{10}-q_{11}\cdot Q^4(p)-\overline{g}_1(p)\times$$

$$\times\left[\frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2-k_1^2}+\frac{2\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2-k_1^2}\right]\cdot\left[q_{12}\cdot Q^2(p)+q_{13}\right];$$

$$\bar{g}_3(p)=-\left[\frac{2}{r_2^2}\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}-\frac{16}{r_2^4}+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2}\right]\cdot\left(A_1-\frac{\bar{g}_1(p)\cdot\beta_1}{\alpha_1-\chi_1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2}{r_2^2}+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\right)\cdot\left(A_1\cdot\alpha_1^2-\bar{g}_1(p)\cdot\beta_1\cdot\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1-k_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{-A_1\alpha_1^4+\bar{g}_1(p)\cdot\beta_1\frac{\alpha_1^4}{\alpha_1-k_1}\right\};$$

$$\bar{g}_4(p)=-\left[\frac{2}{r_2^2}\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}-\frac{16}{r_2^4}+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2}\right]\cdot\left(A_3-\frac{\bar{g}_1(p)\cdot\beta_2}{\alpha_2-K_1}\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{r_2^2}+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\right)\cdot\left(A_3\cdot\alpha_2^2-\frac{\bar{g}_1(p)\cdot\beta_2\cdot\alpha_2^2}{\alpha_2-k_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\beta_2\cdot\alpha_2^4\cdot\bar{g}_1(p)}{\alpha_2-k_1}-A_3\cdot\alpha_2^4\right\},$$

$$q_{10}=k_1^2\cdot\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)-a_1-\frac{2a_2}{r_2^2};\quad q_{11}=-\frac{a_2}{2}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot q_0^4;$$

$$q_{12}=\frac{2}{r_2^2}\cdot q_0^2-\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)q_0^2;\quad q_{13}=-\frac{16}{r_2^4}-\frac{2}{r_2^2}+\frac{1}{2}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right).$$

Общее решение неоднородного уравнения (5.47) найдём также с помощью метода вариации постоянных (изложенным в предыдущем параграфе)

$$\bar{U}_{\theta,0}=\bar{A}_5e^{-\beta z}+\bar{A}_6e^{\beta z},\qquad\left(\beta=q_0\cdot Q(p),\ q_0=1/\sqrt{1+b_1}\right)$$

где $\bar{A}_5$ и $\bar{A}_6$ - зависящие от z переменные, удовлетворяющие условиям

$$\bar{A}_5'\cdot e^{-\beta z}+\bar{A}_6'\cdot e^{\beta z}=0,$$

$$\bar{A}_5'\cdot e^{-\beta z}+\bar{A}_6'\cdot e^{\beta z}=-\frac{1}{\beta}\cdot\bar{F}_2(z,p).$$

Решив эту систему и сделав необходимые выкладки находим, что

$$\overline{U}_{\theta,0} = A_5 \cdot e^{-\beta z} - \frac{1}{2\beta} \cdot \left\{ g_2(p) \cdot \left(\frac{2\beta}{\beta^2 - k_1^2} \cdot e^{-k_1 z} - \frac{1}{\beta - k_1} \cdot e^{-\beta z} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{g}_3(p) \cdot \left[\frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha_1^2} \cdot e^{-\alpha_1 z} - \frac{e^{-\beta z}}{\beta - \alpha_1} \right] + \bar{g}_4(p) \cdot \left[\frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha_2^2} \cdot e^{-\alpha_2 z} - \frac{e^{-\beta z}}{\beta - \alpha_2} \right] \right\}. \tag{5.48}$$

Применив преобразование Лапласа к граничным условиям (5.41), получим

$$r \cdot \overline{U}_{\theta,0} + \left(\frac{1}{2} + \bar{\lambda}_1 \ln r \right) \overline{U}_{\theta,1} = -\bar{f}(p),$$

$$\frac{\partial \overline{U}_{\theta,0}}{\partial z} = 0; \qquad \left[\frac{1}{2} + \ln r \frac{r}{2} \bar{\lambda}_1 \right] \frac{\partial \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z} = 0, \tag{5.49}$$

где $\bar{\lambda}_1 = Q^2(p) \cdot q_0 - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Подставив значения выражений (5.46) и (5.48) в преобразованные граничные условия (5.49), получим систему алгебраических уравнений относительно A_1, A_3, A_5

$$\begin{aligned} a_{11}A_1 + a_{12}A_3 + a_{13}A_5 &= b_1, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_3 + a_{23}A_5 &= b_2, \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_3 + a_{33}A_5 &= b_3, \end{aligned} \tag{5.50}$$

где

$$a_{1i} = \frac{1}{2} + \ln r \cdot \frac{Q^2(p)}{1 + b_1} - \alpha^2 \cdot \left[\ln r + \frac{2}{r_2^2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{Q^2(p)}{1 + b_1} \right] +$$

$$+ \frac{\alpha_i^4}{2} \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{r}{2\beta(\beta - \alpha_i)} \cdot \left[\frac{2}{r_2^2} \cdot q_0^2 Q^2(p) - \frac{16}{r_2^4} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times q_0^4 Q^4(p) - \left(\frac{2}{r_2^2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{Q^2(p)}{1 + b_1} \right) \cdot \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{2} \cdot \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \right]; \qquad (i = 1,2)$$

$$a_{2i}=\frac{1}{2(\beta+\alpha_i)}\left[-\frac{1}{r_2^2}\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}+\frac{16}{r_2^4}-\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{Q^4(p)}{1+b_1}+\frac{2}{r_2^2}+\right.$$

$$\left.+\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\alpha_i^2-\frac{\alpha}{2}\right];\quad (i=1,2)$$

$$a_{23}=-\beta;\qquad a_{33}=0;\qquad a_{13}=r;$$

$$a_{3i}=-\alpha_i\left[\frac{1}{r}+\ln r\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\right]-\alpha_i^3\ln r\cdot\frac{r}{2};\qquad (i=1,2)$$

$$b_1=-f(p)+\frac{r}{2\beta}\cdot\left[\frac{\overline{g}_2(p)}{\beta-k_1}+\frac{\overline{g}_3(p)}{\beta-\alpha_1}+\frac{\overline{g}_4(p)}{\beta-\alpha_2}\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\cdot\ln r\right]\cdot\overline{g}_1(p)\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_1}{\beta-\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\beta-\alpha_2}\right)+\ln r\cdot\overline{g}_1(p)\cdot\left[\beta_1\cdot\left(\frac{2\alpha_1k_1^2}{\alpha_1^2-k_1^2}-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1-k_1}\right)+\right.$$

$$\left.\beta_2\left(\frac{2\alpha_2k_1^2}{\alpha_2^2-k_1^2}-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_2-k_1}\right)\right];$$

$$b_2=\overline{g}_2(p)\cdot\frac{1}{2(\beta+k_1)}+\overline{g}_3(p)\cdot\frac{1}{2(\beta+\alpha_1)}+\overline{g}_4\cdot\frac{1}{2(\beta+\alpha_2)};$$

$$b_3=-\left[\frac{1}{r}+\ln r\frac{r}{2}\cdot\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\right]\cdot\overline{g}_1(p)\cdot\left[\beta_1\cdot\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2-k_1^2}+\beta_2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2-k_1^2}\right]+$$

$$+\frac{r}{2}\ln r\cdot\overline{g}_1(p)\cdot\left[\beta_1\left(\frac{\alpha_1^3}{\alpha_1-k_1}-\frac{2\alpha_1\cdot k_1^3}{\alpha_1^2-k_1^2}\right)-\beta_2\left(\frac{\alpha_2^3}{\alpha_2-k_1}-\frac{2\alpha_2\cdot k_1^3}{\alpha_2^2-k_1^2}\right)\right].$$

Полученные выражения для функций $\overline{U}_{\theta,0}$ и $\overline{U}_{\theta,1}$ обратим при больших p. Представим $Q^2(p)$ как и предыдущих параграфах по формуле (3.29). Полагая p достаточно большим, выражения для α_1,α_2 и β можно представить в виде:

$$\alpha_1=\gamma_1\cdot Q(p)=\gamma_1\cdot\sqrt{\tilde{p}+\gamma_0^2},\quad \beta=q_0\cdot Q(p)=q_0\cdot\sqrt{\tilde{p}+\gamma_0^2},$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 \cdot \left[Q^2(p) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right]^{\frac{1}{2}} = \gamma_2 \cdot \sqrt{\tilde{p} + \gamma_4^2}, \quad \tilde{p} = p + \frac{c_1}{2}, \qquad (5.51)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{2q_3} \cdot \sqrt{\sqrt{q_4^2 - 4q_3 q_5} - q_4} \,/\, 2q_3; \quad \gamma_0^2 = -\frac{c_1^2}{4} - c_2; \quad \gamma_4^2 = \gamma_3^2 + \gamma_0^2;$$

$$\gamma_2 = \sqrt{2q_3} \cdot \sqrt{q_4 + \sqrt{q_4^2 - 4q_3 \cdot q_5}} \,/\, 2q_3; \quad \gamma_3 = \sqrt{2q_3} \,/\, 4q_3.$$

Решив систему уравнений (5.50) методом Крамера и получим следующее решение

$$A_1 = -\frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \left(\gamma_{15} \cdot \gamma_{43} + \gamma_{44} \cdot \gamma_{15} \cdot \frac{1}{Q(p)} + \gamma_{60} \frac{1}{Q^2(p)} \right);$$

$$A_3 = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \left(\gamma_{12} \cdot \gamma_{43} + \frac{\gamma_{44} \cdot \gamma_{12}}{Q(p)} + \gamma_{61} \cdot \frac{1}{Q^2(p)} \right); \qquad (5.52)$$

$$A_5 = \frac{1}{\gamma_{50}} \cdot \left(\gamma_{62} \cdot Q^2(p) + \gamma_{63} Q(p) + \gamma_{64} + \frac{\gamma_{65}}{Q(p)} + \frac{\gamma_{66}}{Q^2(p)} \right) - \bar{f}(p) \cdot \frac{\gamma_{67}^0}{\gamma_{50}} \cdot \frac{1}{Q^2(p)^2}.$$

Подставив последние значения $A_i (i = 1, \overline{3})$ в решения (5.46) и (5.48), получим

$$\overline{U}_{\theta,1} = e^{-k_1 z} \cdot \gamma_{96} + \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1} \cdot \left\{ \gamma_{90} \cdot Q(p) + \gamma_{91} + \frac{\gamma_{92}}{Q(p)} \right\} +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2} \cdot \left\{ \gamma_{93} Q(p) + \gamma_{94} + \frac{\gamma_{95}}{Q(p)} \right\}$$

$$\overline{U}_{\theta,0} = \gamma_{97} \cdot \bar{f}(p) \cdot \frac{1}{Q(p)} \cdot \frac{e^{-\beta z}}{\beta} + \frac{e^{-\beta z}}{\beta} \times \left\{ Q^3(p)\gamma_{84} + Q^2(p)\gamma_{85} + \right.$$

$$\left. + Q(p) \cdot \gamma_{86} + \gamma_{87} + \frac{\gamma_{88}}{Q(p)} \right\} + \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1} \left\{ Q^2(p)\gamma_{76} \cdot \gamma_{73} + Q(p) \cdot \gamma_{76} \cdot \gamma_{74} + \right.$$

$$\left. + \gamma_{78} + \gamma_{77}\gamma_{74} / Q\ \ (p) \right\} \frac{1}{q_0^2 - \gamma_1^2} + \frac{e^{-k_1 z}}{q_0^2} \cdot \left\{ -q_{11} Q^2(p) + \gamma_{82} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{q_0^2 - \gamma_2^2} \cdot \frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2} \left\{ \gamma_{67} \cdot \gamma_{70} Q^2(p) + \gamma_{67} \cdot \gamma_{71} Q(p) + \gamma_{80} + \frac{\gamma_{68}\gamma_{71}}{Q(p)} \right\}, \qquad (5.53)$$

где

$$\gamma_{84} = \frac{q_0 \cdot \gamma_{62}}{\gamma_{50}} - \frac{q_{11}}{2} + \frac{\gamma_{76} \cdot \gamma_{73}}{2(q_0 - \gamma_1)} + \frac{\gamma_{67} \cdot \gamma_{70}}{2(q_0 - \gamma_2)};$$

$$\gamma_{85} = \frac{\gamma_{76} \cdot \gamma_{74}}{2(q_0 - \gamma_1)} + \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{63} + \frac{\gamma_{67} \cdot \gamma_{71}}{2(q_0 - \gamma_2)};$$

$$\gamma_{86} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{64} + \frac{\gamma_{82}}{2q_0} + \frac{\gamma_{78}}{2(q_0 - \gamma_1)} + \frac{\gamma_{80}}{2(q_0 - \gamma_2)};$$

$$\gamma_{87} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{65} + \frac{\gamma_{77} \cdot \gamma_{74}}{2(q_0 - \gamma_1)} + \frac{\gamma_{68} \cdot \gamma_{71}}{2(q_0 - \gamma_2)}; \quad \gamma_{95} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \gamma_{61} \gamma_2 - \frac{\gamma_9}{\gamma_7};$$

$$\gamma_{88} = \frac{\gamma_{83}}{2q_0} + \frac{\gamma_{79}}{2(q_0 - \gamma_1)} + \frac{\gamma_{81}}{2(q_0 - \gamma_2)}; \qquad \gamma_{96} = \frac{2\gamma_5 \gamma_{30}}{\gamma_1} + \frac{2\gamma_8 \cdot \gamma_{30}}{2};$$

$$\gamma_{90} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \gamma_1 \gamma_{15} \gamma_{13} - \gamma_5 \gamma_{30}; \quad \gamma_7 = 2\gamma_1^3 (\gamma_1^2 \gamma_2 - \gamma_2^3) + 2\gamma_2^3 (\gamma_1 \gamma_2^2 - \gamma_1^3);$$

$$\gamma_{91} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{44} \cdot \gamma_{15} \cdot \gamma_1; \quad \gamma_{92} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{60} \cdot \gamma_1 - \gamma_{29}; \qquad \gamma_{97} = \frac{\gamma_{67}^0 \cdot q_0}{\gamma_{50}};$$

$$\gamma_{93} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_{43} \cdot \gamma_{12} - \gamma_8 \cdot \gamma_{30}; \quad \gamma_{94} = \frac{q_0}{\gamma_{50}} \cdot \gamma_{44} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_2;$$

$$\gamma_5 = \gamma_2^3 - \gamma_1^2 \cdot \gamma_2; \qquad \gamma_6 = a_1 \cdot q_6 - \frac{a_2}{2(1+b_1)} + q_7 \cdot a_2 \cdot k_1^2;$$

$$\gamma_8 = \gamma_1^3 - \gamma_2^2 \cdot \gamma_1; \qquad \gamma_9 = \gamma_6 \cdot \gamma_8 - \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_1 \cdot a_2 \cdot q_8;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_1 \cdot \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(q_0^2 + \frac{\gamma_1^3}{2} \right); \quad \gamma_{15} = \left(\frac{\gamma_2^4}{2} - \gamma_2^2 \cdot q_0^2 \right) \cdot \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right);$$

$$\gamma_{13} = \ln r \cdot q_0^2 - \gamma_1 (\ln r + 2/r_2) - \frac{r \cdot (\ln r_2 - 1/2)}{2q_0 (q_0 - \gamma_1)} \cdot \left(q_0^4 - \gamma_1^2 \cdot q_0^2 + \frac{\gamma_1^4}{2} \right);$$

$$\gamma_{18} = -\gamma_1 \cdot \ln r \cdot \frac{r}{2} \cdot (q_0^2 - \gamma_1^2); \quad \gamma_{19} = -\ln r \frac{r}{2} \left(q_0^2 \cdot \gamma_2 + \gamma_2^3 \right);$$

$$\gamma_{25} = \frac{1}{2(q_0 + \gamma_2)}; \quad \gamma_{29} = \frac{\gamma_5 \cdot \gamma_6}{\gamma_7}; \quad \gamma_{30} = \frac{a_2 \cdot q_8}{\gamma_7};$$

$$\gamma_{27} = \gamma_{25} \cdot \left(-\frac{2}{r_2} \cdot q_0^2 + \left(\frac{2}{r_2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) q_0^2 \right) \gamma_2 - \gamma_3 \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \gamma_2^4 \right);$$

$$\gamma_{28} = \gamma_{21} \left(\frac{16}{r_2^4} + \gamma_2 \gamma_3 \frac{2}{r_1^2} + q_0^2 \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \gamma_2^2 \cdot \gamma_3^2;$$

$$\gamma_{43} = \frac{r \cdot r_1}{2} \cdot \ln r \left[\gamma_1^2 \cdot \gamma_5 + \gamma_2^2 \cdot \gamma_8 \right] \gamma_{30} - \ln r \cdot q_0^2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \gamma_{30} \cdot (\gamma_5 + \gamma_8);$$

$$\gamma_{44} = \frac{r \cdot r_1}{2} \ln r (\gamma_1 \cdot \gamma_5 + \gamma_2 \cdot \gamma_8) \cdot \gamma_{30}; \quad \gamma_{50} = q_0 \cdot (\gamma_{19} \cdot \gamma_{12} - \gamma_{15} \cdot \gamma_{18});$$

$$\gamma_{14} = \frac{1}{2} - \frac{r}{r_2^2 q_0 (q_0 - \gamma_1)} (q_0^2 - \gamma_1^2); \; \gamma_{20} = \frac{-\gamma_2}{2} - \gamma_2^2 \cdot \gamma_3 \cdot \frac{r}{2} \ln r;$$

$$\gamma_{16} = \ln r q_0^2 - \gamma_2^2 \cdot \left(\ln r + \frac{2}{r_2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right) + \gamma_2^4 \cdot \gamma_3 \cdot \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) -$$

$$- \frac{r \cdot (\ln r_2 - 1/2)}{2 q_0 (q_0 - \gamma_2)} \left[q_0^4 - \gamma_2^2 \cdot q_0^2 + \gamma_2^4 \right];$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2(q_0 + \gamma_1)}; \qquad \gamma_{22} = -\left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \left(q_0^4 + \frac{\gamma_1^4}{2} \right) \cdot \gamma_{21};$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{21} \cdot \left[-\frac{2}{r_2^2} \cdot q_0^2 + \gamma_1^2 \cdot \left(\frac{2}{r_2^2} + q_0^2 \cdot (\ln r_1 - 1/2) \right) \right];$$

$$\gamma_{24} = \frac{16}{r_2 4} \cdot \gamma_{21}; \; \gamma_{26} = -\gamma_{25} \cdot \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(q_0^4 + \frac{\gamma_1^4}{2} \right); \quad q_{16} = \frac{2}{r_2^2} - (\ln r_2 - 1/2);$$

$$\gamma_{31} = \frac{r}{2 q_0^2} \cdot \left(q_{11} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\gamma^{-2} q_0^4 \cdot \gamma_{30} \cdot \left(\frac{\gamma_5}{\gamma_1} + \frac{\gamma_8}{\gamma_2} + \frac{\gamma_5 \cdot \gamma_{30}}{\gamma_1 \cdot (q_0 - \gamma_1)} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left(q_0^4 + \frac{\gamma_1^4}{2} \right) + \frac{\gamma_8 \cdot \gamma_{30}}{\gamma_2 \cdot (q_0 - \gamma_2)} \cdot \left(-q_0^4 + \frac{\gamma_2^4}{2} \right) \right) \right);$$

$$q_{14}=\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\left(q_0^4+\frac{\gamma_2^4}{2}\right);\qquad q_{15}=\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\left(q_0^4+\frac{\gamma_1^4}{2}\right);$$

$$\gamma_{32}=\frac{r}{2q_0^2}\cdot\left[q_{10}\cdot q_0^2-\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot 2q_0^4\cdot\left(\frac{\gamma_{29}}{\gamma_1}+\frac{\gamma_9}{\gamma_7\cdot\gamma_2}\right)+2q_{12}\cdot\gamma_{30}\cdot\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_1}+\frac{\gamma_8}{\gamma_2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{(q_0-\gamma_1)\gamma_1}\cdot\left(\gamma_5\cdot\gamma_{30}\cdot q_0^2\cdot q_{16}+\gamma_{29}\cdot q_{15}\right)+\frac{1}{(q_0-\gamma_2)\gamma_2}\times$$

$$\left.\times\left(\gamma_8\cdot\gamma_{30}\cdot\left(q_{16}-\frac{\gamma_2^4\cdot\gamma_3}{2}\right)+\frac{\gamma_9}{\gamma_7}\cdot q_{14}\right)\right];$$

$$\gamma_{33}=\gamma_{30}\cdot\left(\frac{\gamma_5}{q_0-\gamma_1}+\frac{\gamma_8}{q_0-\gamma_2}\right);\ \gamma_{34}=\frac{\gamma_{29}}{q_0-\gamma_1}+\frac{\gamma_9}{\gamma_7\cdot(q_0-\gamma_2)};$$

$$\gamma_{35}=-\ln r\cdot\left(q_0^2\cdot\gamma_{33}+(\gamma_1\cdot\gamma_5+\gamma_2\gamma_8)\cdot\gamma_{30}\right);$$

$$\gamma_{36}=-\frac{1}{2}\gamma_{33}-\ln r\left(q_0^2\cdot\gamma_{34}\cdot 2k_1\cdot\gamma_{30}\cdot\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_1}+\frac{\gamma_8}{\gamma_2}\right)+\gamma_1\left(\gamma_{29}-\frac{\gamma_9}{\gamma_7}\right)\right);$$

$$\gamma_{37}=\gamma_5\cdot\gamma_{30}\cdot\frac{2}{\gamma_1}+\frac{\gamma_8\cdot\gamma_{30}}{\gamma_2};\qquad \gamma_{38}==-q_{11}+\left(q_{18}\cdot\gamma_{30}\cdot\gamma_5\cdot q_{15}+q_{19}\cdot\gamma_8\cdot\gamma_{30}\cdot q_{14}\right);$$

$$\gamma_{39}=-\gamma_{37}\cdot q_{12};\qquad \gamma_{41}=-\gamma_{37}\cdot q_{13};$$

$$\gamma_{40}=q_{10}\cdot q_0^2+q_{18}\cdot(\gamma_{30}\cdot\gamma_5\cdot q_{16}+\gamma_{29}\cdot q_{15})+q_{19}\left(\gamma_8\cdot\gamma_{30}\cdot\left(q_{16}-\frac{\gamma_2^4\gamma_3}{2}\right)+\frac{\gamma_9}{\gamma_7}\cdot q_{14}\right);$$

$$q_{18}=\left(2\gamma_1(q_0+\gamma_1)\right)^{-1};\ q_{19}=\left(2\gamma_2(q_0+\gamma_2)\right)^{-1};\ \gamma_{47}=\frac{\gamma_9}{\gamma_7}\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3;$$

$$\gamma_{45}=-\frac{1}{r}\gamma_{30}\cdot(\gamma_5+\gamma_8)-\ln r q_0^2\cdot\frac{r}{2}\left(\gamma_{27}\frac{\gamma_9}{\gamma_7}\right)+\frac{r\cdot k_1}{2}\ln r\times$$

$$\times\left(\gamma_1^2\cdot\gamma_{29}+\gamma_2^2\cdot\frac{\gamma_9}{\gamma_7}+\gamma_8\cdot\gamma_{30}\cdot\gamma_2^2\cdot\gamma_3\right);$$

$$\gamma_{46} = -\frac{r \cdot k_1}{2} \ln r \left(\frac{2k_1}{\gamma_1} \cdot \gamma_5 \cdot \gamma_{30} + \gamma_1 \gamma_{29} - \frac{2k_1 \gamma_8 \cdot \gamma_{30}}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2 \gamma_9}{\gamma_7} \right);$$

$$\gamma_{60} = -q_0 \cdot (\gamma_{43} \cdot \gamma_{16} + \gamma_{15} \cdot \gamma_{45}) + \frac{r}{2q_0} \cdot \gamma_{38} \cdot \gamma_{19} - r \cdot \gamma_{43} \cdot \gamma_{26} + q_0 \cdot \gamma_{19} \cdot (\gamma_{31} + \gamma_{35});$$

$$\gamma_{61} = -q_0 \cdot \gamma_{18} (\gamma_{31} + \gamma_{35}) + r \cdot \gamma_{43} \cdot \gamma_{22} - \frac{r}{2q_0} \cdot \gamma_{38} \cdot \gamma_{18} + q_0 (\gamma_{43} \cdot \gamma_{13} + \gamma_{45} \cdot \gamma_{12});$$

$$\gamma_{62} = \gamma_{43} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} + \frac{1}{2q_0} \cdot (\gamma_{15} \gamma_{38} \cdot \gamma_{18} - \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} \cdot \gamma_{38}) - \gamma_{43} \cdot \gamma_{15} \cdot \gamma_{22};$$

$$\gamma_{63} = \gamma_{44} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} + \frac{1}{2q_0} \cdot (\gamma_{15} \cdot \gamma_{39} \cdot \gamma_{18} - \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} \cdot \gamma_{39}) - \gamma_{44} \cdot \gamma_{15} \cdot \gamma_{22};$$

$$\gamma_{64} = \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} \cdot \gamma_{45} + \gamma_{43} \cdot (\gamma_{26} \cdot \gamma_{13} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{27}) + \frac{1}{2q_0} \times$$

$$\times \left(\gamma_{15} \cdot \left(\gamma_{40} \cdot \gamma_{18} - \frac{\gamma_1}{2} \gamma_{38} \right) + \gamma_{16} \cdot \gamma_{38} \cdot \gamma_{18} \right) + \gamma_{19} \cdot \gamma_{22} \cdot (\gamma_{31} + \gamma_{35}) -$$

$$- \gamma_{26} \gamma_{18} (\gamma_{31} + \gamma_{35}) - \frac{1}{2q_0} \cdot (\gamma_{40} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} + \gamma_{38} \cdot (\gamma_{13} \cdot \gamma_{26} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{27})) -$$

$$- \gamma_{45} \cdot \gamma_{15} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{43} \cdot (\gamma_{22} \cdot \gamma_{16} + \gamma_{23} \cdot \gamma_{15});$$

$$\gamma_{65} = \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} \cdot \gamma_{46} + \gamma_{44} \cdot (\gamma_{26} \cdot \gamma_{13} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{27}) +$$

$$(\gamma_{16} \cdot \gamma_{39} \cdot \gamma_{18} \cdot \gamma_{15} (\gamma_{41} \cdot \gamma_{18} - \gamma_1 \gamma_{39} / 2) - \gamma_{39} (\gamma_{13} \cdot \gamma_{26} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{27}) -$$

$$- \gamma_{41} \cdot \gamma_{12} \gamma_{26}) / 2q_0 - \gamma_{46} \cdot \gamma_{15} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{44} \cdot (\gamma_{22} \cdot \gamma_{16} + \gamma_{23} \cdot \gamma_{15});$$

$$\gamma_{66} = \gamma_{43} \cdot (\gamma_{14} \cdot \gamma_{26} + \gamma_{13} \gamma_{27}) + \gamma_{45} (\gamma_{26} \cdot \gamma_{13} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{27}) + \gamma_{47} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{26} +$$

$$+ \frac{1}{2q_0} \left(-\frac{\gamma_1}{2} \gamma_{40} \cdot \gamma_{15} + \gamma_{16} \cdot \left(\gamma_{40} \cdot \gamma_{18} - \frac{\gamma_1}{2} \gamma_{38} \right) \right) + \gamma_{19} \cdot \gamma_{22} (\gamma_{32} + \gamma_{36}) +$$

$$+ (\gamma_{31} + \gamma_{35}) \left(\gamma_{23} \cdot \gamma_{19} + \gamma_{20} \cdot \gamma_{22} - \gamma_{18} \cdot \gamma_{27} + \frac{\gamma_1}{2} \gamma_{26} \right) -$$

$$- (\gamma_{32} + \gamma_{36}) \cdot \gamma_{26} \cdot \gamma_{18} - \frac{1}{2q_0} [\gamma_{38} \cdot (\gamma_{14} \cdot \gamma_{26} + \gamma_{27} \cdot \gamma_{15} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{28}) + \gamma_{40} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{26}] -$$

$$-\gamma_{47}\cdot\gamma_{15}\cdot\gamma_{22}-\gamma_{45}(\gamma_{22}\gamma_{16}+\gamma_{23}\cdot\gamma_{15})-(\gamma_{23}\cdot\gamma_{16}+\gamma_{24}\cdot\gamma_{15})\gamma_{43};$$

$$\gamma_{67}^{0}=\gamma_{19}\cdot\gamma_{22}-\gamma_{26}\cdot\gamma_{18};\quad \gamma_{67}=\left(\ln r_2-1/2\right)\cdot\left(q_0^4\gamma_2^4/2+\gamma_2^2\cdot q_0^2\right);$$

$$\gamma_{68}=-\frac{2}{r_2^2}\left(q_0^2+\gamma_2^2\right)+\left(\gamma_2\cdot\gamma_3 q_0^2+\gamma_2^3\gamma_3\right)\left(\ln r_2-1/2\right);$$

$$\gamma_{69}=\frac{16}{r_2^4}+\frac{2}{r_2^2}\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3+\frac{\gamma_2^2\cdot\gamma_3^2}{2}\left(\ln r_2-1/2\right);$$

$$\gamma_{70}=\frac{q_0}{\gamma_5}\cdot\gamma_{43}\cdot\gamma_{12}-\frac{\gamma_8\cdot\gamma_{30}}{\gamma_2};\qquad \gamma_{71}=\frac{q_0}{\gamma_{50}}\cdot\gamma_{44}\cdot\gamma_{12};$$

$$\gamma_{72}=\frac{q_0\cdot\gamma_{61}}{\gamma_{50}}-\frac{\gamma_8}{\gamma_2\cdot\gamma_7};\ \gamma_{73}=-\frac{\gamma_5\cdot\gamma_{30}}{\gamma_1}-\frac{q_0\cdot\gamma_{15}\cdot\gamma_{13}}{\gamma_{50}};$$

$$\gamma_{74}=-\frac{q_0}{\gamma_{50}}\cdot\gamma_{44}\cdot\gamma_{15};\quad \gamma_{75}=-\frac{q_0\cdot\gamma_{60}}{\gamma_{50}}-\frac{\gamma_{29}}{\gamma_1};$$

$$\gamma_{76}=\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-q_0^4+\gamma_1^2\cdot q_0^2+\frac{\gamma_1^4}{2}\right);\quad \gamma_{78}=\gamma_{75}\cdot\gamma_{76}+\gamma_{77}\cdot\gamma_{73};$$

$$\gamma_{77}=2\left(\gamma_1^2-q_0^2\right)/r_1;\qquad \gamma_{79}=16\cdot\gamma_{73}/r_2^4+\gamma_{75}\cdot\gamma_{77};$$

$$\gamma_{80}=\gamma_{68}\cdot\gamma_{70}+\gamma_{67}\cdot\gamma_{72};\qquad \gamma_{81}=\gamma_{69}\cdot\gamma_{70}+\gamma_{68}\cdot\gamma_{72};$$

$$\gamma_{82}=q_0^2\cdot q_{10}-2q_{12}\cdot\gamma_{30}\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_1}+\frac{\gamma_8}{\gamma_2}\right);$$

$$\gamma_{83}=2q_{12}\cdot\left(\frac{\gamma_{29}}{\gamma_1}+\frac{\gamma_9}{\gamma_2\cdot\gamma_{27}}\right)+2\gamma_{30}q_{13}\cdot\left(\frac{\gamma_5}{\gamma_1}+\frac{\gamma_8}{\gamma_2}\right).$$

Учитывая выражения (3.29) и (5.51) перепишем выражения (5.52) и (5.53) в следующим виде:

$$\overline{U}_{\theta,1}=\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}\cdot\left\{\gamma_{90}\cdot\left(p+\frac{c_1}{2}\right)+\gamma_{91}+\frac{\gamma_{92}}{p+c_2/2}\right\}+\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\times$$

$$\times\left\{\gamma_{93}\cdot\left(p+\frac{c_1}{2}\right)+\gamma_{94}+\frac{\gamma_{95}}{p+c_1/2}\right\}+\frac{e^{-k_1 z}}{\alpha_2}\cdot\gamma_{96},$$

$$\overline{U}_{\theta,0} = -\frac{\gamma_{97}}{p+c_1/2}\cdot \bar{f}(p)\cdot\frac{e^{-\beta z}}{\beta} + \left\{\gamma_{84}\cdot p^3 + \gamma_{98}\cdot p^2 + \gamma_{99}\cdot p + \gamma_{100} + \frac{\gamma_{88}}{p+c_1/2}\right\}\times$$

$$\times\frac{e^{-\beta z}}{\beta} + \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}\cdot\left\{p^2\cdot\gamma_{76}\cdot\gamma_{73} + \gamma_{101}\cdot p + \gamma_{102} + \frac{\gamma_{77}\cdot\gamma_{74}}{p+c_1/2}\right\} +$$

$$+\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\left\{p^2\cdot\gamma_{67}\gamma_{70} + \gamma_{103} + \gamma_{104} + \frac{\gamma_{68}\cdot\gamma_{71}}{p+c_1/2}\right\} +$$

$$\frac{e^{-k_1 z}}{q_0^2}\cdot\left\{-q_{11}\left(p^2 + c_1 p + c_1^2/4\right) + \gamma_{82}\right\}, \qquad (5.54)$$

где

$$\gamma_{98} = \gamma_{85} + \gamma_{81}\cdot\frac{3c_1}{2}; \qquad \gamma_{99} = \gamma_{84}\cdot\frac{3c_1^2}{4} + \gamma_{85}c_1 + \gamma_{86};$$

$$\gamma_{100} = c_1^3\gamma_{84}/8 + \gamma_{85}\cdot c_1^2/4 + \gamma_{86}c_1/2 + \gamma_{87};$$

$$\gamma_{101} = c_1\gamma_{67}\gamma_{70} + \gamma_{71}\gamma_{67}; \quad \gamma_{102} = c_1/2\gamma_{76}\cdot\gamma_{74} + \gamma_{78} + \gamma_{76}\cdot\gamma_{73}c_1/2;$$

$$\gamma_{103} = c_1\cdot\gamma_{67}\gamma_{70} + \gamma_{71}\cdot\gamma_{67}; \qquad \gamma_{104} = \gamma_{67}\left(\gamma_{70}c_1/2 + \gamma_{71}\right)c_1/2 + \gamma_{80}.$$

Осуществляя обратный переход в пространство оригиналов в последних выражениях, с использованием табличных формул и теорем о свёртке и запаздывании функций, получим

$$\overline{U}_{\theta,1}(z,t) = \frac{\gamma_{90}}{\gamma_1}\cdot e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot\left\{I_0\sqrt{\gamma_0\left(t^2-\gamma_1^2 z^2\right)}\delta(t-\gamma_1 z) + \frac{\partial}{\partial t}\left(I_0\left(\gamma_0\sqrt{t^2-\gamma_1^2 z^2}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times H(t-\gamma_1 z) - \frac{c_1}{2}I_0\left(\gamma_0\sqrt{\left(t^2-\gamma_1^2 z^2\right)}\right)H(t-\gamma_1 z)\right\} + \frac{1}{\gamma_1}\left(\gamma_{90}\cdot\frac{c_1}{2} + \gamma_{91}\right)\cdot e^{-\frac{c_1}{2}t}\times$$

$$\times I_0\left(\gamma_0\sqrt{t^2-\gamma_1^2 z^2}\right)H(t-\gamma_1 z) + e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot\left\{\frac{\gamma_{92}}{\gamma_1}\int_0^t I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2 z^2}\right)d\tau +\right.$$

$$+\frac{\gamma_{93}}{\gamma_2}\cdot I_0\left(\gamma_3\sqrt{t^2-\gamma_2^2 z^2}\right)\cdot\delta(t-\gamma_2 z) + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(I_0\left(\gamma_3\sqrt{\tau^2-\gamma_2^2 z^2}\right)\right)H(t-\gamma_2 z) -$$

$$-\frac{c_1}{2} I_0\left(\gamma_3\sqrt{t^2-\gamma_2^2 z^2}\right)\cdot H(t-\gamma_2 z)+\frac{1}{\gamma_2}\left(\gamma_{94}+\gamma_{93}\cdot\frac{c_1}{2}\right)\left(I_0\left(\gamma_3\sqrt{\tau^2-\gamma_2^2 z^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times H(t-\gamma_2 z)+\frac{\gamma_{95}}{\gamma_2}\cdot\int_0^t I_0\left(\gamma_3\sqrt{\tau^2-\gamma_2^2 z^2}\right)d\tau\right\}+\gamma_{96}\cdot e^{k_1 z}; \qquad (5.55)$$

$$\overline{U}_{\theta,0}(z,t)=-\frac{\gamma_{97}}{q_0}\cdot\int_{q_0 z}^{t}\int_0^{t-\tau} f(\xi)d\xi\cdot e^{-\frac{c_1}{2}\tau}\cdot I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-q_0 z^2}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{q_0}\cdot\left\{\gamma_{88}\cdot\int_{q_0 z}^{t} e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-q_0 z^2}\right)d\tau+\left[\gamma_{100}+\gamma_{84}\frac{\partial^3}{\partial \mathrm{t}^3}+\gamma_{98}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_{99}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot I_0\left(\gamma_0\sqrt{t^2-q_0^2 z^2}\right)+H(t-q_0 z)\right\}+\frac{1}{\gamma_1}\times$$

$$\times\left\{e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot\gamma_{77}\cdot\gamma_{74}\int_{\gamma_1 z}^{t} I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2 z^2}\right)d\tau+\left[\gamma_{76}\gamma_{73}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}+\gamma_{101}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}+\gamma_{102}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot I_0\left(\gamma_0\sqrt{t^2-\gamma_1^2 z^2}\right)-H(t-\gamma_1 z)\right]\right\}+\frac{1}{\gamma_2}\cdot\left\{\gamma_{68}\cdot\gamma_{71}\cdot\int_{\gamma_2 z}^{t} e^{-\frac{c_1}{2}t}\times\right.$$

$$\times I_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-\gamma_2^2 z^2}\right)d\tau+\left[\gamma_{67}\gamma_{70}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\gamma_{103}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}+\gamma_{104}\right]\times \qquad (5.56)$$

$$\left.\times\left[e^{-\frac{c_1}{2}t}\cdot I_0\left(\gamma_3\sqrt{t^2-\gamma_2^2 z^2}\right)H(t-\gamma_2 z)\right]+\frac{e^{-k_1 z}}{q_0^2}\left\{-q_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}+c_1\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}+\frac{c_1^2}{4}\right)+\gamma_{82}\right\}.$$

Вычисления производились на основании последних решений по формулам (4.44)-(4.45), для слоя из вязкоупругого материала, физико-механические параметры которого имеют вид (3.44), при этом внешняя нагрузка была задана в виде гладкой синусоидальной функции по формулам (3.45). Были определены перемещение U_θ и напряжения $\sigma_{z\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ в зависимости от координаты z и времени t.

На рис. 5.26-5.28 представлены соответственно зависимости напряжений $\sigma_{r\theta}/g_0$ и $\sigma_{z\theta}/g_0$ и перемещения U_θ/g_0 от координаты, для различных значений параметра начального перемещения $b_1 = 0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4$ и фиксированного момента времени $\mathrm{t} = 10$, при $k_1=0{,}5$, $a_1=0{,}2$ и $a_2=0{,}3$. Как видно из рисунков влияние параметра b_1 на напряжение $\sigma_{r\theta}$ значительно для сечений расположенных на расстоянии до 6 радиусов промежуточной поверхности слоя, т.е. для $z \le 6$. С увеличением коэффициента b_1 значение напряжения $\sigma_{r\theta}$ уменьшается. Напряжение $\sigma_{z\theta}/g_0$ в сечениях, очень близких к торцу изменяется скачкообразно. Затем с возрастание z это напряжение медленно падает.

На рис. 5.29-5.32 приведены зависимости U_θ/g_0 и $\sigma_{z\theta}/g_0$ от времени t. Вычисления произведены для сечения, отстоящего от торца на расстоянии равное пяти радиусам промежуточной поверхности, при a_1=0,2, a_2=0,3, для разных значений параметра k_1 и фиксированного b_1. На рис.5.29 и 5.30 эти зависимости приведены при значении параметра $b_1 = -0{,}42$, и на рис. 5.31 и 5.32 для $b_1 = -0{,}4$. Из приведённых графиков видно, что в начальный момент времени перемещение U_θ имеет положительные значения, которые убывают по мере возрастания коэффициента затухания k_1. Для моментов времени $0 \le t < 2$ изменения U_θ носит положительно затухающий характер. Затем примерно до момента $t=10$ точки сечения имеют отрицательные перемещения. С возростанием времени графики асимптотически приближаются к оси абсцисс, согласуясь с физической сущностью задачи. Изменения напряжения $\sigma_{z\theta}$ в начальные моменты времени скачкообразные в отрицательном направлении для $k_1 = 1, 2, 3$ и в положительном направлении для $k_1 = 4, 5$. Значения $\sigma_{z\theta}$ для $t \le 5$ имеют колебательный характер, оставаясь в дальнейшем постоянной.

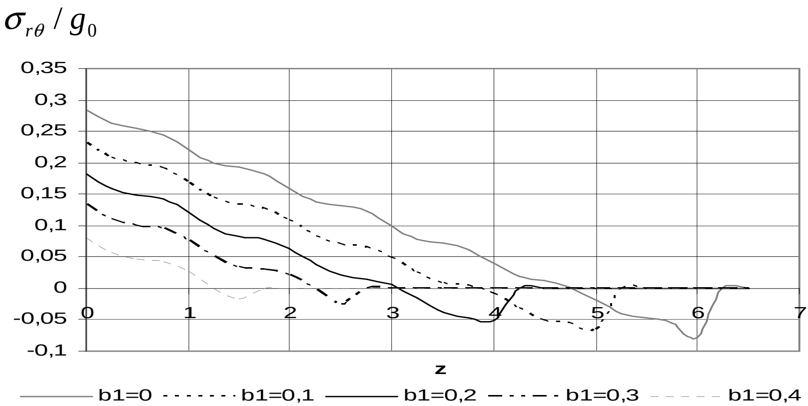

Рис. 5.26. Изменения $\sigma_{r\theta}$ по координате при различных значениях параметра b_1 и t=10.

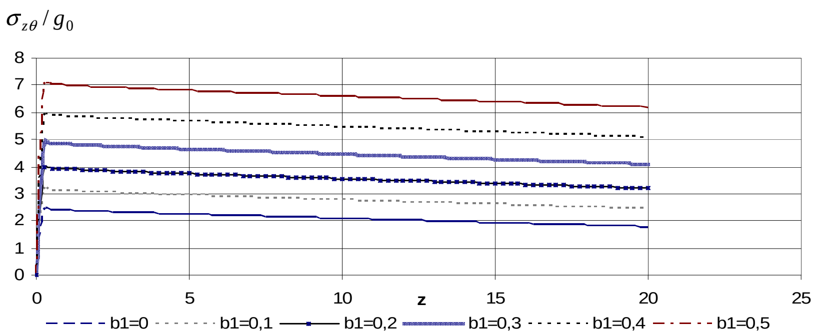

Рис.5.27. Изменения $\sigma_{z\theta}$ по координате при различных значениях параметра b_1 и t=10.

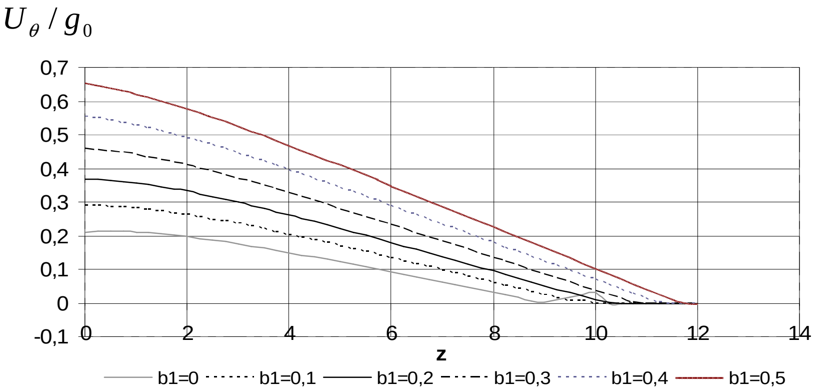

Рис. 5.28. Изменения крутильного перемещения по продольной координате при фиксированном t=10 и различных b_1.

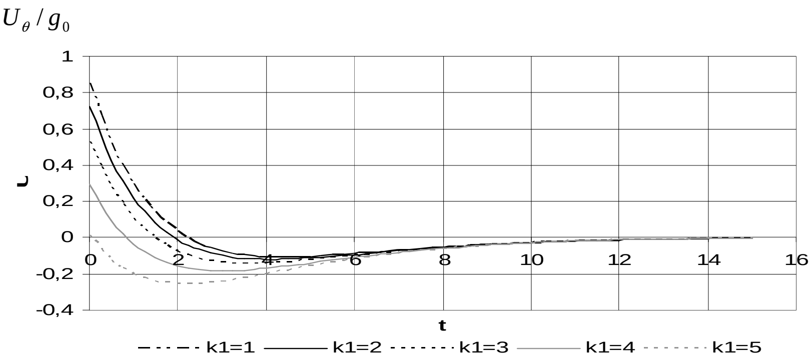

Рис. 5.29. Зависимость перемещения U_θ от времени при различных k_1, b_1=-0,42 и z=5.

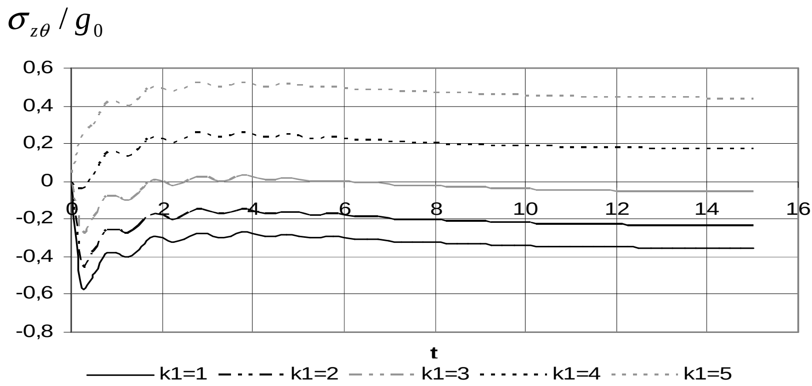

Рис. 5.30. Напряжение $\sigma_{z\theta}$ в зависимости от t
при различных k_1, b_1=-0,42 и z=5.

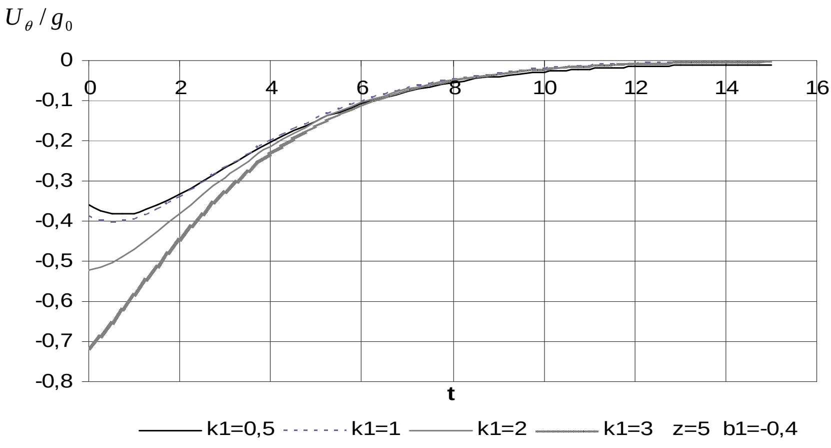

Рис. 5.31. Зависимости U_θ от времени
при b_1=-0,4; z=5 и различных k_1.

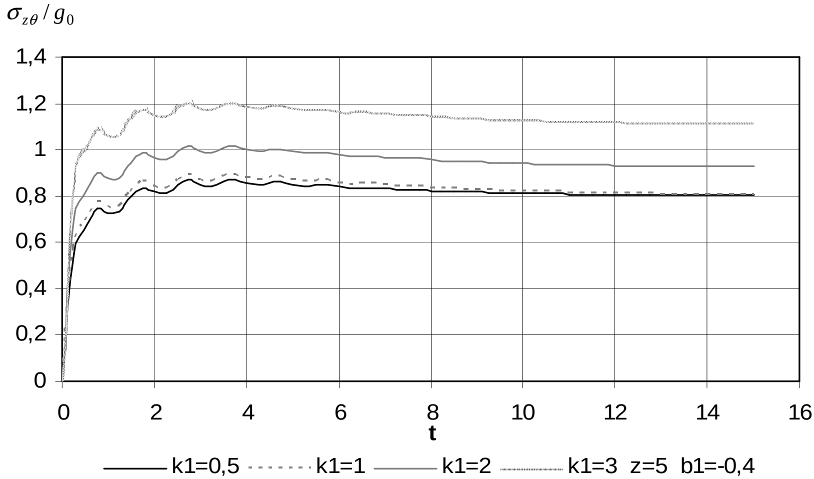

Рис. 5.32. Зависимость напряжения $\sigma_{z\theta}$ от времени при b_1=-0,4; z=5 и различных k_1.

5.4. Крутильные колебания трансверсально-изотропного предварительно-напряженного цилиндрического слоя

В данном разделе монографии задача о крутильных колебаниях полубесконечного кругового цилиндрического слоя с внешним r_2 и внутренним r_1 радиусами обобщается на случай учёта анизотропных свойств материала слоя. Материал рассматриваемого слоя предполагается трансверсально-изотропным, вязкоупругим и предварительно-напряженным. Начальные перемещения приняты в виде (1.39).

Задача решается на основе уточнённых уравнений крутильных колебаний трансверсально-изотропного кругового цилиндрического слоя (4.52). Эти уравнения в безразмерных переменых (r, z, t) при отсутствии внешних нагрузок имеют вид

$$\frac{r_1^2}{4}\left[\frac{1}{(1+b_1)}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial t^2}\right]-q\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{2(1+b_1)}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial t^2}\right]+$$

$$+\frac{r_1^2}{8}(\ln r_1 - 1/2)\cdot\left[\frac{1}{(1+b_1)}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^4}\right]-\frac{2q}{1+b_1}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,0}}{\partial t^2\partial z^2}\right]+\right.$$

$$\left.+q^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right]+\frac{q}{2}\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2}-\frac{2}{r_1^2}\overline{U}_{\theta,1}=0,$$

$$\frac{r_2^2}{4}\left[\frac{1}{(1+b_1)}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial t^2}\right]-q\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{2(1+b_1)}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial t^2}\right]+\frac{q}{2}\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{r_2^2}{8}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(1+b_1)}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^4}\right]-\frac{2q}{1+b_1}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^4 U_{\theta,0}}{\partial t^2\partial z^2}\right]+\right.$$

$$\left.+q^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right]-\frac{2}{r_2^2}\overline{U}_{\theta,1}=0, \qquad (5.57)$$

где безразмерные переменные введены по формулам (3.2); $\tilde{M}$ - вязкоупругий оператор определяемый по формулам (3.1*); ξ - радиус промежуточной поверхности слоя; $U_{\theta,0}$, $U_{\theta,1}$ - главные части крутильного перемещения; b - скорость распространения поперечных волн в материале слоя; $q=\mu'/\mu$, μ' - модули сдвига для плоскостей изотропии и перпендикулярных к ней; $\mu=E/(2(1-\nu))$; E - модуль Юнга в плоскости изотропии; ν - коэффициент Пуассона, характеризирующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости.

Напряженно-деформированное состояние слоя определяется по формулам (5.27), где интегро-дифференциальный оператор λ_1 имеет вид:

$$\lambda_1=\frac{\rho}{1+b_1}M^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]-M^{-1}M'\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$(M,M')\zeta=(\mu,\mu')\left\{\zeta(t)-\int_0^t[f_1(t-\xi),\,f_2(t-\xi)]\zeta(\xi)d\xi\right\},$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\text{при } z=0 \qquad U_\theta = -f(t); \quad \sigma_{z\theta}=0; \quad \sigma_{r\theta}=0; \tag{5.58}$$

$$\text{при } z \to \infty \qquad U_\theta = 0.$$

Начальные условия приняты нулевыми.

Применим преобразование Лапласа по времени к системе уравнений (5.57), тогда с учётом нулевых начальных условий получим

$$\frac{r_1^2}{4}\left[\frac{1}{(1+b_1)}Q^2(p)\overline{U}_{\theta,0} - q\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2(1+b_1)}Q^2(p)\overline{U}_{\theta,1} -$$

$$-\frac{q}{2}\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2} + \frac{r_1^2}{8}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(1+b_1)}Q^4(p)\overline{U}_{\theta,1} -\right.$$

$$\left.-\frac{2q}{1+b_1}Q^2(p)\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2} + q^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right] - \frac{2}{r_1^2}\overline{U}_{\theta,1} = 0; \tag{5.59}$$

$$\frac{r_2^2}{4}\left[\frac{1}{(1+b_1)}Q^2(p)\overline{U}_{\theta,0} - q\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2(1+b_1)}Q^2(p)\overline{U}_{\theta,1} -$$

$$-\frac{q}{2}\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2} + \frac{r_1^2}{8}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(1+b_1)}Q^4(p)\overline{U}_{\theta,1} -\right.$$

$$\left.-\frac{2q}{1+b_1}Q^2(p)\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2} + q^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right] - \frac{2}{r_2^2}\overline{U}_{\theta,1} = 0. \tag{5.60}$$

Вычитая из уравнения (5.59) уравнение (5.60), имеем

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{4}\left[\frac{1}{1+b_1}Q^2(p)\overline{U}_{\theta,0} - q\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2}\right] +$$

$$+\left\{-\frac{2\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2}\overline{U}_{\theta,1} + \left(\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{Q^4(p)}{1+b_1}\overline{U}_{\theta,1} - \frac{2q}{1+b_1}Q^2(p)\frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^2} + q^2\frac{\partial^4 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^4}\right]\right\} = 0,$$

отсюда

$$\overline{U}_{\theta,0} = -\frac{4}{r_1^2 - r_2^2}\left\{-\frac{2(r_2^2 - r_1^2)}{r_1^2 r_2^2}\overline{U}_{\theta,1} + \left(\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)}\overline{U}_{\theta,1} - \frac{2q}{1+b_1}Q^2(p)\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2} + q^2\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4}\right]\right\}\left[\frac{Q^2(p)}{(1+b_1)} - q_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^{-1} = 0. \tag{5.61}$$

Подставив последнее выражение в уравнение (5.59), получим

$$A\frac{\partial^4 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^4} + B\frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z^2} + C\overline{U}_{\theta,1} = 0, \tag{5.62}$$

где $A = q_3 = q^2\left\{q_2 + \frac{r_1^2}{8}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\right\}$; $B = q_4 Q^2(p) - \frac{q}{2}$;

$$C = \frac{2}{r_2^2} + q_5 Q^4(p) + \frac{Q^2(p)}{2(+b_1)}; \qquad q_1 = \left(\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_1^2}{8}\right);$$

$$q_2 = \frac{r_1^2 q_1}{4\left(r_2^2 - r_1^2\right)}; \qquad q_4 = q\left[q_2\frac{2}{1+b_1} - \frac{1}{8}\frac{r_1^2}{(1+b_1)}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right)\right];$$

$$q_5 = \frac{q_2}{1+b_1} - \frac{r_1^2}{(1+b_1)^2}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right); \qquad Q^2(p) = \frac{p^2}{1 - \bar{f}_{20}(p)}; \quad \bar{f}_{20}(p) \div f_{20}(t).$$

Общее решение уравнения (5.62), удовлетворяющее условию затухания возмущений на бесконечности равно

$$\overline{U}_{\theta,1} = A_1 e^{-\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2 z} \tag{5.63}$$

где α_1, α_2 - корни соответствующего характеристического уравнения, определяемые формулой

$$\alpha_{1,2} = \left[-\left(q_4 Q^2(p) - \frac{q}{2}\right) \pm \sqrt{\left(q_4^2 - 4q_3 q_5\right)Q^4(p) - \left(qq_4 - \frac{2q_3}{1+b_1}\right)Q^2(p) + \frac{q^2}{4} - \frac{8q_3}{r_2^2}}\right]^{1/2} : 2q_3.$$

Подставив выражение (5.63) в уравнение (5.60) получим следующее неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 \overline{U}_{\theta,0}}{\partial z^2} - \frac{Q^2(p)}{1+b_1}\overline{U}_{\theta,0} = \overline{F}_1, \tag{5.64}$$

где

$$\overline{F}_1 = \frac{4}{r_2^2 q}\left\{\overline{g}_1(p)A_1 e^{-\alpha_1 z} + \overline{g}_2(p)A_2 e^{-\alpha_2 z}\right\},$$

$$\overline{g}_i(p) = \frac{Q^2(p)}{2(1+b_1)} - \frac{2}{r_2^2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - q\alpha_i^{\ 2} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{2} + \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{4}\frac{Q^2(p)}{(1+b_1)}\right] - \alpha_i^{\ 4}\left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}, \quad (i=1,\,2)$$

Общее решение неоднородного уравнения (5.64) находим с использованием метода вариации постоянных, изложенным в предыдущих разделах

$$\overline{U}_{\theta,0} = \overline{A}_3 e^{-\beta z} - \frac{2}{r_2^2\beta}\left\{\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1 z} - e^{-\beta z}\right) + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta-\alpha_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(e^{-\alpha_2 z} - e^{-\beta z}\right)\frac{A_1\overline{g}_1(p)}{\beta+\alpha_1}e^{-\alpha_1 z} + \frac{A_2\overline{g}_2(p)}{\beta+\alpha_2}e^{-\alpha_2 z}\right\}, \qquad (5.65)$$

где $\beta = \sqrt{Q^2(p)/(1+b_1)}$.

Применив преобразование Лапласа к граничным условиям (5.58), получим

$$\overline{U}_\theta = \overline{f}(p), \qquad \overline{\sigma}_{r\theta} = 0, \qquad \overline{\sigma}_{z\theta} = 0 \qquad (5.66)$$

или

$$\left(\frac{1}{q} + \ln r\,\frac{r}{2}\left[\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - q\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right)\overline{U}_{\theta,1} + r\overline{U}_{\theta,0} = f(p),$$

$$r\left[\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - q\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\overline{U}_{\theta,0} + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - q\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{8}\left[\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - \frac{2qQ^2(p)}{1+b_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + q^2\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]\right\}\overline{U}_{\theta,1} = 0,$$

$$r\frac{\partial U_{\theta,0}}{\partial z} + \left(\frac{1}{2} + \ln r\,\frac{r}{2}\overline{\lambda}_1\right)\frac{\partial \overline{U}_{\theta,1}}{\partial z} = 0. \qquad (5.67)$$

Подставив значения выражений (5.63), (5.65) в преобразованные граничные условия (5.67) получим систему алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, A_3

$$\begin{aligned} &a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = \bar{f}(p); \\ &a_{21}A_1 + a_{22}A_2 = 0; \\ &a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = 0, \end{aligned} \tag{5.68}$$

где

$$a_{1i} = \frac{1}{r} + \ln r \cdot \frac{r}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - q\alpha_i^2\right) - \frac{2r}{\beta(\beta+\alpha_i)}\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2)$$

$$a_{13} = r; \quad a_{23} = 0; \quad a_{33} = -\beta;$$

$$a_{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - q\alpha_i^2 - \frac{4}{r_2^2}\right) - \left(\frac{Q^4(p)}{(1+b_1)^2} - \frac{2}{1+b_1}Q^2(p)\cdot\alpha_i^2 + \alpha_i^4\right)\times$$

$$\times\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{8} + \frac{2r}{r_2^2\beta(\beta+\alpha_i)}\left(\frac{Q^2(p)}{1+b_1} - \alpha_i^2\right)\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2)$$

$$a_{3i} = \ln r \cdot \frac{r}{2}\alpha_i^3 q - \left(\frac{1}{r} + \ln r \cdot \frac{r}{2}\right)\frac{Q^2(p)}{1+b_1}\alpha_i +$$

$$+\frac{2}{r_2^2\beta}\left(1 - \frac{\alpha_i}{(\beta+\alpha_i)}\right)\bar{g}_i(p); \quad (i=1,2).$$

Представив $Q^2(p)$ в виде (3.33) упростим выражения для α_i и β в виде

$$\alpha_1 = \gamma_1\left\{Q^2(p) + \frac{1}{4q_3\gamma_1}\right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha_2 = \gamma_2\left\{Q^2(p) + \frac{1}{4q_3\gamma_2}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\beta = \gamma_{77}\,Q(p);$$

или

$$\alpha_1 = \gamma_1\left\{\tilde{p}^2 + \gamma_3^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha_2 = \gamma_2\left\{\tilde{p}^2 + \gamma_4^2\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\beta = \gamma_{77}\left\{\tilde{p}^2 + \gamma_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{p} = p + \frac{c_1}{2},$$

где

$$\gamma_0^{\ 2} = -\frac{c_1^2}{4} - c_2\,; \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{q_4 - \sqrt{q_4^{\ 2} - 4q_3q_5}}{2q_3}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{q_4 + \sqrt{q_4^{\ 2} - 4q_3q_5}}{2q_3}};$$

$$\gamma_{77} = \sqrt{\frac{1}{1+b_1}}\,; \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{1}{4q_3\gamma_1} + \gamma_0^{\ 2}}\,; \quad \gamma_4 = \sqrt{\frac{1}{4q_3\gamma_2} + \gamma_0^2}\,.$$

Решив систему уравнений (5.68) находим, что

$$A_1 = \bar{f}(p)\cdot\frac{\gamma_{31}}{Q^2(p)}, \quad A_2 = -\bar{f}(p)\cdot\frac{\gamma_{32}}{Q^2(p)}, \quad A_3 = \gamma_{33}\cdot\bar{f}(p), \qquad (5.69)$$

где

$$\gamma_5 = \left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\frac{1}{(1+b_1)^2} - \frac{2\gamma_2^2}{1+b_1} - \gamma_2^4\right); \; q_0 = \frac{1}{\sqrt{1+b_1}}$$

$$\gamma_6 = \left(\ln r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left(\frac{1}{(1+b_1)^2} - \frac{2\gamma_1^2}{1+b_1} - \gamma_1^4\right); \; \gamma_7 = \frac{2r(1+b_1)}{1+\gamma_2\sqrt{1+b_1}}\,;$$

$$\gamma_8 = \frac{2r}{r_2^2}\left(1 - \sqrt{1+b_1}\,\gamma_1\right); \; \gamma_9 = \frac{2r(1+b_1)}{1+\gamma_1\sqrt{1+b_1}}\,;$$

$$\gamma_{10} = \frac{r}{2}\ln r\left(\frac{1}{1+b_1} - \gamma_1^2\right) - \gamma_9\gamma_6\,; \; \gamma_{17} = -\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left[\frac{1}{(1+b_1)^2} - \frac{2\gamma_1^2}{1+b_1} + \gamma_1^4\right];$$

$$\gamma_{13} = \frac{r}{2}\ln r\,\frac{1}{1+b_1} - \gamma_2^2 - \gamma_7\gamma_5\,; \; \gamma_{16} = \frac{2r}{r_2^2}\left(1 - \gamma_2\sqrt{1+b_1}\right);$$

$$\gamma_{20} = -\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\left[\frac{1}{(1+b_1)^2} - \frac{2\gamma_2^2}{1+b_1} + \gamma_2^4\right];$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{17} + \gamma_6\gamma_{10}\,; \qquad \gamma_{22} = \gamma_{20} + \gamma_5\gamma_{16}\,; \qquad \gamma_{23} = -2\sqrt{1+b_1}\,/\,r_2^2\gamma_1;$$

$$-\left(\ln\, r_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\gamma_1^4 - \gamma_1\left(\frac{1}{2} + \ln\, r_2\,(1+\gamma_1^2)\right);$$

$$\gamma_{24}=\gamma_{23}\left[\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\frac{1}{(1+b_1)^2}-\frac{\gamma_1^2 r_2^2}{4(1+b_1)}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\right]-$$

$$\gamma_{25}=\gamma_{23}\left[\frac{r_2^2}{8}\frac{1}{(1+b_1)^2}-\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{4(1+b_1)}\right]\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8}\gamma_2^4-\gamma_2\left(\frac{1}{2}+\ln r_2(1+\gamma_2^2)\right);$$

$$\gamma_{26}=\frac{\gamma_{10}\gamma_{22}}{\sqrt{1+b_1}};\quad \gamma_{27}=\gamma_{25}\gamma_{21};\quad \gamma_{28}=\gamma_{22}\gamma_{21};\quad \gamma_{29}=\frac{\gamma_{13}\gamma_{21}}{\sqrt{1+b_1}};$$

$$\gamma_{30}=\gamma_{26}+\gamma_{27}r-\gamma_{28}r-\gamma_{29};\quad \gamma_{31}=\frac{\gamma_{27}+\gamma_{28}}{\gamma_{30}};$$

$$\gamma_{32}=\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{30}\sqrt{1+b_1}};\quad \gamma_{33}=\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{30}\sqrt{1+b_1}}.$$

Подстановка значений A_1, A_2, A_3 по (5.69) в выражения (5.63) и (5.65) дает

$$U_{\theta,1}=f(p)\left\{\frac{\gamma_{32}\gamma_1}{p+c_1/2}\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}-\frac{\gamma_{33}\gamma_2}{p+c_1/2}\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\right\};\qquad (5.70)$$

$$\overline{U}_{\theta,0}=f_1(p)\left\{\gamma_{31}q_0(p+c_1/2)\frac{e^{\bar{\beta}z}}{\beta}+\left(\gamma_{71}(p+c_1/2)+\gamma_{72}+\gamma_{73}\frac{1}{p+c_1/2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{e^{-\alpha_1 z}}{\alpha_1}+\left(\gamma_{74}(p+c_1/2)+\gamma_{75}+\gamma_7\frac{1}{p+c_1/2}\right)\frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2}\right\},\qquad (5.71)$$

где

$$\gamma_{69}=\frac{\gamma_{32}\gamma_1}{1-(1+b_1)\gamma_1^2};\quad \gamma_{70}=\frac{\gamma_{33}\gamma_2}{1-(1+b_1)\gamma_2^2};$$

$$\gamma_{71}=\gamma_{69}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{q^2}{2}+\gamma_1^2+\frac{\gamma_1^4}{2}\right);\ \gamma_{72}=\frac{2\gamma_{69}\gamma_1^2}{r_2^2 q};$$

$$\gamma_{73}=\frac{2\gamma_{69}}{r_2^2 q}\left(1-\gamma_1^2(1+b_1)\left(1+\frac{\ln r_2-1/2}{4q_3\gamma_1}\right)-\gamma_1^2\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{r}{8qq_3}\right);$$

$$\gamma_{74}=\gamma_{70}\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{q^2}{2}+\gamma_1^2+\frac{\gamma_1^4}{2}\right);\qquad \gamma_{75}=\frac{2\gamma_{70}\gamma_2^2}{r_1^2 q};$$

$$\gamma_{76}=-\frac{2\gamma_{70}}{r_2^2}\left(1-\gamma_2^2(1+b_1)\left(1+\frac{\ln r_2-1/2}{4q_3\gamma_2}\right)-\gamma_2^3\left(\ln r_2-\frac{1}{2}\right)\frac{r_2^2}{8qq_3}\right).$$

Осуществив обратный переход в область оригиналов в последних выражениях получим выражения для искомых функций являющиеся решением задачи

$$U_{\theta,1}=\gamma_{67}e^{-\frac{c_1}{2}t}\int_{\gamma_1 z}^{t}F_1(t-\tau)I_0(\gamma_3\sqrt{\tau^2-\gamma_1^2 z^2})d\tau-$$

$$-\gamma_{68}e^{-\frac{c_1}{2}t}\int_{\gamma_2 z}^{t}F_1(t-\tau)I_0(\gamma_4\sqrt{\tau^2-\gamma_2^2 z^2})d\tau; \qquad (5.72)$$

$$U_{\theta,0}=\gamma_{66}\int_{q_0 z}^{t}e^{-\frac{c_1}{2}\tau}J_0\left(\gamma_0\sqrt{\tau^2-q_0^2 z^2}\right)\left[f_1'(t-\tau)+\frac{c_1}{2}f(t-\tau)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\gamma_1}\int_{\gamma_1 z}^{t}e^{-\frac{c_1}{2}\tau}J_0\left(\gamma_3\sqrt{\tau^2-\gamma_1 z^2}\right)F_2(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\gamma_2}\int_{\gamma_2 z}^{t}e^{-\frac{c_1}{2}\tau}J_0\left(\gamma_4\sqrt{\tau^2-\gamma_2 z^2}\right)F_3(t-\tau)d\tau, \qquad (5.73)$$

где $F_2(t)=\gamma_{71}f'(t)+(\gamma_{71}\frac{c_1}{2}+\gamma_{72})f(t)+\gamma_{73}\int_0^t f(\xi)d\xi,$

$$F_3(t)=\gamma_{74}f'(t)+(\gamma_{74}\frac{c_1}{2}+\gamma_{75})f(t)+\gamma_{76}\int_0^t f(\xi)d\xi.$$

Последние формулы дают возможность определить с заданной точностью перемещения U_θ и напряжения $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$ в произвольном сечении слоя, следовательно, как частные случаи и для цилиндрической оболочки и стержня.