М.Т. Ахунбоев , Н.С. Икромова

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Фергана 2012

Данное учебное пособие содержит три раздела: введение в математический анализ, предел и непрерывность функций, дифференциальное исчисление функций одного и нескольких переменных. Большое внимание уделено таким классическим понятиям математического анализа, как сходимость, непрерывность функций, дифференцируемость и экстремум функций. Основные понятия проиллюстрированы примерами. В конце каждой темы есть задачи для размышления студентов.

Это учебное пособие было утверждено на заседании научного совета Ферганского государственного университета от 28 декабрь 2012 года за № 4.

Составители: старший преподаватель М.Т. Ахунбоев,
преподаватель Н.С. Икромова.

Рецензент: кандидат физ. мат. наук, доцент Ш.Т. Каримов,
кандидат физ. мат. наук, доцент М. Мамажонов.

# Глава I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Возникновение математики относится к глубокой древности. Первый период её получил название “*Элементарная математика*”. Её особенности: *а*) неподвижность рассматриваемых объектов; *б*) неиспользование идеи бесконечности; *в*) отсутствие общих методов.

Бурное развитие производства, техники и естествознания в XVII и XVIII веках потребовало создания математического аппарата, пригодного к изучению переменных величин, находящихся в функциональной зависимости между собой. Возникла новая, так называемая *высшая математика* с её разветвлениями: *аналитической геометрией, дифференциальным и интегральным исчислениями, теорией дифференциальных уравнений* и др.

Созданные в дифференциальном и интегральном исчислениях новые мощные понятия: *бесконечно малая величина*, *предел*, *производная*, *интеграл*, *бесконечный ряд*, и т.д.- не только позволили математикам с легкостью справиться со знаменитыми задачами древности: о касательной, площади, объеме тел и др., но и дали средства для решения более трудных задач, недоступных ранее математике.

Название “ *Математический анализ* ” представляет собой сокращенное видоизменение старого названия “ *Анализ бесконечно малых* ”. Последнее название больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название “*Анализ посредством бесконечно малых* “ характеризовало бы предмет более точно. Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу или изучению. В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Открытие дифференциального и интегрального исчислений принадлежит Исааку Ньютону (1642-1727) и Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646-1716); хотя не следует забывать, что идеи нового исчисления были заложены в работах многочисленных их предшественников. Выдающуюся роль в создании классического математического анализа сыграли такие ученые математики как Леонард Эйлер (1707-1783), Жозеф Луи Лагранж (1736-1813), Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), Огюстен Луи Коши (1789-1857), Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-11897). Петербурскому академику Л.Эйлеру принадлежат фундаментальные результаты почти во всех областях математического знания и его приложений. Его работы сохраняют свое значение до наших дней. Сегодня также современные ученые всего мира вносят огромный вклад в развитие математического анализа. Их научные труды также бесценны и оказывают огромную помощь для молодого подрастающего поколения.

## Лекция №1. Множество и его элементы. Подмножества. Пересечение и объединение множеств.

**П Л А Н**

**1. Множество и его элементы. Подмножества.**
**2. Пересечение и объединение множеств.**
**3. Задачи.**

**Определение 1.** Множество – это совокупность некоторых объектов. Объекты, из которых состоит данное множество, называются его элементами. Если элемент $a$ принадлежит множеству $A$, то пишут $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что $a$ не является элементом множества $A$.

Например, можно говорить о множестве стульев в аудитории, о множестве всех автомобилей в городе и т.д.

Часто будут встречаться следующие множества:

$N$ – множество всех натуральных чисел; $Z$ – множество всех целых чисел; $Q$ - множество всех рациональных чисел; $R$ – множество всех действительных чисел.

Задать множество можно перечислением всех его элементов. Например, $A = \{a, b, c, h\}$. Часто множества задают с помощью некоторой порождающей процедуры. Например, $B = \{\pi/2 + \pi k, \quad k \in Z\}$. Кроме того, множество можно задать описанием характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы. Множество, состоящее из элементов $x$, обладающих свойством $P(x)$ обозначается

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Например, множество $A = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ состоит из двух корней уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$.

**Определение 2.** Множество $A$ называется подмножеством множества $B$, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$. В этом случае пишут:

$A \subset B$ или $B \supset A$.

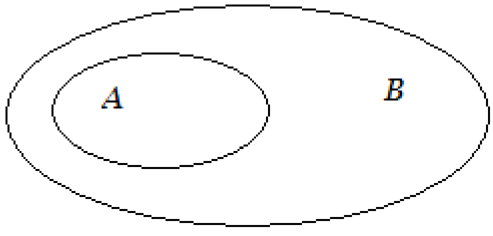



*рис. 1.1*

Нетрудно убедиться, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Заметим, что множество $A$ не является подмножеством $B$, тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in A,\ a \notin B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Будет считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

**<u>Определение 3</u>.** Множество $A$ и $B$ называются равными, если множество $A$ является подмножеством множества $B$, и, наоборот, множество $B$ является подмножеством множества $A$, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Чтобы доказать равенство множеств $A$ и $B$ необходимо показать, что каждый элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$, и, наоборот, каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$.

***Пример.*** Рассмотрим три множества $A = \{x \mid \sin x = 0\}$; $B = \{2\pi k,\quad k \in Z\}$; $C = \{\pi k,\quad k \in Z\}$.

Тогда $B \subset A;\ C \subset A;\quad B \subset C$.

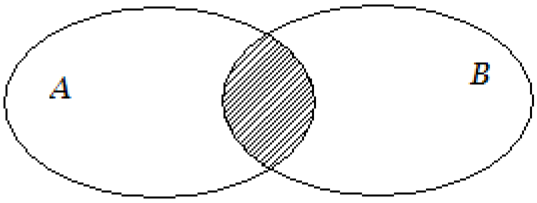
Кроме того, $A=C$.

**Задачи для размышления.**

1. Указать все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.
2. Указать все подмножества множества $A = \{a, b, c, d\}$.
3. Сколько всего различных подмножеств у множества из 5 элементов?
4. Сколько всего различных подмножеств у множества из $n$ элементов?
5. Какие из данных множеств $A_1 = \{3n,\ n \in Z\}$; $A_2 = \{6n,\ n \in Z\}$; $A_3 = \{4n - 2,\ n \in Z\}$ является подмножествами множества $B = \{2n,\ n \in Z\}$?
6. Доказать, что подмножества $A = \{x \mid \sin^2 x = 1\}$ и $B = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in Z\right\}$ совпадают.
7. Даны множества: $A = \{x \mid\ x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0\}$ и $B = \{1\}$. Доказать: а) $B \subset A$, б) $A=B$.
8. Даны множества: $A = \{x \mid x^6 + x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6 = 0\}$ и $B = \{3, 2\}$. Доказать, что: а) $A \supset B$, б) $A=B$.
9. Пусть $A$ – множество всех параллелограммов с диагоналями равной длины, а $B$ – множество всех квадратов. Совпадают ли эти два множества?

**<u>Определение 4</u>.** Пересечением двух множеств $A$ и $B$ называется новое множество, которое состоит из всех элементов, одновременно принадлежащих как множеству *A* так и множеству *B*. Пересечение множеств *A* и *B* обозначается $A \cap B$.

Таким образом, $A \cap B = \{x \in A | \ x \in B\}$



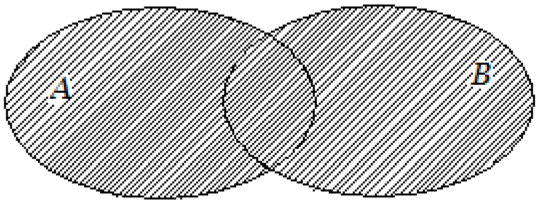

$A \cap B$

*рис. 1.2.*

***Пример.*** Если $A = \{x | \ x > 2\}; \ B = \{x | \ x \le 3\}$, то $A \cap B = \{x | \ 2 \ < x \le 3\}$.

**<u>Определение 5.</u>** Объединением двух множеств *A* и *B* называется новое множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* или *B*. объединение множеств обозначается $A \cup B$.

Таким образом, $A \cup B = \{x | \ x \in A \ \textit{или} \ \ x \in B\}$.




$A \cup B$

*рис.1.3.*

***Пример.*** Если A={x | x >2 }, B={x | 1 < x < 3}, то $A \cup B = \{x | x \rangle 1\}$.

Заметим, что если дано конечное или даже бесконечное число множеств, то можно говорить о пересечении и об объединении этих множеств. В этих случаях используются обозначения:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,} \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

***Основные свойства операций пересечения и объединения множеств:***

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $A \cap B = B \cup A$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Докажем, например равенство 6.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in C$. Значит, возможны два случая: 1) $x \in A$ и $x \in C$; 2) $x \in B$ и $x \in C$.

В первом случае, $x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Во втором случае, $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Следовательно, каждый элемент множества $(A \cup B) \cap C$ принадлежит и множеству $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, т.е.

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (1)$$

Если $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, то либо $y \in A \cap C$, либо $y \in B \cap C$. Если $y \in (A \cap C)$, то $y \in A$ и $y \in C$. Тогда $y \in A \cup B$ и $y \in C$, т.е $y \in (A \cup B) \cap C$. Аналогично, если $y \in (B \cap C)$, то $y \in B$ и $y \in C$. Тогда $y \in A \cup B$ и $y \in C$, т.е. $y \in (A \cup B) \cap C$. Тем самым показано, что любой элемент множества $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ принадлежит множеству $(A \cup B) \cap C$. Значит, $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Свойства 1-5 доказываются аналогично.

**Задачи для размышления.**

1. Найти $A \cap B$, где $A = \{2n,\ n \in Z\}$; $B = \{3n,\ \ n \in Z\}$.
2. Изобразить на плоскости множества $A \cap B$ и $A \cup B$, где $A = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$; $B = \{M(x, y) \mid x + y = 1\}$.
3. Изобразить на плоскости множества $(A \cap B) \cup C$ и $(A \cup B) \cap C$, где $A = \{M(x, y) \mid y \ge x^2\}$, $B = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$;
   $C = \{M(x, y) \mid\ y \le 1 - x^2\}$.
4. Может ли $A \cap B = A \cup B$?
5. Найти $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если $A_i = \{x \mid\ x > 1/i\}$
6. Найти $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если $A_i = \{x \mid\ 0 < x < 1/i\}$.
7. Найти $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, если $A_i = \{x \mid\ 1 - 1/i < x < 2 + 1/i\}$.
8. Доказать равенство:
   а) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   в) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

9. Доказать равенство:
$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D).$$

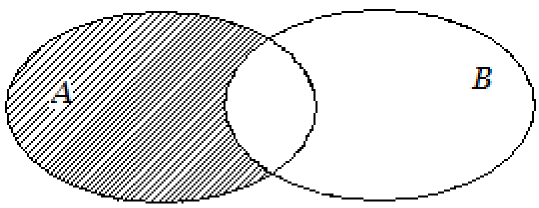
## Лекция № 2. Разность и дополнение множеств. Отображение множеств.

**П Л А Н**

1. **Разность и дополнение множеств.**
2. **Отображение множеств.**
3. **Задачи.**

**<u>Определение 1.</u>** Разностью $A \setminus B$ двух множеств $A$ и $B$ называется множество всех элементов множества $A$, которые не принадлежат множеству $B$. Таким образом,

$$A \setminus B = \{x \in A | \ x \notin B\}.$$





$A \setminus B$

*рис.1.4.*

Например, если $A = \{x | \ x > 2\}; \ B = \{x | \ x \geq 3\}$, то $A \setminus B = \{x | \ 2 < x < 3\}$.

***Основные свойства разности множеств:***

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Докажем, например, равенство 1.

Если $x \in A \setminus B(B \cup C)$, то $x \in A$ и $x \notin B \cup C$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B$, $x \notin C$. Значит, $x \in A \setminus B$ и $x \in A \setminus C$, т.е. $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Тем самым доказано, что

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad (1)$$

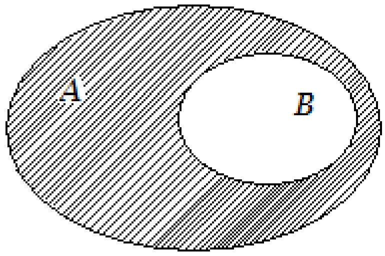
Пусть $y \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Тогда $y \in A \setminus B$ и $y \in A \setminus C$. Значит, $y \in A$, $y \notin B$, и $y \notin C$, т.е. $y \in A$, $y \notin B \cup C$. Поэтому $y \in A \setminus (B \cup C)$. Значит,

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C) \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Равенство 2 доказывается аналогично.

**<u>Определение 2</u>.** Если множество $B$ является подмножеством множества $A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества $B$ до множества $A$ и обозначается $C_A(B)$.




$C_A(B)$

*рис.1.5.*

Покажем, что если $B \subset A$, то $C_A(C_A(B))=B$.

Если $x \in C_A(B)$ то $x \notin C_A(B)$ и $x \in A$. Значит, $x \in B$. Таким образом, $C_A(C_A(B)) \subset B$.

Обратном, если $y \in B$, то $y \in A$. Поэтому $y \notin C_A(B)$, а значит, $y \in C_A(C_A(B))$. Следовательно, $B \subset C_A(C_A(B))$. Тем самым доказано, что $C_A(C_A(B)) = B$.

**Задачи для размышления:**

1. Изобразить на плоскости множества $A \backslash B$ и $B \backslash A$, если $A = \{M(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\};\ B = \{M(x,y) \mid y \ge x^2\}$.
2. Доказать, что $(A \setminus B) \cup B = A$ тогда и только тогда, когда $B \subset A$.
3. Доказать равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ – подмножества множества $B$. Доказать, что

   а) $C_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_B(A_i)$  б) $C_B\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_B(A_i)$

**Определение 3.** Пусть даны два множества $A$ и $B$. Говорят, что задано отображение $f$ множества $A$ в множество $B$, если каждому элементу $a$ множества $A$ поставлен в соответствие некоторый определенный элемент множества $B$. При этом используется следующее обозначение:

$$f : A \to B$$

Если при отображении $f$ элементу $a \in A$ поставлен в соответствие элемент $b \in B$, то говорят, что элемент $a$ переходит в $b$. В этом случае элемент $b$ называют образом элемента $a$ и пишут $b=f(a)$.

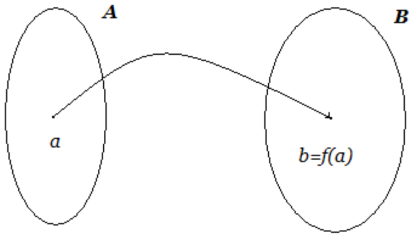



*рис.1.6.*

Для того, чтобы задать некоторое отображение $f:A \to B$, необходимо для каждого элемента $a \in A$ указать его образ в множестве $B$.

***Примеры:***

1) пусть $A=\{1,2,3\}$; $B=\{1,2,3,4\}$.

Положим $f(1)=1$; $f(2)=3$; $f(3)=4$. Получим отображение $f:A\to B$.

2) для любого $x \in R$ положим

$$f(x)=\begin{cases}0, & если \quad x>0,\\ 1, & если \quad x\le 0.\end{cases}$$

Получим отображение множества всех действительных чисел $R$ в множество целых чисел $Z$.

Если дано отображение $f: A \to B$, что через $f(A)$ обозначают множество всех образов элементов множества $A$, т.е.

$$f(A)=\{b\in B \mid b=f(a),\ где\ \ a\in A\}.$$

В первом примере $f(A)=\{1,3,4\}$. Во втором примере $f(A)=\{0,1\}$.

**<u>Определение 4.</u>** Говорят, что отображение $f: A\to B$ отображают $A$ на множестве $B$, если $f(A) \to B$.

Таким образом, $f$ является отображением множества $A$ на множество $B$, если каждый элемент множества $B$ является образом некоторого элемента множества $A$.

Например, положим $f(n)=2n,\quad n\in N$. Получим отображение множества всех натуральных чисел на множество $P$ всех четных чисел.

**<u>Определение 5.</u>** Отображение $f: A\to B$ называется взаимно однозначным, если выполняются следующие два условия:

1. $f(A)=B$, (т.е. $f$ является отображением множества $A$ на множество $B$).
2. разные элементы множества $A$ имеют разные образы, т.е. $f(a_1)\ne f(a_2)$, если $a_1\ne a_2$.

Например, $f(n)=2n,\quad n\in N$ является взаимно однозначным отображением множества $N$ натуральных чисел на множество всех четных чисел.

Если дано взаимно однозначное отображение множества $A$ на множество $B$, то можно построить новое отображение $f^{-1}$ множества $B$ на множество $A$. для этого каждому элементу $b\in B$ поставим в соответствии элемент $a\in A$ такой, что $f=f(a)$.

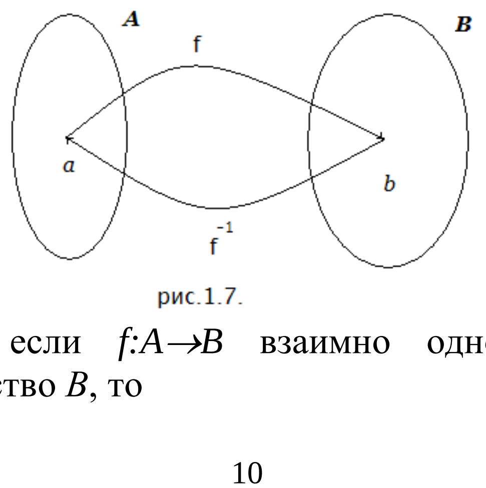



рис.1.7.

Очевидно, что если $f:A\to B$ взаимно однозначное отображение множества $A$ на множество $B$, то

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad \forall a \in A;$$
$$f(f^{-1}(b)) = b, \quad \forall b \in B.$$

Поэтому, если множество *A* можно взаимно однозначно отобразить на множество *B*, то говорят, что множества *A* и *B* находятся во взаимно однозначном соответствии.

Если между множествами *A* и *B* можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества называют эквивалентными или равномощными. Эквивалентные множества обозначают следующим образом: $A \sim B$.

Заметим, что если $A \sim B$, а $B \sim C$, то $A \sim C$.

Действительно, так как $A \sim B$, то существует взаимно однозначное отображение *f* множества *A* на *B*, так как $B \sim C$, то существует взаимно однозначное отображение $\varnothing$ множества *B* на множество *C*.

Положим $F(a) = \varnothing(f(a)), \quad \forall a \in A$

Покажем, что *F* – взаимно однозначное отображение множества *A* на множество *C*.

Пусть *c* – произвольный элемент множества *C*. Так как $\varnothing(B)=C$, то найдется элемент $b \in B$ такой, что $\varnothing(b)=c$, а так как $f(A)=B$, то найдется элемент $a \in A$ такой, что $f(a)=b$.

Тогда: $F(a) = \varnothing(f(a)) = \varnothing(b) = c$.

Следовательно, $F(A)=C$.

Покажем, что разные элементы множества *A* имеют разные образы. В самом деле, пусть $F(a_1) = F(a_2)$. Тогда

$$\varnothing(f(a_1)) = \varnothing(f(a_2)) \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

***Примеры эквивалентных множеств.***

1.Конечные множества эквиваленты тогда и только тогда, когда они содержат одно и то же число элементов.

2.Множество всех натуральных чисел эквивалентно множеству всех четных натуральных чисел $(f(n) = 2n, \ n \in N)$. В данном случае, подмножество оказалось эквивалентным всему множеству.

3.Множество $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ эквивалентно множеству всех действительных чисел.

**Задачи для размышления**:

1. Рассмотрим систему координат на плоскости. Каждой точке плоскости поставим в соответствии ее проекцию на ось *Ox*. Является ли это отображение:
   а) отображение на ось *Ox*?
   б) взаимно однозначным отображением?
2. Найти *f(R)*, если
   а) $f(x) = x^2, \quad \forall x \in R$;

б) $f(x)=2^x, \quad \forall x\in R;$

в) $f(x)=\sin x, \ \forall x\in R.$

3. Построить все отображения множества $A=\{a,b\}$ в себя. Выбрать среди них отображения «на» и взаимно однозначные отображения.
4. Сколько существует различных отображений множества из трех элементов в себя?
5. Сколько существует различных взаимно однозначных отображений у множества из $n$-элементов на себя?
6. Построит взаимно однозначное отображение гипотенузы прямоугольного треугольника на его катет.
7. Построить взаимно однозначное отображение верхнего основания \ трапеции на ее нижнее основание.
8. Доказать, что множества $A=\{x|\ 0<x<1\}$ и $B=\{x|\ 0<x<2\}$ эквивалентны.

## Лекция № 3. Счетные множества.

### П Л А Н

1. **Счетные множества.**
2. **Теоремы.**
3. **Задачи.**

**Определение 1.** Любое множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется счетным.

Нетрудно убедиться, что множества $\{-n,\ n\in N\},\ \ \{1/n,\ n\in N\}$ являются счетными.

Например, если положить $f(n)=1/n,\ n\in N$, то получим взаимно однозначное отображение множества всех натуральных чисел на множество $\{1/n,\ n\in N\}$.

Пусть $A$ – счетное множество. Тогда существует взаимно однозначное отображение $f$ множества $N$ натуральных чисел на множество $A$.

Положим $f(1)=a_1;\ \ f(2)=a_2;....;\ f(n)=a_n;....$

Получим $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$.

Таким образом, если множество счетно, то все его элементы можно перенумеровать.

Верно и обратное, т.е. если все элементы некоторого множества можно перенумеровать, то оно либо конечно, либо счетно.

**Теорема 1.** Из всякого бесконечного множества $A$ можно выделить счетное подмножество.

**Доказательство.** Выберем в множестве $A$ какой-нибудь элемент и обозначим его $a_1$. Так как $A$ бесконечно, то $A\backslash(a_1)\neq\varnothing$. Выберем в множестве

$A\backslash(a_1)$ какой-нибудь элемент и обозначим его $a_2$. Очевидно, что $A\backslash(a_1,a_2)\neq\varnothing$. Выберем в множестве $A\backslash(a_1,a_2)$ какойғнибудь элемент и обозначим его $a_3$ и т.д. Продолжая этот процесс мы найдем в $A$ счетное подмножество: $B=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$.

***Замечание.*** Из доказанной теоремы следует, что счетное множество – самое «маленькое» множество среди бесконечных множеств.

**Теорема 2**. Всякое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.

**Доказательство.** Пусть $A$ – счетное множество, а $B$ некоторое его подмножество. Так как $A$ – счетное множество, то все его элементы можно перенумеровать, т.е.

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}.$$

Если мы будем перебирать один за другим в порядке их номеров элементы множества $A$, то нам будут попадаться элементы множества $B$ и каждый элемент множества $B$ обязательно на каком-то шаге нам встретится.

Первый элемент множества $B$, встретившийся нам, обозначим $b_1$, второй элемент $b_2$ и т.д. Если подмножество $B$ конечно, то на каком-то шаге этот процесс оборвется, если же $B$ бесконечно, то $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots\}$ – счетное множество.

**Теорема 3.** Множество $Q$ всех рациональных чисел счетно.

**Доказательство.** Все рациональные числа запишем в виде следующей таблицы:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5 |
| -1, | -2, | -3, | -4, | -5, | -6, …. |
| 1/2, | 3/2, | 5/2, | 7/2, | 9/2, | 11/2, |
| -1/2, | -3/2, | -5/2, | -7/2, | -9,2, | -11,2 |
| 1/3, | 2/3, | 4/3, | 5/3, | 7/3, | 8/3 |

Перенумеруем все эти числа следующим образом:
0, 1, -1, 1/2, -2, 2, 3, -3, 3/2, -1/2, 1/3, -3/2, 5/2, -4, 4, 5 и т.д. Все рациональные числа окажутся занумерованными. Следовательно, множество рациональных чисел – множество счетное.

**Теорема 4.** Множество всех действительных чисел – несчетно.

**Доказательство.** Так как множество $A=\{x|\ 0<x<1\}$ эквивалентно множеству всех действительных чисел, то достаточно доказать, что $A$ –

несчетное множество. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что множество $A$ – счетно. Тогда все элементы множества $A$ можно перенумеровать, т.е. $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Любое действительное число $(0 < x < 1)$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби. Пусть

$$x_1 = 0,\ a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}, ...$$

$$x_2 = 0,\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2n}, ...$$

............................................

$$x_n = 0,\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ..., a_{nn}, ...$$

..............................................

Построим новое число $x = 0, b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ следующим образом: $b_1$ выберем так, чтобы $b_1 \neq a_{11}$; $b_2$ выберем так, чтобы $b_2 \neq a_{22}$; $b_3$ выберем так, чтобы $b_3 \neq a_{23}$ и т.д., $b_n$ выберем так, чтобы $b_n \neq a_{nn}$ и т.д. Очевидно, что число $x$ не может встретиться среди чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ....$. Так как $x \in A$, то мы пришли к противоречию с тем, что все элементы множества $A$ перенумерованы. Теорема доказана.

***Замечание.*** Любое множество эквивалентное множеству всех действительных числе называется множеством мощности-континуум.

**Задачи для размышления**.

1. Доказать, что множество $Z$ всех целых чисел счетно.
2. Доказать, что объединение конечного числа счетным множества счетно.
3. Доказать, что объединение счетного множества счетных множеств счетно.
4. Доказать, что, если $A$ бесконечное несчетное множество, а $B$ счетное множество, то $A \backslash B$ – бесконечное несчетное множество.
5. Доказать, что множество точек плоскости с целыми координатами – счетное множество.
6. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами – счетное множество.
7. Доказать, что множество всех подмножеств счетного множества – множество несчетное.

## Лекция № 4. Абсолютная величина или модуль действительного числа. Числовые множества. Точные грани числовых множеств.

**П Л А Н**

**1. Абсолютная величина. Модуль действительного числа.**
**2. Числовые множества.**
**3. Точные грани числовых множеств.**
**4. Задачи.**

**<u>Определение 1.</u>** Абсолютной величиной или модулем числа $x$ называется число

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Например, $|2|=2;\ |-1|=-(-1)=1;\ |1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1.$

***Свойства абсолютной величинқ действительного числа:***

1. $|x|\geq 0,\ |x|=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. $-|x|\leq x\leq |x|$;
3. $|xy|=|x|\cdot|y|$;
4. $|x+y|\leq |y|+|x|$;
5. $|x-y|\geq ||x|-|y||$.

$\forall x\in R,\ \forall y\in R$.

**Докажем, например свойство 4.**

Если $x+y\geq 0$, то $|x+y|=x+y\leq |x|+|y|$. Если же $x+y<0$, то $|x+y|=-x-y$. Так как $-|x|\leq x$, а $-|y|\leq y$, то $|x|\geq -x$, $|y|\geq -y$. Следовательно, $|x+y|\leq |x|+|y|$. Свойство 4 доказано.

***Замечание.*** По определению арифметического значения квадратного корня $\sqrt{x^2}=|x|$.

В заключение отметим следующие два важных утверждения:

1. $|x|<y \Leftrightarrow -y<x<y$;
2. $|x|>y \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>y, \\ x<-y \end{array}\right.$.

**Докажем первое утверждение.** Предположим, что выполняется условие $|x|<y$. Если $x\geq 0$, то $y>0$ и $|x|=x$. Тогда $-y<x<y$. Если же $x<0$, то $|x|=-x, y>0, -x<y$ и $y>x>-y$.

Пусть теперь $-y<x<y$.

Если $x\geq 0$, то $|x|=x<y<y$, т.е. $|x|<y$.

Если же $x < 0$, то $|x| = -x < y$ и т.д.

***Пример***. Решить неравенство:

$$|x-1| < \frac{1}{2}$$

Решение. $|x-1| < 1/2 \Leftrightarrow 1-1/2 < x < 1+1/2 \Leftrightarrow 1/2 < x < 3/2$.

**Задачи для размышления.**

1. Вычислить: $а) |2-\sqrt{7}|$; $б)$ $|\lg 0{,}1|; |\sin\pi/6-1|$
2. Доказать, что:
$$|x| < y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > y; \\ x < -y \end{array}\right. .$$
3. Доказать, что $|x+y| = |x| + |y|$ тогда и только тогда, когда оба слагаемых одного знака.
4. Доказать, что $|x-y| = |x| - |y|$ тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ одного знака и $|x| \geq |y|$.
5. Решить неравенства:
а) $|2x-5| < 3$; б) $|4x-3| > 2$; в) $|x^2-4x-5| > x^2-4x-5$;
г) $|x^2-7x+12| < x^2-7x+12$; д) $|3x-5| - |2x+3| > 0$.

6. Решить уравнения:
а) $\left|(x^2+4x+9)+(2x-3)\right| = \left|x^2+4x+9\right| + \left|2x-3\right|$;
б) $\left|(x^4-4)-(x^2=2)\right| = \left|x^4-4\right| - \left|x^4+2\right|$.
7. Решить уравнения:
а) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$;
б) $\left|x^2-5x=6\right| = -(x^2-5x+6)$.

8. Изобразить на плоскости все точки, удовлетворяющие уравнению:
а) $|x| = |y|$; б) $x + |y| = 0$; в) $x^2 + |y| = 0$;
г) $|x| + |y| = |2x-y|$; д) $|x+y| = 2x^2$.

**<u>Определение 2.</u>** Любое подмножество множества R действительных чисел называется числовым множеством.

Приведем примеры и заодно договоримся об обозначениях.

1) отрезок $[a,b] = \{x \in R \,|\, a \leq x \leq b\}$;
2) интервал $]a,b[ = \{x \in R \,|\, a \leq x \leq b\}$

3) полуинтервалы: $[a, b[=\{x \in R \mid a \leq x < b\}$; $]a, b]=\{x \in R \mid a < x \leq b\}$

**Определение 3.** Числовое множество $V$ называется ограниченным сверху, если существует число $S$ такое, что для всех $x \in V$ выполняется неравенство $x \leq S$. В этом случае $S$ называется верхней гранью множества $V$.

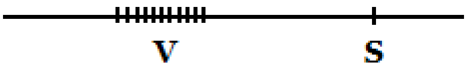


рис.1.9.

**Определение 4.** Числовое множество $V$ называется ограниченным снизу, если существует число $S$ такое, что для всех $x \in V$ выполняется неравенство $x \geq S$. Число $S$ называется нижней гранью множества $V$.

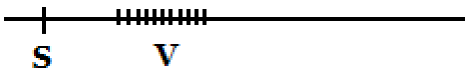


рис.1.10

Наконец, множество $V$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

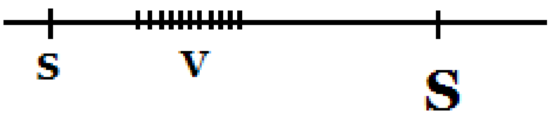


рис.1.11

***Примеры***

1) множество $R$ всех действительных чисел не является ограниченным ни сверху, ни снизу;
2) бесконечный полуинтервал $[a, +\infty[$ - множество ограниченное снизу, но неограниченное сверху;
3) интервал $]a, b[$ - множество ограниченное.

***Основное свойство ограниченных числовых множеств.***

Непустое числовое множество $V$ ограничено тогда и только тогда, когда существует число $d>0$ такое, что для всех $x \in V$ выполняется неравенство $|x| \leq d$.

**Доказательство необходимости.** Предположим, что множество $V$ ограничено. Это значит, что существует числа $s$ и $S$ такие, что для всех $x \in V$ выполняется неравенство $s \leq x \leq S$.

Пусть $d = max\{\ |s|, |S|\}$.

Так как $d \geq |s|$ и $d \geq |S|$, то $x \leq S \leq |S| \leq d$ и $x \geq s \geq -|s| \geq -d$.

Тогда для всех $x \in V$ выполняется неравенство $-d \leq x \leq d$, т.е. $|x| \leq d$. Необходимость доказана.

**Доказательство достаточности.** Предположим, что для всех $x \in V$ выполнено неравенство $|x| \leq d$. Тогда $-d \leq x \leq d$. Следовательно, множество $V$ – ограничено.

Верхняя грань числового множества всегда определена неоднозначно. В самом деле, если $S$ – верхняя грань множества $V$, то $S+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ также является верхней гранью этого множества.


рис.1.12.

Аналогично, нижняя грань числового множества всегда определена неоднозначно, так как, если $s$ – нижняя грань множества $V$, а $\varepsilon>0$, то $s$-$\varepsilon$ также является нижней гранью этого множества.


рис.1.13.

<u>**Определение 4.**</u> Наименьшая из верхних граней числового множества $V$ называется точной верхней гранью и обозначается *Sup V*. Наибольшая из нижних граней множества $V$ называется точной нижней гранью и обозначается *inf V*.

***Примеры***

1) если $V=[a, b]$, то $a=\inf V$, $b=\sup V$,
2) если $V=\{1/n,\ n\in N\}$, то $\inf V=0$.

Очевидно, что 0 – нижняя грань множества $V$, т.к. $1/n>0$. покажем, что положительное число $b$ не может быть нижней гранью множества $V$.

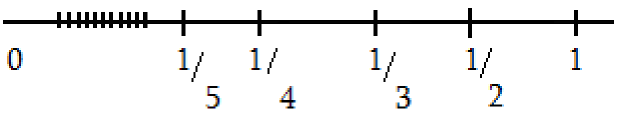



рис.1.14

Действительно, натуральное число $n$ всегда можно подобрать так, чтобы $n>1/b$. Тогда $1/n<b$.

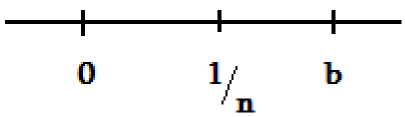



рис.1.15

Следовательно, $b$ не является нижней гранью множества $V$. Тогда 0 – наибольшая из нижних граней, т.е. $0=\inf V$.

***Замечание.*** Из рассмотренного примера, в частности, следует, что точная грань множества не обязана принадлежать этому множеству.

***Свойства точных граней***

$1^0$. Числовое множество может иметь только одну точную верхнюю грань и только одну нижнюю грань.

Доказательство. Пусть $V$ – некоторое числовое множество и $S'=Sup\ V$, $S''=Sup\ V$.

Из определения точной верхней грани следует, что $S''$ – верхняя грань множества $V$, а $S'$ – номинальная из верхних граней. Тогда $S'\leq S''$.

С другой стороны, $S''$ также является наименьшей из верхних граней. Поэтому $S''\leq S'$. следовательно, $S'=S''$. аналогично доказывается единственность точной нижней грани.

$2^0$. Число $S$ является точной верхней гранью множества $V$ тогда и только тогда, когда:

1) $x\leq S,\ \forall x\in V$;

2) для любого положительного числа ε существует элемент $x_\varepsilon\in V$ такой, что $x_\varepsilon>S-\varepsilon$.

**Доказательство необходимости.** Предположим, что $S=Sup\ V$. Тогда $x\leq S,\ \forall\ x\in V$.

Пусть $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Если не существует элемент $x_\varepsilon\in V$ такой, что $x_\varepsilon>S-\varepsilon$, то для всех $x\in V$ выполняется неравенство $x\leq S-\varepsilon$, т.е. $S-\varepsilon$ - верхняя грань множества $V$. Однако, это противоречит тому, что $S$ – наименьшая из верхних граней.

**Доказательство достаточности.** Предположим, что

1. $x \leq S,\ \forall\ x\in V$;

2. для любого $\varepsilon>0$ существует $x_\varepsilon\in V$ такой, что $x_\varepsilon > S-\varepsilon$

Из условия 1) следует, что $S$ – верхняя грань множества $V$. Предположим, что число $S'$ является верхней гранью множества $V$ и $S'<S$.

Положим $\varepsilon=S-S'$. Тогда $\varepsilon>0$. Значит, существует элемент $x_\varepsilon\in V$ такой, что $x_\varepsilon > S-\varepsilon = S-(S-S') = S'$.

Это противоречит предположению о том, что $S'$ верхняя грань множества $V$. Значит, $S=Sup\ V$.

3.Число $s$ является точной нижней гранью множества $V$ тогда и только тогда, когда

1) $x\geq s,\quad \forall x\in V$;

2) для любого положительное числа $\varepsilon$ существует элемент $x_\varepsilon\in V$ такой, что $x_\varepsilon < s+\varepsilon$.

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что множество $V=\left\{\frac{n+1}{n},\quad n\in N\right\}$ ограничено снизу. Найти $inf\ V$.

2. Доказать, что множество $V = \left\{ \dfrac{3n-5}{n}, \quad n \in N \right\}$ ограничено сверху. Найти *Sup V*.
3. Доказать, что множество $V = \left\{ \dfrac{1+n^2}{n}, \quad n \in N \right\}$ неограничено.
4. Доказать, что множество $V = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots \right\}$ ограничено.
5. Доказать, что, если числовые множества $V_1$ и $V_2$ ограничены сверху (снизу), то и множество $V_1 \cup V_2$ ограничено сверху (снизу).
6. Пусть $S_1 = SupV_1,\ S_2 = SupV_2$. Найти $Sup(V_1 \cup V_2)$.
7. Найти *inf V* и *SupV*, если

   а) $V = \left\{ (-1)^n \left( 2 + \dfrac{3}{n} \right), \quad n \in N \right\}$;

   б) $V = \left\{ \dfrac{n-1}{n+1} \cos(2n\pi/3), \ n \in N \right\}$.

## Лекция № 5 . Наибольший и наименьший элементы числового множества. Точные грани множеств.

### П Л А Н

**1. Наибольший элементы числового множества.**
**2. Наименьший элементы числового множества.**
**3. Теорема о существовании точных граней.**
**4. Задачи.**

Пусть $V$ – некоторое числовое множество.

**Определение 1.** Элемент $y \in V$ называется наибольшим элементом этого множества, если для любого $x \in V$ выполняется неравенство $x \le y$.

Если $y$ наибольший элемент множества $V$, что пишут $y = \max V$.
Таким образом, $y = \max V \Leftrightarrow 1)\ y \in V; \quad 2)\ x \le y, \quad \forall x \in V$.

**Определение 2.** Элемент $z \in V$ называется наименьшим элементом множества $V$, если для любого $x \in V$ выполняется неравенство $x \ge z$. В этом случае пишут $z = \min V$. Значит,

$$z = \min V \Leftrightarrow 1)\ z \in V; \ 2)\ x \ge z, \quad \forall x \in V.$$

***Простейшие утверждения о наибольших и наименьших элементах.***

**1.** Если числовое множество имеет наибольший (наименьший) элемент, то оно ограничено сверху (снизу).

***Следствие.*** Если множество не ограничено сверху (снизу), то оно не имеет наибольшего (наименьшего) элемента.

**2.** Ограниченное множество может не иметь ни наибольшего ни наименьшего элементов. Например, $V = ]a,b[$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

**3.**Если $Sup V \in V$, то $Sup V = \max V$, если $\inf V \in V$, то $\inf V = \min V$. Действительно, если $Sup V = y \in V$, то для всех $x \in V$ выполняется неравенство $x \le y$. Значит, $y = \max V$.

**4.** Конечное числовое множество всегда имеет и наибольший и наименьший элементы.

**5.** Если некоторое непустое подмножество $A$ множества $Z$ целых чисел ограничено сверху (снизу), то оно имеет наибольший (наименьший) элемент.

**Доказательство.** Пусть $\varnothing \ne A \subset Z$. Если множество $A$ ограничено сверху, то существует число $S$ такое, что $x \le S, \ \forall \in V$. Если $a \in A$, то рассмотрим множество $A \cap [a,S]$. Это множество конечно, так как целых чисел между ними двумя числами $a$ и $S$ лишь конечное число. Поэтому существует $y = \max A \cap [a,S]$. Очевидно, что $y = \max A$.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения.

**Задачи для размышления:**

1. Найти *max V*, если:

   а) $V = \left\{ \dfrac{n^2}{2^n}, \ \ n \in N \right\}$; б) $V = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}, \ \ n \in N \right\}$ в) $V = \left\{ \dfrac{1000^n}{n!}, \ \ n \in N \right\}$.

2. Найти *min V*, если

   а) $V = \{n^2 - 9n - 100, \ \ n \in N\}$; б) $V = \left\{ n + \dfrac{100}{n}, \ \ n \in N \right\}$.

3. Пусть $z_1 = \min V_1, \ \ z_2 = \min V_2$. Найти $\min(V_1 \cup V_2)$
4. Может ли пересечение числовых множеств, не имеющих наибольших элементов, иметь наибольший элемент?

**Теорема.** Если непустое числовое множество $V$ ограничено сверху (снизу), то существует точная верхняя (нижняя) грань этого множества.

**Доказательство.** Предположим, что множество $V$ ограничено сверху. Рассмотрим множество $A_0 = \{n \in Z \mid \ x = n,... \in V\}$.

Так как множество *V* ограничено сверху, то и множество $A_0$ ограничено сверху. Ограниченное сверху непустое подмножество целых чисел всегда имеет наибольший элемент. Пусть $n_0 = \max A_0$. Для простоты будем считать, что $n_0 \ge 0$. Рассмотрим множество

$$A_1 = \{n \in Z \mid \ 0 \le n \le 9, \ \ x = n_0, \ n... \in V\}$$

Так как $A_1$ – непустое конечное множество, то оно содержит наибольший элемент. Пусть $n_1 = \max A_1$. Рассмотрим множество

$$A_2 = \{n \in Z \mid 0 \le n \le 9, \quad x = n_0, n_1, n ... \in V\}$$

Положим $n_2 = \max A_2$ и т.д. В результате этих рассуждений мы придем к числу $S = n_0, n_1, n_2, ...$

Докажем, что $S = SupV$.

Пусть $x = x_0, x_1, x_2, ... \in V$. По построению числа $n_0, n_0 \ge x_0$. Если $n_0 > x_0$, то $S > x$. В противном случае, в силу выбора числа *n*, имеем, что $n_1 \ge x_1$. Если $n_1 > x_1$, то $S > x$. В противном случае $n_2 \ge x_2$ и т.д.

Продолжая эти рассуждения, мы либо установим, что $S > x$, либо убедимся, что *S*=*x*. Значит, *S* является верхней гранью множества *V*.

Предположим, что $S' = a_0, a_1, a_2, ...$ является верхней гранью множества *V*. В множестве *V* существует элемент $x = n_0, ...$ Значит, $a \ge n_0$. Если $a_0 > n_0$, то $S' > S$. В противном случае $a_0 = n_0$. В множестве *V* существует элемент $x = n_0, n_1, ...$ Значит, $a_1 \ge n_1$. Если $a_1 > n_1$, то $S' > S$. В противном случае, $a_2 \ge n_2$ и т.д.

Значит, либо $S' > S$, либо мы установим, что $S' = S$. Таким образом, *S* – наименьшая из верхних граней множества *V*, т.е. $S = SupV$. Теорема доказана.

**Задача для размышления:**

Доказать, что существует точные грани множества *V*, если

а) $V = \left\{1 + \frac{n}{n+1} \cos \pi \frac{n}{2}, \quad n \in N\right\}$;

б) $V = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad n \in N\right\}$;

в) $V = \left\{\frac{n^2}{1+n^2} \cos \pi \frac{2n}{3}, \quad n \in N\right\}$;

г) $V = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, ...\right\}$

## Глава II. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ.

### Лекция № 6. Понятие функции. График функции.

### П Л А Н

**1. Понятие функции.**
**2. График функции.**
**3. Задачи.**

Пусть $V$ – некоторое множество. Если каждой точке $M$ множества $V$ поставлено в соответствии определенное действительное число $u$, то мы говорим, что на множестве $V$ определена функция $f(M)$ и мы пишем:

$$u = f(M)$$

Таким образом, на множестве $V$ , будет определена функция, если установлено некоторое правило, зная которое можно по точке $M \in V$ найти соответствующее ей число $u$.

Предположим, что на множестве $V$ определена функция $f(M)$. Множество всех действительных чисел $u$, для каждого из которых существует, по крайней мере, одна точка $M \in V$ такая, что

$$u = f(M)$$

называется множеством значений функции $f(M)$ и обозначается $E_v(f)$. По определению,

$$E_v(f) = \{u \in R \mid u = f(M), \quad M \in V\}$$

Если по некоторому закону каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ множества $V$ в $n$-мерном пространстве $R^n$ поставлено в соответствие определенное действительное число $u$, то мы говорим, что на множестве определена функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от $n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и при этом пишем:

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

***Примеры.***

1) Если каждой точке $M$ пространства $R^n$ поставить в соответствие одно и тоже число $b$, то мы получим постоянную функцию $u = b$.

2) Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ поставить в соответствие число $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ ($a_1, a_2, ..., a_n$ - заданные числа), то мы получим линейную функцию:

$$f(M) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

3)Поставим в соответствие точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ число

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

($a_{ij}$ - заданные числа). Получим квадратичную функцию:

$$f(M) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

4)Пусть на множестве *V* определены две функции *f(M)* и $\varphi(M)$. Если $W \subset V$, то можно построить новую функцию $\xi(M)$, положив:

$$\xi(M)=\begin{cases} f(M), & если \quad M \in W, \\ \varphi(M), & если \quad M \in V \setminus W \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\xi(M)$ определена на множестве *V*.

Предположим, что по некоторому закону, каждой точке *x* множества *V* на числовой прямой, поставлено в соответствии определенное действительное число *y*. В этом случае на множестве *V* определена функция *f(M)* от одного действительного переменного *x*, т.е. $y = f(x)$.

***Примеры***

1) степенная функция $y = x^n$ (*n* – целое положительное число) определена на всей числовой прямой.
2) Положим

$$f(x)=\begin{cases} 0, & если \ \ x - иррациональное \ \ число, \\ 1, & если \ \ x - рациональное \ \ число. \end{cases}$$

Функция *f(x)* называется функцией Дирихле. Эта функция определена на всей числовой прямой, а множество ее значений состоит из двух чисел: 0 и 1.

3) если

$$Sgn\, x=\begin{cases} +1, & если \ \ x>0, \\ 0, & если \ \ x=0, \\ -1, & если \ \ x<0. \end{cases}$$

то функция $y = Sgn\, x$ определена на всей числовой прямой, а множество ее значений состоит из трех чисел: -1,0,1.

**Задачи для размышления:**

1. Найти значения функции

$$f(M) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 + 4x_2x_3$$

в точках $M_1(1,-1,2)$; $M_2(1,3,2)$; $M_3(0,1,-2)$.

2. Найти значения функция

$$\xi(M)=\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2, & если \ \ x_1^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 & если \ \ x_1^2 + x_2^2 > 9. \end{cases}$$

в точках $M_1(1,1)$; $M_2(4,5)$; $M_3(1,2,2)$.

3. Найти множество значений функции $y = x^{2k}$ (*k* – целое положительное число).
4. Найти множество значений функции $y = x^{2k-1}$ (*k* – целое неотрицательное число).

5. Найти множество значений функции:

а) $f(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$;  б) $f(M) = x_1^2 - x_2^2$.

6. Найти множество значений линейной функции

$$f(M) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

7. Пусть на множестве *V* определены функции *f(M)* и $\varphi(M)$. Положим:

$$\xi(M) = \begin{cases} f(M), & M \in W, \\ \varphi(M), & M \in V/W \end{cases}$$

где $W \subset V$. Доказать, что

$$E_v(\xi) = E_w(f) \cup E_{v/w}(\varphi).$$

Пусть *V* – некоторое множество на числовой прямой. Если функция *f(x)* определена на множестве *V*, то графиком этой функции называется множество всех точек плоскости вида *P(x,y)*, где $x \in V$, а $y = f(x)$.

Например, графиком постоянной функция *y=b*, очевидно, является прямая, параллельная оси *Ox*.

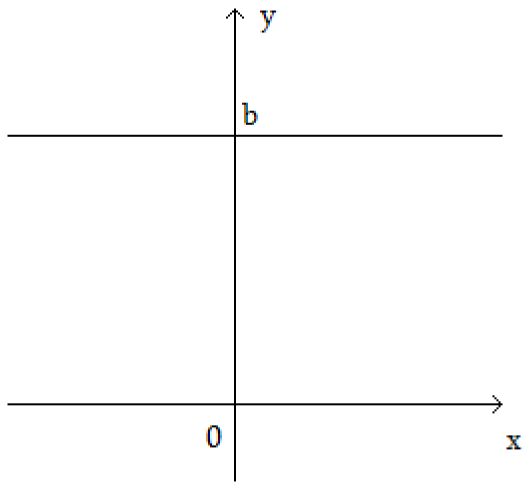



рис. 3.1.

График функции $y = Sgn\, x$ состоит из двух лучей, параллельных оси *Ox* и точки *O*.

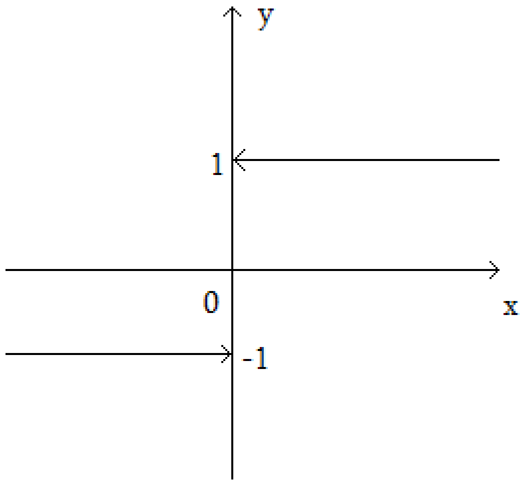



рис. 3.2.

График функции

$$f(x)=\begin{cases} x, \ \textit{если} \ \ x\geq 0, \\ x^2, \textit{если} \ \ x<0 \end{cases}$$

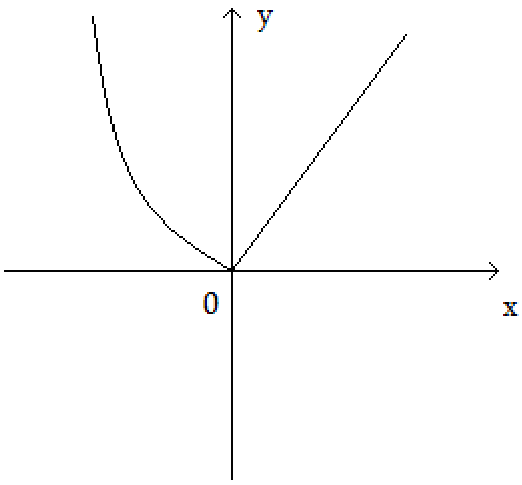



Рис. 3.3

состоит из луча и одной ветви параболы.

Пусть теперь *V* – некоторое множество на плоскости. Если функция *f(x,y)* определена на множестве *V*, то графиком этой функции является множество всех точек пространства вида *P(x,y,z)*, где $M(x,y)\in V$, а *z-f(x,y)*.

Например, графиком постоянной функции *z=b* является плоскость, параллельная плоскости *XOY,*

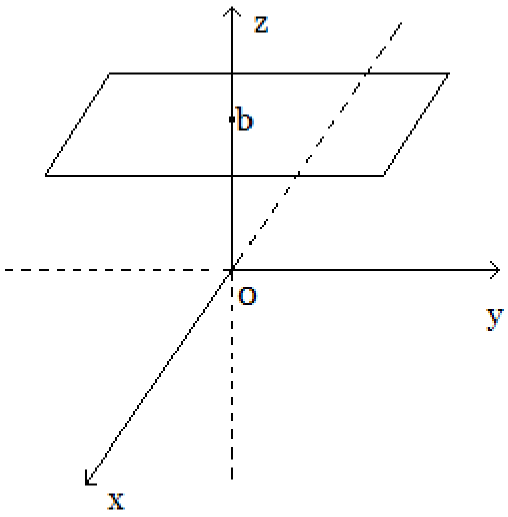



Рис. 3.4

Графиком линейной функции $z=ax+by$ является плоскость, проходящая через начало координат.

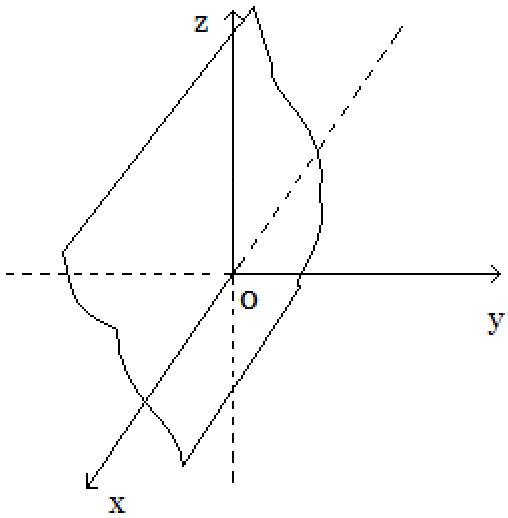



Рис. 3.5

Рассмотрим теперь квадратичную функцию $z = x^2 + y^2$.

Если $x=0$, то мы имеем параболу $z = y^2$. Аналогично, при $y=0$ получим параболу $z = x^2$. Если же $z = c,\ c > 0$, то мы получим окружность $x^2 + y^2 = c$. Исходя из этого, нетрудно представить себе график функции $z = x^2 + y^2$.

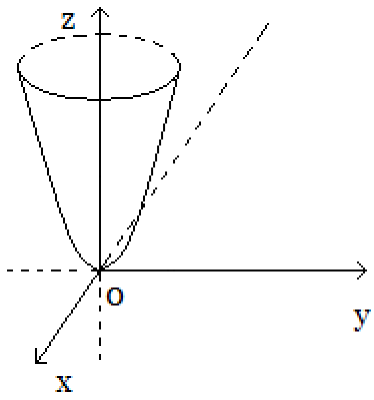


Рис. 3.6

Рассмотрим общий случай. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена на множестве $V$ в $n$ – мерном пространстве $R^n$. Графиком этой функции называется множество всех точек пространства $R^{n+1}$, вида $P(x_1, x_2, ..., x_n, u)$, где $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$, а $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

**Задачи для размышления:**

1. Построить график функций:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = \dfrac{1}{x^2}$; д) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

е) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$; ж) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

2. Построить график функций:

а) $y = \dfrac{1}{x+2}$; б) $y = 3 + \dfrac{1}{x-1}$; в) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$; г) $y = x^2 + 1$;

д) $y = -x^2 + 1$; е) $y = x^2 + x + 2$; ж) $y = -x^2 + 3x - 2$

3. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1, \\ 1/(2-x), & x < 1 \end{cases}$$

4. Построить графики функций двух переменных:

а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; б) $z = x^2 + y^2 + 1$; в) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$;

г) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; д) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; е) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

ж) $z = 2x^2 + 3y^2$; з) $z = x^2 - y^2$.

## Лекция № 7. Предел функции по Гейне.

### П Л А Н

**1. Последовательность функции.**
**2. Предел функции по Гейне.**
**3. Задачи.**

Пусть функция *f(M)* определена на некотором множестве *V* в *n*-мерном пространстве $R^n$. Тогда для любой последовательности точек: $M_1, M_2, ..., M_k, ...$ принадлежащих множеству *V*, можно рассмотреть соответствующую последовательность значений функции *f(M)*:

$$f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$$

Например, функция $f(x) = \sqrt{x}$ определена на множестве $V = \{x \in R \mid \ x \geq 0\}$. Все члены последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{k}, ...$$

очевидно, принадлежат множеству *V*. Следовательно, можно рассмотреть соответствующую последовательность значений функции *f(x)*:

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, ..., \frac{1}{\sqrt{k}}, ....$$

Функция $f(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) / x_2^2$ определена на множестве

$$V = (M(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 \neq 0).$$

Так как все члены последовательности $\left\{M_1\left(\frac{k+1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$ принадлежат этому множеству и $f(M_1) = 3, f(M_2) = 8, f(M_3) = 15, ..., f(M_k) = k(k+2), ...$, то соответствующая последовательность значений функции *f(x₁,x₂)* имеет вид:

$$3, 8, 15, ..., k(k+2), \ldots.$$

Известно, что если $M_0$ является предельной точкой множества *V*, то существует, по крайней мере, одна последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$, сходящихся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V$ и $M_k \neq M_0$.

Определение предела функции по Гейне. Пусть функция *f(M)* определена на множестве $V \subset R^n$, а $M_0$ – предельная точка этого множества.

Число *b* называется пределом функции *f(M)* при $M \to M_0$, если для каждой последовательности точек:

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...,$$

сходящейся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V$, $M_k \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции *f(M)*:

$$f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$$

сходится к числу *b*.

Если число $b$ является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

или

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b \qquad (M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)).$$

Заметим, что можно говорить о пределе функции $f(M)$ при $M \to M_0$, лишь в том случае, когда $M_0$ является предельной точкой множества, на котором определена эта функция. Однако, не требуется, чтобы функция $f(M)$ была определена в самой точке.

***Примеры***

1) если

$$f(M) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \text{ то } \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

В самом деле, рассмотрим произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \to 0$, в которой $x_k \neq 0$. Соответствующая последовательность значений функции имеет вид: 1, 1, …, 1, … Эта последовательность, очевидно, сходится к 1. Значит, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

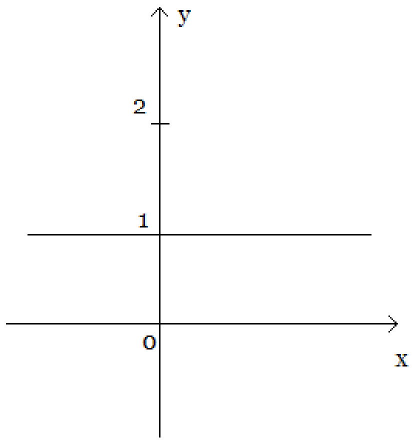



Рис. 3.7.

2) предел постоянной функции всегда равен самой этой постоянной, т.е. $\lim_{M \to M_0} b = b$.

Действительно, рассмотрим произвольную последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots,$ которая сходится к точке $M_0$. Тогда соответствующая последовательность значений функции имеет вид: $b, b, \ldots, b \ldots$. Предел постоянной последовательности всегда равен самой этой постоянной. Значит, $\lim_{M \to M_0} b = b$.

3) функция $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x - y)$ определена на множестве $V = \{M(x, y) \in R^2 \mid x \neq y\}$. Точка $M_0(1,1)$ является предельной точкой этого множества. Рассмотрим произвольную последовательность:

$M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2),..., M_k(x_k,y_k)$,…., сходящую в точке $M_0$ *(1,1)*, в которой $M_1 \in V$. Тогда $x_k \neq y_k$, $k=1,2,3,...$ и

$$\lim_{k\to\infty}(x_k)=1, \quad \lim_{k\to\infty}(y_k)=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\{f(M_k)\}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{x_k^2-y_k^2}{x_k-y_k}\right\}=\lim_{k\to\infty}(x_k+y_k)=2.$$

Таким образом, мы установили, что

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to1}}(x^2-y^2)/(x-y)=2$$

**Теорема 1.** (о единственности предела функции). Если функция *f(M)* имеет предел при $M \to M_0$, то только один.

**Доказательство.** Из определения предела функции следует, что $M_0$ является предельной точкой множества *V*, на котором определена функция *f(M)*.

Так как $M_0$ – предельная точка множества *V*, то существует последовательность

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...,$$

сходящаяся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V$ и $M_k \neq M_0$. Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b'$, то последовательность $f(M_1), f(M_2),..., f(M_k),...$ сходится к $b'$.

Если же $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b''$, то последовательность $f(M_1), f(M_2),..., f(M_k),...$ сходится к $b''$. Числовая же последовательность может иметь лишь один предел. Значит $b' = b''$ и т.д.

Заметим, что функция *f(M)* может не иметь предела при $M \to M_0$, даже в том случае, когда $M_0$ является предельной точкой множества *V*, на которой определена функция *f(M)*.

Например, функция *f(M)*, не имеет предела при $M \to M_0$, если можно указать последовательность $M_1, M_2, ..., M_k, ...,$ сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V$, $M_k \neq M_0$, так, чтобы соответствующая последовательность значений функции *f(M)* расходилась.

Функция *f(M)* не имеет предела при $M \to M_0$, и в том случае, если можно указать две последовательности $(M_k'), (M_k'')$, сходящиеся к точке $M_0$, в которых $M_k' \in V, M_k'' \in V$, $M_k' \neq M_0$, $M_k'' \neq M_0$, так чтобы соответствующие последовательности значений функции *f(M)* сходились к разным числам.

### ***Примеры***

1)точка О является предельной точкой множества $V=\{x\in R|\ \ x\neq 0\}$ на котором определена функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...$

сходится к точке O и все ее члена отличны от 0. Однако, соответствующая последовательность значений функции *f(x)* : 1,2,3,…,*k*,…, очевидно расходится. Отсюда следует, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

2)функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

определена на всей числовой прямой. Последовательности

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, ...., \frac{1}{k}, ....$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ ...., -\frac{1}{k}, ...$$

сходятся к 0. Последовательности же значений функции *f(x)*:

$$1, 1, 1, ..., 1, ...$$

$$-1, -1, -1, ..., -1, ...$$

сходятся соответственно к 1 и -1 . Следовательно, функция *f(x)* не имеет предела при $x \to 0$.

3)функция $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ определена на множестве $V = R^2 / \{O(0,0)\}$.

Точка O (0,0) является предельной точкой множества *V*. Рассмотрим две последовательности точек $\left\{ M'_k \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}$ и $\left\{ M''_k \left( \frac{1}{k}, \frac{2}{k} \right) \right\}$, сходящиеся к точке O (0,0). Так как

$$\lim_{k \to \infty} \{ f(M'_k) \} = \lim_{k \to \infty} \frac{1/k^2}{1/k^2 + 1/k^2} = \frac{1}{2}, \text{ а } \lim_{k \to \infty} \{ f(M''_k) \} = \lim_{k \to \infty} \frac{1/k^2}{1/k^2 + 4/k^2} = \frac{1}{5}$$

то функция *f(x,y)* не имеет предела при $x \to 0,\ y \to 0$.

**Теорема 2.** Если $\lim_{M \to M_0} f(M) = b$, то $\lim_{M \to M_0} | f(M) | = | b |$.

**Доказательство.** Предположим, что функция *f(M)* определена на множестве *V*. Рассмотрим произвольную последовательность точек $M_1, M_2, ..., M_k, ...$ сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V,\ M_k \neq M_0$. Тогда последовательность значений функции: $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$, сходится к числу *b*. Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Найдется номер *K* такой, что при всех $k \geq K$ выполняется неравенство $| f(M_k) - b | < \varepsilon$.

Так как $|| f(M) | - | b || \leq | f(M_k) - b |$, то при $k \geq K$ выполняется неравенство $\| f(M_k)| - |b\| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что последовательность

$$| f(M_1)|, | f(M_2)|, ...., | f(M_k)|, ...$$

сходится к числу $|b|$. Тогда $\lim\limits_{M \to M_0} | f(M)| = |b|$.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$; б) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; с) $\lim\limits_{x \to 1} (3x + x^2) = 4$.

2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$, если

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 1, \\ 2, & x = 1, \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

3. Доказать, что

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x + 3y) = 8$ б) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} x / y = 2$; с) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) / x = 1$

4. Доказать, что не существует предела функции *f(x)* при *x→0*, если

а) $f(x) = (x - 1) / x$; б) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2 + x, & x > 0 \end{cases}$; с) $f(x) = Sin \pi / x$.

5. Доказать, что не существует предела функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2, \\ x^2, & x < 2, \end{cases} \quad при \quad x \to 2.$$

6. Доказать, что не существует предела функции *f(x,y)* при *x→0, y→0*, если

а) $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$;б) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$; с) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$.

7. Доказать, что существует предел функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x^2 + y^2 \leq 25, \\ 2x + y, & x^2 + y^2 > 25 \end{cases}.$$

при *x→1; y→1* и не существует предела этой функции при *x→4; y→3*.

8. Существует ли предел функции *f(M)* при *M→M₀*, если $\lim\limits_{M \to M_0} | f(M)| = b$?

9. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = b$, если $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = b$.

10. Функция *f(M)* и *φ(M)* определены соответственно на множествах *V* и *W*, где $V \cap W = \varnothing$, $M_0$ – предельная точка множеств *V* и *W*. Доказать, что существует предел функции

$$\xi(M)=\begin{cases} f(M), & M\in V,\\ \varphi(M), & M\in W\end{cases}$$

при $M\to M_0$, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{M\to M_0}\varphi(M).$$

## Лекция № 8. Простейшие утверждения о пределах функций. Первый замечательный предел.

### П ЛА Н

**1.Простейшие утверждения о пределах функций.**
**2.Первый замечательный предел.**
**3.Задачи.**

Пусть функция *f(M)* и *φ(M)* определены на множестве *V*, а $M_0$ – определенная точка множества *V*. Если существуют $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ и $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)$, то

а) существует $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)+\varphi(M))$, причем

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)+\varphi(M))=\lim_{M\to M_0} f(M)+\lim_{M\to M_0}\varphi(M);$$

б) существует $\lim\limits_{M\to M_0}(\varphi(M)\cdot f(M))$, причем

$$\lim_{M\to M_0}(\varphi(M)\cdot f(M))=\lim_{M\to M_0}\varphi(M)\cdot\lim_{M\to M_0} f(M);$$

в) при условии, что $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)\neq 0$, существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M):\varphi(M)$, причем

$$\lim_{M\to M_0} f(M)/\varphi(M)=\lim_{M\to M_0} f(M)/\lim_{M\to M_0}\varphi(M).$$

Докажем, например утверждение б). Для этого рассмотрим произвольную последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$, сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k\in V$, $M_k\neq M_0$.

Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$, то числовая последовательность

$$f(M_1), f(M_2), \ldots., f(M_k), \ldots$$

сходится к $b$.

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)=c$, то числовая последовательность

$$\varphi(M_1), \varphi(M_2), \ldots., \varphi(M_k), \ldots$$

сходится к $c$.

Отсюда следует, что последовательность значений функции $\varphi(M)\cdot f(M)$:

$$\varphi(M_1)\cdot f(M_1), \varphi(M_2)\cdot f(M_2), \ldots., \varphi(M_k)\cdot f(M_k), \ldots$$

сходится к $cb$. Значит

$$\lim_{M\to M_0}(\varphi(M)\cdot f(M))=c\cdot b=\lim_{M\to M_0}\varphi(M)\cdot\lim_{M\to M_0}f(M).$$

Следствие. Если существует $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)$, то

$$\lim_{M\to M_0}(c\cdot f(M))=c\cdot\lim_{M\to M_0}f(M) \qquad (c\text{ - число}).$$

***Примеры***

1) $\lim\limits_{x\to n}x^n=\left(\lim\limits_{x\to n}x\right)\left(\lim\limits_{x\to n}x\right)....\left(\lim\limits_{x\to n}x\right)=a^n$

2) $\lim\limits_{x_1\to 1}(3x_1+x_2)=3\lim\limits_{x_1\to 1}x_1+\lim\limits_{x_1\to 1}x_2=3+2=5$

3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 2\\ x_2\to 2}}\dfrac{x_1-x_2}{x_1^2-x_2^2}=\lim\limits_{\substack{x_1\to 2\\ x_2\to 2}}\dfrac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\lim\limits_{\substack{x_1\to 2\\ x_2\to 2}}\dfrac{1}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{4}.$

Пусть функция *f(M)* и *φ(M)* определены на множестве *V*, а $M_0$ – предельная точка множества *V*. Если существуют $\lim\limits_{M\to M_0}f(M),\ \lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)$, а для всех точек $M\in V$ выполняется неравенство

$$f(M)\le\varphi(M),\text{ то }\lim_{M\to M_0}f(M)\le\lim_{M\to M_0}\varphi(M).$$

Доказательство. Рассмотрим некоторую последовательность точек $M_1,M_2,\dots,M_k,\dots$, сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k\in V$, $M_k\ne M_0$. Если $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=b$, то числовая последовательность

$$f(M_1),f(M_2),....,f(M_k),... \qquad (1)$$

сходится к $b$.

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)=c$, то числовая последовательность

$$\varphi(M_1),\varphi(M_2),....,\varphi(M_k),... \qquad (2)$$

сходится к $c$.

По условию члены последовательности (1) не превосходят соответствующих членов последовательности (2). Тогда $b\le c$.

Пусть функция *f(M), g(M), φ(M)* определены на множестве *V*, $M_0$ – предельная точка этого множества. Если для всех точек $M\in V$ выполняется неравенство

$$f(M)\le g(M)\le\varphi(M),$$

существуют $\lim\limits_{M\to M_0}f(M),\ \lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)$ и они равны между собой, то существует и $\lim\limits_{M\to M_0}g(M)$, причем $\lim\limits_{M\to M_0}g(M)=\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)$.

Для доказательства предположим, что $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)=b$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $M_1,M_2,\dots,M_k,\dots$, сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k\in V,\ M_k\ne M_0$.

Тогда числовые последовательности $\{f(M_k)\}$ *и* $\{\varphi(M_k)\}$ сходятся к $b$.
Так как $f(M_k) \le g(M_k) \le \varphi(M_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$
то и последовательность *{g (M$_k$)}* сходятся к $b$. (В силу соответствующего свойства последовательностей). Значит,

$$\lim_{M \to M_0} g(M) = \lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{M \to M_0} \varphi(M) = b.$$

***Следствие.*** Если $\lim_{M \to M_0} |f(M)| = 0$, то и $\lim_{M \to M_0} f(M) = 0$.
Действительно, так как

$$-|f(M)| \le f(M) \le |f(M)|, \quad \text{а}$$

$$\lim_{M \to M_0} |f(M)| = \lim_{M \to M_0} (-|f(M)|) = 0, \text{то} \lim_{M \to M_0} f(M) = 0.$$

***Лемма.*** Если $0<|x|<\pi/2$, то $0<|Sin\ x|<|x|<|tg\ x|$, а $Cos\ x>1-x^2/2$.

***Доказательство.*** Рассмотрим тригонометрический круг единичного радиуса (рис. 3.8.), где $AOC = x, \ |BC| = tgx.$

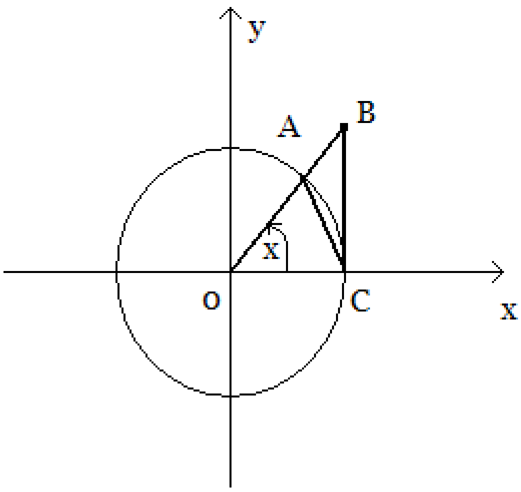



рис. 3.8

Очевидно, что $S_{\Delta OAC} < S_{сек\ OAC} < S_{\Delta OBC}$, где $S_{\Delta OAC} = |sin\ x|/2$, $S_{сек\ OAC} = |x|/2$, а $S_{\Delta OBC} = |tg\ x|/2$.

Следовательно, $0<|sin\ x|<|x|<|tg\ x|$.
Из полученного неравенства, в частности, следует, что $sin^2 x/2 < x^2/4$. Так как $1-cos\ x = 2 \cdot sin^2 x/2$, то $1-cos\ x < 2 \cdot x^2/4$. Значит, $cos\ x > 1-x^2/2$.

**Теорема.** Имеют место следующие равенства

1) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0;$ 2) $\lim_{x \to 0} \cos = 1;$

3) $\lim_{x \to 0} (\sin x)/x = 1$ *(первый замечательный предел).*

**Доказательство.** Так как при $0<|x|<\pi/2$ выполняется неравенство $0<|sin\ x|<|x|$, а $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, то $\lim_{x \to 0} |\sin x| = 0$.

Следовательно, и $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0.$ Аналогично, из неравенства

*$1-x^2/2<\cos x<1$* следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$

Так как при $0<|x|<\pi/2$ имеет место неравенство $|\sin x|<|x|<|tg\, x|$, то $1<|x/\sin x|<1/\cos x.$

Следовательно, $1>(\sin x)/x>\cos x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x = 1,$ т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$

**Задачи для размышления:**

1. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4};$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1};$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+x-2}.$

2. Найти:

а) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 2}}\dfrac{(x_1-1)(x_2+2)}{2x_1x_2-2x_2+3x_1-3};$ б) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 2}}\dfrac{x_1-x_2}{x_1^2+x_1x_2-2x_2^2};$

в) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 2\\ x_2\to 1}}\dfrac{x_1^2-4x_2^2}{2x_1^2-5x_1x_2+2x_2^2}.$

3) Всегда ли существует предел функции *f(M)* при $M\to M_0$, если $\lim\limits_{M\to M_0}|f(M)| = m \neq 0$?

4) Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}(tg\, x)/x;$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)/x;$ в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2.$

5) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}x^n = 0$ ($n$ – целое положительное число).

## Лекция № 9. Определение предела функции по Коши. Эквивалентность двух определений предела.

### П Л А Н

**1. Определение предела функции по Коши.**
**2. Эквивалентность двух определений предела.**
**3. Задачи.**

*Определение предела функции по Коши.* Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V*, а $M_0$ – предельная точка этого множества.

**Определение.** Число *b* называется пределом функции *f(M)* при $M\to M_0$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется окрестность $S_\delta\ (M_0)$ такая, что для всех точек $M\in S_\delta\ (M_0)\cap V, M\neq M_0$, будет выполнено неравенство $|f(M)-b|<\varepsilon$.

**Теорема 1.** Определения предела функции по Гейне и по Коши эквиваленты.

Предположим вначале, что $b$ является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$ по Коши и докажем, что $b$ обязательно является пределом этой же функции при $M \to M_0$ по Гейне.

Рассмотрим произвольную последовательность точек: $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$, сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V, M_k \neq M_0$. Достаточно показать, что соответствующая последовательность значений функции $f(M_1)$, $f(M_2), \ldots, f(M_k), \ldots$ сходится к $b$.

Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Так как $b$ является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$ такая, что для всех $M \in S_\delta(M_0) \cap V$, $M \neq M_0$ будет выполнено неравенство

$$|f(M)-b|<\varepsilon.$$

Из сходимости последовательности $\{M_k\}$ к точке $M_0$ следует, что найдется номер $K$ такой, что при $k \geq K$ точки $M_k$ попадут в окрестность $S_\delta(M_0)$. Тогда при всех $k \geq K$ будет выполнено неравенство

$$|f(M_k)-b|<\varepsilon.$$

Таким образом, мы установили, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $K$ такой, что при $k \geq K$ выполняется неравенство

$$|f(M_k)-b|<\varepsilon$$

Это и означает, что последовательность

$$f(M_1),\ f(M_2), \ldots,\ f(M_k), \ldots$$

сходится к $b$.

Предположим теперь, что $b$ является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$ по Гейне и докажем, что $b$ – предел этой же функции по Коши.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что $b$ не является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$ по Коши. Это означает, что найдется число $\varepsilon_0>0$ такое, что какова бы не была окрестность $S_\delta(M_0)$, существует точка

$$M_\delta \in S_\delta(M_0) \cap V,\ M_\delta \neq M_0,$$

для которой

$$|f(M_\delta)-b| \geq \varepsilon_0.$$

Рассмотрим окрестность вида $S_{1/k}(M_0)$, $k=1,\ 2,\ 3, \ldots$. В каждой такой окрестности есть точка $M_k \in V$, $M_k \neq M_0$, для которой

$$|f(M_k)-b| \geq \varepsilon_0. \qquad (1)$$

По построению, $0<\rho(M_k, M_0)<1/k$. Значит,

$$\lim_{k \to \infty} \{\rho(M_k M_0)\} = 0,$$

т.е. последовательность точек $M_1,\ M_2, \ldots, M_k, \ldots$ сходится к точке $M_0$. По условию $b$ является пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$ по Гейне. Следовательно, последовательность значений функции $f(M_1)$, $f(M_2), \ldots$, $f(M_k), \ldots$ сходится к $b$. А раз так, то найдется номер $K$ такой, что при всех $k \geq K$ должно выполняться неравенство

$$|f(M_k)-b|<\varepsilon_0.$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (1). Теорема доказана.

Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V*, а $M_0$ – предельная точка этого множества. Обозначим через $V_\varepsilon$ множество всех решений неравенства $|f(M)-b|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Очевидно, что $V_{\varepsilon 1}\subset V_{\varepsilon 2}$, если $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$. Отсюда следует, что число *b* является пределом функции *f(M)* при $M\to M_0$,, если для любого положительного числа $\varepsilon$, меньшего или равного некоторого числа $\varepsilon''$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что $S_\delta(M_0)\cap V)\setminus(M_0)\subset V_\varepsilon$.

Таким образом, для доказательства, что $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$ достаточно найти множество $V_\varepsilon$ всех решений неравенства

$$|f(M)-b|<\varepsilon,$$

где $0<\varepsilon<\varepsilon^*$, и подобрать окрестность $S_\delta(M_0)$ (в зависимости от $\varepsilon$) так, чтобы $S_\delta(M_0)\cap V)\setminus(M_0)\subset V_\varepsilon$.

***Примеры***

1) Функция $f(x)=\sqrt{x}$ определена на множестве $V=\{x\in R\}|\ \ \{x\geq 0\}$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$. Если $\varepsilon$ - произвольное положительное число, то $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x}<\varepsilon \Leftrightarrow 0\leq x<\varepsilon^2$.

Таким образом, $V_\varepsilon=[0,\varepsilon^2[$

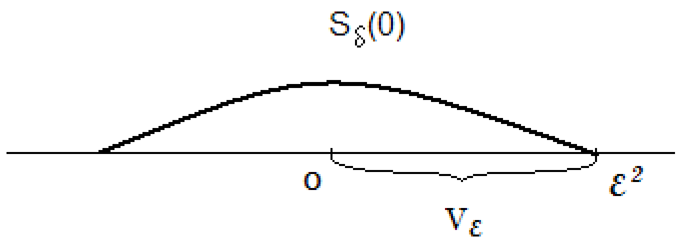


рис. 3.9

Рассмотрим окрестность $S_\delta(0)$, где $\delta=\varepsilon^2$. Тогда $S_\delta(0)\cap V\subset V_\varepsilon$.

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

2)покажем, что $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad (a>0)$.

Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Тогда

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{a}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{a}+\varepsilon.$$

Если $\varepsilon\leq\sqrt{a}\ \left(\varepsilon^*=\sqrt{a}\right)$, то

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow a-2\sqrt{a}\cdot\varepsilon+\varepsilon^2<x<a+2\sqrt{a}\cdot\varepsilon+\varepsilon^2$$

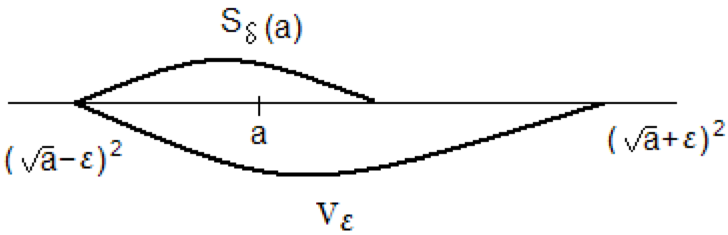



рис. 3.10

Значит, при $\varepsilon \le \sqrt{a}$, $V_\varepsilon = ]a - 2\sqrt{a}\varepsilon + \varepsilon^2,\ a + 2\sqrt{a}\,\varepsilon + \varepsilon^2[$.

Рассмотрим окрестность $S_\delta(a)$, где $\delta = 2\sqrt{a}\cdot\varepsilon - \varepsilon^2$. Тогда

$$S_\delta(a) \subset V_\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$.

3)функция $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ определена на множестве $V = \{M(x,y)\in R^2 \mid \ x+y \ge 0\}$. Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x+y} = 0$

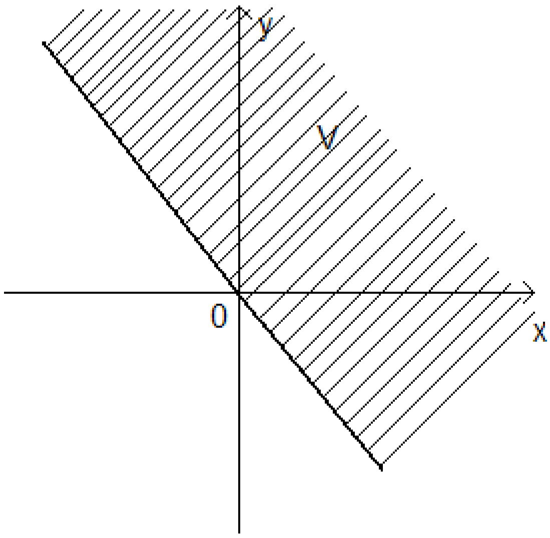



рис. 3.11

Если $\varepsilon$ - произвольное число, то

$$\left|\sqrt{x+y} - 0\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ 0 \le x+y < \varepsilon^2.$$

Значит, $V_\varepsilon = \{M(x,y)\in R^2 \mid \ 0 \le x+y < \varepsilon^2\}$.

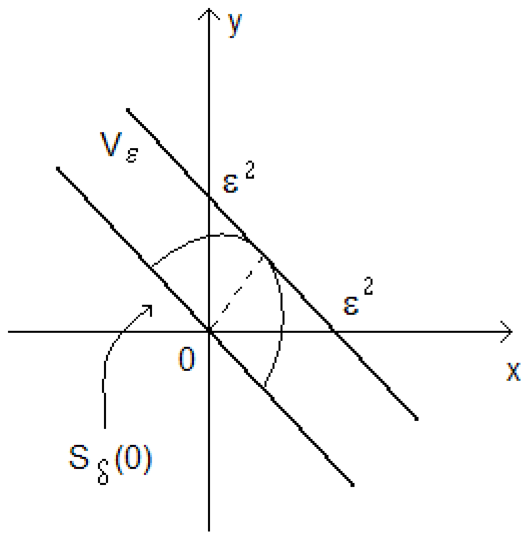



рис. 3.12

Рассмотрим окрестность $S_\delta(0)$, где $\delta = \varepsilon^2/\sqrt{2}$. Тогда

$$S_\delta(0) \cap V \subset V_\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x+y} = 0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Для определения будем считать, что $a>1$. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\{a^{1/k}\} = 1, \text{ то } \lim_{k\to\infty}\{a^{-1/k}\} = \lim_{k\to\infty}\{1/a^{1/k}\} = 1.$$

Если $\varepsilon$ - произвольное положительное число, то найдутся номера $K_1$ и $K_2$ такие, что: при всех $k \geq K_1$ выполняется неравенство

$$1-\varepsilon < a^{1/k} < 1+\varepsilon \qquad (1)$$

а при всех $k \geq K_2$ – неравенство

$$1-\varepsilon < a^{-1/k} < 1+\varepsilon \qquad (2)$$

Положим $k_0$ – $max\ \{K_1,K_2\}$. Если $x \in S_\delta(0)$, где $\delta = 1/k_0$, то $-1/k_0 < x < 1/k_0$. Значит, для любого $x \in S_\delta(0)$ выполняется неравенство

$$a^{-1/k_0} < a^x < a^{1/k_0}$$

В силу неравенств (1) и (2), получим

$$1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $S_\delta(0)$ такая, что для всех $x \in S_\delta(0)$ выполняется неравенство

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

**Задачи для размышления:**

1) На основании определения предела функции по Коши доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$;  б) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$;  в) $\lim\limits_{x\to 1} 1/x = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$;  д) $\lim\limits_{x\to 1} \log_a x = 0$.

2) на основании определения предела функции по Коши доказать, что

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} \sqrt{x+y} = 1$;  б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (2x+3y) = 5$;  в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} 1/(2x-y) = 1$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 1$.

3)Функция *f(M)* определена на всем пространстве $R^n$, причем существует число $\theta$ такое, что для всех $M_1, M_2 \in R^n$ выполняется неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| < \theta \cdot \rho(M_1, M_2)$.

Доказать, что $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ ($M_0$ - любая точка из пространства $R^n$).

## Лекция № 10. Локальные свойства функций, имеющих пределы. Критерий существования предела функции (критерий Коши).

### П Л А Н

1. **Локальные свойства функций, имеющих пределы.**
2. **Критерий существования предела функции (критерий Коши).**
3. **Задачи.**

**Определение.** Функция *f(M)* называется ограниченной сверху (снизу) на множестве *V*, если множество значений этой функции $E_V(f)$ ограничено сверху (снизу). Функция *f(M)* называется ограниченной на множестве *V*, если она ограничена и сверху и снизу на этом множестве. Очевидно, что функция *f(M)* является ограниченной на множестве *V* тогда и только тогда, когда существует число *d>0* такое, что для всех точек $M \in V$ выполняется неравенство $|f(M)| \le d$.

Например, функция $f(x) = 1/x$ ограничена снизу на множестве $V = \{x \in R \mid x > 0\}$, но неограниченна сверху на этом множестве.

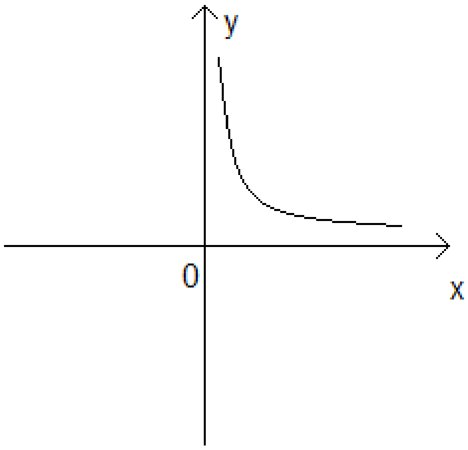



рис. 3.13

Функция $f(x)=\sin x$ ограничена на всей числовой прямой.

**Теорема 1.** Функция *f(M)* определена на множестве *V*, а $M_0$ предельная точка этого множества.

Если существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, то функция *f(M)* ограничена на множестве $\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$, где $S_\delta(M_0)$ - некоторая окрестность точки $M_0$.

**Доказательство.** Пусть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$. Если $\varepsilon$ - некоторое положительное число, то найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M)-b|<\varepsilon.$$

Тогда для всех точек $M\in\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M)|=|b+f(M)-b|\le|b|+|f(M)-b|<|b|+\varepsilon.$$

Значит, функция *f(M)* ограничена на множестве

$$\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}.$$

**Теорема 2.** Функция *f(M)* определена на множестве *V*, $M_0$ – предельная точка этого множества.

Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)>0$, то функция *f(M)* положительна во всех точках множества $\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$, где $S_\delta(M_0)$ - некоторая окрестность точки $M_0$.

**Доказательство.** Пусть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$. Положим $\varepsilon=b/2>0$.

Значит, найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M)-b|<b/2.$$

Отсюда следует, что для всех точек $M\in\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ $f(M)>b-b/2=b/2>0$.

**Задачи для размышления:**

1.Является ли функция *f(x)* ограниченной сверху или снизу на всей числовой прямой, если:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$; г) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ?

2. Является ли функция *f(x,y)* ограниченной сверху или снизу на плоскости, если:

а) $f(x,y)=x^2+y^2$; б) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

в) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$; г) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$?

3.Является ли функция $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ограниченной на множестве:

а) $V_1=\{M(x,y)\in R^2\mid\ x^2+y^2<1\}$;

б) $V_2=\{M(x,y)\in R^2\mid\ x^2+y^2<1/2\}$?

**Теорема 3. (критерий Коши)**. Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V*, а $M_0$ – предельная точка этого множества.

Для того, чтобы существовал предел функции *f(M)* при $M\to M_0$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовала окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что при $M',\ M''\in(S_\delta(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$ выполнялось неравенство

$$|f(M')-f(M'')|<\varepsilon.$$

**Доказательство необходимости.** Пусть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$. Тогда каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in\left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M)-b|<b/2$$

Следовательно, для всех точек $M',\ M''\in(S_\delta(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$ имеем:

$$|f(M')-f(M'')|=|f(M')-b+b-f(M'')|\le$$
$$\le|f(M')-b|+|f(M_0'')-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon>0$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что при всех $M',\ M''\in(S_\delta(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$$

Необходимость доказана.

**Доказательство достаточности.** Предположим, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что при всех $M',\ M''\in(S_\delta(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|f(M')-f(M'')|<\varepsilon \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольную последовательность точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...,$$

сходящуюся к точке $M_0$ , в которой $M_k\in V$ и $M_k\ne M_0$. Покажем, что соответствующая последовательность значений функции

$$f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$$

сходится.

Так как последовательность $\{M_k\}$ сходится к точке $M_0$, то найдется номер $K$ такой, что при всех $k,l\ge K$ $M_k\in S_\delta(M_0)$ и $M_l\in S_\delta(M_0)$.

Тогда, в силу неравенства (1),

$$|f(M_k)-f(M_l)|<\varepsilon.$$

Таким образом, мы установим, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $K$ такой, что при всех $k,l\ge K$ выполняется неравенство

$$|f(M_k)-f(M_l)|<\varepsilon$$

Это означает, что последовательность $\{f(M_k)\}$ является фундаментальной. Поэтому она сходится.

Осталось показать, что предел последовательности $\{f(M_k)\}$ не зависит от выбора последовательности $\{M_k\}$.

Для этого рассмотрим две произвольные последовательности точек $\{M_k\}$ и $\{\overline{M}_k\}$, сходящиеся к точке $M_0$, в которых $M_k, \overline{M}_k\in V$ и $M_k\ne M_0$, $\overline{M}_k\ne M_0$. Тогда последовательность

$$M_1, \overline{M}_1,\ M_2, \overline{M}_2, ..., M_k, \overline{M}_k, ....,$$

также будет сходиться к точке $M_0$. По ранее доказанному соответствующая последовательность значений функции

$$f(M_1),\ f\left(\overline{M}_1\right),\ f(M_2),\ f\left(\overline{M}_2\right),...,\ f(M_k),\ f\left(\overline{M}_k\right)$$

сходится. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty}\{f(M_k)\} = \lim\limits_{k\to\infty}\{f\left(\overline{M}_k\right)\}$.

Теорема доказана.

## Лекция № 11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

### П Л А Н

1. **Бесконечно малые функции.**
2. **Бесконечно большие функции.**
3. **Задачи.**

Пусть функция $\alpha(M)$ определена на множестве $V$, а $M_0$ - предельная точка этого множества.

**<u>Определение 1.</u>** Функция $\alpha(M)$ называется бесконечно малой при $M\to M_0$, если $\lim\limits_{M\to M_0}\alpha(M)=0$.

Например, функция $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ является бесконечно малой при $x\to 0,\ y\to 0$, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x+y}=0$.

Из определений предела функции по Гейне и по Коши сразу же следует эквивалентность следующих трех условий:

а) функция $\alpha(M)$ является бесконечно малой при $M\to M_0$;

б) для любой последовательности точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...$$

сходящейся к точке $M_0$, в которой $M_k\in V\setminus\{M_0\}$ соответствующая последовательность значений функции

$$\alpha(M_1), \alpha(M_2), ..., \alpha(M_k), ...$$

является бесконечно малой;

в) для любого положительного числа $\varepsilon$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in(S_\delta(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|\alpha(M)|<\varepsilon$$

***Основные свойства бесконечно малых функций.***

1)Пусть функция $\alpha_1(M)$ и $\alpha_2(M)$ определены на множестве $V$, а $M_0$ – предельная точка этого множества. Если функции $\alpha_1(M)$ и $\alpha_2(M)$ являются бесконечно малыми при $M\to M_0$, то и их сумма $\alpha_1(M)+\alpha_2(M)$ бесконечно мала при $M\to M_0$.

Действительно,

$$\lim_{M\to M_0}(\alpha_1(M)+\alpha_2(M)) = \lim_{M\to M_0}\alpha_1(M) + \lim_{M\to M_0}\alpha_2(M) = 0+0=0$$

2)Пусть функция $\alpha(M)$ и $f(M)$ определены на множестве $V$, а $M_0$ - предельная точка множества $V$. Если функция $\alpha(M)$ является бесконечно малой при $M\to M_0$ , а функция $f(M)$ является бесконечно малой функцией при $M\to M_0$.

Для доказательства рассмотрим произвольную последовательность точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...$$

сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$.

Тогда последовательность

$$\alpha(M_1), \alpha(M_2), ..., \alpha(M_k), ...$$

является бесконечной малой, а последовательность

$$f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$$

ограничена. Следовательно, произведение этих последовательностей

$$\alpha(M_1)\cdot f(M_1), \alpha(M_2)\cdot f(M_2), ...., \alpha(M_k)\cdot f(M_k), ...$$

бесконечно мало. Значит функция $\alpha(M)\cdot f(M)$ является бесконечно малой при $M\to M_0$.

Например, функция $\varphi(x) = x\sin l/x$ является бесконечно малой при $x\to 0$, так как функция $\alpha(x) = x$ бесконечно мала при $x \to 0$, а $f(x) = \sin l/x$ ограничена на множестве $V = \{x \in R \mid x \neq 0\}$.

**Определение 2.** Предположим, что функция $\beta(M)$ определена на множестве $V$, а $M_0$ – предельная точка этого множества. Без ограничения общности можно считать, что $\beta(M) \neq 0$ при $M \in V$. В этом случае $\beta(M)$ называется бесконечно большой при $M\to M_0$, если функция $\alpha(M) = 1/\beta(M)$ является бесконечно малой при $M\to M_0$.

Если функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M\to M_0$ то пишут: $\lim\limits_{M\to M_0} \beta(M) = \infty$.

Например, функция $\beta(x) = 1/x$ бесконечно большая при $x \to 0$, так как $\alpha(x) = x$ бесконечно малая.

**Теорема.** Функция $\beta(M)$ определена на множестве $V$, а $M_0$ – предельная точка этого множества. Следующие три условия эквиваленты:

1)функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M \to M_0$;

2)для любой последовательности точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...$$

сходящейся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$, последовательность

$$\beta(M_1), \beta(M_2), ..., \beta(M_k), ...$$

является бесконечно большой;

3)для любого числа $A>0$ найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in \left(S_\delta(M_0) \cap V\right) \setminus \{M_0\}$ выполняется неравенство

$$|\beta(M)|> A.$$

**Доказательство.** 1) $\Rightarrow$ 2).

Предположим, что функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M\to M_0$. Рассмотрим произвольную последовательность точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...$$

сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$.

Так как функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M\to M_0$, то последовательность

$$1/\beta(M_1), 1/\beta(M_2), ..., 1/\beta(M_k), ...$$

бесконечно мала. Тогда последовательность

$$\beta(M_1), \beta(M_2), ..., \beta(M_k), ...$$

является бесконечно большой.

2) $\Rightarrow$ 3). Доказательство будем вести от противного. Если условие 3) не выполняется, то существует число $A_0>0$ такое, что какова бы ни была окрестность $S_{1/k}(M_0)$, найдется точка $M_k \in (S_{1/k}(M_0)\cap V)\setminus\{M_0\}$, для которой

$$|\beta(M_k)|\le A_0 \qquad (1)$$

Таким образом, мы получим последовательность точек

$$M_1, M_2, ..., M_k, ...$$

сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$. В силу неравенства (1) соответствующая последовательность значений функции $\beta(M_1), \beta(M_2), ..., \beta(M_k), ...$ не является бесконечно большой. Это противоречит условию 2).

3)$\Rightarrow$1). Предположим, что для любого числа $A>0$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in \left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство $|\beta(M)|> A$.

Докажем, что функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M\to M_0$.

Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Положим $A=1/\varepsilon$. Тогда найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in \left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$ выполняется неравенство $|\beta(M)|>1/\varepsilon$.

Следовательно, для всех точек $M \in \left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$

$$|1/\beta(M)|<\varepsilon.$$

Это означает, что функция $\alpha(M)=1/\beta(M)$ является бесконечно малой при $M\to M_0$. Тогда функция $\beta(M)$ - бесконечно большая при $M\to M_0$. Теорема доказана.

***Замечание.*** Если функция $\beta(M)$ является бесконечно большой при $M\to M_0$ и $\beta(M)>0$ ($\beta(M)<0$) при $M \in \left(S_\delta(M_0)\bigcap V\right)\setminus\{M_0\}$, ($S_\delta(M_0)$- некоторая окрестность точки $M_0$), то пишут

$$\lim_{M\to M_0}\beta(M)=+\infty \qquad \left(\lim_{M\to M_0}\beta(M)=-\infty\right)$$

**Задачи для размышления:**

**1.** Доказать, что функция *f(x)* является бесконечно малой при $x\to 0$, если

а) $f(x)=x\cdot\cos x$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

в) $f(x)=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}+|x|$.

2. Доказать, что функция *f(x,y)* является бесконечно малой при $x\to 0,\ y\to 0$, если

а) $f(x,y)=x\cdot\sqrt{x^2+y^2}$; б) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

в) $f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{xy}$.

3. Доказать, что функция *f(x)* является бесконечно большой при $x\to 0$, если

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$; в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

4. Доказать, что функция *f(x,y)* является бесконечно большой при $x\to 0;\ y\to 0$, если:

а) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)\sin\frac{1}{x}}$; б) $f(x,y)=(|x|+|y|)\dfrac{1}{x^2}$

## Лекция № 12. Непрерывность функции.

### П Л А Н

**1.Непрерывность функции.**
**2.Основные свойства непрерывных функций.**
**3.Задачи.**

**Определение.** Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V*, а точка $M_0$ принадлежит множеству *V* и является предельной точкой этого множества.

Функция *f(M)* называется непрерывной в точке $M_0$, если существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ и он равен значению этой функции в точке $M_0$, т.е. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Например, функция $f(x)=a^x$ непрерывна в точке *x=0*, так как $\lim\limits_{x\to 0}(x)=\lim\limits_{x\to 0}a^x=I=f(0)$. Предельная точка $M_0$ множества, на котором определена функция *f(M)*, называется точкой разрыва этой функции, если функция *f(M)* не является непрерывной в точке $M_0$.

В частности, если функция *f(M)* не определена в точке $M_0$, то эта точка является точкой разрыва функции *f(M)*.

Например, $x=0$ является точкой разрыва функции $f(x)=1/x$, так как данная функция не определена в точке $x=0$.

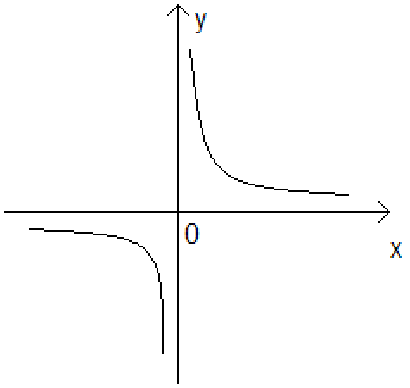



рис. 3.14

**Теорема.** Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V*, в точке $M_0$ принадлежит множестве *V* и является предельной точкой этого множества. Тогда следующие три условия равносильны:

а) функция *f(M)* непрерывна в точке $M_0$;

б) для любой последовательности точек множества *V*:

$$M_1, M_2, ..., M_k, ....$$

сходящейся к точке $M_0$, соответствующая последовательность значений функции: $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_k), ...$ сходится к $f(M_0)$;

в) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in S_\delta(M_0) \cap V$ выполняется неравенство

$$| f(M) - f(M_0)| < \varepsilon .$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из определения непрерывности и эквивалентности двух определений предела функции.

Например, точка $M_0(0{,}0)$ является точкой разрыва функции

$$f(x,y) = \begin{cases} x/(x+y), & x+y \neq 0, \\ 1/2, & x+y=0 \end{cases}$$

так как последовательность $\{M_k(1/k,\ 2/k)\}$ сходится к этой точке, а соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_k)\}$ сходится к $1/3 \neq f(M_0)$.

***Основные свойства непрерывных функций.***

**1.** Если функция *f(M)* и $\varphi(M)$ определены на одном и том же множестве *V* и непрерывны в точке $M_0$, то их сумма $f(M)+\varphi(M)$, произведение $f(M)\cdot\varphi(M)$ и частное $f(M)/\varphi(M)$, при $\varphi(M_0)\neq 0$ непрерывны в точке $M_0$.

Проверим, например, что произведение $f(M)\cdot\varphi(M)$ является непрерывной функцией в точке $M_0$. Действительно,

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)\cdot\varphi(M))=\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot\lim_{M\to M_0}\varphi(M)=f(M_0)\cdot\varphi(M_0)$$

Из этого свойства, в частности, вытекает непрерывность функции $f(x)=x^n$ ($n$ – целое число положительное число) в любой точке числовой прямой.

**2.** Пусть функция *f(M)* определена на множестве *V* и непрерывная в точке $M_0\in V$. Тогда:

а) найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что функция *f(M)* ограничена на множестве $S_\delta(M_0)\cap V$,

б) если $f(M_0)>0\ \ (f(M_0)<0)$, то найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in S_\delta(M_0)\cap V$ выполняется неравенство

$$f(M_0)>0\ \ (f(M_0)<0).$$

Эти утверждения легко доказываются на основании определения непрерывности и локальных свойств функций, имеющих пределы.

Говорят, что функция *f(M)* непрерывна на множестве *V*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

***Примеры***

1. Постоянная, линейная и квадратичная функция непрерывны на всем пространстве $R^n$.

Проверим, например, что линейная функция

$$f(M)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$$

непрерывна в точке $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$. В самом деле

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{\substack{M\to M_0\\ x_n\to x_n^0}}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=a_1\left(\lim_{x\to x_1^0}x_1\right)+$$

$$+a_2\left(\lim_{x\to x_2^0}x_2\right)+....+a_n\left(\lim_{x\to x_n^0}x_n\right)=a_1x_1^0+a_2x_2^0+...+a_nx_n^0=f(M_0)$$

2. Показательная функция $f(x)=a^x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}\cdot a^{x_0})=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}=f(x_0)$$

3.Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{x\to x_0}\sin((x-x_0)+x_0)=\lim_{x\to x_0}(\sin(x-x_0))$$

$$\cos x_0+\cos(x-x_0)\cdot\sin x_0)=0\cdot\cos_0+1\cdot\sin x_0=\sin x_0=f(x_0).$$

4.Функция $f(x)=\cos x$ непрерывна на всей числовой прямой, так как

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\cos x=\lim_{x\to x_0}\cos((x-x_0)+x_0)=\lim_{x\to x_0}(\cos(x-x_0)\ \cos x_0 -$$
$$-\sin(x-x_0)\ \sin x_0)=\cos x_0 = f(x_0).$$

5.Функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна на множестве $V=\{x\in R\,|\,x\ge 0\}$. Действительно, если $a\ge 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{a}=f(a).$$

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что функция в данной точке имеет разрыв:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 \quad, \ \textit{если} \quad x\le 3, & x_0=3 \\ 2x+1, \quad \textit{если} \quad x>3 \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 1 \quad, \ \textit{если} \quad x\ge 0, x_0=0 \\ x^2 \quad, \ \textit{если} \quad x<0 \end{cases}$,

в) $f(x)=\begin{cases} x+y \quad, \ \textit{если} \quad x^2+y^2\le 25, M_0(3,4) \\ 4, \quad \textit{если} \quad x^2+y^2>25. \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 1/(x+y) \quad, \ \textit{если} \quad x+y\ne 0, M_0(1,-1) \\ 2, \quad \textit{если} \quad x+y=0. \end{cases}$

2. При каком значении *A* функция непрерывна в точке $x_0$ ?

а) $f(x)=\begin{cases} (x^2-4)/(x-2), \quad x\ne 2, & x_0=2 \\ A \quad, \quad x=2 \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \left(\sqrt{x}-1\right)/(x-1), \ \textit{если} \ x\ne 1, & x_0=1 \\ A, \quad \textit{если} \ x=1. \end{cases}$

3. При каком значении *A* функция непрерывна в точке $M_0$ ?

а) $f(x,y)=\begin{cases} (x-y)/(x^2-y^2), \quad \textit{если} \ x^2-y^2\ne 0, & M_0(1,1) \\ A, \quad \textit{если} \ x^2-y^2=0 \end{cases}$

б) $f(x,y)=\begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)/(x-y), \quad \textit{если} \ x-y\ne 0, & M_0(2,2) \\ A, \quad \textit{если} \ x-y=0. \end{cases}$

4.Доказать, что функция $f(x)=|x|$ непрерывна на всей числовой прямой.

5.Доказать, что функция *f(x)* непрерывная на множестве *V*, если

а) $f(x)=tgx, V=\{x\in R\,|\ x\ne \pi/2+\pi\cdot n\}$,

б) $f(x)=ctgx, V=\{x\in R\,|\ x\ne \pi\cdot n\}$, в) $f(x)=1/x^n, V=\{x\in R\,|\ x\ne 0\}$

## Лекция № 13. Односторонние пределы. Классификация точек разрыва функций одного переменного.

### П Л А Н

**1.Односторонние пределы.**
**2.Классификация точек разрыва функций одного переменного.**
**3.Задачи.**

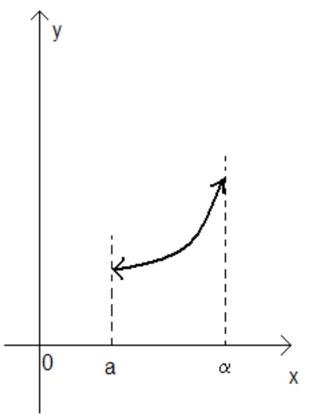


рис. 3.15

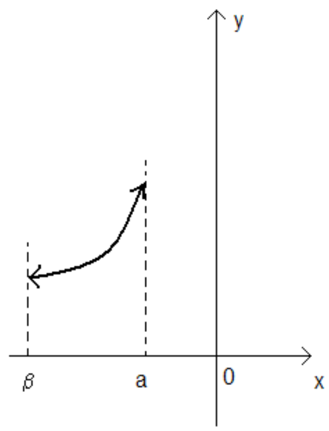


рис. 3.16

Пусть функция *f(x)* определена на интервале $]a,\alpha[$ $(]\beta,a[)$.

**Определение 1 (по Гейне).** Число $b$ называется правым (левым) пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для каждой последовательности $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ сходящейся к точке *a*, в которой $a < x_k < \alpha$ $(\beta < x_k < a)$, соответствующая последовательность значений функции:

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k), ...$$

сходится к $b$.

**Определение 2 (по Коши).** Число $b$ называется правым (левым) пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех *x*, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ выполняется неравенство

$$| f(x) - b | < \varepsilon.$$

Определения односторонних пределов по Гейне и Коши эквиваленты.

Если $b$ является правым (левым) пределом функции *f(x)* при $x \to a$, то пишут:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = b\right).$$

Например, если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -1$.

Нетрудно заметить, что все основные свойства пределов переносятся и на односторонние пределы.

**Теорема.** Пусть функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a*.

Функция *f(x)* имеет предел при $x \to a$, тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они совпадают.

**Доказательство необходимости.** Если функция *f(x)* имеет предел при $x \to a$ и он равен *b*, то согласно определению 1 это же число *b* будет как правым, так и левым пределом функции *f(x)* при $x \to a$.

**Доказательство достаточности.** Предположим, что существуют оба односторонних предела функции *f(x)* при $x \to a$ и они равны *b*. Согласно определению 2, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что при $a < x < a + \delta_1$ или при $a - \delta_2 < x < a$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при всех $x \in S_\delta(a) \setminus \{a\}$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Теорема доказана.

Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1. \end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (2 - x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} x^2 - 1$, то и $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

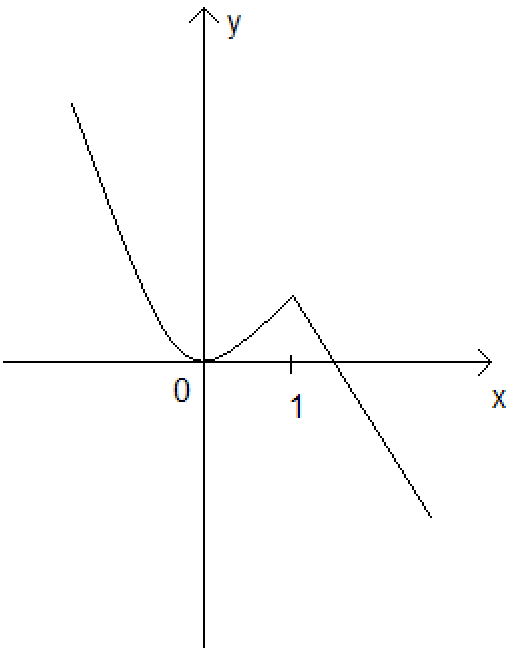



рис. 3.17

Пусть *a* - точка разрыва функции *f(x)*. Это означает, что *a* – предельная точка множества, на котором определена функция *f(x)* и функция *f(x)* не является непрерывной в этой точке.

1.Точка *a* называется точкой устранимого разрыва функции *f(x)*, если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Если *a* – точка устранимого разрыва функции *f(x)*, то функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если} \quad x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & \textit{если} \quad x = a \end{cases}$$

будет непрерывной в точке *a* (см.рис.).

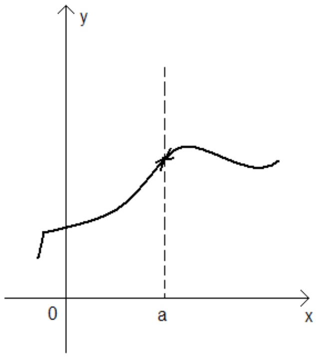



рис. 3.18

Например, точка *x=0* является точкой устранимого разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

2.Точка *a* называется точкой разрыва 1-го рода, если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, то они не равны между собой.

Например, точка *x=0* является точкой разрыва 1-го рода функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1$.

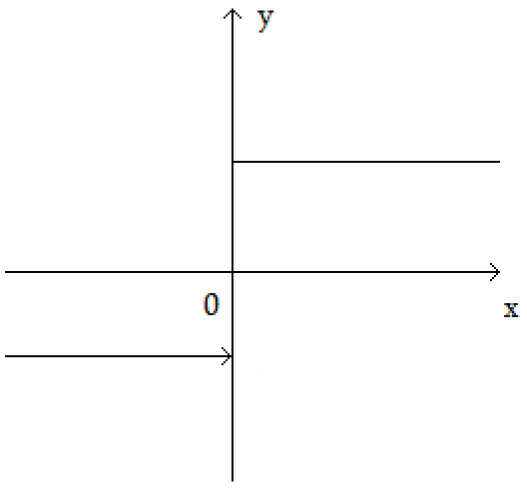


рис. 3.19

3.Точка $a$ называется точкой разрыва 2-го рода, если не существует хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ (см.рис.).

***Замечание.*** Если $a$ – точка разрыва 2-го рода функции, а один из односторонних пределов при $x \to a$ равен $\pm\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

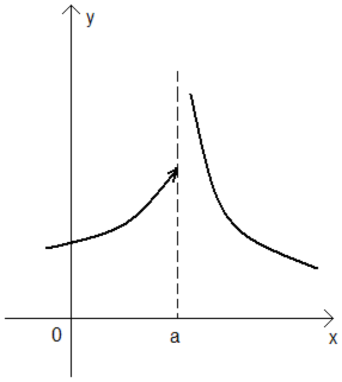


рис. 3.20

**Задачи для размышления:**

1. Доказать эквивалентность двух определений (по Гейне и по Коши) одностороннего предела функции.

2.Сформулировать и доказать критерий Коши для существования односторонних пределов.

3.Сформулировать определение бесконечно большой функции при $x \to a+0$ и при $x \to a-0$.

4.Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ 2x-1, & x < 2, \end{cases}$ $a = 2$; б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$ $a = 0$;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi/4, \\ \cos x, & x > \pi/4, \end{cases}$ $a = \pi/4$

5.Исследовать функцию *f(x)* на непрерывность. Определить характер разрывов.

а) $f(x)=\begin{cases}2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ б) $f(x)=1/x^2$

в) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 2,\\ 1/(x-3), & x<2\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 4,\\ x^2-2x-6, & x<4\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}2, & x\geq 0,\\ (1/2)^x-1, & x<0.\end{cases}$

## Лекция № 14 . Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции одного переменного. Монотонные функции одного переменного.

### П Л А Н

**1. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции одного переменного .**
**2. Монотонные функции одного переменного.**
**3. Критерий непрерывности монотонной функции.**
**4. Задачи.**

**Теорема 1.** Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a)\neq f(b)$. Тогда для любого числа *c*, заключенного между *f(a)* и *f(b),* найдется хотя бы одна точка *x*, такая, что $f(x_c)=c$.

**Доказательство.** Для определенности будем считать, что $f(a)<c<f(b)$. Множество $V_c=\{x\in[a,b]|\quad f(x)<c\}$, очевидно, не пусто $(a\in V_c)$ и ограничено сверху.

Если $x_c = supV_c$, то найдется последовательность точек множества $V_c$:

$$x_1, x_2, ..., x_k, ...,$$

сходящейся к точке $x_c$. Так как функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $x_c\in[a,b]$, то последовательность

$$f(x_1), f(x_2),...., f(x_k),....$$

сходится к $f(x_c)$. ПО условию $x_k\in V_c$, т.е. $f(x_k)<c,\ k=1,2,3,....$ Значит,

$$f(x_c)\leq c.$$

Из неравенства (1), в частности, следует, что $x_c<b$. Значит, можно построить последовательность точек

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k, ...,$$

сходящейся к точке $x_c$, в которой $x_c < \bar{x}_k < b$. Так как $\bar{x}_k \notin V_c$, то $f(\bar{x}_k) \geq c,\ k = 1,2,3,\ldots$.

Последовательность

$$f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), \ldots, f(\bar{x}_k), \ldots$$

сходится к $f(x_c)$. Следовательно,

$$f(x_c) \geq c \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $f(x_c)=c$.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется точка $x_0 \in ]a,b[$ (такая, что $f(x_0) = 0$).

Рассмотрим, например, уравнение $2^x = 4x$.

Очевидно, что $x=4$ является корнем этого уравнения. Покажем, что уравнение имеет еще один корень.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2^x = 4x$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, а $f(0) = 1 > 0$, $f(1/2) = \sqrt{2} - 2 < 0$, то на интервале $]0,1/2[$ находится корень уравнения $2^x = 4x$.

Теорему о промежуточных значениях непрерывной функции можно использовать также для приближенного вычисления корней уравнения.

Функция $f(x) = x^4 - x - 1$ непрерывна на всей числовой прямой. Так как $f(1) = -1,\ f(2) = 13$, то на отрезке [1,2] находится хотя бы один корень уравнения

$$x^4 - x - 1 = 0 \tag{3}$$

Разделим отрезок [1,2] на 10 равных частей. Так как $f(1{,}1) = -0{,}63\ldots,\ f(1{,}2) = -0{,}12\ldots,\ f(1{,}3) = 0{,}55\ldots,$ то корень уравнения (3) находится на отрезке [1,2; 1,3].

Разделив отрезок [1,2; 1,3] на 10 равных частей, получим:

$$f(1{,}21) = -0{,}06\ldots,\quad f(1{,}22) = -0{,}004\ldots,\quad f(1{,}23) = 0{,}058.$$

Следовательно, корень уравнения (3) лежит между 1,22 и 1,23. таким образом, мы знаем значения корня с точностью до 0,01 и т.д.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что существует точка $x_0$, где $f(x_c)=c$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1},\quad c = 1/3;$ б) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1,\ c = 3;$

в) $f(x) = 2^x - x^2,\ c = 3;$ г) $f(x) = \dfrac{3^x}{x^2+1},\quad c = 5$

2. Доказать, что уравнение

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

имеет, хотя бы один, корень.

3. Доказать, что уравнение

$$3^x = x + 2$$

имеет не менее двух корней.

4. Доказать, что уравнение

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$$

имеет три различных корня.

5. Найти корень уравнения *f(x)=0* с точностью до 0,01, если:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + x - 2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{x}{2} + 1$;

в) $f(x) = 3 + -\dfrac{1}{x^3}$; г) $f(x) = 3x - \cos x$

Пусть функция *f(x)* определена на множестве V,V$\subset$ R. Функция *f(x)* называется неубывающей (возрастающей) на множестве V, если из условий: $x_1 < x_2;\ x_2 \in V$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. (рис.3.21)

Аналогично функция *f(x)* называется невозрастающей (убывающей) на множестве V, если из условий $x_1 < x_2, x_1;\ x_2 \in V$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. (рис.3.22)

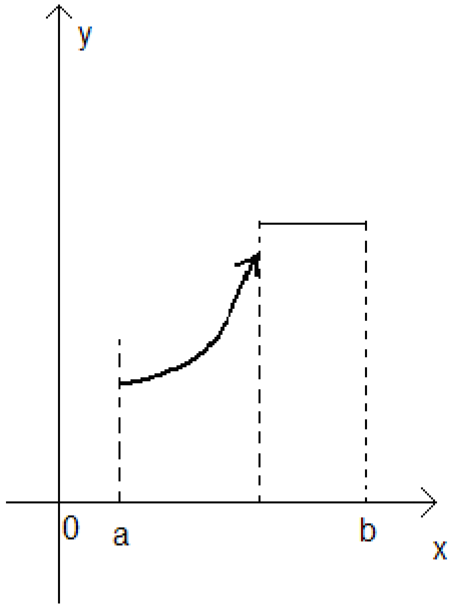



рис. 3.21

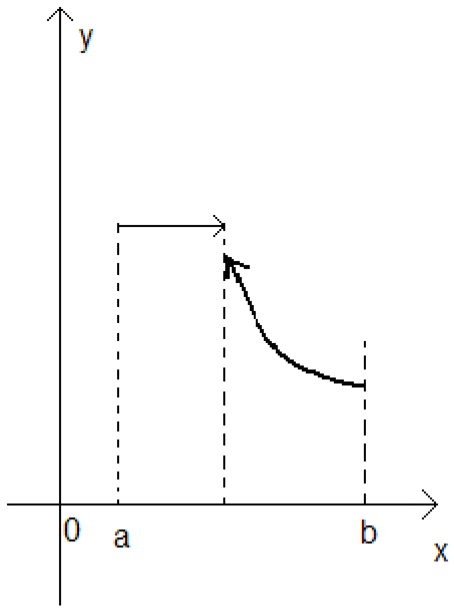



рис. 3.22

**<u>Определение.</u>** Неубывающие и невозрастающие функции называют монотонными функциями, а возрастающие и убывающие – строго монотонными.

**Теорема 2.** Пусть функция *f(x)* строго монотонна на отрезке [*a*,*b*]. Если функция *f(x)* на отрезке [*a*,*b*] принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$, то она на этом отрезке непрерывна.

**Доказательство.** Для определенности будем считать, что функция *f(x)* возрастает на отрезке [*a*,*b*].

Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Если $x_0$ – внутренняя точка отрезка $[a,b]$, то положим

$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, f(x_0) - f(a),\ \ f(b) - f(x_0)\}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon, \\ \varepsilon_1 \le f(x_0) - f(a), \\ \varepsilon_1 \le f(b) - f(x_0), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon, \\ f(x_0) - \varepsilon_1 \ge f(a), \\ f(x_0) + \varepsilon_1 \le f(b). \end{cases}$$

Так как функция *f(x)* принимает на отрезке $[a,b]$ все значения между *f(a)* и *f(b)* и

$$f(a) \le f(x_0) - \varepsilon_1 < f(x_0) + \varepsilon_1 \le f(b),$$

то найдутся точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in [a,b]$ такие, что

$$f(\bar{x}_1) = f(x_0) - \varepsilon_1, \quad f(\bar{x}_2) = f(x_0) + \varepsilon_1.$$

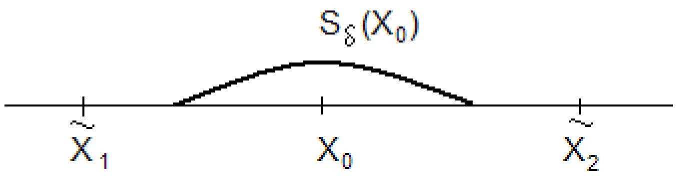



рис. 3.23

Выберем окрестность $S_\delta(x_0)$ так, чтобы $S_\delta(x_0) \subset ]\bar{x}_1, \bar{x}_2[$.

Если $x \in S_\delta(x_0)$, то $\bar{x}_1 < x < \bar{x}_2$. В силу монотонности функции *f(x)* имеем:

$$f(x_0) - \varepsilon_1 = f(\bar{x}_1) < f(x) < f(\bar{x}_2) = f(x_0) + \varepsilon_1.$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $S_\delta(a)$ такая, что при всех $x \in S_\delta(a) \cap [a,b]$ выполняется неравенство

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon_1 \le \varepsilon.$$

Тем самым установлена непрерывность функции $f(x)$ в точке *a*. Аналогично доказывается непрерывность функции в точке *b*.

Следствие (критерий непрерывности монотонной функции).

Пусть функция *f(x)* строго монотонна на отрезке $[a,b]$. Функция *f(x)* является непрерывной на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке принимает все значения между *f(a)* и *f(b)*.

Это утверждение непосредственно вытекает из выше сказанных теоремы.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ убывает на $[1,+\infty]$.
2. Исследовать на монотонность:

а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x^2, \ 1 \le x < 2; \\ 5, \quad 2 \le x \le 3; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} 1/x, \ 1 \le x < 2; \\ 3/x, \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$.

3. Доказать, что монотонная функция на отрезке $[a,b]$ всегда ограниченна на этом отрезке.

4. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ непрерывна на [0,3].

5. Функция *f(x)* является неубывающей на $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$.

Доказать:

1) $\sup\{y \,|\, y = f(x), \quad x < x_0\} \le f(x_0)$
$\inf\{y \,|\, y = f(x), \quad x > x_0\} \ge f(x_0)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup\{y \,|\, y = f(x), \ x < x_0\}$

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \inf\{y \,|\, y = f(x), \ x > x_0\}$

6. Функция *f(x)* монотонна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, если она на этом отрезке принимает все значения между *f(a)* и *f(b)*.

## Лекция № 15. Обратная функция. Теорема о непрерывности обратной функции.

### П Л А Н

1. **Обратная функция.**
2. **Теорема о непрерывности обратной функции.**
3. **Задачи.**

Пусть функция *f(x)* определена на множестве $V, V \subset R$ причем, если $x_1, x_2 \in V, \ x_1 \ne x_2$, то $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Тогда для любой точки $y \in E_v(f)$ существует и притом только одна точка $x \in V$ такая, что $y = f(x)$.

Если каждой точке $y \in E_v(f)$ поставить в соответствие точку $x \in V$ такую, что $y = f(x)$, то на множестве $E_v(f)$ будет определена функция $f^{-1}(y)$, которая называется обратной (по отношению к функции *f(x)*) функцией.

В частности, если функция *f(x)* строго монотонна на множестве *V*, то для нее всегда существуе6т обратная функция.

***Пример.*** Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ убывает на множестве $V = ]0,+\infty[$. Так как $E_v(f) = ]0;+\infty[$, то на этом множестве определена обратная функция $f^{-1}(y)$.

Чтобы для любого $y \in ]0;+\infty[$ определить значение $f^{-1}(y)$, достаточно найти $x \in ]0;+\infty[$ так, чтобы $y = \frac{1}{x^2}$. Поэтому $f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

### *Свойства обратных функций*

1.Если функция *f(x)* определена на множестве *V* и имеет обратную функцию, то:

для любого $x \in V$ $\qquad f^{-1}(f(x)) = x$,

а для любого $y \in E_v(f)$ $\qquad f(f^{-1}(y)) = y$.

2.Если функция *f(x)* возрастает (убывает) на множестве *V*, то и обратная к ней функция возрастает (убывает) на множестве $E_v(f)$.

Доказательство. Предположим, что $y_1, y_2 \in E_v(f)$, $y_1 < y_2$, но $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Так как $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in V$, а функция *f(x)* возрастает на множестве *V*, то $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y_2))$.

Значит, $y_1 \geq y_2$. Это противоречит условию. Следовательно, функция $f^{-1}(y)$ возрастает на множестве $E_v(f)$.

**Теорема 1.** Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$ и возрастает (убывает) на нем, то обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$, $([f(b), f(a)])$.

**Доказательство.** Так как функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает все значения между *f(a)* и *f(b)*. Если при этом функция *f(x)* возрастает на отрезке $[a,b]$, то $E(f) = [f(a), f(b)]$. Следовательно, обратная функция $f^{-1}(y)$ определена на отрезке $[f(a), f(b)]$, возрастает на нем и принимает все значения между $f^{-1}(f(a)) = a$ и $f^{-1}(f(b)) = b$. По предыдущей сказанной теореме 1 обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$.

***Следствие.*** Если функция *f(x)* непрерывна и возрастает (убывает) на интервале $]a,b[$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на множестве *E(f)*.

**Доказательство.** Пусть $y_0 \in E(f)$. Тогда найдется точка $x_0 \in ]a,b[$ такая, что $y_0 = f(x_0)$. Выберем $x_1, x_2 \in ]a,b[$ так, чтобы $x_1 < x_0 < x_2$. Функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$ и возрастает на нем. Следовательно, обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $[f(x_1), f(x_2)]$.

Так как $y_0 \in [f(x_1), f(x_2)]$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0$.

### *Примеры*

1)функция $f(x)=a^2,\ a>1$, непрерывна и возрастает на $]-\infty;+\infty[$. Так как $E(f)=]0;+\infty[$, то на $]0;+\infty[$ определена непрерывная обратная функция $f^{-1}(y)=\log y$.

2)функция $f(x)=\sin x$ непрерывна и возрастает на отрезке $[-\pi/2,\pi/2]$, при этом $E(f)=[-1;1]$. Значит, на отрезке $[-1;1]$ определена непрерывная обратная функция $f^{-1}(y)=\arcsin y$.

3)функция $f(x)=\cos x$ непрерывна и убывает на отрезке $[0;\pi]$. При этом $E(f)=[-1;1]$. Значит, на отрезке $[-1;1]$ обратная функция $f^{-1}(y)=\arccos y$ непрерывна.

4)функция $f(x)=tgx$ непрерывна и возрастает на $[-\pi/2,\pi/2]$. Так как $E(f)=]-\infty;+\infty[$, то на всей числовой прямой обратная функция $f^{-1}(y)=arctgy$ непрерывна.

5)функция $f(x)=ctgx$ непрерывна и убывает на $[0;\pi]$. Так как $E(f)=]-\infty;+\infty[$, то на всей числовой прямой обратная функция $f^{-1}(y)=arcctgy$ непрерывна.

**Задачи для размышления:**

1. Найти обратную функцию $f^{-1}(y)$, если
   а) $f(x)=2x+3,\quad x\in]-\infty;+\infty[$;
   б) $f(x)=x^2,\quad x\in]-\infty;0[$;
   в) $f(x)=x^2,\quad x\in]0;+\infty[$;
   г) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ x\in]-1;+\infty[$;
   д) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad x\in]-1;0[$;
   е) $f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1; \\ x^2, & 1\le x\le 4; \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$

2. Найти обратную функцию $f^{-1}(y)$, если:
   а) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2},\quad x\in[0;+\infty[$;
   б) $f(x)=tg\dfrac{x}{2}$;
   в) $f(x)=arctg3x$;
   г) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0; \\ x^2, & x>0. \end{cases}$

3. Доказать, что $\varphi^{-1}(y)=f^{-1}(y-c)$, если $\varphi(x)'=f(x)+c$ ($c$ – некоторая постоянная).

4. Доказать, что обратная функция к функции $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ непрерывна на $]0,\dfrac{1}{2}]$.

5. Доказать, что обратная функция к функции $f(x)=x^3+x+1$ непрерывна на $[0;+\infty[$.

6. Доказать, что обратная функция к функции $f(x)=e^{3x}+2e^{2x}+e^x+1$ непрерывна на $[5;+\infty[$.

## Лекция № 16. Теорема о пределе сложной функции. Непрерывность сложной функции

### П Л А Н

1. **Теорема о пределе сложной функции.**
2. **Непрерывность сложной функции.**
3. **Задачи.**

Пусть на множестве $V\subset R^n$ определены функции

$$u_1=\varphi_1(M),\ \ u_2=\varphi_2(M),....,\ u_l=\varphi_l(M),$$

а на множестве $W\subset R^i$ задана функция $f(P)=f(u_1,u_2,...,u_l)$.

Если $P(\varphi_1(M),\varphi_2(M),...,\varphi_l(M))\in W$ при всех $M\in V$, то на множестве $V$ определена сложная функция $f(\varphi_1(M),\varphi_2(M),...,\varphi_l(M))$.

### *Примеры*

1) если $\varphi(x)=x^2$, $f(u)=2^{''}$, то на всей числовой прямой определена сложная функция $f(\varphi(x))=2^{x^2}$.
2) Пусть $\varphi(M)=x_1+x_2$, $f(u)=\sqrt{u}$. Тогда на множестве $V=\{M(x_1,x_2)\in R^2\mid\ \ x_1+x_2\ge 0\}$ определена сложная функция
$$f(\varphi(M))=\sqrt{x_1+x_2}.$$
3) если $\varphi_1(M)=x_1^2+x_2^2-1$, $\varphi_2(M)=4-x_1^2-x_2^2$, а $f(u_1,u_2)=\sqrt{u_1u_2}$, то на множестве
$$V=\{M(x_1,x_2)\in R^2\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 4\}$$

задана сложная функция

$$f(\varphi_1(M),\varphi_2(M))=\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\left(4-x_1^2-x_2^2\right)}.$$

**Теорема 1.** (о пределе сложной функции). Пусть функции

$$u_1=\varphi_1(M),u_2=\varphi_2(M),....,u_l=\varphi_l(M)$$

определены на множестве $V \subset R^l$, функция $f(P)=f(u_1,u_2,...,u_l)$ определена на множестве $W \subset R^l$ и $P(\varphi_1(M),\varphi_2(M),...,\varphi_l(M)) \in W$ при всех $M \in V$.

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi_1(M)=u_i^0,\ i=1,2,....,l$, а функция *f(P)* непрерывна в точке $P_0\left(u_1^0,u_0^2,...,u_l^0\right)$, то $\lim\limits_{M\to M_0}(\varphi_1(M),\varphi_2(M),...,\varphi_l(M))=f(P_0)$.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность точек

$$M_1,M_2,...,M_k,\ldots,$$

сходящуюся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$.

Тогда для $i=1,2,...,l$ последовательность

$$\varphi_1(M_1),\varphi_2(M_2),...,\varphi_l(M_k),...$$

сходится к $u_l^0$. По теореме о покоординатной сходимости последовательность точек пространства $R^l$:

$$P_1(\varphi_1(M_1),....,\varphi_l(M_1)),\ P_2(\varphi_1(M_2),...,\varphi_l(M_2)), P_k(\varphi_l(M_k),....,\varphi_l(M_k)),\ldots,$$

сходится к точке $P_0\left(u_1^0,u_2^0,....,u_l^0\right)$. Так как $P_k(\varphi_1(M_k),....,\varphi_l(M_k)) \in W$, а функция *f(P)* непрерывна в точке $P_0$, то последовательность

$$f(P_1),\ f(P_2),.....,\ f(P_k),...$$

сходится к $f(P_0)$.

Таким образом, для любой последовательности точек

$$M_1,M_2,...,M_k,\ldots,$$

сходящейся к точке $M_0$, в которой $M_k \in V \setminus \{M_0\}$, соответствующая последовательность значений сложной функции

$$f(\varphi_1(M_1),....,\varphi_l(M_1)),\ \ f(\varphi_1(M_2),...,\varphi_l(M_2)),...,\ f(\varphi_l(M_k),....,\varphi_l(M_k)),...$$

сходится к $f(P_0)$. Следовательно,

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi_1(M),....,\varphi_l(M))=f(P_0).$$

***Следствие.*** Пусть функции

$$u_1=\varphi_1(M),\ u_2=\varphi_2(M),...,u_l=\varphi_l(M)$$

определены на множестве $V \subset R^n$, функция $f(P)=f(u_1,u_2,...,u_l)$ Определена на множестве $W \subset R^l$ и $P(\varphi_1(M),...,\varphi_l(M)) \in W$ при всех $M \in V$.

Если все функции $\varphi_i(M),\ i=1,2,...,l$, непрерывны в точке $M_0$, а функция *f(P)* непрерывна в точке $P_0(\varphi_1(M_0),...,\varphi_l(M_0))$, то сложная функция $f(\varphi_1(M),....,\varphi_l(M))$ непрерывна в точке $M_0$.

**Доказательство.** Так как функция $\varphi_i(M),\ i=1,2,...,l$, непрерывна в точке $M_0$, то $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi_i(M)=\varphi_i(M_0)$.

По теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{M\to M_0} f(\varphi_l(M),...\varphi_l(M))=f(\varphi_l(M_0),....,\varphi_l(M_0)).$$

Следовательно, сложная функция $f(\varphi_l(M),...,\varphi_l(M))$ непрерывна в точке $M_0$.

**_Примеры_**

1) функция $x^p$ *(p*- любое действительное число) непрерывна при $x>0$.

   В самом деле $x^p = e^{\ln x^p} = e^{p\cdot\ln x}$, функция $\varphi(x) = p\cdot\ln x$ непрерывна при $x>0$, а функция $f(u) = e^u$ непрерывна всюду.

2) функция $\Phi(M) = \sqrt{x_1 + x_2}$ непрерывна на множестве $V = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 + x_2 \ge 0\}$, т.к. $\Phi(M) = f(\varphi(M))$, где $\varphi(M) = x_1 + x_2$ непрерывна на всем пространстве $R^2$, а $f(u) = \sqrt{u}$ непрерывна при $u \ge 0$.

**Задачи для размышления:**

1. Построить график сложной функции $f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = 2\sin x$, а

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \textit{при } -\infty < u < -1; \\ u, & \textit{при } -1 \le u \le 1; \\ 1, & \textit{при } 1 < u < +\infty \end{cases}$$

2. Найти $\varphi(\psi(x))$ и $\psi(\varphi(x))$, если $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.
3. Найти $f(f(f(x)))$, если $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
4. Найти:

а) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 1}} (x_1 + x_2)^5$; б) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{\sin x}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 1}} \arcsin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{x_1^2 - x_2^2}\right)$; д) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 2\\ x_2\to 1}} \sqrt{x_1 + 2x_2}$.

5. Исследовать на непрерывность функцию $f(\varphi(x))$, где

$$\varphi(x) = 1 + x^2, \qquad f(u) = \begin{cases} 1, & u > 0; \\ 0, & u = 0;. \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

6.Исследовать непрерывность функции $f(\varphi(M))$, если

а) $\varphi(M) = x_1 + x_2^2 - 1,\ f(u) = \sin u;$

б) $\varphi(M) = x_1 - x_2^2,\ f(u) = \sqrt{\sin u};$

в) $\varphi(M) = x_1^2 - x_2 + 1,\ f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}};$

7. Исследовать непрерывность функции $f(\varphi_1(M), \varphi_2(M))$, если

а) $\varphi_1(M) = x_1^2 - x_2,\ \varphi_2(M) = x_1 + x_2,\ f(u_1, u_2) = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2};$

б) $\varphi_1(M) = x_1 + x_2,\ \varphi_2(M) = 2 - x_1 + x_2,\ f(u_1, u_2) = \dfrac{1}{\sqrt{u_1}} + \log_2 u_2$.

## Глава III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Лекция №17. Приращение функции. Критерий непрерывности функции.

### П Л А Н

**1. Приращение функции.**
**2. Критерий непрерывности функций.**
**3. Дифференцируемость функции.**
**3. Задачи.**

Рассмотрим функцию *f(M)*, определенную в некоторой окрестности $S_\delta(M_0)$ точки $M\left(x_1^0,..,x_1^0,...,x_n^0\right)$.

Если $p=\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_i)^2+....+(\Delta x_n)^2}<\delta$,

то точка $M_\Delta\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_i^0+\Delta x_1,....,x_n^0+\Delta x_n\right)\in S_\delta(M_0)$ и можно рассмотреть разность $\Delta f(M_0)=f(M_\Delta)-f(M_0)$.

**<u>Определение 1</u>.** Разность $\Delta f(M_0)$ называется приращением функции *f(M)* в точке $M_0$. Таким образом,

$$\Delta f(M_0)=f\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_i^0+\Delta x_1,....x_n^0+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^0,....,x_i^0,....,x_n^0\right)$$

В частности, если *f(x)* – функция одного переменного, то $\Delta f(x_0)=f\left(x_0+\Delta x\right)=f(x_0)$. (см.рис.)

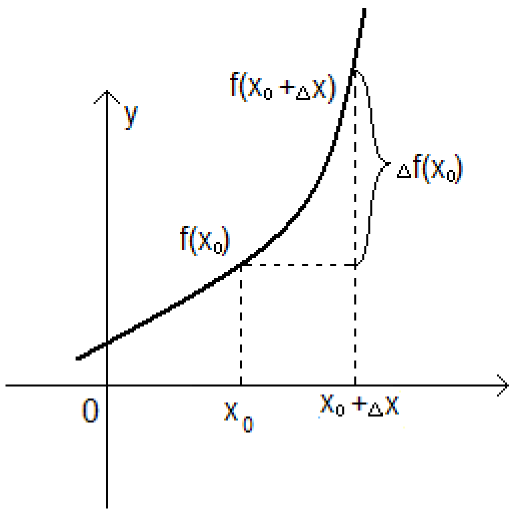



рис. 4.1

Нетрудно заметить, что приращение функции *f(M)* в точке $M_0$ является некоторой функцией от $\Delta x_1,....,\Delta x_i,....,\Delta x_n$.

Приращение функции *f(M)* в произвольной точке $M\in R^n$ будем обозначать $\Delta f$.

***Примеры***

1) если $f(x)=x^2$, то

$$\Delta f=f\left(x+\Delta x\right)-f(x)=\left(x+\Delta x\right)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

2) чтобы найти приращение функции $f(M)=x_1^2-2x_2^2$ в точке $M_0$ (1,-1), необходимо рассмотреть точку $M_0(1+\Delta x_1,-1+\Delta x_2)$. Тогда

$$\Delta f(M_0)=f(M_\Delta)-f(M_0)=(1+\Delta x_1)^2-2(-1+\Delta x_2)^2-(-1)=$$
$$=2\Delta x_1+4\Delta x_2+(\Delta x_1)^2-2(\Delta x_2)^2.$$

3) если $f(M)=x_1x_2,\ M(x_1,x_2)\in R^2$, то

$$\Delta f=f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2)-f(x_1,x_2)=$$
$$=(x_1+\Delta x_1)(x_2+\Delta x_2)-x_1x_2=x_2\cdot\Delta x_1+x_1\cdot\Delta x_2+(\Delta x_1)(\Delta x_2).$$

### *Простейшие свойства приращений.*

1. Приращение постоянной функции в любой точке равно 0.
2. Если *c* – некоторое число, то $\Delta(cf)=c\cdot\Delta f$.
3. $\Delta(f+\varphi)=\Delta f+\Delta\varphi$.

**Теорема.** (критерий непрерывности функции). Пусть функция *f(M)* Определена в некоторой окрестности точки $M\left(x_1^0,..,x_i^0,...,x_n^0\right)$. Функция *f(M)* непрерывна в точке $M_0$ тогда и только тогда, когда $\Delta f(M_0)\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_i\to 0,....\Delta x_n\to 0$.

**Доказательство необходимости.** Если функция *f(M)* непрерывна в точке $M_0$, то $f(x_1,....,x_i,....,x_n)\to f\left(x_1^0,....,x_i^0,....,x_n^0\right)$ при $x_1\to x_1^0...,\ x_i\to x_i^0,....,\ x_n\to x_n^0$.

Тогда

$$f\left(x_1^0+\Delta x_1,....,x_i^0+\Delta x_i,....,x_n^0+\Delta x_n\right)\to f\left(x_1^0,....,x_i^0,....x_n^0\right)$$

при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_i\to 0,....\Delta x_n\to 0$.

Так как

$$\Delta f(M_0)=f\left(x_1^0+\Delta x_1,....,x_i^0+\Delta x_i,....,x_n^0+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^0,....,x_i^0,....x_n^0\right)$$

то $\Delta f(M_0)\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_i\to 0,....\Delta x_n\to 0$.

Доказательство достаточности проводится аналогично.

**Задачи для размышления:**

1. Найти приращение функции *f(x)* в точке $x_0$, если:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=2;$ б) $f(x)=x^3,\ x_0=-1;$

в) $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\ x_0=1;$ г) $f(x)=\sin x,\ x_0=\pi/3.$

2. Найти $\Delta f$, если:

а) $f(x)=x^3-2x+3;$ б) $f(x)=e^x;$

в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0;$ г) $f(x)=\cos x.$

3. Найти приращение функции *f(M)* в точке $M_0$, если:

а) $f(M) = x_1 + 2x_2^2,\ M_0(1,-2);$ б) $f(M) = \dfrac{x_1}{x_1 - x_2},\ M_0(2,1);$

в) $f(M) = x_1 + 2x_2 - x_3^2,\ M_0(0,1,-1);$

г) $f(M) = \begin{cases} x_1 + 2x_2, & если \quad x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ -2 \quad, & если \quad x_1 = x_2 = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0)$

4. Найти $\Delta f$, если:

а) $f(M) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2;$ б) $f(M) = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1};$

в) $f(M) = a_1x_1 + ... + a_ix_i + ... + a_nx_n + b.$

**<u>Определение 2</u>.** Пусть функция *f(M₀)* определена к некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0,...,x_i^0,....,x_n^0\right)$.

Функция *f(M)* называется дифференцируемой в точке $M_0$, если ее приращение $\Delta f(M_0)$ в точке $M_0$ можно представить в следующем виде:

$$\Delta f(M_0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + ... + A_i\Delta x_i + ... + A_n\Delta x_n +$$
$$+ \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_i \cdot \Delta x_i + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n,$$

где: $A_1, ....,A_i, ...,A_n$ – некоторые числа (не зависящие от $\Delta x_1,...,\Delta x_i,...,\Delta x_n$), а функция $\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1 \to 0,...\Delta x_i \to 0, \Delta x_n \to 0$.

В частности, функция *f(x)* дифференцируемость в точке $x_0 \in R$ тогда и только тогда, когда ее приращение $\Delta f(x_0)$ можно представить в виде:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $A$ – некоторое число, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Примеры

1) функция $f(x = x^2$ дифференцируема в точке $x_0 = 1$. Действительно,

$$\Delta f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Следовательно, приращение $\Delta f(1)$ представлено в виде:

$$\Delta f(1) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $A = 2, \alpha = \Delta x$. Так как $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция $f(x = x^2$ дифференцируема в точке $x_0=1$.

2) функция $f(M) = x_1^2 - 2x_2^2$ дифференцируема в точке $M_0(1,-1)$. Так как

$$\Delta f(M_0) = 2\Delta x_1 + 4\Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 - 2(\Delta x_2)^2,$$

то приращение $\Delta f(M_0)$ можно записать в виде:

$$\Delta f(M_0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \alpha_2 \cdot \Delta x_2,$$

где $A_1 = 2, A_2 = 4, \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = -2\Delta x_2$, причем функции $\alpha_1$ и $\alpha_2$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0/$

Говорят, что функция дифференцируема на некотором множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

В частности, постоянная и линейная функция дифференцируемы на всем пространстве.

***Свойства дифференцируемых функций***

1. Функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0,...,x_i^0,....,x_n^0\right)$ тогда и только тогда, когда ее приращение $\Delta f(M_0)$ представимо в виде

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot p,$$

где $A_i$ – некоторое число, *i=1,2,…,n*,

$$p=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\text{, а }\lambda\to 0\text{ при}$$

$\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_i\to 0,....,\Delta x_n\to 0$.

**Доказательство необходимости.** Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то

$$f(M_0)=\sum_{i=1}^{n} A_1\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i,$$

где $A_i$ – некоторые числа, функции $\alpha_i$, $i=1,2,3,...,n$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_i\to 0,....,\Delta x_n\to 0$. Тогда при $\rho\neq 0$.

$$f(M_0)=\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot\Delta x_i+\rho\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\right)/\rho\right).$$

Положим,

$$\lambda=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\right)/\rho, & \text{если}\quad \rho\neq 0\\ 0 & ,\ \text{если}\ \Delta x_1=...=\Delta x_n=0\end{cases}.$$

Очевидно, что при любых $\Delta x_1,...,\Delta x_i,...,\Delta x_n$ имеет место равенство

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot p$$

Так как при всех $\Delta x_1,...,\Delta x_i,...,\Delta x_n$ одновременно не равных 0, выполняется неравенство

$$|\Delta x_i/\rho|=\frac{|\Delta x_i|}{\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_i)^2+...+(\Delta x_n)^2}}\leq 1,$$

то

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\Delta x_i/\rho)$$

является бесконечно малой функцией при $\Delta x_1,...,\Delta x_i,...,\Delta x_n$ (как сумма произведений бесконечно малых функций на ограниченные функции).

**Доказательство достаточности.** Предположим, что

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot\rho,$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\ldots+(\Delta x_i)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}$, а $\lambda\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_i\to 0,\ldots.,\Delta x_n\to 0$.

Тогда

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot\left((\Delta x_1)^2+\ldots+(\Delta x_i)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2\right)/\rho=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}A_1\cdot\Delta x_i+\left((\lambda\Delta x_i)/\rho\right)\cdot\Delta x_1+\ldots+$$
$$+\left((\lambda\Delta x_i)/\rho\right)\cdot\Delta x_i+\ldots+\left((\lambda\Delta x_n)/\rho\right)\cdot\Delta x_n$$

Положим

$$\alpha_i=\begin{cases}(\lambda\Delta x_u)/\rho, & если\quad \rho\neq 0,\\ \quad 0 \quad, & если\quad \rho=0\end{cases}.$$

При любых $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_i,\ldots,\Delta x_n$ выполняется равенство

$$f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}A_1\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i,$$

причем $\alpha_i$, $i=1,2,3,\ldots,n$, является бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_i\to 0,\ldots.,\Delta x_n\to 0$. Следовательно, функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$.

2. Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0,\ldots,x_i^0,\ldots.,x_n^0\right)$, то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то

$$f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}A_1\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i$$

где $A_i$ – некоторые числа, а все функции $\alpha_I$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_i\to 0,\ldots.,\Delta x_n\to 0$. Тогда

$$\Delta f(M_0)\to 0 \text{ при } \Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_i\to 0,\ldots.,\Delta x_n\to 0.$$

Это означает, что функция *f(M)* непрерывна в точке $M_0$.

***Следствие.*** Если функция *f(M)* терпит разрыв в точке $M_0$, то она не дифференцируема в этой точке.

3. Функция, непрерывная в точке $M_0$, не обязана быть дифференцируемой в этой точке даже в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки $M_0$.

Например, рассмотрим функцию $f(x)=|x|$, которая непрерывна на всей числовой прямой

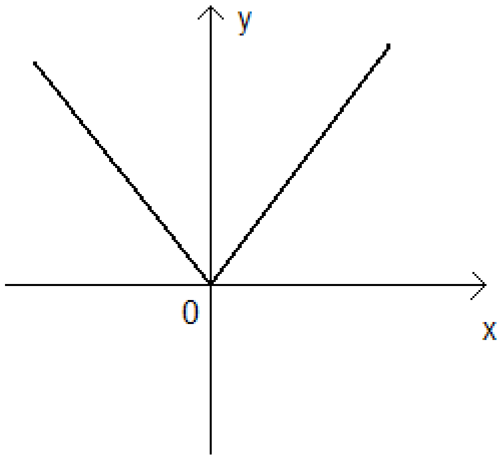


рис. 4.2

Покажем, что функция *f(x)*=|*x*| не дифференцируема в точке $x_0=0$. В самом деле

$$\Delta f(0) = |0+\Delta x| - |0| - |\Delta x|$$

Значит, если функция *f(x)*=|*x*| дифференцируема в точке $x_0=0$, то должно выполнятся равенство

$$|\Delta x| = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$$

где $A$ – некоторое число, а $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Если $x\neq 0$, то

$$|\Delta x|/\Delta x = A+\alpha.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|/\Delta x = A$.

Однако, этого быть не может, так как

$$|\Delta x|/\Delta x = \begin{cases} 1, & если\ \ \Delta x>0, \\ -1, & если\ \ \Delta x<0 \end{cases}$$

Следовательно, функция *f(x)*=|*x*| не дифференцируема в точке $x_0=0$.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0\in R$, если:

   а) $f(x)=x^3,\ x_0=1;$ б) $f(x)=x^4-3x+1,\ x_0=-1;$

   в) $f(x)=x(x^2+1),\ x_0=-2;$ г) $f(x)=1/x, x_o=1.$

2. Доказать, что функция $f(M)$ дифференцируема в точке $M_o$, если:

   а) $f(M)=x_1+2x_2^2, M_o(1,-2);$

   б) $f(M)=x_1^3\cdot x_2+2x_1, M_0(1,-1);$

   в) $f(M)=x_1\cdot x_2\cdot x_3, M_0(1,2,-1).$

3. Доказать, что функция $f(M)$ дифференцируема в произвольной точке M, если:

   а) $f(M)=x_1^2+x_1x_2-2x_2^2;$ б) $f(M)=x_1^3+x_2^3;$

   в) $f(M)=(x_1+x_2)^2+x_{1;}$ г) $f(M)=x_1\cdot x_2\cdot x_{3.}$

4. Функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ дифференцируемы в точке $M_o$, а $c$ и $d$ - некоторые числа. Доказать, что функция:
$$c \cdot f(M) + d \cdot \varphi(M)$$
Дифференцируема в точке $M_o$.
5. Доказать, что функция $f(M) = \sqrt{|x_1 x_2|}$ непрерывна в точке $M_o$ (0,0), но не дифференцируема в этой точке.

## Лекция № 18. Производная функции одного переменного. Производные элементарных функций.

### П Л А Н

**1.Производная функции одного переменного.**
**2. Производные элементарных функций.**
**3.Задачи.**

Пусть функция *f(x)* в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$.
***Определение.*** Если существует предел отношения $\Delta f(x_0)/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, то он называется производной функции *f(x)* в точке $x_0$.
Производную функции *f(x)* в точке $x_0$ обозначают $f'(x)$.
Таким образом,
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0)/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x.$$
Замечание. Так как
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0),$$
То за определение производной можно принять равенство
$$\lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0).$$
Например, функция *f(x)*= $\sqrt{x}$ имеет производную в точке $x_o$=1, так как
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x} - \sqrt{1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x} + 1} = \frac{1}{2}.$$
Таким образом, $f'(1) = 1/2.$

***Простейшие свойства производных.***
1. Производная постоянной функции всегда равна 0.
2. Если функции *u(x)* и *v(x)* имеют производные в точке *x,* то и их сумма *u(x)* + *v(x)* имеют производную в этой точке, причем
$(u+v)' = u' + v'.$
3. Если функция *u(x)* имеет производную в точке *x*, а *c* – некоторое число, то функция $c \cdot u(x)$ имеет производную в точке *x*, причем
$(c \cdot u)' = c \cdot u'.$

Докажем, например, второе утверждение. Так как функции *u(x)* и *v(x)* имеют производные в точке $x$, то

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u/\Delta x = u', \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v/\Delta x = v'.$

Тогда

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta(u+v)/\Delta x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta u+\Delta v)/\Delta x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u/\Delta x + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v/\Delta x = u' + v'.$

Следовательно, $(u+v)' = u' + v'.$

**Теорема 1.** Функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0 \in$ R тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(x_0)$.

**Доказательство необходимости.** Предположим, что функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x.$$

где $A$ – некоторое число, а $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Если $\Delta x\neq 0$, то

$$\Delta f(x_0)/\Delta x = A + \alpha.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\Delta f(x_0)/\Delta x = A.$ Тогда $f'(x_0) = A.$

**Доказательство достаточности.** Если в точке $x_0$ существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)/\Delta x.$

Положим $\alpha = f'(x_0) - \Delta f(x_0)/\Delta x$. Тогда $f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$ и $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Последнее равенство, выведенное в предположении что $\Delta x\neq 0$, очевидно, справедливо и при $\Delta x = 0$.

Теорема доказана.

***Следствие.*** Если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то

$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$ где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

**Задачи для размышления:**

1. На основании определения найти $f'(x_0)$, если

   а) $f(x)=\sqrt{x};$ б) $f(x)=x^3;$ в) $f(x)=\sqrt{2x+1};$

   г) $f(x)=\dfrac{1}{x};$ д) $f(x)=\dfrac{1}{x^2};$ е) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}};$

   ж) $f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

2. Найти $f'(a)$, если $f(x)=(x\cdot a)\cdot\varphi(x)$, где *φ(x)* – непрерывная функция.

3. Найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin 1/x, & при \quad x\neq 0 \\ 0 & , при \quad x=0 \end{cases}$$

4. Показать, что функция $f(x)=|x-a|\cdot\varphi(x)$, где *φ(x)* – непрерывная функция и *φ(a)≠0*, не имеет производной в точке *a*.
5. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ не дифференцируема в точке *x=0*.

**1.** Функция $f(x)=x^n$, где $n$ – натуральное число, дифференцируема в любой точке $x\in R$, причем

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}.$$

В самом деле,

$$(x^n)'=\lim_{\Delta x\to 0}((x+\Delta x)^n-x^n)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\Big(\Delta x\big[(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\ldots+$$
$$+x^{n-1}\big)\big]/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\big[(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}\big]=n\cdot x^{n-1}.$$

**2.** Функция $f(x)=x^p$, где $p$ – любое действительное число, дифференцируема в любой точке $x>0$, причем

$$(x^p)'=p\cdot x^{p-1}$$

Так как

$$(x+\Delta x)^p-x^p=x^p[(1+\Delta x/x)^p-1],$$

а

$$(1+\Delta x/x)^p-1\sim p\cdot\Delta x/x,\ \ \Delta x\to 0,$$

то

$$(x^p)'=\lim_{\Delta x\to 0}\Big((x+\Delta x)^p-x^p\Big)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(x^p\cdot p\cdot\Delta x/x)/\Delta x=p\cdot x^{p-1}.$$

***Замечание.*** Равенство $(x^p)'=p\cdot x^{p-1}$ сохраняется при любом $x$, для которого существует $x^{p-1}$.

**3.** Функция $f(x)=a^x$ дифференцируема в любой точке $x\in R$, причем,

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a.$$

Известно, что $a^{\Delta x}-1\sim\Delta x\cdot\ln a$ при $x\to 0$. Тогда

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\Big(a^{x+\Delta x}-a^x\Big)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\Big(a^x(a^{\Delta x}-1)\Big)/\Delta x=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Big(a^x\cdot\Delta x\cdot\ln a\Big)/\Delta x=a^x\cdot\ln a.$$

**4.** Функция $f(x)=\log_a x$ дифференцируема в любой точке $x>0$ причем,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Воспользуемся эквивалентностью

$$\log_a x(1+\Delta x/x)\sim\Delta x/(a-\ln a)\ \text{ при }\ \Delta x\to 0.$$

Тогда

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}(\log_a(x+\Delta x)-\log_a x)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(\log_a(1+\Delta x/x))/\Delta x=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x/\big(x\ln a\cdot\Delta x\big)=\frac{1}{x\ln a}.$$

**5.** Функция $sinx$ и $cos\,x$ дифференцируема в любой точке $x\in R$, причем, $(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x$.

Действительно,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x+\Delta x)-\sin x)/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\Delta x/2\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right)/\Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2\cdot\Delta x/2\cdot\cos(x+\Delta x/2))/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2) = \cos x$$

Аналогично выводится вторая формула.

**6.**Функция $f(x)=tgx$ дифференцируема $x\neq\pi/2+\pi n,\ n\in Z$, причем

$$(tgx)' = 1/\cos^2 x.$$

В самом деле,

$$(tgx)' = \lim_{\Delta x\to 0}(tg(x+\Delta x)-tgx)/\Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x+\Delta x)/\cos(x+\Delta x)-\sin x/\cos x\right)/\Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(s+\Delta x)\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**7.**Функция $f(x)=ctgx$ дифференцируема при $x\neq\pi n,\ n\in Z$, причем

$$(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

**Задачи для размышления:**

1. Найти производные от следующих функций

а) $f(x)-3x^4-2x^3+x^2-3;$ б) $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+c}{x}$

в) $f(x)=ax^m+bx^{m+n};$ г) $f(x)=3x^{2/3}+2x^{5/2}+x^{-3}$

д) $f(x)=x^3\cdot\sqrt[4]{x^3};$ е) $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}};$

ж) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{3}{\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{x};$ з) $f(x)=2\sin x-3\cos x;$

и) $f(x)=tgx-3ctgx;$ к) $f(x)=2x+3\log_2 x.$

## Лекция № 19. Механический и геометрический смысл производной.

### П Л А Н

**1. Механический смысл производной.**
**2. Геометрический смысл производной.**
**3. Задачи.**

***1.Механический смысл производной.***

Обозначим через *S(t)* путь, пройденный материальной точкой за время *t*. Будем считать функцию *S(t)* заданной. За промежуток времени между моментами *t* и *t+Δt*, точка, очевидно, проходит отрезок пути длиной

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

со средней скоростью

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Если существует передел $v_{cp}$ при $\Delta t \to 0$, то этот предел называется мгновенной скоростью *v(t)* точки в момент времени *t*. С другой стороны, предел отношения $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ является производной функции *S(t)* в точке *t*. Таким образом,

$$v(t) = S'(t)$$

Аналогично, если *A(t)* – зависимость некоторого экономического показателя от времени, то *A'(t)* является скоростью изменения этого показателя в момент времени *t*.

Отношение $A'(t)/A(t)$ называется темпом изменения показателя *A(t)* в момент времени *t*. Во многих случаях вместо скорости изменения экономического показателя рассматривается темп изменения этого показателя.

***2.Геометрический смысл производной.***

Рассмотрим некоторую прямую *l* на плоскости.

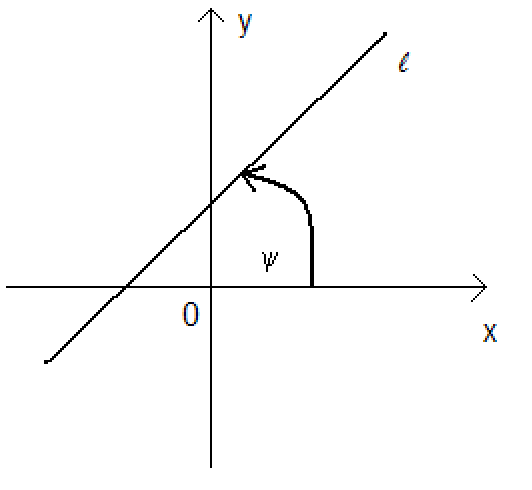



рис. 4.3

**<u>Определение 1.</u>** Угол *ψ*, на который необходимо повернуть положительную полуось *x* –ов, чтобы она совпала с прямой *l*, называется углом наклона этой прямой.

Тангенс угла наклона прямой *l* называют угловым коэффициентом прямой *l* и обозначают буквой *k*, т.е.

$$k = tg\psi$$

Предположим, что функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Рассмотрим на графике этой функции точки $M_0(x_0,\ f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$.

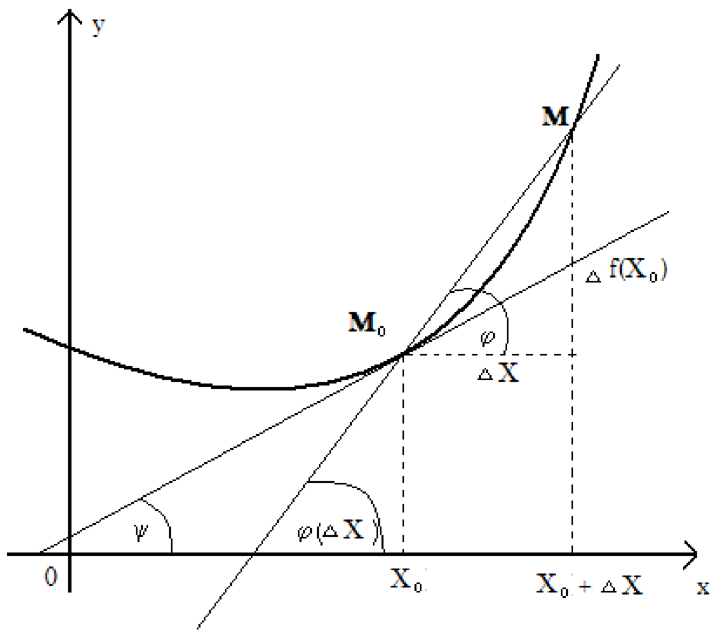



рис. 4.4

Проведем секущую ($M_0$,$M$) и обозначим через $\varphi(\Delta x)$ - ее угол наклона. Предположим, что существует предел $\varphi(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ и он равен $\psi$.

<u>**Определение 2**</u>**.** Прямая, проходящая через точку $M_0$, с углом наклона равным $\psi$, называется касательной к графику *f(x)* в точке $M_0$.

**Теорема 1.** Если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то существует касательная к графику *f(x)* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. При этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$.

**Доказательство.** Так как

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

то $\varphi(\Delta x) = atctg\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Если $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0).$$

По теореме о пределе сложной функции:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} arctg\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=arctg\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=arctgf'(x_0).$$

Следовательно, существует касательная к графику функции *f(x)* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, а угол наклона $\psi$ этой касательной равен $arctgf'(x_0)$. Тогда

$$k=tg\psi = f'(x_0).$$

***Следствие.*** Если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то уравнение касательной к графику функции *f(x)* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет следующий вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

**Доказательство.** Если прямая *l* проходит через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ (и не перпендикулярна оси *x*-ов), то ее уравнение можно записать в виде:

$$y-f(x_0)=k(x-x_0),$$

где *k* – угловой коэффициент прямой *l*. Если прямая *l* является касательной к графику функции *f(x)* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то $k=f'(x_0)$. Следовательно касательной имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной к графику функции *f(x)* в точке $M_0$, называется нормально.

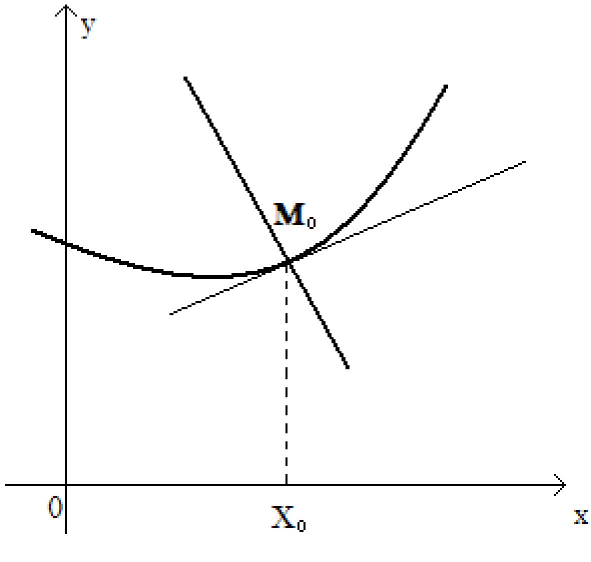



рис. 4.5

Уравнение нормали к графику функции *f(x)* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, можно записать в виде:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

**Задачи для размышления:**

1. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$, если:

   а) $f(x) = x^3 + x, \ \ x_0 = 2;$ б) $f(x) = \sin x, \ x_0 = \pi/3;$

   в) $f(x) = e^x, \ \ x_0 = 1.$

2. Под каким углом кривая $y=sinx$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

3. По каким углом кривая $y=lnx$ пересекает ось абсцисс?

4. В каких точках касательная к кривой $y=sinx$ параллельна оси абсцисс?

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$, если:

   а) $f(x) = x^4, \ \ x_0 = 1;$ б) $f(x) = \ln x, \ x_0 = e;$

   в) $f(x) = \sqrt{x}, \ x_0 = 4.$

6. Найти угол, под которым пересекаются параболы:

   а) $y = x^2$ и $y = x^3;$ б) $y = (x-2)^2$ и $y = -4 + 6x - x^2.$

## Лекция № 20. Частные производные функций нескольких переменных. Необходимое условие дифференцируемости функции.

**П Л А Н**

1. **Частные производные функций нескольких переменных.**
2. **Необходимое условие дифференцируемости функции.**
3. **Задачи.**

Пусть функции $f(M)$ определена в некоторой окрестности $S_\delta(M_0)$ точки $M_0(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$.

Если $|\Delta x_i| < \delta$, то точка $M_i(x_1^0, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0)$ принадлежит окрестности $S_\delta(M_0)$ и можно рассмотреть равность $\Delta_1 f(M_0) = f(M_i) - f(M_0)$.

**<u>Определение 1</u>.** Разность $\Delta_i f(M_0)$ называется частным приращением по переменному $x_i$ функции $f(M)$ в точке $M_0$. Таким образом,

$$\Delta_i f(M_0) = f\left(x_1^0, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0\right) - f\left(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right).$$

Например, найдем частное приращение по переменному $x_2$ функции $f(M) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ в точке $M_0(1,2)$.

Для этого необходимо рассмотреть точку $M_2(1,\ 2 + \Delta x_2)$ и вычислить $\Delta_2 f(M_0) = f(M_2) - f(M_0)$.

Получим:

$\Delta_2 f(M_0) = 1 + 2\cdot 1(2+\Delta x_2) + 3(2+\Delta x_2)^2 - 1 - 4 - 12 = 14\cdot\Delta x_2 + 3\cdot(\Delta x_2)^2.$

**<u>Определение 2</u>.** Пусть функция *f(M)* определена в некоторой окрестности точки $M_0$. Если существует предел отношения

$$\frac{\Delta_i f(M_0)}{\Delta x_i},$$

при $\Delta x_i \to 0$, то этот предел называется частной производной по переменному $x_i$ функции *f(M)* в точке $M_0$. Частную производную *f(M)* по переменному $x_i$ в точке $M_0$ обозначают

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0}\frac{\Delta f(M_0)}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0}\frac{f\left(x_1^0,\ldots,x_i^0+\Delta x_i,\ldots,x_n^0\right) - \left(x_1^0,\ldots,x_i^0,\ldots,x_n^0\right)}{\Delta x_i}$$

Например, частная производная по $x_2$ функции $f(M) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ в точке $M_0(1{,}2)$ равна 14, так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = \lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{\Delta_2 f(M_0)}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{14\Delta x_2 + 3(\Delta x_2)^2}{\Delta x_2} = 14.$$

Найдем все частные производные функции $f(M) = x_1^3 + 2x_1x_2^2$в производной точке $M(x_1,x_2)\in R^2$.

Так как

$\Delta_1 f = f(x_1+\Delta x_1, x_2) - f(x_1,x_2) = (x_1+\Delta x_1)^3 + 2(x_1+\Delta x_1)x_2^2 - x_1^3 - 2x_1x_2^2 =$
$= \left(3x_1^2 + 2x_2^2\right)\Delta x_1 + 3x_1(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_1)^3,$

$\Delta_2 f = f(x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1,x_2) = x_1^3 + 2x_1(x_2+\Delta x_2)^2 - x_1^2 - 2x_1x_2^2 =$
$= 4x_1x_2\cdot\Delta x_2 + 2x_1(\Delta x_2)^2.$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{\Delta_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_2 \to 0}\left(3x_2^2 + 2x_2^2 + 3x_1(\Delta x_1) + (\Delta x_1)^2\right) = 3x_1^2 + 2x_2^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{\Delta_2 f}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} 4x_1x_2 + 2x_1\cdot\Delta x_2) = 4x_1\cdot x_2.$$

Замечание. Рассмотрим функцию

$$f(x_1,\ldots.x_{i-1},\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots.,x_n)$$

Считая все переменные, кроме $x_i$ постоянные можно найти производную $f'_{x_i}$ этой функции. Тогда

$$f'_{x_i}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1,...,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},....,x_n)-f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i-1},..,x_n)}{\Delta x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Таким образом, чтобы найти частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ достаточно, считая все переменные кроме $x_i$ постоянными, найти производную по переменному $x_i$.

Например, если $f(x,y)=x^2+2y^2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(x^2)'_x=2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2)'_y=4y.$$

**Теорема 1.** (необходимое условие дифференцируемости).

Если функция *f(M)* дифференцируемо в точке $M_0$, то она в этой точке имеет все частные производные.

**Доказательство.** Так как функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,..x_n^0\right)$, то

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}A_1\cdot\Delta x_1+\lambda\rho, \qquad (1)$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_i)^2+...+(\Delta x_n)^2}$, а $\lambda\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_i\to 0,...,\Delta x_n\to 0$.

Равенство (1) имеет место при любых $\Delta x_1,...\Delta x_i,...,\Delta x_n$.

Положим в том равенстве

$$\Delta x_1=...=\Delta x_{i-1}=\Delta x_{i+1}=...=\Delta x_n=0.$$

Получим

$$\Delta_i f(M_0)=A_i\cdot\Delta x_i+\lambda|\Delta x_i|. \qquad (2)$$

Считая, что $\Delta x_i\neq 0$, разделим обе части равенства (2) на $\Delta x_i$. Тогда

$$\frac{\Delta_i f(M_0)}{\Delta x_i}=A_i+\lambda\cdot|\Delta x_i|\cdot\frac{1}{\Delta x_i}.$$

Так как $\frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i}$ - ограниченная функция, а $\lambda\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,$, то

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_i f(M_0)}{\Delta x_i}=A_i.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)=A_i,\quad i=1,2,...,n.$$

Следствие. Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$ ,то

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$ , а $\lambda \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_i \to 0, ..., \Delta x_n \to 0$.

***Замечание.*** Функция *f(x)* одного переменного дифференцируема в точке $x_0 \in R$ тогда и только тогда, когда в точке $x_0$ существует производная $f'(x_0)$.

Однако, существования всех частных производных функции *n* переменные (*n≥2*) не достаточно для ее дифференцируемости.

Действительно, покажем, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & если \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,если \quad x = y = 0 \end{cases}$$

имеет все частные производные в точке $M_0$ (0,0), но не является дифференцируемой в этой точке.

По определению частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_1 f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_1 f(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

так как $f(\Delta x, 0) = f(0, \Delta y) = 0$. С другой стороны, функция *f(x,y)* не может быть дифференцируемой в точке $M_0$ , так как она даже не является непрерывной в этой точке.

В самом деле, последовательности точек

$$\left\{ M'_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}, \quad \left\{ M''_k\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)\right\}$$

сходятся к точке $M_0$ (0,0). В то же время

$$f(M'_k) = 1/2 \text{, а } f(M''_k) = 2/5, \quad k = 1,2,3,...$$

Это означает, что не существует предел функции *f(x,y)* при $x \to 0$, $y \to 0$.

**Задачи для размышления:**

1. На основании определения частных производных, найти:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)$, *если* $f(M) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2$, $M_0(3;2)$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(M_0)$, *если* $f(M) = x_1x_2x_2^3$, $M_0(1;-1;2)$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)$, *если* $f(M) = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$, $M_0(1;1)$.

2. На основании определения найти все частные производные функции *f(M)* в производной точке *M*, если:

а) $f(M)=x_1^2\cdot x_2^2$; б) $f(M)=\dfrac{x_1}{x_2^2+1}$.

3. Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x\cdot y}$ имеет все частные производные в точке $M_0$ (0,0), но не является дифференцируемой в этой точке.

4. Существуют ли частные производные функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ в точке $M_0$ (0,0)? Является ли функция дифференцируемой в этой точке?
5. Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{|x\cdot y|}$ имеет в точке $M_0$ (0,0) обе частные производные, но не является дифференцируемой в этой точке.
6. Найти частные производные функции $f(x,y)=(x-a)\cdot y\cdot\varphi(x,y)$ в точке $M_0$ $(a,b)$. Если функция $\varphi(x,y)$ непрерывна в точке $M_0$ $(a,b)$.
7. Найти частные производные

   а) $f(x,y)=x^3\cdot y^5$; б) $f(x,y)=x^2\cdot\cos y+3ye^x$;

   в) $f(x,y,z)=x^2\cdot yz+3xy\cdot z^2$; г) $f(x,y,z)=x\cdot\log_2 y+2y\cdot\log_2 z$;

   д) $f(x,y,z)=\dfrac{xy\sqrt{z}}{3}+\dfrac{\sqrt{x}\cdot y^2\cdot z}{6}$; с) $f(x,y)=x^y$; ж) $f(x,y)=2x^y+3y^x$.

## Лекция № 21. Дифференцируемость суммы, произведения и частного двух функций.

### П Л А Н

**1. Дифференцируемость суммы двух функций.**
**2. Дифференцируемость произведения двух функций.**
**3. Дифференцируемость частного двух функций.**
**4. Задачи.**

**Теорема 1.** Если функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке $M(x_1,...,x_i,...,x_n)$, то и их сумма *u(M)* + *v(M)* дифференцируема в этой точке, причем

$$\frac{d(u+v)}{dx_i}=\frac{d(u)}{dx_i}+\frac{d(v)}{dx_i}, i=1,2,...n.$$

**Доказательство.**

Рассмотрим точку $M_\Delta(x_1+\Delta x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n+\Delta x_n)$. Так как $\Delta(u+v)=u(M_\Delta)+v(M_\Delta)-u(M)-v(M)=u(M_\Delta)-u(M)+v(M_\Delta)-v(M,)$ то $\Delta(u+v)=\Delta u+\Delta v.$

По условию, функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке *M*. Следовательно,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{du}{dx_i} \cdot \Delta x_i + \lambda_1 \cdot \rho,$$

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} \cdot \Delta x_i + \lambda_2 \cdot \rho,$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_i)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$, а $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ... \Delta x_i \to 0, ... \Delta x_n \to 0.$

Тогда

$$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{du}{dx_i} + \frac{dv}{dx_i} \right) \Delta x_i + (\lambda_1 + \lambda_2)\rho.$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ... \Delta x_i \to 0, ... \Delta x_n \to 0.$ то функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируема в точке *M* и

$$\frac{d(u+v)}{dx_i} = \frac{du}{dx_i} + \frac{dv}{dx_i}, i = 1, 2, ..., n.$$

**Теорема 2.** Если функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке $M(x_1, ..., x_i, ..., x_n),$ то и их произведение $u(M) \cdot v(M)$ дифференцируемо в этой точке, причем

$$\frac{d(uv)}{dx_i} = \frac{du}{dx_i} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx_i}, i = 1, 2, ..., n$$

**Доказательство.** Рассмотрим точку $M_\Delta(x_1 + \Delta x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n + \Delta x_n)$

Так как

$$\Delta(uv) = u(M_\Delta) \cdot v(M_\Delta) - u(M) \cdot v(M) = u(M_\Delta) \cdot v(M_0) - u(M) \cdot v(M_\Delta) +$$
$$+ u(M) \cdot v(M_\Delta) - u(M) \cdot v(M) = [u(M_\Delta) - u(M)] \cdot v(M_\Delta) + u(M) \cdot [v(M_\Delta) - v(M)],$$

то

$$\Delta(uv) = \Delta u \cdot v(M_\Delta) + u(M) \cdot \Delta v \qquad (1)$$

Функции *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке *M*. значит,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{du}{dx_i} \quad \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i, \qquad (2)$$

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} \quad \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta x_i, \qquad (3)$$

где $\alpha_i, \beta_i \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ... \Delta x_i \to 0, ... \Delta x_n \to 0.$

Кроме того, из дифференцируемости функции *v(M)* следует ее непрерывность. Тогда.

$$v(M_\Delta) = v(M) + \mu, \qquad (4)$$

где $\mu \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ... \Delta x_i \to 0, ... \Delta x_n \to 0.$

Подставив соотношения (2), (3) и (4) в равенство (1), получим

$$\Delta(u\cdot v)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{du}{dx_i}\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\right)(v+\mu)+\Delta(u\cdot v)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{du}{dx_i}\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\right)(v+\mu)+u\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dv}{dx_i}\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot\Delta x_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{du}{dx_i}v+u\frac{dv}{dx_i}\right)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu\cdot\frac{du}{dx_i}+\alpha_i\cdot v+\alpha_i\cdot\mu+\beta_i\cdot u\right)\Delta x_i.$$

Если $\Delta x_1\to 0,\ldots\Delta x_i\to 0,\ldots\Delta x_n\to 0.$ то

$$\gamma_i=\mu\cdot\frac{du}{dx_i}+\alpha_i v+\alpha_i\cdot\mu+\beta_i\cdot u\to 0, i=1,2,\ldots,n,$$

так как $\alpha_i\to 0,\ \mu\to 0,\ \ \beta_i\to 0.$

Следовательно $u(M)\cdot v(M)$ дифференцируема в точке $M$, причем

$$\frac{d(uv)}{dx_i}=\frac{du}{dx_i}\bullet v+u\cdot\frac{dv}{dx_i}, i=1,\ldots,n$$

Следовательно. Квадратичная функция

$$\sum_{1\le i\le j\le n} f(M)=a_{ij}x_ix_j$$

дифференцируема в любой точке $M(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$.

Утверждение сразу же следует из теоремы 7.1 и 7.2, так как квадратичная функция представима в виде суммы произведений линейных функций, а линейная функция дифференцируема, а всем пространстве.

***Лемма.*** Если функция *v(M)* дифференцируема в $M(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ и *v(M)* ≠0. то и функция *1/v(M)* дифференцируема в этой точке, причем

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx_i}=-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx_i}, i=1,\ 2\ldots,n.$$

**Доказательство.** Так как

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{v(M\Delta)}-\frac{1}{v(M)}=\frac{v(M)-v(M\Delta)}{v(M)v(M\Delta)},$$

то

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=-\Delta v\frac{1}{v\cdot v(M\Delta)} \qquad (5)$$

Из дифференцируемости функции $v(M)$ в точке $M$ следует, что

$$\Delta v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot\Delta x_i \qquad (6)$$

где $\beta_i\to 0,\ \ (i=1,2,..,n)$ при $\Delta x_1\to 0,\ldots\Delta x_i\to 0,\ldots\Delta x_n\to 0.$ кроме того, функция *v(M)* непрерывна в точке *M*. Тогда при $\Delta x_1\to 0,\ldots\Delta x_i\to 0,\ldots\Delta x_n\to 0.$

$$v(M_\Delta)\to v(M)\ne 0,\quad \frac{1}{v\cdot v(M_\Delta)}\to\frac{1}{v^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{v\cdot v(M_\Delta)}=\frac{1}{v^2}+\mu \tag{7}$$

где $\mu\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,...\Delta x_i\to 0,...\Delta x_n\to 0.$ Подставив соотношения (6) и (7) в равенство (5), получим

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot\Delta x_i\right)\left(\frac{1}{v^2}+\mu\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(-\mu\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+\beta_i\cdot\frac{1}{v^2}+\beta_i\cdot\mu\right)\Delta x_i\,.$$

Если $\Delta x_1\to 0,...\Delta x_i\to 0,...\Delta x_n\to 0.$, то

$$\alpha_i=-\mu\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+\beta_i\cdot\frac{1}{v^2}+\beta_i\cdot\mu\to 0,\quad i=1,2,...,,$$

так как $\beta_i\to 0,\ \mu\to 0$.

Значит функция *1/v (M)* дифференцируема в точке *M*, причем

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial x_i}=-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i},\quad i=1,2,...,n\,.$$

**Теорема 3.** если функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке $M(x_1,...,x_i,...,x_n)$ и $v(M)\neq 0$, то и частное $u(M)/v(M)$ дифференцируемо в этой точке, причем

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial x_i}=-\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v-u\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\quad i=1,2,...,n\,.$$

**Доказательство.** По лемме функция *1/v(M)* дифференцируема в точке *M* и

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial x_i}=-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i},\quad i=1,2,...,n$$

Тогда по теореме 2 функция

$$\frac{u(M)}{v(M)}=u(M)\cdot\frac{1}{v(M)}$$

дифференцируема в этой точке, причем

$$\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{v}+u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{v}-u\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v-u\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\quad i=1,2,...,n\,.$$

***Замечание.*** Из доказанных утверждений, в частности, следует, что если *u(x)* и *v(x)* дифференцируемые функции одного переменного, то имеют место следующие равенства:

$$(uv)' = u'v + uv',\ \ (u/v)' = (u \setminus v - uv')/v^2 \quad \text{(если } v \neq 0\text{)}.$$

***Примеры.***

1) $(x^2 tgx)/ = (x^2)' \cdot tgx + x^2 \cdot (tgx)' = 2x \cdot tgx + (x^2/\cos^2 x)$;

2) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \dfrac{x'(x^2+1) - (x^2+1)x'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$;

3) если $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{tgy}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{tgy} \cdot (x^2)'_x = \dfrac{2xy^2}{tgy}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \left(\frac{y^2}{tgy}\right)'_y = x^2 \cdot \frac{(y^2)'_x tgy - (tgy)'_y y^2}{tg^2 y} = x^2 \cdot \frac{2ytgy - \dfrac{y^2}{\cos^2 y}}{tg^2 y} = x^2 \cdot \frac{y \sin 2y - y^2}{\sin^2 y}.$$

**Задачи для размышления:**

1. Найти производную *y’*, если:

а) $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$; б) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$; в) $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;

г) $y = x^2 \sin x$; д) $y = (2x^2 - 1)tgx$; е) $y = e^x \cos x$;

ж) $y = x^2 \ln x$; з) $y = \dfrac{2^x ctgx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

2. Найти частные производные

а) $f(x,y) = x^3 y \sin x \cos y + 2xtgy$; б) $f(x,y) = \dfrac{x \ln y}{ctgx}$;

в) $f(x,y) = \dfrac{xtgy}{y} + \dfrac{2^y \cos x}{x}$; г) $f(x,y,z) = xz \cdot tgz + xyz \cdot ctgx$.

3. Функция *u(M)* и *v(M)* дифференцируемы в точке $M \in R^n$. Доказать, что в точке $M$ дифференцируемы функции:

а) $u^2(M) + v(M)$; б) $u^2(M) \cdot v^2(M)$;

в) $u^2(M)/(v^2(M)+1)$.

Найти частные производные этих функций, считая известными

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x_i},\quad i = 1,2,\ldots,n.$$

## Лекция № 22. Дифференцируемость обратных функций.

### П Л А Н

1. **Дифференцируемость обратных функций.**
2. **Следствия о дифференцируемости функций.**
3. **Задачи.**

Известно, что если функция *f(x)* непрерывна и строго монотонна на интервале $]a,b[$, то на множестве *E(f)* существует непрерывная обратная функция $f^{-1}(y)$.

**Теорема 1.** Пусть функция *f(x)* непрерывна и строго монотонна на интервале $]a,b[$. Если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0 \in ]a,b[$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0).$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

сходящуюся к точке $y_0$, в которой $y_k \in E(f)$, $y_k \neq y_0$, $k = 1,2,\ldots$. Так как обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0$, а $f^{-1}(y_0) = x_0$, то последовательность

$$f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \ldots, f^{-1}(y_k), \ldots$$

сходится к точке $x_0$. Положим

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_1), \ldots, x_k = f^{-1}(y_k), \ldots$$

Получим последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

сходящуюся к точке $x_0$, в которой $x_k \in ]a,b[$, $x_k \neq x_0$. Так как функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Тогда последовательность

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \ldots, \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}, \ldots$$

сходится к $f'(x_0)$. Следовательно, последовательность

$$\frac{y_1 - y_0}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_0)}, \frac{y_2 - y_0}{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_0)}, \ldots, \frac{y_k - y_0}{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}, \ldots$$

сходится к $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) \neq 0$ по условию.

Тогда последовательность

$$\frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_0)}{y_1-y_0}, \frac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_0)}{y_2-y_0}, \ldots, \frac{f^{-1}(y_k)-f^{-1}(y_0)}{y_k-y_0}, \ldots$$

сходится к $\frac{1}{f(x_0)}$. Тем самым доказано, что

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следовательно, обратная функция $f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0$ и

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Например, функция $f(x)=x^3+x$ дифференцируема и возрастает на всей числовой прямой. Следовательно, обратная функция $f^{-1}(y)$ дифференцируема на множестве *E(f)*.

В частности, так как $f(1)=2,\ f'(1)=4$, то

$$(f^{-1})(2)=\frac{1}{4}.$$

***Следствия.***

1. Функция *arcsinx* и *arcosx* дифференцируема на интервале ]-1,1[, причем
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Функция *arctg x* и *arcctg x* дифференцируема на всей числовой прямой, причем
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

**Доказательство.** Функция *x=siny* непрерывна и возрастает на интервале $]-\pi/2,\pi/2[$. Так как эта функция дифференцируема на интервале $]-\pi/2,\pi/2[$ и $(\sin y)'=\cos y\neq 0$, то обратная функция *y=arcsinx* дифференцируема на интервале ]-1,1[, причем

$$y'=\frac{1}{(\sin y)}=\frac{1}{\cos y}.$$

Если $y\in]-\pi/2,\pi/2[$, то $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

Следовательно, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Утверждение для *arccosx* доказывается аналогично.

Функция *x= tgy* непрерывна и возрастает на интервале $]-\pi/2,\pi/2[$. Так как эта функция дифференцируема на интервале $]-\pi/2,\pi/2[$ и

$(tgy)'=\dfrac{1}{\cos^2 y}\neq 0$, то обратная функция $y=arctgx$ дифференцируема на всей числовой прямой, причем

$$y'=\frac{1}{(tgy)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично доказывается, что функция *arcctg x* дифференцируема на всей числовой прямой.

**Задачи для размышления:**

1. Найти область определения обратной функции $x=\varphi(y)$, если

   а) $y=3x+x^3$; б) $y=x+\ln x$; в) $y=2x+e^x$;

   в каждом случае вычислить производную $x_y'$.

2. Найти *y'*, если

   а) $y=x\arcsin x$; б) $y=\dfrac{e^x}{arctgx}$;

   в) $y=\dfrac{\arccos x}{x^2}+3arcctgx$.

## Лекция № 23. Дифференцируемость сложных функций. Дифференцируемость функций, заданных параметрически.

### П Л А Н

**1. Дифференцируемость сложных функций.**
**2. Дифференцируемость функций, заданных параметрически.**
**3. Задачи.**

Рассмотрим сложную функцию $z=f(u_1,u_2,...,u_l)$, где

$$u_1=\varphi_1(M),u_2=\varphi_2(M),...,u_l=\varphi_l(M).$$

Предположим, что все функции $\varphi_i(M)$, $i=1,2,...,l$ определены в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)\in R^n$, а функция $f(u_i^1,...,u_l^0)$ определена в окрестности точки $P_0\left(u_1^0,u_2^0,...,u_l^0\right)$, где $u_1^0=\varphi_1(M_0),...,u_l^0=\varphi_l(M_0)$.

Если при этом сложная функция

$$z=f[\varphi_1(M),...,\varphi_l(M)]$$

определена в окрестности $M_0$, то можно рассмотреть ее приращение $\Delta z(M_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0)=z(M_\Delta)-z(M_0)=f[\varphi_1(M_\Delta),....,\varphi_l(M_\Delta)]-$$
$$-f[\varphi_1(M_0),...,\varphi_l(M_0)]=f[u_1^0+\Delta\varphi_1(M_0),...,u_l^0+$$

$$+\Delta\varphi_l(M_0)]-f\left(u_1^0,...,u_l^0\right) \qquad (1)$$

где $\Delta\varphi_i(M_0)=\varphi_i(M_\Delta)-\varphi_i(M_0),\ u_i^0=\varphi_i(M_0),\ \ i=1,2,...,l$.

С другой стороны

$$\Delta f(P_0)=f(P_\Delta)-f(P_0)=$$
$$=f(u_l^0+\Delta u_l,....,u_l^0+\Delta u_l)-f(u_1^0,...,u_l^0) \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), можно заметить, что приращение сложной функции $\Delta z(M_0)$ совпадает с приращением $\Delta f(P_0)$ при

$$\Delta u_l=\Delta\varphi_l(M_0),...,\Delta u_l=\Delta\varphi_l(M_0).$$

**Теорема 1.** (о дифференцируемости сложной функции). Пусть сложная функция

$$z=f(u_1,u_2,...,u_l),$$

где $u_1=\varphi_1(M),u_2=\varphi_2(M),...,u_l=\varphi_l(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0\in R^n$. Если все функции $\varphi_i(M),\ i=1,2,...,l$ дифференцируемы в точке $M_0$, а функция $f(u_1,....,u_l)$ дифференцируема в точке $P_0\left(u_1^0,...,u_l^0\right)$, где $u_1^0=\varphi_1(M_0),....,u_l^0=\varphi_l(M_0)$, то сложная функция $z=f(u_1,u_2,...,u_l)$ дифференцируема в точке $M_0$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}(M_0)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0),\quad k=1,2,...,n.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное приращение

$$\Delta z(M_0)=z(M_\Delta)-z(M_0)$$

сложной функции. Приращение $\Delta z(M_0)$ совпадает с приращением

$$\Delta f(P_0)=f\left(u_1^0+\Delta u_l,...,u_1^0+\Delta u_l\right)-f(u_1^0,...,u_l^0)$$

при

$$\Delta u_i=\Delta\varphi_i(M_0)=\varphi_i(M_\Delta)-\varphi_i(M_0),\quad i=1,2,...,l.$$

Так как функция $f(u_1,u_2,...,u_l)$ дифференцируема в точке $R^0$, то

$$\Delta f(P_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)\cdot\Delta u_i+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\Delta u_l, \qquad (3)$$

где $\alpha_i\to 0\ (i=1,2,...,l)$ при $\Delta u_1\to 0,...,\Delta u_l\to 0$.

Подставив в равенство (3)

$$u_1=\Delta\varphi_1(M_0),....,\Delta u_l=\Delta\varphi_l(M_0),$$

получим

$$\Delta z(M_0)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{u_i}(P_0)\cdot\Delta\varphi_i(M_0)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\Delta\varphi_i(M_0). \qquad (4)$$

По условию, функции $\varphi_i(M),\ \ i=1,2,...,l$ дифференцируемы в точке $M_0$. Следовательно,

$$\Delta\varphi_i(M_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0)\cdot\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\cdot\Delta x_k. \qquad (5)$$

где $\beta_{ik}\to 0\ (k=1,2,...,n)$ при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0$.

Подставив соотношение (5) в равенство (4) и перегруппирован слагаемые, получим

$$\Delta z(M_0)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0)\right)\cdot\Delta x_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_{ik}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\beta_{ik}\right)\Delta x_k .$$

Таким образом, приращение $\Delta z(M_0)$ можно записать в виде

$$\Delta z(M_0)=\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\Delta x_k ,$$

где

$$A_k=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0),$$

$$\gamma_k=\sum_{i=1}^{l}\beta_{ik}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_i}(P_0)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(M_0)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\beta_{ik}$$

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что функции $\gamma_k(k=1,2,...,n)$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0$.

По условию все функции $\beta_{ik}(i=1,2,...,l;k=1,2,...,n)$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0$. Кроме того, $\Delta u_1\to 0,...,\Delta u_l\to 0$, так как из дифференцируемости функций $u_i=\varphi_i(M)$ в точке $M$ следует их непрерывность в этой точке. Поэтому все функции $\alpha_i(i=1,2,...,l)$ также являются бесконечно малыми при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0$.

Из свойств бесконечно малых функций сразу же следует, что функции $\gamma_k(k=1,2,...,n)$ бесконечно малы при $\Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0$. Теорема доказана.

***Следствие.*** Пусть сложная функция

$$z=f(u)?$$

где $u=\varphi(x)$ определена в окрестности точки $x_0\in R$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция дифференцируема в точке $x_0$, причем

$$z'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0).$$

***Замечание.***

Если $u=u(x)$ дифференцируема функция, то имеют место следующие равенства:

1) $(u^p)'=p\cdot u^{p-1}\cdot u'$ ($p$ – действительное число);

2) $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$; 3) $(\log_0 u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$; 4) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

5) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ 6) $(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$; 7) $(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

8) $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 9) $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

10) $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$;     11) $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

***Примеры***

1) $(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$;

2) $(tg^2\sqrt{x})' = 2tg\sqrt{x}\cdot(tg\sqrt{x})' = 2tg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' =$

$$= 2rf\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}cis^2\sqrt{x}};$$

3) рассмотрим сложную функцию

$$z = f(u_1, u_2)$$

где $u_1 = x^2\cdot y$; $u_2 = (x+2y)^2$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot 2\cdot(x+2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot 4\cdot(x+2y).$$

**Задачи для размышления:**

1. Найти *y’*, если

а) $y = \sin 5x$;     б) $y = \cos^{10} 3x$;

в) $y = tg(2x^2+3)$;     г) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

д) $y = e^{x\cdot ctg 4x}$;     е) $y = \sqrt[3]{\ln x}$;

ж) $y = (5x-8)^{12}$;     з) $y = \left(\frac{\sin 3x - 1}{1+\cos 3x}\right)^5$.

2. Найти $z_t'$, если $z = \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$.

3. Найти $u_t'$, если $u = x, y, z$, $x = t^2+1$, $y = \ln t$, $z = tgt$.

4. Найти частные производные, если:

а) $z = (\sin x)^y$;     б) $z = \sqrt{x+\sin(xy)}$;

в) $x = \sin^2\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$;     г) $u = e^{\sqrt{xyz}}$;

д) $u = tg^2\frac{xy}{z}$;     е) $u = \log_2^2(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$;

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если

$$z = arctg\frac{u}{v},\ u = x^2,\ v = x\sin y.$$

6. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z = f(u), \; u = xy + \frac{y}{x}.$$

7. Показать, что если $z = f(x + ay)$, где $f$ – дифференцируема функция, то

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

8. Показать, что функция $z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

9. Показать, что функция $z = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

10. Найти $z_x^{'}$, если $z = x^y, \; y = \varphi(x)$.

11. Найти $u_x^{\backslash}$, если $u = f(x, y, z), y = \varphi(x), z = \psi(x, y)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = f(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases} \qquad (1)$$

где функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены на некотором множестве $V, V \subset R$.

Если функция $\varphi(t)$ строго монотонна на множестве $V$, то на множестве $E_v(\varphi)$ определена обратная функция $\varphi^{-1}(x)$.

В этом случае можно построит сложную функцию

$$y = f[\varphi^{-1}(x)].$$

Говорят, что функция $y = f[\varphi^{-1}(x)]$ параметрически задана уравнениями (1) ($t$- параметр).

Например, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = t^2, \\ x = t^3 + t \end{cases}. \qquad (2)$$

Функция $\varphi(t) = t^3 + t$ возрастает на всей числовой прямой. Поэтому можно говорить о функции, параметрически заданной системой уравнений (2). График этой функции приведен на рисунке.

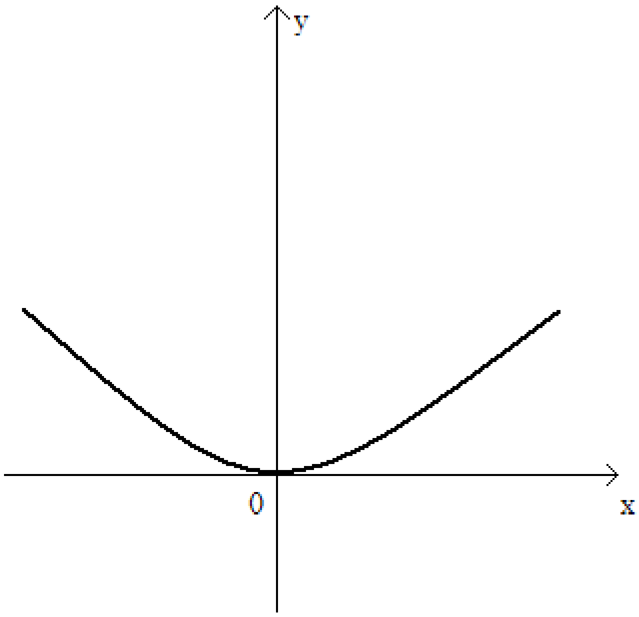



рис. 4.6

**Теорема 2.** Пусть функция *F(x)* параметрически задана уравнениями

$$\begin{cases} y = f(t \\ x = \varphi(t)) \end{cases}$$

где функции *f(t)* и $\varphi(t)$ определены на интервале $]\alpha,\beta[$, причем функция $\varphi(t)$ непрерывна и строго монотонна на этом интервале.

Если функции *f(t)* и $\varphi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in ]\alpha,\beta[$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то функция *F(x)* дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, и

$$F'(x_0) = f'(t_0)/\varphi'(t_0).$$

**Доказательство.** По теореме о дифференцируемости обратной функции можно утверждать, что функция $\varphi^{-1}(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и $(\varphi^{-1})'(x_0) = 1/\varphi'(t_0)$.

Тогда сложная функция $F(x) = f[\varphi^{-1}(x)]$ дифференцируема в точке $x_0$ так как функция *f(t)* дифференцируема в точке $t_0$, а $\varphi^{-1}(x_0) = t_0$. При этом $F'(x_0) = f'(t_0)\cdot(\varphi^{-1})'(x_0) = f'(t_0)/\varphi'(t_0)$. Теорема доказана.

***Замечание.*** Если производную функции параметрически заданной уравнениями

$$\begin{cases} y = f(t \\ x = \varphi(t)) \end{cases}$$

обозначить $y'_x$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

***Пример.*** Если

$$\begin{cases} y = t^3 \\ x = t^3 + t \end{cases},$$

то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{3t^2+1}$ $(x = t^3 + t)$.

**Задачи для размышления:**

1. Построить график функции, заданной параметрически и найти $y'_x$, если

а) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$; д) $\begin{cases} x = at/(1+t^3) \\ y = at^2/(1+t^3) \end{cases}$.

2. Построить график функции *y=y(x)* и найти производную $y'_x$, если

$$\begin{cases} x = -1 + 2t - t^2 \\ y = 2 - 3t + t^3 \end{cases}$$

В каких точках касательная к графику функции *y=y(x)* параллельна оси абсцисс?

3.Найти производную $y'_x$, если

а) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

4.Вычислить $y'_x$ при $t = \pi/2$, если $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

## Лекция № 24. Дифференциал функции.

**П Л А Н**

1. **Дифференциал функции.**
2. **Основные свойства дифференциалов функции.**
3. **Задачи.**

Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0 \in R^n$, то

$$\Delta f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) \cdot \Delta x_i + \lambda \cdot \rho, \qquad (1)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + .... + (\Delta x_n)^2}$, а $\lambda$ является бесконечно малой функцией при $\Delta x_1 \to 0, ...., \Delta x_n \to 0$.

Из равенства (1) следует, что приращение дифференцируемой функции представимо в виде суммы линейной (относительно $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$) функции и бесконечно малой функции высшего порядка по сравнению с

$$\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_n)^2} \text{ при } \Delta x_1\to 0,....,\Delta x_n\to 0.$$

**<u>Определение .</u>** Линейная часть приращения дифференцируемой функции *f(M)* в точке $M_0$ ,называется ее дифференциалом и обозначается $df(M_0)$.

Таким образом,

$$df(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i$$

Число $\Delta x_i (i=1,2,...,n)$ часто называют дифференциалом независимого переменного $x_i$ и обозначают $dx_i$. Тогда

$$df(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot dx_i .$$

В частности, если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0\in R$, то

$$df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx.$$

Тогда

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx},$$

т.е. производная функции одного переменного есть отношение дифференциала к дифференциалу ее переменного $x$.

***Примеры***

1) $d\sin x=\cos x\cdot dx,\ ((\sin x)'=\cos x);$

2) если $f(x,y)=x^2y+3x$, то $df=(2xy+3)dx+x^2\cdot dy$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+3,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2.$$

***Основные свойства дифференциалов.***

**1.** Если *u(M)* и *v(M)* – дифференцируемые функции, то

а) $d(u+v)=du+dv;$

б) $d(c\,u)=c\cdot du$ ($c$ - постоянная);

в) $d(u,v)=du\cdot v+u\cdot dv$;

г) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du\,v-dv\,u}{v^2}\ (v\neq 0).$

Докажем, например, что $d(u\,v)=du\cdot v+u\cdot dv$.

Действительно,

$$d(uv)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(uv)}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\cdot dx_i=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)\cdot v+u\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)=du\cdot v+u\cdot dv.$$

Равенства а) – г) часто позволяют находить дифференциал функции, не вычисляя предварительно производные этой функции.

***Пример.***

Если $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, то

$$dx = \frac{dx(x^2+y^2) - d(x^2+y^2)x}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{dx(x^2+y^2) - (2xdx + 2ydy)x}{(x^2+y^2)} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)}dy.$$

**2.** Дана сложная функция

$$x = f(u_1,...,u_l),$$

где $u_1 = \varphi_1(x_1,....,x_n),....u_l = \varphi_l(x_1,....,x_n)$.

Если выполняется все условия теоремы о дифференцируемости сложной функции, то

$$dz = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i \ ,$$

где $du_1,...,du_l$ - дифференциалы соответствующих функций (свойство инвариантности дифференциала).

Доказательство. По определению,

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_k} dx_k \ .$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad k = 1,2,...,n,$$

то

$$dz = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \cdot dx_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot dx_k \right) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot du_i \ .$$

***Пример.*** $d(\sin^3 e^x) = 3\sin^2 e^x d\sin e^x = 3\sin^2 e^x \cdot \cos e^x \cdot de^x =$

$= 3\sin^2 e^x \cdot \cos e^x \cdot e^x \cdot dx.$

Если $z = f(u)$, где $u = xy + \dfrac{y}{x}$, то

$$dz = f'(u)du = f'(u)\left[ dx \cdot y + x \cdot dy + \frac{dy \cdot x - dx \cdot y}{x^2} \right] =$$

$$= f'(u) \cdot \left[ \left( y - \frac{y}{x^2} \right) \cdot dx + \left( x + \frac{1}{x} \right) \cdot dy \right].$$

Дифференциалы функций можно использовать для приближенных вычислений, считая, что при достаточно малых по абсолютной величине $\Delta x_1, ...., \Delta x_n$ выполняется равенство $\Delta f(M_0) = df(M_0)$.

***Пример.***

Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta y, \text{ то}$$

$$\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Delta y \qquad (2)$$

Равенство (2) применимо для вычисления $\sqrt{(3{,}1)^2 + (4{,}2)^2}$ .Получим

$$\sqrt{(3{,}1)^2 + (4{,}2)^2} = 5 + \frac{3 \cdot 0{,}1}{5} + \frac{4 \cdot 0{,}2}{5} = 5{,}22.$$

**Задачи для размышления:**

1. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x \cdot e^{-x^2}$;  б) $y = \dfrac{e^{2x}}{1 - x^2}$;  в) $y = \dfrac{tg^2 3x}{x}$.

2. Найти дифференциалы функций:

а) $z = x^4 - y^4 + 5xy^2$;  б) $z = y^2 \cdot x^y$;

в) $z = \cos\dfrac{x}{y} + \sin\dfrac{y}{x}$;  г) $z = arctg\dfrac{xy}{t^2}$

д) $z = kn(x^2 + y^2) \cdot t^2$.

3. Найти $dz$, если

а) $z = \varphi(u)$;  $u = x^3 + y^3 - 3xy$;

б) $z = x^v$,  $u = \dfrac{x}{y}$,  $v = xy$;

в) $z = f(u, v)$,  $u = xe^y$,  $v = ye^x$;

г) $z = f(u, v, w)$,  $u = x^2 \cdot y$,  $v = y \cdot x^2$,  $w = \dfrac{x}{y}$.

4. Вычислить приближенно:

а) $\sin 32^0$;  б) $arcctg(1{,}04)$;

в) $(1{,}02)^4 \cdot (0{,}98)^5$;  г) $\sqrt[3]{(5{,}1)^2 + 1{,}9}$.

5. Как изменится объем конуса, если его высота увеличилась с 30 см, до 30,3 см, а радиус основания уменьшился с 10 см до 9,9 см. вычислить приблизительно с помощью дифференциала?

## Лекция № 25. Градиент функции.

### П Л А Н

1. **Градиент функции.**
2. **Основное свойство градиента.**
3. **Задачи.**

**Определение 1.** Градиентом функции *f(M)* в точке $M_0 \in R^n$ называется $n$ – мерный вектор, координаты которого соответственно равны значениям частных производных этой функции в точке $M_0$.

Градиент функции *f(M)* в точке $M_0$ обозначается

$$gradf\Big|_{M_0}.$$

Таким образом,

$$gradf\Bigg|_{M_0} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0),...., \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0),...., \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) \right\}.$$

В частности, для функции *f(x)* одного переменного имеет место равенство

$$gradf\Big|_{x_0} = f'(x_0).$$

Градиент функции *f(M)* в произвольной точке $M \in R^n$ обозначается *grad t*.

***Пример.***

Найдем градиент функции $f(M) = x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2$ в точке $M_0(1,1,-1)$. Так как

$$gradd = \{x_2^2 x_3 - x_2, 2x_1 x_2 x_3 - x_1,\ x_1 x_2^2\},$$

то

$$grad\ f\Big|_{M_0} = \{-2,-2,1\}.$$

Если даны точка $M_0\left(x_1^0,....,x_i^0,....,x_n^0\right) \in R^n$ и $n$ – мерный вектор $\alpha = (a_1,...,a_i,...,a_n)$, то при любом $t, -\infty < t < +\infty$ можно рассмотреть точку

$$M_{\alpha,t} = \left(x_1^0 + a_1 t,...,x_i^0 + a_i t,...,x_n^0 + a_n t\right).$$

Очевидно, что точка $M_{\alpha,t}$ лежит на прямой $l_\alpha(M_0)$, проходящей через точку $M_0$, параллельно вектору $\alpha$.

**Теорема 1.** Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0,....,x_i^0,....,x_n^0\right)$, то при любом $n$-мерном векторе $\alpha = (a_1,...,a_i,...,a_n)$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M_{\alpha,t}) - f(M_0)}{t} = grad\ f\Big|_{M_0} \cdot \alpha.$$

**Доказательство.** Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то

$$f\left(x_1^0 + \Delta x_i,...,x_i^0 + \Delta x_i,...,x_n^0 + \Delta x_n\right) - f(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i+\lambda\cdot\rho, \qquad (1)$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+....+(\Delta x_i)^2+...+(\Delta x_n)^2}$ а $\lambda\to 0$, при $\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_i\to 0,...,\Delta x_n\to 0$.

Из равенства (1) при $\Delta x_1=a_1t,...,\Delta x_i=a_it,....,\Delta x_n=a_nt$ получим

$$f(M_{\alpha,t})-f(M_0)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot a_i\right)\cdot t+\lambda\cdot|t|\cdot|\alpha|.$$

Тогда

$$\frac{f(M_{\alpha,t})-f(M_0)}{t}=grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha+\lambda\cdot\frac{|t|}{t}\cdot|\alpha|.$$

Если $t\to 0$, то $\Delta x_1=a_1t\to 0,....,\Delta x_i=a_it\to 0,...,\Delta x_n=a_nt\to 0$, и, следовательно, $\lambda\to 0$. Значит

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(M_{\alpha,t})-f(M_0)}{t}=grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha.$$

**Определение 2.** Функцию *f(M)*, являющуюся суммой линейной и постоянной функции, называют аффинной функцией. Таким образом, аффинная функция имеет следующий вид:

$$f(M)=c_1x_1+...c_ix_i+...+c_nx_n+b.$$

Если *f(M)* – аффинная функция, то для любого $t, -\infty<t<+\infty$ имеет место равенство:

$$f(M_{\alpha,t})=f(M_0)+\left(grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha\right)t. \qquad (2)$$

Действительно,

$$f(M_{\alpha,t})=c_1(x_1^0+a_1t)+...+c_i(x_i^0+a_it)+...+c_n(x_n^0+a_nt)+b=$$
$$=c_1x_1^0+...c_ix_i^0+...+c_nx_n^0+b+(c_1a_1+...+c_ia_i+....+c_na_n)t=$$
$$=f(M_0)+\left(grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha t.\right)$$

Из равенства (2) следует, что если *f(M)* – аффинная функция и $grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha\geq 0$ $\left(grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha\leq 0\right)$, то при всех положительных значениях *t* выполняется неравенство:

$$f(M_{\alpha,t})\geq f(M_0)\quad\left(f(M_{\alpha t})\leq f(M_0)\right).$$

В общем же случае имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** (основное свойство градиента). Пусть функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, $\alpha$ - некоторый *n* – мерный вектор.

Если $grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha>0$ $\left(grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha<0\right)$, то найдется число $T>0$ такое, что при $0<t<T$ выполняется неравенство

$$f(M_{\alpha,t})>f(M_0)\quad\left(f(M_{\alpha t})<f(M_0)\right).$$

**Доказательство.** Предположим, что $grad\ f\Big|_{M_0}\cdot\alpha>0$. Так как

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(M_{\alpha,t})-f(M_0)}{t}=grad\ f\big|_{M_0}\cdot\alpha$$

то

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(M_{\alpha,t})-f(M_0)}{t}>0,$$

Следовательно, найдется число $T>0$ такое, что при $0<|t|<T$

$$\frac{f(M_{\alpha,t})-f(M_0)}{t}=>0.$$

Тогда, если $0<t<T$, то $f(M_{\alpha t})>f(M_0)$.

Известно, что скалярное произведение векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому основное свойство градиента можно переформулировать следующим образом.

Если $grad\ f\big|_{M_0}$ образует с лучом $l_\alpha^+(M_0)$ острый (тупой) угол, то вблизи точки $M_0$ на этом случае функция $f(M)$ принимает значения большие (меньшие), чем в точке $M_0$.

***Следствие.*** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0\in R$. Если $f'(x_0)>0,\ \ (f'(x_0)<0)$, то существуют точки $x_1$, $x_2$, $x_1<x_0<x_2$, такие, что

$$f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)\quad \big(f(x_1).f(x_0)>f(x_2)\big).$$

**Доказательство.** Если $f'(x_0)>0$, то $f'(x_0)\cdot 1>0$, а $f'(x_0)\cdot(-1)<0$. Из основного свойства градиента следует, что существуют числа $t\ >0, t_2>0$ такие, что

$$f(x_0-t_1)<f(x_0),\quad f(x_0+t_2)>f(x_0).$$

Если $x_1=x_0-t_1, x_2=x_0+t_2$, то $x_1<x_0<x_2$ и $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Случай $f'(x_0)<0$ рассматривается аналогично.

***Замечание.*** Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0\right)$, а $grad\ f\big|_{M_0}\neq 0$, то, используя основное свойство градиента, можно найти точки $M_1$ и $M_2$, так, чтобы

$$f(M_1)<f(M_0)<f(M_2).$$

Покажем, например, как найти точку $M_1$. Для этого вначале выберем вектор $\alpha$, так чтобы выполнялось неравенство

$$grad\ f\big|_{M_0}\cdot\alpha>0$$

(в частности, можно положить $\alpha=grad f\big|_{M_0}$). Из основного свойства градиента следует: что, перебрав несколько достаточно малых положительных значений $t$, всегда можно найти $t_1$, так, что

$$f(M_{\alpha,t_1})>f(M_0).$$

***Пример.*** Функция $f(M)=-3x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2+10x_1-6x_2+2$ дифференцируема в точке $M_0$ (1,-1), причем $f(M_0)=10$. Так как

$$grad\ f = \{-6x_1 + 2x_2 + 10,\ -6x_2 + 2x_1 - 6\},$$

то

$grad f \left|_{M_0} = \{2{,}2\} \neq 0\right.$. Если $\alpha = (1{,}1)$, то $grad\ f\Big|_{M_0} \cdot \alpha > 0$. Значит, среди точек вида $M_{\alpha,t}(1+t, -1+t),\ t > 0$ есть точка, в которой функция *f(M)* принимает значение большее, чем в точке $M_0$. Если *t=1*, то $M_{\alpha,t}(2{,}0)$ и $f(M_{\alpha,t}) = 10 = f(M_0)$. Если же *t=1/2*, то $M_{\alpha,t}(3/2, -1/2)$ и $f(M_{\alpha,t}) = 10 > f(M_0)$.

**Задачи для размышления:**

1. Найти *grad f*, если

а) $f(M) = \dfrac{x^2}{y^3}$; б) $f(M) = x^2 \cdot e^{xy}$;

в) $f(M) = x^{xy}$; г) $f(M) = \dfrac{z}{xy} + \dfrac{xy}{z^2}$.

2. Найти $grad\ f\Big|_{M_0}$, если:

а) $f(M) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 8y + 5,\ \ M_0(1{,}1)$;

б) $f(M) = (x^2 + 3y)^4,\ \ M_0(-2{,}1)$;

в) $f(M) = \dfrac{x}{y^2 + z^2},\ \ M_0(2,-1{,}1)$;

г) $f(M) = z^2 \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^x,\ \ M_0(1{,}1{,}1)$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(M_{\alpha,t}) - f(M_0)}{t}$, если:

а) $f(M) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2,\ \ M_0(1{,}2), \alpha = (-1{,}3)$;

б) $f(M) = x_1x_2x_3^2 + 2x_1x_2^2x_3 - x_1^2,\ \ M_0(-1.-1{,}1), \alpha = (1{,}0{,}2)$.

4. Найти точку *M* так, чтобы *f(M)>f(M₀)*, если:

а) $f(M) = x_1 - (x_1 + 2x_2)^2,\ \ M_0(1,-1)$;

б) $f(M) = 2x_1 + x_2 - \left(x_1^2 + x_2\right)^2,\ \ M_0(1{,}1)$;

в) $f(M) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 3x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ \ M_0(1{,}0{,}1)$.

5. Найти точку *M* так, чтобы *f(M)<f(M₀)*, если:

а) $f(M) = x_2 + (x_1 + 2x_2)^2,\ \ M_0(1{,}0)$;

б) $f(M) = \left(x_1^2 - x_2\right)^2 + x_1x_2,\ \ M_0(-1{,}1)$;

в) $f(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_2x_3,\ \ M_0(1{,}1,-1)$.

6. Найти точку на плоскости $x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$, в которой значение функции $f(M) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3$ больше ее значения в точке $M_0$ (1,2.8).

## Лекция № 26. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума.

**П Л А Н**

**1. Экстремумы функций.**
**2. Необходимое условие экстремума.**
**3.Задачи.**

**Определение.** Точка $M_0 \in R^n$ называется точкой локального максимума (минимума) функции *f(M)*, если существует окрестность $S_\delta(M_0)$, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(M_0) \geq f(M) \qquad \left(f(M_0) \leq f(M)\right).$$

Таким образом, точка $M_0$ является точкой локального максимума (минимума) функции *f(M)* тогда и только тогда, когда найдется окрестность $S_\delta(M_0)$, в которой функция *f(M)* определена и

$$f(M_0) = \max_{M \in S_\delta(M_0)} f(M) \qquad \left(f(M_0) = \max_{M \in S_\delta(M_0)} f(M)\right)$$

Точки локального максимума и точки локального минимума функции *f(M)* называется точками экстремума этой функции.

Например, точка $M_0$ (0,0) является точкой локального минимума функции $f(M) = x_1^2 + x_2^2$ и является точкой локального максимума функции $f(M) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ .

**Теорема 1.** (необходимое условие экстремума). Пусть $M_0 \in R^n$ является точкой экстремума функции *f(M)*. Если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то

$$grad\ f\Big|_{M_0} = 0$$

**Доказательство.** Для определенности будем считать, что $M_0\left(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right)$ является точкой локального максимума функции *f(M)*. Тогда найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in S_\delta(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(M_0) \geq f(M). \qquad (1)$$

Если $grad\ f\Big|_{M_0} \neq 0$, то существует вектор $\alpha = (a_1, ....a_i, ...., a_n)$, для которого $grad\ f\Big|_{M_0} \cdot \alpha > 0$. Тогда, согласно основного свойства градиента, найдется число $T>0$ такое, что при $0<t<T$ выполняется неравенство

$$f(M_{\alpha,t}) > f(M_0). \qquad (2)$$

Кроме того, если $|t| < \delta / |\alpha|$, то точка $M_{\alpha,t}(x_1^0 + a_1 t, ..., x_i^0 + a_i t, ... x_n^0 + a_n t)$ принадлежит окрестности $S_\delta(M_0)$ так как

$$\rho(M_{\alpha,t}, M_0) = \sqrt{(a_1 t)^2 + ... + (a_i t)^2 + ... + (a_n t)^2} = |t| \cdot |\alpha|.$$

Таким образом, при $0<t<min\{T, \delta/|\alpha|\}$ одновременно выполняются условия:

$$M_{\alpha t} \in S_\delta(M_0), \quad f(M_{\alpha t}) > f(M_0). \qquad (3)$$

Условия (3), очевидно, противоречат неравенству (1). Следовательно, $grad\ f\big|_{M_0} = 0$. Теорема доказана.

Следствие (теорема Ферма). Если $x_0 \in R$ является точкой экстремума функции *f(x)*, а функция *f(x)* дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: касательная, проведенная к графику функции *f(x)* в точке экстремума, всегда параллельна оси абсцисс.

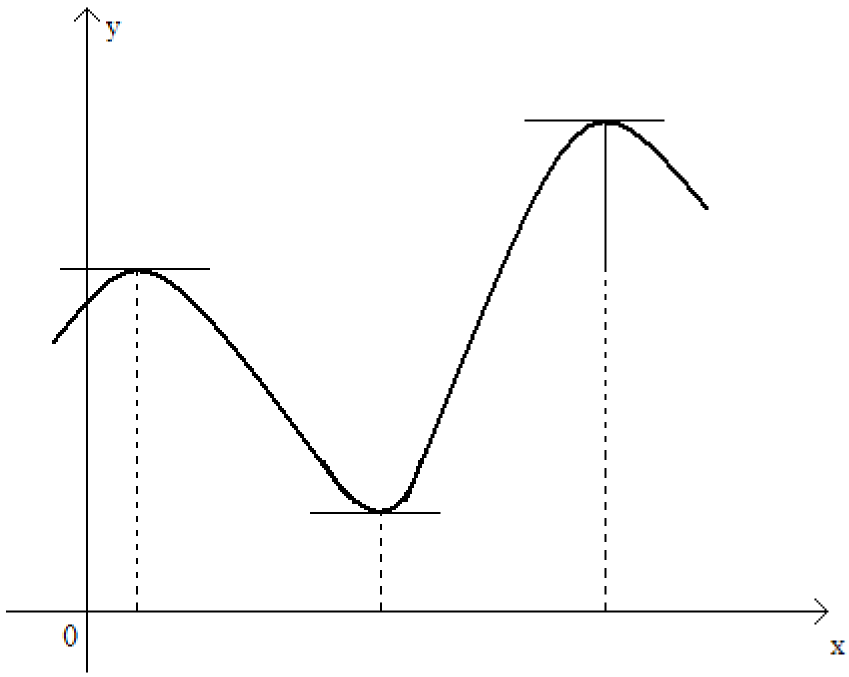



рис. 4.7

***Замечание.*** Точку $M_0 \in R^n$ назовем стационарной точкой функции *f(M)*, если $grad\ f\big|_{M_0} = 0$. Можно утверждать, что точки экстремума функции *f(M)* содержится среди стационарных точек этой функции и точек, где функция не дифференцируема.

Однако, стационарная точка функция не обязана быть точкой экстремума этой функции, даже в том случае, если функция дифференцируема в стационарной точке.

Действительно, *x=0* – стационарная точка функции $f(x) = x^3$. Однако, эта точка не является точкой экстремума.

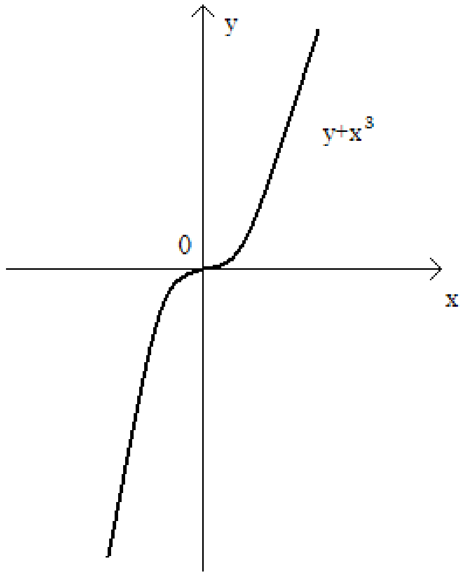



рис. 4.8

В общем случае, для отыскания стационарных точек функции *f(M)* необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

***Пример.***

Если $f(M) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$, то для отыскания стационарных точек этой функции имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем три стационарные точки: $M_1$ (0,0), $M_2$ (1,1), $M_3$ (-1,-1). Так как функция *f(M)* дифференцируема на всем пространстве $R^2$, то точки экстремума функции *f(M)* (если они существуют) обязательно содержится среди точек $M_1, M_2, M_3$.

**Задачи для размышления:**

1. Найти стационарные точки функции *f(x)*, если:

а) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; б) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x}$;

в) $f(x) = xe^{-x}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{knx}$;

д) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

2. Найти стационарные точки функции *f(M)*, если:

а) $f(M) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; б) $f(M) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$;

в) $f(M) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

г) $f(M) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

д) $f(M) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

е) $f(M) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

3. Найти стационарные точки функции

$$f(M) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}.$$

4.Доказать, что точка $M_0$ (0,0) – стационарная точка функции $f(M) = x_1^2 - x_2^2$, но не является точкой экстремума этой функции.

5.Доказать, что *x=0* является точкой экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, а функция *f(x)* не дифференцируема в этой точке.

## Лекция № 27. Свойства функций, дифференцируемых на интервале. Правило Лопиталя.

### П Л А Н

1. **Свойства функций, дифференцируемых на интервале.**
2. **Правило Лопиталя.**
3. **Задачи.**

Функция *f(x)* дифференцируема на интервале $]a,b[$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

***Основные свойства функций, дифференцируемые на интервале.***

**1.**Производная функции, дифференцируемой на интервале, может быть разрывной функцией.

Действительно, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

дифференцируема на всей числовой прямой, причем

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin 1/x - \cos 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Однако, *x=0* является точкой разрыва производной *f'(x)*, так как не существует предел *f'(x)* при $x \to 0$.

**2.**Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема внутри интервала $]a,b[$ и $f(a)=f(b)$, то существует точка $c\in]a,b[$ такая, что $f'(c)=0$ (теорема Ролля).

**Доказательство.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке она достигает своих точных граней. Пусть

$$m=\inf_{[a,b]} f(x), \qquad M=\sup_{[a,b]} f(x).$$

Если $m=M$, то функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, является постоянной. Тогда $f'(x)=0$ при любом $x\in]a,b[$. Поэтому можно считать, что $m<M$.

Так как по условию $f(a)=f(b)$, то, по крайней мере, одна из точных граней функции $f(x)$ достигается внутри интервала $]a,b[$. Если, например, $f(c)=M,\ \ c\in]a,b[$, то $c$ является точкой локального максимума функции $f(x)$ и, по теореме Ферма, $f'(c)=0$.

**3.**Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $]a,b[$, то ее производная $f'(x)$ принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями (теорема Дарбу).

**Доказательство.** Предположим, что

$$f'(\alpha)<\lambda<f'(\beta),$$

где $\alpha,\beta\in]a,b[$ и $\alpha<\beta$. Покажем, что существует точка $c\in]a,b[$ такая, что $f'(c)=\lambda$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-\lambda x$. Функция $\varphi(x)$, очевидно, дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем

$$\varphi'(\alpha)-f'(\alpha)-\lambda<0,\quad \varphi'(\beta)-f'(\beta)-\lambda>0.$$

По следствию из основного свойства градиента функции найдутся точки $x_1,x_2\in]\alpha,\beta[$ такие, что

$$\varphi'(x_1)<\varphi(\alpha),\quad \varphi'(x_2)<\varphi(\beta).$$

В таком случае, очевидно, что точная нижняя грань функции $\varphi(x)$ достигается внутри интервала $]\alpha,\beta[$. Если $\varphi(c)=\inf\limits_{]\alpha,\beta[}\varphi(x)$, то $c$ является точкой локального минимума функции $\varphi(x)$. Тогда $\varphi'(c)=0$ и, значит, $f'(c)=\lambda$.

Случай $f'(\alpha)<\lambda<f'(\beta),\ \alpha>\beta$ рассматривается аналогично.

***Замечание.*** Точку, в которой производная функция $f(x)$ равна 0 или не существует, будем называть критической точкой функции $f(x)$.

Если между критическими точками $x_1$ и $x_2$ функция $f(x)$ больше нет критических точек этой функции, то на интервале $]x_1,x_2[$ производная $f'(x)$ сохраняет свой знак.

Действительно, если производная $f'(x)$ не сохраняет свой знак на интервале $]x_1,x_2[$, то найдутся точки $\alpha,\beta\in]x_1,x_2[$ такие, что

$$f'(\alpha)<0, \text{ а } f'(\beta)>0.$$

По теорема Дарбу на интервале $]x_1, x_2[$ существует точка в которой производная $f'(x)$ равна 0, а это противоречит условию.

**4.**Если функция *f(x)* и *g(x)* непрерывны на отрезке *[a,b]*, дифференцируемы внутри интервала $]a,b[$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \in ]a,b[$, то существует точка $c \in ]a,b[$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(теорема Коши).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)).$$

Функция *φ(x)*, очевидно, непрерывна на отрезке [*a,b*] и дифференцируема внутри интервала ]*a,b*[, причем $\varphi(a)-\varphi(b)=0$. По теореме Роля найдется точка $c \in ]a,b[$ такая, что $\varphi'(c)=0$. Тогда

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0.$$

Если *g(a)=g(b)*, то применяя теорему роля к функции *g(x)* на отрезке [*a,b*], установим, что существует точка, принадлежащая интервалу ]*a,b*[, в которой производная *g'(x)* обращается в 0. Так как, по условию, $g'(x) \neq 0$ при $x \in ]a,b[$, то $g(b) \neq g(a)$. Тогда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Теорема .** (правило Лопиталя). Пусть функции *f(x)* и *g(x)*, определены и дифференцируемы в окрестности $S_\delta(a)$, за исключением быть может самой точки *a*. Предположим, что выполняются следующие условия:

а) $g'(x) \neq 0$ при $x \in S_\delta(a) \setminus a$;

б) либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Доказательство.** Доказательство проведем для случая:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Рассмотрим функции

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & если \quad x\in S_\delta(a)\setminus a \\ 0, & если \quad x=a \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & если \quad x\in S_\delta(a)\setminus a \\ 0, & если \quad x=a \end{cases}$$

Функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ непрерывны в окрестности $S_\delta(a)$. Поэтому на отрезке $[a,x]$, где $x\in S_\delta(a)\setminus a$, применима теорема Коши. Следовательно, найдется точка $c_x\in ]a,x[$ такая что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)}=\frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}=\frac{f'(x_x)}{g'(c_x)}.$$

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$=*K*, то для любого числа *ε>0* существует число *r>0* такое, что при *0<|x-a|<r* выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\varepsilon.$$

Так как $c_x\in ]a,x[$ , то *0<|c*$_x$*-a|<r*. Значит,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|=\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-K\right|<\varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа *ε >0* существует число *r>0* такое, что при *o<|x-a|<r* выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

***Примеры.***

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x=\lim\limits_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^0=1;$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+2x^3}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+2t}-1}{t}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\sqrt[4]{1+2t}-1)}{t}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{4}\dfrac{2}{(1+2t)^{3/4}}=\dfrac{1}{2}.$

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что уравнение *f'(x)=0*, где
$$f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+6)$$
имеет три решения.
2. Доказать, что уравнение $e^{2z} = 1+x$ имеет единственный корень.

3. Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)* на интервале $]a,b[$, если для всех $x\in]a,b[$
$$F'(x)=f(x).$$
Доказать, что функция *f(x)* не имеет первообразной на интервале $]-1{,}1[$, если:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & если\ \ x\neq 0,\\ 0, & если\ \ x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}1, & если\ \ x\geq 0,\\ 0, & если\ \ x<0.\end{cases}$

4. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg3x}{tg5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[4]{x^3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)ctgx$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\sin 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{rf\,2x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{1/\ln x}$.

## Лекция № 28. Теорема Лагранжа. Достаточное условие дифференцируемости функций нескольких переменных.

### П Л АН

1. **Теорема Лагранжа.**
2. **Достаточное условие дифференцируемости функций нескольких переменных.**
3. **Задачи.**

**Теорема 1.** (Лагранжа). Если функция *f(x)* дифференцируема на открытом выпуклом множестве *V*, то для любых двух точек $M_1(x_1^1,...,x_n^1)$ и $M_2\left(x_1^2,...,x_n^2\right)$ из множества *V* существует точка $P\in[M_1,M_2]$, $P\neq M_1$, $P\neq M_2$ такая, что
$$f(M_2)-f(M_1)=grad\ f\Big|_P\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\,.$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(P_t) - f(M_1) - f(M_2) - f(M_1)t,$$

где $P_1(x_1^1 + t(x_1^2 - x_1^1),..., x_n^1 + t(x_n^2 + x_n^1)) \in [M_1, M_2], 0 \le t \le 1$. По теореме о дифференцируемости сложной функции, функция *φ(t)* дифференцируема (а, следовательно, и непрерывна) на отрезке [0,1], причем

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\left(x_i^2 - x_i^2\right) - (f(M_2) - f(M_1)).$$

Так как точка $P_i$ совпадает с точками $M_1$ и $M_2$ соответственно при $t=0$ и $t=1$, то

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Тогда по теореме Роля найдется точка $t_0 \in ]0,1[$ такая, что $\varphi'(t_0) = 0$. Следовательно,

$$f(M_2) - f(M_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_{t0})(x_1^2 - x_1^1) = grad\ f\Big|_{Pt0} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$$

где $P_{t0} \in [M_1, M_2]$, $P_{t0} \ne M_1$, $P_{t0} \ne M_2$. Теорема доказана.

***Следствие 1.*** Если функция *f(M)* дифференцируема на открытом выпуклом множестве *V* и имеет во всех точках этого множества нулевой градиент, то функция *f(M)* постоянная на множестве *V*.

**Доказательство.** Рассмотрим две произвольные точки $M_1$, $M_2 \in V$. Тогда найдется точка $P \in [M_1, M_2]$ такая, что

$$f(M_2) - f(M_1) = grad\ f\Big|_{p} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

Так как $P \in V$, то $grad\ f\Big|_{p} = \theta$. Следовательно,

$$f(M_2) = f(M_1).$$

Отсюда заключаем, что функция *f(M)* постоянна на множестве *V*.

***Следствие 2.*** Если функция *f(x)* дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$.

**Доказательство.** К функции *f(x)* на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ применима теорема Лагранжа. Следовательно, найдется точка $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ такая, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x.$$

Так как $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, то точку с можно записать в виде $c = x_0 + \theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$.

***Замечание.*** Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ в окрестности точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, то

$$f\left(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_{k-1}^0 + \Delta x_{k-1}, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0\right) -$$
$$- f\left(x_1^0 + \Delta x_1, ...., x_{k-1}^0 + \Delta x_{k-1}, x_k^0, x_{k-1}^0, ...., x_n^0\right) =$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(x_1^0+\Delta x_1,....,x_{k-1}^0+\Delta x_{k-1},x_k^0+\theta\Delta x_k,x_{k+1}^0,....,x_n^0\right)\Delta x_k,$$

где $0<\theta<1$.

Для доказательство достаточно к функции

$$\varphi(x)=f\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_{k-1}^0+\Delta x_{k-1},x,x_{k+1}^0,...,x_n^0\right)$$

применить следствие 2.

Известно, что если функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то она в этой точке имеет все частные производные. Однако, существование частных производных не достаточно для дифференцируемости функции. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** (достаточное условие дифференцируемости функций нескольких переменных).

Если функция *f(M)* имеет все частные производные в окрестности точки $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ которые непрерывны в самой точке $M_0$, то она дифференцируема в этой точке.

**Доказательство.** Рассмотрим точки

$$M_0\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_{k-1}^0+\Delta x_{k-1},x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0,....,x_n^0\right),\ k=1,2,...,n.$$

Тогда

$$\Delta f(M_0)=f\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n\right)-f(x_1^0,...,x_n^0)= \quad (1)$$

$$=f(M_n)-f(M_0)=f(M_n)-f(M_{n-1})+f(M_{n-1})-f(M_{n-1})+...+f(M_k)-$$

$$-f(M_{k-1})+...+f(M_1)-f(M_0)=\sum_{k=1}^{n}(f(M_k)-f(M_{k-1})).$$

При этом

$$f(M_k)-f(M_{k-1})=\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_{\theta k})\cdot\Delta x_k. \quad (2)$$

где $M_{\theta k}\left(x_1^0+\Delta x_1,...,x_{k-1}^0+\Delta x_{k-1},x_k^0+\theta_k\cdot\Delta x_k,x_{k+1}^0,...,x_n^0\right)\in[M_{k-1},M_k],\ 0<\theta_k<1$.

Если $\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_{k-1}\to 0,\Delta x_k\to 0,...,\Delta x_n\to 0$, то $M_{\theta k}\to M_0$. Тогда, в силу непрерывности частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке $M_0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_{\theta k})\to\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_{\theta k})=\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)+\alpha_k, \quad (3)$$

где $\alpha_k\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,...,\Delta x_k\to 0,....,\Delta x_n\to 0$. Из равенств (1), (2) и (3) следует, что

$$\Delta f(M_0)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)+\alpha_k\right)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Delta x_k.$$

Так как все функции $\alpha_k \ (k=1,2,...,n)$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1 \to 0,..., \Delta x_k \to 0,...., \Delta x_n \to 0$, то функция *f(M)* дифференцируема в точке $M_0$.

***Пример.***

Функция $f(x,y)=(y^2+1)^x$ дифференцируема в любой точке пространства $R^2$, так как ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(y^2+1)^x \ln(y^2+1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy(y^2+1)^{x-1}$$

Непрерывны в любой точке этого пространства.

**Задачи для размышления:**

1. Найти $\theta=\theta(x,\Delta x),\ 0<\theta<1$, так, чтобы

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,$$

   если:

   а) $f(x)=2x^2-x+1$; б) $f(x)=x^3$; в) $f(x)=e^x$.

2. Доказать, что если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема внутри интервала $]a,b[$, то существует точка $c\in]a,b[$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

   Каков геометрический смысл этого утверждения?

3. Доказать дифференцируемость функций

   а) $f(x,y)=x2^{x+y}+y2^{xy}$; б) $f(x,y)=x^{x^2+y^2}\ (x>0)$;

   в) $f(x,y)=(\ln x)^{xy}\ (x>1)$.

4. Функция *f(M)* дифференцируема на всем пространстве $R^n$, причем ее частные производные постоянны. Доказать, что *f(M)* – аффинная функция (т.е. является суммой линейной и постоянной функций).

## Лекция № 29. Критерий монотонности дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции одного переменного.

### П Л А Н

1. **Критерий монотонности дифференцируемой функции.**
2. **Достаточное условие экстремума функции.**
3. **Задачи.**

**Теорема 1.** Пусть функция *f(x)* дифференцируема на интервале $]a,b[$.

1) *f(x)* является неубывающей (невозрастающей) на интервале $]a,b[$ тогда и только тогда, когда $f'(x)\ge 0\ (f'(x)\le 0)$ для всех $x\in]a,b[$;

2) Если производная *f'(x)* сохраняет свой знак на интервале $]a,b[$, то функция *f(x)* строго монотонна на этом интервале.

**Доказательство.** Предположим, что *f(x)* является неубывающей функцией на интервале $]a,b[$, а $x_0$ – произвольная точка этого интервале.

Если $x > x_0$, $x \in ]a,b[$ , то $f(x) \geq f'(x_0)$.

Значит,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция *f(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Следовательно, $f'(x_0) \geq 0$.

Предположим теперь, что для всех $x \in ]a,b[$ выполняется неравенство $f'(x_0) \geq 0$. Если $x_1, x_2 \in ]a,b[$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c \in ]x_1, x_2[$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$, то из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$. Это означает, что функция *f(x)* является неубывающей на интервале $]a,b[$.

Докажем второе утверждение. Для определенности будем считать, что $f'(x) > 0$ для всех $x \in ]a,b[$. Если $x_1, x_2 \in ]a,b[,$ $x_1 < x_2$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c \in ]x_1, x_2[$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция *f(x)* возрастает на интервале $]a,b[$.

Теорема доказана.

***Следствие.*** Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема внутри интервала $]a,b[$. Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in ]a,b[$, то функция *f(x)* возрастает (убывает) на всем отрезке $[a,b]$.

В самом деле, если $f'(x) > 0$ для всех $x \in ]a,b[$, то функция *f(x)* возрастает на этом интервале. Значит, из условий $x_1, x_2 \in ]a,b[, x_1 < x_2$ следует, что

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (1)$$

Так как функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\lim_{x_2 \to b-0} f(x_2) = f(b)$.

Переходя к пределу при $x_2 \to n - 0$ в неравенстве (1), получим $f(x_1) \leq f(b)$.

Если бы $f(x_1) = f(b)$, то по теореме Роля нашлась бы точка $c \in ]x_1, b[$, в которой производная $f'(x)$ равна 0. так как это противоречит условию, то $f(x_1) < f(b)$. Аналогично можно показать, что $f(a) < f(x)$, если $x \in ]a,b[$.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = e^x - 1 - x$.

Так как $f'(x)=e^x-1$, то $f'(x)>0$ при $x>0$ и $f'(x)<0$ при $x<0$. Следовательно, функция $f(x)=e^x-1-x$ возрастает на $[0,+\infty[$ и убывает на $]-\infty,0]$.

Известно, что точки экстремума функции *f(x)* одного переменного находятся среди критических точек функции *f(x)*, т.е. точек, где производная функции либо не существует, либо обращается в 0. чтобы выявить среди критических точек функции *f(x)* точки экстремума этой функции можно воспользоваться следующем утверждением.

Пусть функция *f(x)* непрерывна в окрестности $S_\delta(a)$ и дифференцируема при $x\in S_\delta(a)\setminus a$.

Если $f'(x)<0$ при $x<a$ и $f'(x)>0$ при $x>a$, то $a$ является точкой локальной минимума функции *f(x)*.

Если $f'(x)>0$ при $x<a$ и $f'(x)<0$ при $x>a$, то $a$ – точка локального максимума функции *f(x)*.

Если же $f'(x)>0\,(f'(x)<0)$ при $x\in S_\delta(a)\setminus a$, то $a$ не является точкой экстремума функции *f(x)*.

В самом деле, если, например $f'(x)<0$ при $x<a$ и $f'(x)>0$ при $x>a$, то функция *f(x)* убывает на $]a-\delta,a]$ и возрастает на $[a,a+\delta[$, т.е. $a$ – точка локального минимума этой функции.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^{1/3}(1-x)^{2/3}$. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{2/3}-\frac{2}{3}x^{1/3}(1-x)^{-1/3}=\frac{1-3x}{3x^{2/3}(1-x)^{1/3}},$$

то критически точками функции *f(x)* являются точки: *x=0*; *x=1/3,x=1*. Эти точки разбивают всю числовую прямую на интервалы:

$$]-\infty,0[,\ ]0,1/3[,\ ]1/3,1[,\ ]1,+\infty[.$$

Из теоремы Дарбу следует, что на каждом из этих интервалов производная *f'(x)* сохраняет свой знак. Легко установить, что знаки производной *f'(x)* распределяются так, как указано на рисунке 4.9.

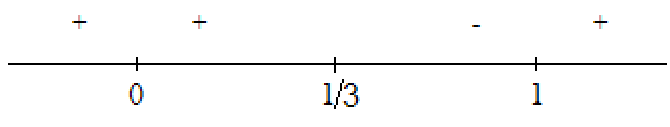



рис. 4.9

Следовательно, *x=-1* – точка локального минимума функции *f(x)*, *x=1/3* – точка локального максимума, а *x=0* точкой экстремума функции *f(x)* не является. График функции *f(x)* изображена на рисунке 4.10.

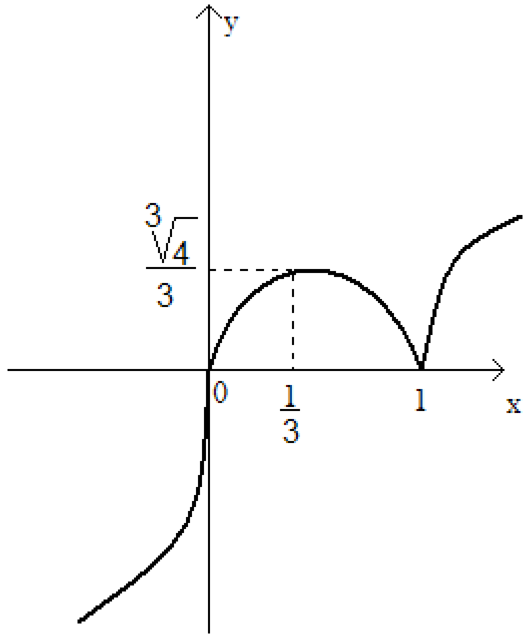



рис. 4.10

**Задачи для размышления:**

1. С помощью производной доказать равенства:

   а) $\arcsin x + \arccos x = \pi / 2, \quad x \in [-1;1]$;

   б) $arctgx + arcctgx = \pi / 2, \ x \in R$;

2. Доказать, что $f(x) = c\,e^x$, если $f'(x) = f(x), \quad x \in R$. Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$.

3. Найти промежутки монотонности функции *f(x)*, если:

   а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

   в) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$; г) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$;

   д) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; е) $f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^3$.

4. Доказать неравенства:

   а) $x = \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$; при *x>0*;

   б) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \ge 2, \ x > 1$.

5. Найти экстремумы функции *f(x)* и построить ее график:

   а) $f(x) = x^2(x+2)^2$; б) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$;

   в) $f(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$;

   д) $f(x) = x \ln x$; е) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$; ж) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

## Лекция № 30. Производные высших порядков функций одного переменного.

### П Л А Н

**1.Производные высших порядков.**
**2. Теорема.**
**3. Задачи.**

Предположим, что функция *f(x)* имеет производную в некоторой окрестности точки $x_0$. это означает, что в окрестности точки $x_0$ определена функция $f'(x)$.

**Определение 1.** Если существует производная функция $f'(x)$ в самой точке $x_0$, то она называется производной второго порядка функции *f(x)* в этой точке и обозначается $f''(x_0)$.

Таким образом,

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Например, если $f(x)=x^4$, то функция $f'(x)=4x^3$ имеет производную в любой точке. Следовательно,

$$f''(x)=(f'(x))'=(4x^3)'=12x^2.$$

Пусть функция *f(x)* имеет производную второго порядка некоторой окрестности точки $x_0$. Если существует производная функции $f''(x)$ в самой точке $x_0$, то она называется производной третьего порядка функции *f(x)* в этой точке и обозначается $f'''(x)$.

По определению

$$f'''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x_0+\Delta x)-f''(x_0)}{\Delta x}.$$

Например, если $f(x)=x^4$, то $f'''(x)=(f''(x))'=(12x^2)'=24x$.

Аналогичным образом можно определить производные четвертого, пятого и т.д. порядков. В общем случае производная *n*-го порядка функции *f(x)* в точке $x_0$ обозначается $f^{(n)}(x_0)$.

Известно, что функция одного переменного дифференцируема в некоторой точке тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.

**Определение 2.** Функция *f(x)* называется *n* раз дифференцируемой на некотором множестве, если она имеет производную *n*-го порядка в каждой точке этого множества.

Если функция *f(x)* *n* раз дифференцируема на интервале $]a,b[$, то:

1)сама функция *f(x)*, а также все ее производные до *n-1*-го порядка включительно непрерывны на интервале $]a,b[$.

2)имеет место равенство $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))', \quad x\in]a,b[$.

***Пример.***

Функция $f(x)=\sin x$ дифференцируема на всей числовой прямой сколько угодно много раз, причем

$$f^{(n)}(x)=ain\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \quad n=1,2,3,...$$

Действительно,

$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

..........................................................................................

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'=\left(\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Очевидно, что если функция $u(x)$ и $v(x)$ $n$ раз дифференцируемы на некотором множестве, то

1) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$ ($c$ - постоянная);

2) $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$.

**Теорема .** Пусть функция *r(x) n* раз дифференцируема в точке $x_0$. Если $r(x_0)=r'(x_0)=...=r^{(n)}(x_0)=0$, то $r(x)=\alpha(x-x_0)^n$, где $\alpha$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

**Доказательство.** Доказательство проведем методом математической индукции. Основание индукции (*n-1*). Если функция *r(x)* дифференцируема в точке $x_0$, то

$$r(x_0+\Delta x)-r(x_0)=r'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Так как по условию $r(x_0)=r'(x_0=0)$, то $r(x_0+\Delta x)=\alpha\Delta x$.

Положим $\Delta x=x-x_0$. Тогда

$$r(x)=\alpha(x-x_0),$$

где $\alpha\to 0$ при $x\to x_0$.

Предположим теперь, что утверждение уже доказано для $n=k$ и докажем его для $n=k+l$.

Пусть

$$r(x_0)=r'(x_0)=...=r^{(k)}(x_0)=r^{(k+1)}(x_0)=0.$$

Рассмотрим функцию $r'(x)$. Все производные этой функции в точке $x_0k$-го порядка включительно равны 0. по предположению индукции

$$r'(x) = \tilde{\alpha}(x - x_0)^k,$$

где $\tilde{\alpha} \to 0$ при $x \to x_0$. Так как к функции *r(x)* применима теорема Лагранжа, то найдется точка $c, |c - x_0| < |x - x_0|$, такая, что

$$r(x) = r'(c)(x - x_0) \quad (\text{т.к. } r(x_0) = 0).$$

Тогда

$$r(x) = \tilde{\alpha}(c - x_0)^k (x - x_0) = \tilde{\alpha}(x - x_0)^{k+1},$$

где

$$\alpha = \tilde{\alpha}\frac{(c - x_0)^k}{(x - x_0)^k} = \tilde{\alpha}\left(\frac{c - x_0}{x - x_0}\right)^k.$$

Так как $\tilde{\alpha} \to 0$ при $x \to x_0$ и $|c - x_0| < |x - x_0|$ то $\alpha$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция *f(x)n* раз дифференцируема в точке $x_0$, то имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x - x_0)^n \qquad (1)$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Положим

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Функция *r(x)*, очевидно, *n* раз дифференцируема в точке $x_0$, причем

$$r'(x) = f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 1!)}(x - x_0)^{n-1},$$

$$r''(x) = f''(x) - f''(x_0) - .. - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 2!)}(x - x_0)^{n-2},$$

……………………………………………………………………

$$r^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x - x_0),$$

$$r^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0).$$

Тогда

$$r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n-1)}(x_0) = r^{(n)}(x_0) = 0.$$

Следовательно, $r(x) = \alpha(x - x_0)^n$, где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$.

***Замечание.*** Равенство (1) носит название формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Если $x_0 = 0$, то равенство (1) примет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{1!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\alpha x^n,$$

где $\alpha\to 0$ при $x\to 0$.

Например, имеет место равенство

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\alpha\cdot x^n,$$

где $\alpha\to 0$ при $x\to 0$.

**Задачи для размышления:**

1. Найти $y''$, если

а) $y=\sqrt{1+2x}$; б) $y=xe^{x^2}$; в) $y=\sin^2 3x$; г) $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$;

2. Доказать, что функция $y=\frac{1}{2}x^2e^x$ удовлетворяет уравнению

$y''-2y'+y=e^x$.

3.Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & если \quad x=0 \\ 0, & если \quad x=0 \end{cases}$$

дважды дифференцируема в любой точке.

4. Найти $y'''$, если:

а) $y=\ln(1+2x)$; б) $y=e^{-x^2}$; в) $y=x^3\sin\frac{x}{2}$; г) $y=\frac{x^2}{1-x}$.

5. Найти $f(0), f'(0), f''(0)$, если $f(x)=e^x\sin x$.

6. Найти $y^{(n)}$, если:

а) $y=x^\alpha$; б) $y=\frac{1}{1+2x}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; г) $y=\sin^2 2x$;

д) $y=\frac{1}{x(1-x)}$; е) $y=\frac{1+x}{1-x}$.

7. Найти $f^{(n)}(a)$, если $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $n$-$1$-го порядка в окрестности точки $a$.

8. Написать три первых членов формулы Тейлора ($x_0=0$) для функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=tgx$; б) $f(x)=arctg2x$; в) $f(x)=\ln(1+x^2)$.

9. Записать формулу Тейлора ($x_0=0$) с остаточным членом в форме Пеано, если:

а) $f(x=\sin x)$; б) $f(x)=\cos x$;

в) $f(x)=\ln(1+x)$; г) $f(x)=(1+x)^\alpha$.

## Лекция № 31. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

### П Л А Н

**1. Формула Тейлора.**
**2. Формула Маклорена.**
**3. Задачи.**

**Определение 1.** Если функция *f(x)n* раз дифференцируема в точке $x_0$, то имеет место формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x - x_0)^n,$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$. Значит, в достаточно малой окрестности точки $x_0$ функцию *f(x)* можно считать приближенно равной многочлену

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Чтобы оценить погрешность. Возникающую в таком равенстве, можно использовать следующую теорему.

**Теорема .** Если функция *f(x)* дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x_0$, то в этой окрестности имеет место равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}, \tag{1}$$

где $0 < \Theta < 1$.

**Доказательство.** Пусть

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Достаточно доказать, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Рассмотрим вспомогательную функции

$$\varphi(t) = f(t) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(t - x_0) - ... - \frac{f^n(x_0)}{n!}(t - x_0)^n -$$
$$- \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}} \cdot r_n(x).$$

Так как функция *f(x)* дифференцируема $n+1$ раз в окрестности точки $x_0$, то и функция $\varphi(t)$ дифференцируема $n+1$ раз в этой окрестности. При этом

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(t-x_0)^{n-1} - \frac{(n+1)(t-x_0)^n}{(x-x_0)^{n+1}} r_n(x),$$

$$\varphi''(t) = f''(t) - f''(x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(t-x_0)^{n-2} - \frac{n(n+1)(t-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n+1}} r_n(x),$$

…………………………………………………………………………..

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot r_n(x).$$

Для определения будем считать, что $x>x_0$. Тогда функция $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[x,x_0]$, дифференцируема на интервале $]x_0,x[$ и $\varphi(x_0)=\varphi(x)=0$. По теореме Роля найдется точка $c_1 \in ]x_0,x[$ такая, что $\varphi'(c_1)=0$.

Так как функция $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[x_0,c_1]$, дифференцируема внутри интервала $]x_0,c_1[$ и $\varphi'(x_0)=\varphi'(c_1)=0$, то найдется точка $c_2 \in ]x_0,c_1[$ такая, что $\varphi''(c_2)=0$.

Продолжая эти рассуждения, установим, что существуют точки

$$c_1 \in ]x_0,x[,\ c_2 \in ]x_0,c_1[,\ldots,c_n \in ]x_0,c_{n-1}[,\ c_{n+1} \in ]x_0,c_n[,$$

такие, что $\varphi'(c_1)=0, \varphi''(c_2)=0,\ldots,\varphi^{(n)}(c_n)=0,\ \varphi^{(n+1)}(c_{n+1})=0$.

Тогда

$$f^{(n+1)}(c_{n+1}) - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} r_n(x) = 0.$$

Следовательно,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Так как $c_{n+1} \in ]x_0,x[$, то $c_{n+1} = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$.

Теорема доказана.

**Определение 2.** Равенство (1) носит название формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если $x_0=0$, то формула Тейлора имеет следующий вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

и называется формулой Маклорена.

***Примеры.***

1)функция $f(x)=e^x$ дифференцируема сколь угодно много раз в любой точке, причем

$$f^{(n)}(x)=e^x, \quad f^{(n)}(0)=1, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Следовательно,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} \cdot (x^{n+1}) \quad 0<\theta<1.$$

2)функция $f(x)=\sin x$ дифференцируема сколь угодно много раз в любой точке. Так как $\sin^{(n)} x=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$t^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad n=2m;\\ (-1), & \text{если}\ n=2m-1\end{cases}$$

Тогда

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{5!}-...+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin(\Theta x+m\pi)}{(2m)!}x^{2m},$$

$0<\theta<1$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа часто используется для приближенных вычислений.

***Пример.*** Чтобы вычислить $\sqrt{e}$ с точностью 0,001 воспользуемся равенством

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\cdot(x^{n+1}),\quad 0<\theta<1.$$

При $x=\frac{1}{2}$ получим

$$\sqrt{e}=\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+...+\frac{1}{2^n\cdot n!}+\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

Выберем $n$ так, чтобы

$$\frac{e^{\Theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!}<\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{1}{2^n(n+1)!}<0{,}001.$$

Для обеспечения нужной точности достаточно взять $n=4$. Тогда

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}$$

**Задачи для размышления:**

1. Разложить функция *f(x)* по степеням *x* до члена, содержащего $x^k$, если:

   а) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $k=5$ б) $f(x)=tgx$, $k=3$;

   в) $f(x)=\ln\cos x$, $k=4$.

2. Разложить функцию *f(x)* по степеням $x-x_0$ до члена, содержащего $(x-x_0)^k$, если:

   а) $f(x)=\ln x, x_0=1$, $k=2$; б) $f(x)=e^x$, $x_0=-1$, $k=4$;

3. Разложить функцию $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-6x+1$ по степеням *x-1*.

4. Записать формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции *f(x)*, если:

   а) $f(x)=\cos x$; б) $f(x)=\ln(1+x)$; в) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

5. Оценить погрешность формулы $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$.

6. Для каких значений $x$ приближенное равенство $\sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ имеет погрешность меньшую 0,002?

7. Вычислить с точностью 0,001:

а) $\sqrt[4]{19}$;  б) $\sqrt[3]{e^2}$;  в) $\ln 1{,}2$

8. Оценить погрешность приближенных равенств:

а) $tg = x + \frac{x^3}{3}$, при $|x| \le 0{,}1$

б) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, при $0 \le x \le 1$.

## Лекция № 32. Частные производные высших порядков функций нескольких переменных.

### П Л А Н

**1. Частные производные высших порядков.**
**2. Теорема.**
**3. Задачи.**

Предположим, что функция $f(x_1, x_2, ...., x_n)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_l}$ $(i = 1,2,...,n)$ в каждой точке некоторой окрестности точки $M_0$.

**<u>Определение 1</u>.** Если в точке $M_0$ существует частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_l}$ по переменному $x_k (k = 1,2,...,n)$, то эта производная называется частной производной второго порядка функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменным $x_k$ и $x_l$ и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(M_0)$.

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right).$$

Если $k \ne l$, то частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$ называют смешанной частной производной. Производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}$ обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

***Пример.*** Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^y$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1};\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=x^{y-1}+yx^{y-1}\cdot\ln x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=x^y(\ln x)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=y\,x^{y-1}\cdot\ln x+x^{y-1}.$$

Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}$ $(k=1,2,...,n;\ l=1,2,...,n)$ в некоторой окрестности точки $M_0$.

**<u>Определение 2.</u>** Если в точке $M_0$ существует частная производная функция $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}$ по переменному $x_i$ $(i=1,2,...,n)$, то эта производная называется частной производной третьего порядка функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменных $x_i,x_k$ и $x_l$ и обозначается

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}\right).$$

Аналогичным образом определяется частные производные четвертного, пятого и т.д. порядков. Частную производную $m$- го порядка функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменным $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m}$ обозначают

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{1_1}\partial x_{i_2},...,\partial x_{i_m}}$$

По определению

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2},...,\partial_{i\,m}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial_{i_m}}\right).$$

***Пример.*** Если $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2\cdot x}{z}$, то

$$\Delta f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\,.$$

где $\alpha\to 0$ $(i=1,2,...,n)$ при $\Delta x_1\to 0,\Delta x_2\to 0,...,\Delta x_n\to 0$.

**Определение 3.** Функция *f(M)* называется *m* раз ($m\geq 2$) дифференцируемой в точке $M_0$, если в некоторой окрестности точки $M_0$ существуют частные производные *m-1*-го порядка этой функции и все они дифференцируемы в самой точке $M_0$.

### *Свойства m раз дифференцируемых функций.*

**1.**Если функция *f(M) m* раз дифференцируема в точке $M_0$, то она имеет в этой точке все частные производные *m*- го порядка.

Если функция *f(M) m* раз дифференцируема в точке $M_0$, то в некоторой окрестности точки $M_0$ существуют все частные производные *m-1*-го порядка и они дифференцируемы в самой точке $M_0$. Так как функция

$$\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_2}....\partial x_{i_m}}$$

дифференцируема в точке $M_0$, то в точке $M_0$ существуют все частные производные этой функции. Следовательно, в точке $M_0$ существуют частные производные *m*- го порядка, так как

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2},...,\partial x_{i_m}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial_{i_2}....\partial x_{i_m}}\right).$$

**2.**Если функция *f(M)* имеет две частные производные *m*-го порядка в некоторой окрестности точки $M_0$, которые непрерывны в самой точке $M_0$, то она *m* раз дифференцируема в этой точке.

**Доказательство.** Функция $\dfrac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_2}....\partial x_{i_m}}$ определена в окрестности точки $M_0$ , имеет в этой окрестности все частные производные, которые непрерывны в самой точке $M_0$. Таким образом, все частные производные *m-1* –го порядка функции *f(M)* дифференцируемы в точке $M_0$. Следовательно, сама функция *f(M)m* раз дифференцируема в этой точке.

3.Если функция *f(M) m* раз дифференцируема в точке $M_0$, то она в этой точке дифференцируема и любое меньшее число раз.

Действительно, если функция *f(M) m* раз дифференцируема в точке $M_0$, то все ее частные производные *m-1*-го порядка дифференцируемы в точке $M_0$. Следовательно, все эти частные производные *m-1*-го порядка существуют в некоторой окрестности точки $M_0$ и непрерывны в самой точке $M_0$. По свойству 2 функция *f(M)* дифференцируема *m-1* раз в точке $M_0$.

**Теорема.** Пусть функция *r(M)* *m* раз дифференцируема в точке $M_0 \in R^n$. Если в точке $M_0$ сама функция *r(M)*, а также все ее частые производные до *m*-го порядка включительно, равны 0, то

$$r(M) = \lambda(\rho(M_0, M))^m,$$

где $\lambda \to 0$ при $M \to M_0$.

**Доказательство.** Доказательство будем вести методом математической индукции.

Основание индукции (*m-1*). Если функция *r(M)* дифференцируема в точке $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, то

$$r(x_1^0 + \Delta x_1, ...., x_n^0 + \Delta x_n) - r(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_i}(M_0) \cdot \Delta x_i + \alpha \cdot \rho,$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ....(\Delta x_i)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, ...., \Delta x_i \to 0, ....$ $...\Delta x_n \to 0$.

По условию, $r(M_0) = 0,\ \frac{\partial r}{\partial x_i}(M_0) = 0,\ i = 1,2, ...$ Значит

$$r\left(x_1^0 + \Delta x_1, ...., x_n^0 + \Delta x_n\right) = \lambda \cdot \rho.$$

Положим $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. Тогда

$$r(M) = \lambda \cdot \rho(M_0, M),$$

где $\lambda \to 0$ при $M \to M_0$.

Предположим, что утверждение теоремы уже доказано для *m=k* и докажем его для *m=k+1*.

Пусть в точке $M_0$ сама функция *r(M)*, а также все ее частные производные до *k+1*-го порядка, включительно, равны 0. Тогда в точке $M_0$ функция $\frac{\partial r}{\partial x_i}$, а также все ее производные до *k*- го порядка включительно, равны 0. По предположению индукции

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(M) = \lambda_i(\rho M_0, M)^k, \quad i = 1,2, ..., n,$$

где $\lambda \to 0$ при $M \to M_0$.

К функции *r(M)* в окрестности точки $M_0$ применима теорема Лагранжа. Следовательно, найдется точка $P \in [M_0, M], P \neq M_0,\ P \neq M$ такая, что

$$r(M) = grad\ r\Big|_P \cdot \overrightarrow{M_0 M} \qquad (r(M_0) = 0).$$

Так как

$$grad\ r\Big|_P = \left\{\frac{\partial r}{\partial x_1}(p), ...., \frac{\partial r}{\partial x_n}(p)\right\} =$$

$$\{\lambda_1, ...., \lambda_n\} \cdot (\rho(M_0, P))^k = \overline{\Lambda} \cdot (\rho(M_0, M))^k,$$

то

$$r(M)=(\rho(M_0,P))^k\cdot(\Lambda\cdot M_0\overrightarrow{M})=$$
$$=(\rho(M_0,P))^k\cdot|\Lambda|\cdot|\overrightarrow{M_0M}|\cdot\cos\left(\overrightarrow{\Lambda,M_0M}\right)=$$
$$=(\rho(M_0,P))^{k+1}\cdot|\Lambda|\cos(\overrightarrow{\Lambda,M_0,M})\cdot(\rho(M_0,P))^k/(\rho(M_0,P))^k=$$
$$\lambda\cdot(\rho(M_0,M))^{k+1}.$$

где $\lambda\cdot|\Lambda|\cdot\cos(\Lambda,\overrightarrow{M_0,M})\cdot(\rho(M_0,P)/\rho(M_0,M))^k$.

Если $M\to M_0$, то $|\Lambda|=\sqrt{\lambda_1^2+...+\lambda_n^2}\to 0$ причем

$|\cos(\widehat{\Lambda,\overrightarrow{M_0M}})|\le 1, \rho(M_0,P)\le\rho(M_0,M)$.

Следовательно, $\lambda\to 0$ при $M\to M_0$.

Теорема доказана.

***Следствие.*** Если функция *f(M)* *m* раз дифференцируема в точке $M_0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, то имеет место равенство

$$f(M)=f(M_0)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)(x_i-x_i^0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)+...+$$
$$+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,i_2,...,i_m-1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2},....,\partial x_{i_m}}(M_0)(x_{i_1}-x_{i_1}^0)(x_{i_2}-x_{i_2}^0)...(x_{i_m}-x_{i_m}^0)+$$
$$+\lambda\cdot(\rho(M_0,M))^m,$$

где $\lambda\to 0$ при $M\to M_0$.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$r(M)=f(M)-f(M_0)-\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)(x_i-x_i^0)-$$
$$-\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)-...-$$
$$-\frac{1}{m!}\sum_{i_1,i_2,...,i_m-1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2},....,\partial x_{i_m}}(M_0)(x_{i_1}-x_{i_1}^0)(x_{i_2}-x_{i_2}^0)...(x_{i_m}-x_{i_m}^0).$$

Нетрудно проверить, что сама функция *r(M)*, а также все ее частные производные до *m*-го порядка включительно, в точке $M_0$ обращаются в 0. Тогда

$$r(M)=\lambda[\rho(M_0,M)]^m,$$

где $\lambda\to 0$ при $M\to M_0$.

Равенство, приведенное в следствии, называется формулой Тейлора для функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано.

**Задачи для размышления:**

1. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

   а) $f(x,y)=2x^3+3y^4+x^5y^6$; б) $f(x,y,z)=2xy^2z+\dfrac{x}{y^2z^3}$;

   в) $f(x,y)=\cos^2(xy)$; г) $f(x,y)=x^{y^2}$;

   д) $f(x,y,z)=arctg\dfrac{y}{zx}$; е) $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y^2z^3}\right)^z$.

2. Найти частные производные:

   а) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}$, если $f(x,y)=\sin(x^2y)$;

   б) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$, если $f(x,y,z)=e^{xy^2z}$;

   в) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^6\partial y^4}$, если $f(x,y)=\sin 2x\cdot\cos 3y$;

   г) $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x\,\partial y^7}$, если $f(x,y)=(x^2+y)^{10}\cdot tgx$;

   д) $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}$, если $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=f(u,v)$, где $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

4. Показать, что функция $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ удовлетворяет уравнению: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5. Показать, что функция $z=x\cdot\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

6. Показать, что функция $u=f(x+f(y))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

7. Разложить функцию *f(x,y)* по формуле Тейлора с центром в точке $M_0$ до членов второго порядка:

   а) $f(x,y)=\sqrt{1-x-y}$; $M_0(0,0)$;

   б) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$; $M_0(0,0)$;

   в) $f(x,y)=(x+y)\sin(x-y)$; $M_0(0,0)$;

г) $f(x,y) = e^x \cdot \cos y;$ $M_0(0, \pi/2);$

д) $f(x,y) = x^y;$ $M_0(1,1).$ \

## Лекция № 33. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

### П Л А Н

1. **Достаточное условие экстремума.**
2. **Теорема.**
3. **Задачи.**

Пусть функция *f(M)* дважды дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Тогда в точке $M_0$ существуют все частные производные второго порядка этой функции и можно рассмотреть квадратичную функцию

$$\Phi(P) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) l_i \cdot l_j ,$$

где $P(l_1, l_2, ..., l_n) \in R^n$.

**Определение.** Квадратичную функцию Ф(Р) называют положительно (отрицательно) определений, если она принимает положительные (отрицательные) значения во всех пространствах $R^n$, кроме точки $P_0(0,\ldots,0)$.

Функция $f(M) = x^3 + x^2 y + y^3$ дважды дифференцируема в точке $M_0(1,1)$. Так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y ,$$

то $\Phi(P) = 8l_1^2 + 4l_1 l_2 + 6l_2^2$.

Тогда

$$\Phi(P) = 8\left(l_2^2 + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{16}\right) - \frac{l_2^2}{2} + 6l_2^2 = 8\left(l_1 + \frac{l_2}{4}\right)^2 + \frac{11}{2} l_2^2 .$$

Следовательно, во всех точках пространства $R^2$ функция Ф(Р) принимает неотрицательные значения. Если Ф(Р)=0, то, очевидно, что $l_1 = l_2 = 0$. Значит, функция Ф(Р) является положительно определенной.

***Лемма.*** Пусть $S = \{P(l_1, l_2, ..., l_n) \in R^n \mid l_1^2 + l_2^2 + ... + l_n^2 = 1\}$. Если квадратичная функция Ф(Р), $P \in R^n$ положительно (отрицательно) определена, то существует число $m>0$, такое, что при всех $P \in S$ выполняется неравенство

$$\Phi(P) \geq m \quad (\Phi(P) \leq -m).$$

**Доказательство.** Квадратичная функция непрерывна на всем пространстве $R^n$ и, в частности, непрерывна на множестве $S$. Так как множество $S$ ограничено и замкнуто, то квадратичная функция Ф(Р) достигает на этом множестве своей точной нижней грани.

Пусть $m = \lim_{P \in S} \Phi(P)$ и $\Phi(\overline{P}) = m, \quad \overline{P} \in S$.

Тогда для всех точек $P \in S$ выполняется неравенство $\Phi(P) \geq m$. Так как $P_0(0,...0) \notin S$, то $\overline{P} \neq P_0$.

Значит, если функция Ф(Р) положительно определена, то $m = \Phi(\overline{P}) > 0$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Известно, что если $M_0$ является точкой экстремума функции $f(M)$, а функция $f(M)$ дифференцируема в этой точке, то $M_0$ – стационарная точка функции $f(M)$ (т.е. $grad\ f\big|_{M_0} = \theta$).

Однако, стационарная точка функции $f(M)$ не обязана быть точкой экстремума этой функции.

Чтобы выяснить, является ли данная стационарная точка функции $f(M)$ точкой экстремума этой функции, часто используется следующая теорема.

**Теорема.** Пусть функция $f(M)$ дважды дифференцируема в точке $M_0 \in R^n$, которая является стационарной точкой этой функции. Тогда:

1)если квадратичная функция

$$\Phi(P) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) l_i l_j$$

положительно (отрицательно) определена, то $M_0$ – точка локального минимума (максимума) функции $f(M)$;

2)если квадратичная функция Ф(Р) принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $M_0$ не является точкой экстремума функции $f(M)$.

**Доказательство.** Для функции $f(M)$, дважды дифференцируемой в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, формула Тейлора имеет следующий вид:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{i=1}^{b} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)(x_i - x_i^0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i,j=t}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \lambda \cdot \rho^2,$$

где $\rho = \rho(M_0, M)$, $\lambda \to 0$ при $M \to M_0$. Так как $M_0$ – стационарная точка функции $f(M)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Тогда, если $\rho \neq 0$, то

$$f(M) = f(M_0) + \rho^2 / 2! \cdot \left[ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \times \right.$$

$$\left. \times (x_i - x_i^0)/\rho \cdot (x_j - x_j^0)/\rho + 2\lambda \right] \qquad (1)$$

Предположим, что квадратичная функция

$$\Phi(P)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)l_i l_j$$

положительно определена. Заметим, что

$$\left((x_1-x_1^0)/\rho\right)^2+....\left((x_i-x_i^0)/\rho\right)^2+...+\left((x_n-x_n^0)/\rho\right)^2=1.$$

Тогда, по лемме, найдется число *m>0* такое, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\cdot(x_i-x_i^0)/\rho\cdot(x_j-x_j^0)/\rho\geq m.$$

Так как $\lambda\to 0$ при $M\to M_0$, то найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M\in S_\delta(M_0),\quad M\neq M_0$, выполняется неравенство

$$m+2\lambda>0.$$

Из равенства (1) следует, что для всех точек $M\in S_\delta(M_0)$, $M\neq M_0$, выполняется неравенство

$$f(M)>f(M_0),$$

т.е. $M_0$ – точка локального минимума функции *f(M)*.

Случай, когда квадратичная функция Ф(Р) отрицательно определена, рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что квадратичная функция

$$\Phi(P)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)l_i l_j$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения причем

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)l_i'\cdot l_j'>0,\quad \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)l_i''\cdot l_j''<0.$$

Рассмотрим точку $M_t'(x_1^0+tl_1',...,x_n^0+t\,l_n')$. Тогда

$$f(M_t')=f(M_0)+\frac{t^2}{2!}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)l_i'\,l_j'+\right.$$
$$\left.+2\lambda\left((l_i')^2+....+(l_n')^2\right)\right].$$

Если $t\to 0$, то $M_t'\to M_0$, и, следовательно, $\lambda\to 0$. Значит, для всех достаточно малых значений *t>0*, выполняется неравенство

$$f(M_t')>f(M_0),$$

т.е. $M_0$ не является точкой локального максимума функции *f(M)*.

Аналогично, рассмотрев точку

$$M_t''(x_1^0+t\cdot l_1'',...,x_n^0+t\cdot l_n'')$$

можно убедиться, что $M_0$ не является и точкой локального минимума этой функции. Теорема доказана.

***Следствие.*** Пусть функция *f(x)* дважды дифференцируема в точке $x_0\in R$, которая является стационарной точкой этой функции.

Если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то $x_0$ – точка локального минимума (максимума) функции *f(x)*.

Это утверждение сразу же вытекает из доказанной теоремы, так как для функции одного переменного квадратичная функция

$$\Phi(P) = f''(x_0) \cdot l_1^2.$$

Рассмотрим функцию

$$f(M) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^3}{3} - 2y.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + y^2 - 2,$$

то $M_1(1,-1)$ и $M_2(-2,2)$ – стационарные точки функции *f(M)*.

Функция *f(M)* дважды дифференцируема в любой точке пространства $R^2$, причем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y /$$

Тогда

$$\Phi_1(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_1) \cdot l_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(M_1) \cdot l_1 l_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_1) \cdot l_2^2 =$$

$$= l_1^2 + 2l_1 l_2 - 2l_2^2 = (l_1 + l_2)^2 - 3l_2^2.$$

Так как функция $\Phi_1$(P), очевидно, принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $M_1$ (1,-1) точкой экстремума функции *f(M)* не является.

С другой стороны,

$$\Phi_2(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_2) \cdot l_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(M_2) \cdot l_1 l_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_1) \cdot l_2^2 =$$

$$= l_1^2 + 2l_1 l_2 + 4l_2^2 = (l_1 + l_2)^2 + 3l_2^2.$$

Следовательно, $M_2$ (2,-2) является точкой локального минимума функции *f(M)*, так как $\Phi_2$(P) положительно определена.

**Задачи для размышления:**

Найти точки экстремума:

1) $f(M) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2;$
2) $f(M) = x^3 - y^3 - 12x + 3y;$
3) $f(M) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y};$
4) $f(M) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2);$
5) $f(M) = e^{x^2 y}(5 - 2x + y);$
6) $f(M) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$

7) $f(M) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;$

8) $f(M) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z;$

9) $f(M) = xy^2z^3(2 - x - 2y - 3z);$

10) $f(M) = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)};$

11) $f(M) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z};$

12) $f(M) = 2 \cdot \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$

## Лекция № 34. Глобальные экстремумы функций.

### П Л А Н

**1. Глобальные экстремумы функций.**
**2. Теорема.**
**3. Задачи.**

Пусть функция *f(M)* определена на множестве $V, V \subset R^n$.

**Определение 1.** Точка $M_0 \in V$ называется точкой глобального максимума (минимума) функции *f(M)* на множестве *V*, если для всех точек $M \in V$ выполняется неравенство

$$f(M) \leq f(M_0) \;\; (f(M) \geq f(M_0)).$$

Точки глобального максимума и точки глобального минимума функции *f(M)* на множестве *V* называются точками глобального экстремума этой функции на множестве *V*.

Например, $M_0(0,0)$ является точкой глобального минимума функции $f(M) = x_1^2 + x_2^2$ на всем пространстве $R^n$, так как

$$f(M) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0 = f(M_0)$$

### ***Простейшие свойства глобальных экстремумов функций.***

**1.** $M_0 \in V$ является точкой глобального максимума (минимума) функции *f(M)* на множестве *V* тогда и только тогда, когда

$$f(M_0) = \sup_V f(M) \quad (f(M_0) = \inf_V (M)).$$

**2.** Если функция *f(M)* непрерывна на ограниченном замкнутом множестве *V*, то существуют: точка глобального максимума и глобального минимума этой функции на множестве *V*.

Действительно, если функция *f(M)* непрерывна на ограниченном замкнутом множестве *V*, то она на этом множестве достигает своих точной верхней и точной нижней граней. Точка, в которой достигается

$\sup\limits_V f(M)$ $\left(\inf\limits_V f(M)\right)$ является точкой глобального максимума (минимума) функции на множестве *V*.

***Следствие.*** Пусть функции $f_i(M),\ i \in I$ непрерывна на всем пространстве $R^n,\ K \subset I$, а множество

$$\Omega = \{M \in R^n \mid f_i(M) = 0,\ i \in K,\ \ f_i(M) \le 0,\ i \in I \setminus K\}$$

ограничено. Если функция $\varphi(M)$ непрерывна на множества $\Omega$, то она на этом множестве имеет: точку глобального максимума и точку глобального минимума.

**3.**Если $M_0$ – точка глобального максимума (минимума) функции *f(M)* на множестве *V*, то либо $M_0$ является точкой локального максимума (минимума) этой функции, либо она принадлежит границе множества *V*.

Например, точка $M_0$ (0,0) является точкой глобального минимума функции $f(M) = x_1 + x_2$ на множестве

$$\Omega = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \mid \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\}.$$

Однако, эта точка не является точкой локального минимума функции *f(M)*.

***Следствие.*** Пусть функция *f(M)* дифференцируема на множестве *V*. Если $M_0$ – точка глобального экстремума функции *f(M)* на множестве *V*, то либо $M_0$ является стационарной точкой этой функции, либо она принадлежит границе множества *V*.

Предположим, что функция *f(M)* непрерывна на ограниченном замкнутом множестве *V*.

Найдем все точки множества *V*, в которой функция *f(M)* не дифференцируема, а также все стационарные точки этой функции, принадлежащие множеству *V*.

В этом случае, чтобы найти глобального экстремума функции *f(M)* на множестве *V*, достаточно сравнить значения функции *f(M)* во всех найденных точках с ее значениями на границе множества *V*.

### *Примеры*

1)функция $f(x) = |x^2 - 9x|$ непрерывна на отрезке [-2,2] и дифференцируема во всех точках этого отрезка, за исключением точки $x_1 = 0$. Так как

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9, & \text{если} \quad x \in ]0,2[; \\ 9 - 3x^2, & \text{если} \quad x \in [-2,0[, \end{cases}$$

то $x_2 = -\sqrt{3}$ и $x_3 = \sqrt{3}$ - стационарные точки функции *f(x)*. Вычислив значения функции *f(x)* во всех найденных точках: $x_1$, $x_2$ и $x_3$, а также на концах отрезка [-2,2], получим

$$f(x_1) = 0,\ \ f(x_2) = f(x_1) = 6\sqrt{3},\quad f(-2) = f(2) = 10.$$

Следовательно, $x_1=0$ - точка глобального минимума функции $f(x)$ на отрезке [-2,2], а $x_2=-\sqrt{3}$ и $x_3=\sqrt{3}$ - точки глобального максимума, причем

$$\max_{[-2,2]} f(x)=6\sqrt{3}, \qquad \min_{[-2,2]} f(x)=0;$$

2)функция $f(M)=x^2+y^2-2x-4y$ дифференцируема на всем пространстве $R^2$ и, в частности, дифференцируема на множестве

$$\Omega=\{M(x,y)\in R^2 \mid x+y\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

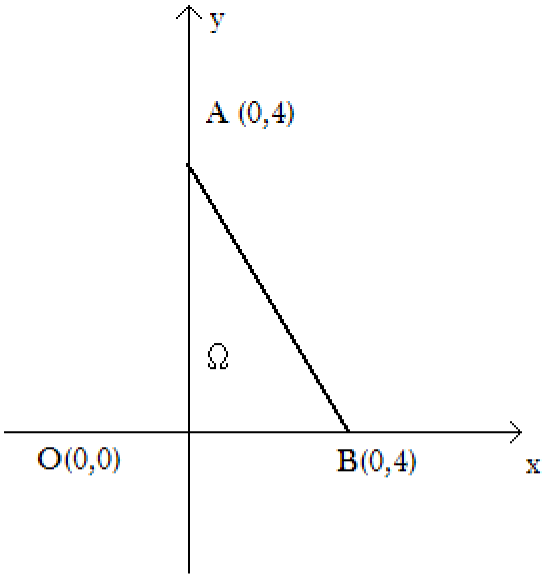



рис. 4.11

Так как $grad\ f=(2x-2,2y-4)$, то функция $f(M)$ имеет единственную стационарную точку $M_1(1,2)$, причем $M_1\in\Omega$.

Если $M(x,y)\in[O,A]$, то $x=0,\ 0\le y\le 4$. В этом случае, $f(M)=f_1(y)=y^2-4y$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $f(M)$ на отрезке [O,A] могут достигаться лишь в точках:

$$M_2(0,2),\ O(0,0),\ \ A(0,4).$$

Аналогично устанавливается, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(M)$ на отрезке [O,B] могут быть только в точках

$$M_3(1,0),\ O(0,0),\ \ B(4,0).$$

Наконец, если $M(x,y)\in[A,B]$, то $0\le x\le 4,\ \ y=4-x$. В этом случае

$$f(M)=x^2+(4-x)^2-2x-4(4-x)=2x^2-6x.$$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(M)$ на отрезке $[A,B]$, достаточно рассмотреть точки

$$M_4\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\ \ A(0,4),\ \ B(4,0).$$

Значения функции $f(M)$ во всех найденных точках приведены в таблице

Таблица 1.

| $M$ | $M_1(1,2)$ | $M_2(0,2)$ | $M_3(1,0)$ | $M_4\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ | $O(0,0)$ | $A(0,4)$ | $B(4,0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(M)$ | -5 | -4 | -1 | -4,5 | 0 | 0 | 8 |

Следовательно, $M_1$ (1,2) – точка глобального минимума функции $f(M)$ на множестве $\Omega$ и $\min\limits_{\Omega} f(M)M = -5$, в $B(4,0)$ – точка глобального максимума, причем, $\max\limits_{\Omega} f(M) = 8$.

Пусть $V$ – некоторое множество в $n$-мерном пространстве $R^n$, $P \in R^n$. Тогда на множестве $V$ определена функция

$$f(M) = \rho(M,P).$$

**<u>Определение 2</u>.** Точка глобального минимума функции

$$f(M) = \rho(M,P)$$

на множестве $V$ называется проекцией точки $P$ на это множество.

Таким образом, точка $M_0 \in V$ является проекцией точки $P$ на множестве $V$ тогда и только тогда, когда для всех точек $M \in V$ выполняется неравенство

$$\rho(M_0,P) \le \rho(M,P).$$

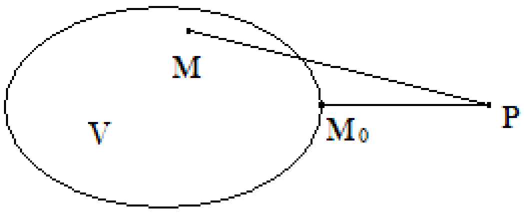



рис. 4.12

**Теорема.** Если $V$ – непустое, замкнутое множество в пространстве $R^n$, то любая точка пространства $R^n$ имеет проекцию на это множество.

**Доказательство.** Рассмотрим точку $P\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in R^n$. Так как множество $V \neq \varnothing$, то существует число $d>0$ такое, что множество $V' = V \cap \{M \in R^n \mid \rho(M,P) \le d\} \neq \varnothing$.

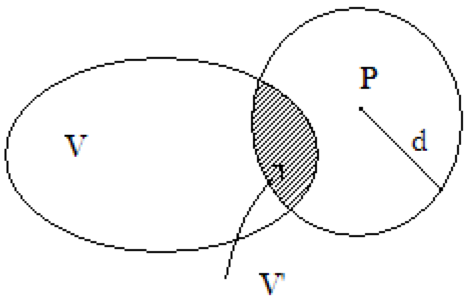



рис. 4.13

Множество $V'$, очевидно, является замкнутым и ограниченным. Следовательно, непрерывная на всем пространстве $R^n$, функция

$$f(M)=\rho(M,P)=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2}$$

имеет на множестве $V'$ точку глобального минимума.

Если $M_0$ – точка глобального минимума функции $f(M)$ на множестве $V$, то она является точкой глобального минимума этой функции и на множестве $V$. Значит, $M_0$ – проекция точки $P$ на множестве $V$. Теорема доказана.

**Задачи для размышления:**

1. Найти точки глобального экстремума функции на отрезке:

   а) $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}, \quad (-2,1)$;

   б) $f(x)=2\sin 2x+\cos 4x, \quad \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$;

   в) $f(x)=2\cdot 2^{3x}-9\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x, \quad [-1,1]$;

   г) $f(x)=|x^4-8x^2+5|, \quad \left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$;

2. Найти точку глобального максимума функции $f(x)=e^{-(x^2-2x)}$, на интервале $[0,+\infty[$.

3.Найти точки глобального экстремума функции на множестве:

а) $f(M)=4x+10y-x^2-y^2, \quad V=\{M(x,y)\in R^2 \mid 2x+3y\le 6,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$,

б) $f(M)=x^2y^2-4x^2-8y, \quad V=\{M(x,y)\in R^2 \mid |x|\le 4,\ 0\le y\le 2\}$;

в) $f(M)=xy-x^2y-\frac{xy^2}{2}; V=\{M(x,y)\in R^n \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$;

г) $f(M)=x^2-xy+y^2; V=\{M(x,y)\in R^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$;

д) $f(M)=x^2+2y^2+3z^2; V=\{M(x,y)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 100\}$.

4. Доказать, что функция $f(M)=x^2+2xy-2y^2$ не имеет точек глобального экстремума на всем пространстве $R^2$.

5. Найти проекцию точки на множество:

   а) $P(2,1/2),\ V=\{M(x,y)\in R^2 \mid y\ge x^2\}$;

   б) $P(11,0),\ V=\{M(x,y)\in R^2 \mid y\ge x^4+x\}$;

6. В полу шар радиуса $R$ вписать прямоугольный параллелепипед наименьшего объема.

7. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости $a$ имеет наименьшую поверхность?

## Лекция № 35. Обобщенное свойство градиента функции.

### П Л А Н

1. **Обобщенное свойство градиента функции.**
2. **Примеры.**

Пусть функции $f(M),\ i\in I,\ I=\{1,2,...,l\}$, непрерывная на всем пространстве $R^n$. В этом случае, для любой точки $M_0\in R^n$ можно определить множество

$$f(M_0)=\{i\in I\mid\ f_i(M_0)=0\}.$$

Рассмотрим замкнутое множество

$$\Omega=\{M\in R^n\mid\ f_i(M)\le 0,\ i\in I\}.$$

На основании свойств функций, непрерывных на всем пространстве, можно утверждать, что:

1)если точка $M_0$ принадлежит множеству $\Omega$ и $I(M_0)=\varnothing$, то $M_0$ – внутренняя точка этого множества;

2)если же $M_0$ – граничная точка множества, то $I(M_0)=\varnothing$.

Известно, что аффинная функция всегда непрерывна на всем пространстве. Поэтому среди функций $f_i(M),\ i\in I$, могут встретиться и аффинные функции.

Предположим, что $f_i(M)$ является аффинной функцией, если $i\in I_a$, где $I_a\subset I$.

***Пример.*** Рассмотрим множество

$$\Omega=\{M(x,y)\in R^2\mid\ f_i(M)\le 0,\ i=1,2,3\},$$

где $f_1(M)=x^2+y^2-8,\quad f_2(M)=1-x-y,\quad f_3(M)=y-2$.

В данном случае, $I=\{1,2,3\},\ I_a=\{2,3\}$.

Точка $P(1,1)$ принадлежит множеству $\Omega$, $I(P)=\varnothing$, так как

$$f_1(P)=-6<0,\quad f_2(P)=-1<0,\quad f_3(P)=-1<0.$$

С другой стороны, точка $Q(2,2)$ также принадлежит множеству $\Omega$. Однако, $I(Q)=\{1,3\}$, так как

$$f_1(Q)=0,\ f_2(Q)=-3<0,\ f_3(Q)=0.$$

**Теорема.** Пусть точка $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ принадлежит множеству $\Omega]\{M\in R^n\mid\ f_i(M)\le 0,\ i\in I\}$, а $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ - некоторый $n$-мерный вектор. Предположим, что все функции $f_i(M),\ i\in I$ и функция $\varphi(M)$ дифференцируемы в точке $M_0$. Тогда:

1) если

$$\begin{cases} grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha \le 0, \ i \in I(M_0) \cap I_a; \\ grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha < 0, \ i \in I(M_0), i \notin I_a; \\ grad\, \varphi \mid_{M_0} \cdot \alpha > 0, \end{cases}$$

то существует число $\overline{T}_1 > 0$ такое, что при $0 < t < \overline{T}_1$

$$M_{\alpha,t}\left(x_1^0 + a_1 t, x_2^0 + a_2 t, ..., x_n^0 + a_n t\right) \in \Omega \text{ и } \varphi(M_{\alpha,t}) > \varphi(M_0);$$

2) если

$$\begin{cases} grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha \le 0, \ i \in I(M_0) \cap I_a; \\ grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha < 0, \ i \in I(M_0), i \notin I_a; \\ grad\, \varphi \mid_{M_0} \cdot \alpha > 0, \end{cases}$$

то существует число $\overline{T}_2 > 0$ такое, что при $0 < t < T_2$

$$M_{\alpha,t}\left(x_1^0 + a_1 t, x_2^0 + a_2 t, ..., x_n^0 + a_n t\right) \in \Omega \text{ и } \varphi(M_{\alpha,t}) > \varphi(M_0);$$

**Доказательство.** Предположим, для определенности, что

$$\begin{cases} grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha \le 0, \ i \in I(M_0) \cap I_a; \\ grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha < 0, \ i \in I(M_0), i \notin I_a; \\ grad\, \varphi \mid_{M_0} \cdot \alpha > 0, \end{cases}$$

Так как $grad\, \varphi \mid M_0 \cdot \alpha > 0$, то по основному свойству градиента функции, найдется число $T_0 > 0$, такое, что при $0 < t < T_0$ выполняется неравенство

$$\varphi(M_0) > \varphi(M_0). \qquad (1)$$

Если $i \in I(M_0),\ i \notin I_a$, то $f_i(M_0) = 0$ и $gradf_i \mid_{M_0} \cdot \alpha < 0$. Значит, найдется число $T_i > 0$ такое, что при $0 < t < T_i$

$$f_i(M_{\alpha,t}) < f_i(M_0) = 0 \qquad (2)$$

Если же $i \in I(M_0) \cap I_a$, то $f_i(M)$ - аффинная функция и $f_i(M_0) = 0$. Тогда

$$f_i(M_{\alpha,t}) = f_i(M_0) + (grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha)t = grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha)t.$$

Так как $grad\ f_i \mid_{M_0} \cdot \alpha \le 0$, то при всех *t>0* выполняется неравенство

$$f_i(M_{\alpha,t}) \le 0 \qquad (3)$$

Предположим, наконец, что $i \notin I(M_0)$. Тогда $f_i(M_0) < 0$. Функция *$f_i$(M)* дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна в точке *$M_0$*. Следовательно, найдется окрестность $S_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек $M \in S_{\delta_i}(M_0)$ справедливо неравенство

$$f_i(M) < 0.$$

Тогда, если $0 < t < \dfrac{\delta_i}{|\alpha|}$, то $M_{\alpha,t} \in S_{\delta_i}(M_0) < 0$. Таким образом, для любого $t \notin I(M_0)$ существует число $\delta_i > 0$ такое, что при $0 < t < \dfrac{\delta_i}{|\alpha|}$, выполняется неравенство

$$f_i(M_{\alpha,t}) < 0 \qquad (4)$$

Положим $\overline{T_1} = \min\left\{T_0; T_1,\ i \in I(M_0),\ i \notin I_a;\ \dfrac{\delta_i}{|\alpha|},\ i \notin I(M_0)\right\}$.

Тогда $\overline{T_1} > 0$ и при $0 < t < \overline{T_1}$ одновременно выполняются условия (1) – (4). Это означает, что при всех $0 < t < \overline{T_1}$:

$$M_{\alpha,t} \in \Omega \text{ и } \varphi(M_{\alpha t}) > \varphi(M_0).$$

Второе утверждение доказывается аналогично.

***Пример.*** Функция $\varphi(M) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1$ дифференцируема на множестве

$$\Omega = \{M \in R^3 \mid t_i(M) \le 0,\ i = 1,2,3\},$$

где

$$f_1(M) = x_1 + x_2 + x_3,\ \ f_2(M) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2,\ \ f_3(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25.$$

В данном случае, $I = \{1,2,3\}$, $I_a = \{1,2\}$. Точка $M_0$ (3,0,-4) принадлежит множеству и $I(M_0) = \{2,3\}$, так как

$$f_1(M_0) = -1 < 0,\ \ f_2(M_0) = 0,\ \ f_3(M_0) = 0.$$

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} grad\ f_2 \mid_{M_0} \cdot \alpha \le 0, \\ grad\ f_3 \mid_{M_0} \cdot \alpha < 0, \\ grad\ \varphi \mid_{M_0} \cdot \alpha > 0, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$.

Так как $grad\ f_2 |_{M_0} = \{2,-1,1\}$, $grad f_3 |_{M_0} = \{6,0,-8\}$, $grad\ \varphi |_{M_0} = \{8,0,-24\}$, то система (5) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + a_3 \le 0, \\ 6a_1 - 8a_3 < 0, \\ 8a_1 - 24a_3 > 0 \end{cases}. \qquad (6)$$

Нетрудно проверить, что вектор $\alpha = (-2,1,-1)$ удовлетворяет системе неравенств (6).

Следовательно, существует число $\overline{T_1} > 0$ такое, что при $0 < t < \overline{T_1}$

$$M_{\alpha t}(3 - 2t,\ 0 + t,\ -4 - t) \in \Omega \text{ и } \varphi(M_{\alpha,t}) > \varphi(M_0).$$

В частности, при $t = 1/2$, $M_{\alpha,t} = P(1,1/2,-9/2)$, причем:

$$f_1(P)=-2<0,\ \ f_2(P)=-3<0,\ \ f_3(P)=-\frac{1}{2}<0,\ \text{а}\ (P)=69\frac{1}{4},$$

в то время, как $\varphi(M_0)=63$.

**Задачи для размышления:**

1. Найти точку $P\in\{M\in R^2 \mid f_i(M)\le 0,\ \ i=1,2,3\}$ так, чтобы $\varphi(P)<\varphi(M_0)$, где
   $f_1(M)=x_1^2+x_2^2-4,\ \ f_2(M)=x_1+2x_2-2,\ \ f_3(M)=-x_1+2x_2-2$,
   $\varphi(M)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$, если а) $M_0(0{,}0)$; б) $M_0(0,-2)$; в) $M_0(0{,}1)$.
2. Найти точку $P\in\Omega=\{M\in R^2 \mid f_i(M)\le 0,\ \ i=1,2,3\}$ так, чтобы $\varphi(P)>\varphi(M_0)$, где
   $f_1(M)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-24,\ \ f_2(M)=x_1+2x_2+x_3-6,\ \ f_3(M)=-x_1$,
   $\varphi(M)=2x_1+4x_2+8x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$, если: а) $M_0$ (1,1,1); б) $M_0$(1,0,1); в) $M_0$(1,2,1); г) $M_0$(2,0,-4).
3. Найти точки $M_1M_2\in\Omega=\{M\in R^2 \mid f_1(M)\le 0, i=1,2,3\}$, $f_2(M)\notin[M_0,M_1]$ так, что $\varphi(M_2)<\varphi(M_1)<\varphi(M_0)$, где $f_1(M)=x+y-6$, $f_2(M)=-x$, $f_3(M)=-y$, $\varphi(M)=(x-4)^2+2(y-4)^2+2(y-4)^2$, $M_0(1{,}0)$.
4. Найти точки $M_1,M_2\in\Omega=\{M\in R^2 \mid f_i(M)\le 0,\ i=1,2,3\}$, $\varphi(M_2)\notin[M_0,M_1]$ так, что $\varphi(M_2)>\varphi(M_0)$, где $f_1(M)=x_1^2+x_2^2-4$, $f_2(M)2-x_1-x_2$, $f_3(M)=-x_1$, $\varphi(M)=6x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2$, $M_0(0{,}2)$.

## Лекция № 36. Лемма Фаркаша. Необходимое условие глобального экстремума функции.

### П Л А Н

1. **Лемма Фаркаша.**
2. **Необходимое условие экстремума функции.**
3. **Задачи.**

Пусть даны $n$-мерные векторы $\beta_1,\beta_2,...\beta_l$.

Множество всех $n$-мерных векторов, каждый из которых разлагается по системе $\beta_1,\beta_2,...\beta_l$ с неотрицательными (неположительными) коэффициентами обозначим

$$R^+(\beta_1,\beta_2,...,\beta_l)\qquad (R^-(\beta_1,\beta_2,...,\beta_l)).$$

***Лемма Фаркаша.*** Даны $n$-мерные векторы

$$\beta_1,\beta_2,...,\beta_l,\gamma$$

Если $\gamma \notin R^+(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l)$ $(\gamma \notin R^-(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l))$, то существует вектор $\alpha$ такой, что

$$\beta_1 \cdot \alpha \le 0,\ \beta_2 \cdot \alpha \le 0, ..., \beta_l \cdot \alpha \le 0,\ \gamma \cdot \alpha > 0\ (\gamma \cdot \alpha < 0).$$

**Доказательство.** Доказательство проведем методом математической индукции. Основание индукции (*l=1*). Предположим, что $\gamma \notin R^+(\beta_l)$ и докажем, что существует вектор $\alpha$, удовлетворяющий условиям:

$$\beta_1 \cdot \alpha \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha > 0.$$

Так как $\gamma \notin R^+(\beta_l)$, то $\gamma \ne \theta$. Если $\beta_1 \cdot \gamma \le 0$ то $\gamma$ - искомый вектор: $\beta_1 \cdot \gamma \le 0,\ \gamma \cdot \gamma > 0$. Пусть $\beta_1 \cdot \gamma > 0$. В этом случае, из условия $\gamma \notin R^+(\beta_1)$ следует, что

$$\alpha = \gamma - \frac{\beta_1 \cdot \gamma}{\beta_1^2} \cdot \beta_1 \ne \theta.$$

Тогда

$$\beta_1 \alpha = \beta_1 \gamma - \frac{\beta_1 \gamma}{\beta_1^2} \cdot \beta_1^2 = \beta_1 \gamma - \beta_1 \gamma = 0$$

$$\gamma \alpha = \gamma^2 - \frac{(\beta_1 \cdot \gamma)^2}{\beta_1^2} = \gamma^2 - 2 \cdot \frac{(\beta_1 \cdot \gamma)^2}{\beta_1^2} + \frac{(\beta_1 \cdot \gamma)^2}{\left(\beta_1^2\right)^2} \cdot \beta_1^2 =$$

$$= \left( \gamma - \frac{\beta_1 \cdot \gamma}{\beta_1^2} \cdot \beta_1 \right)^2 > 0$$

Основание индукции проверено.

Предположим теперь, что утверждение леммы уже доказано для $l = k,$ а $\gamma \notin R^+(\beta_1, ..., \beta_k \beta_{k+1})$. Требуется доказать, что существует вектор $\alpha$, удовлетворяющий условиям:

$$\beta_1 \cdot \alpha \le 0, ..., \beta_k \cdot \alpha \le 0,\ \beta_{k+1} \cdot \alpha \le 0,\ \gamma \cdot \alpha > 0.$$

Очевидно, что $\gamma \notin R^+(\beta_1, \beta_2 ..., \beta_k)$. Значит, по предположению индукции, найдется вектор $\alpha_1$ такой, что

$$\beta_1 \cdot \alpha_1 \le 0, ..., \beta_k \cdot \alpha_1 \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_1 > 0 \qquad (1)$$

Если окажется, что $\beta_{k+1} \cdot \alpha_1 \le 0$, то $\alpha_1$ – искомый вектор.

Поэтому можно считать, что $\beta_{k+1} \cdot \alpha_1 > 0$. Рассмотрим векторы:

$$\beta_i = \beta_l - \frac{\beta_i \cdot \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \beta_{k+1}, \quad i = 1,2,...,k,$$

$$\gamma = \gamma - \frac{\gamma \cdot \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \beta_{k+1},$$

Если $\gamma' \in R^+(\beta_1, ... \beta_k)$, то $\gamma' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1 \cdot \beta_i,\ \lambda_i \ge 0$. Тогда

$$\gamma - \frac{\gamma \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \beta_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \beta_i - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i (\beta_i \cdot \alpha_1)}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \beta_{k+1},$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \beta_i + \left( \frac{\gamma \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i (\beta_i \cdot \alpha_1)}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \right) \cdot \beta_{k+1}$$

и из условий (1) следует, что $\gamma \in R^+(\beta_1,...,\beta_k,\beta_{k+1})$.

Следовательно, $\gamma' \in R^+(\beta_1,...,\beta_k)$. Тогда, по предположению индукции, найдется вектор $\alpha_2$ такой, что

$$\beta_1 \cdot \alpha_2 \le 0,...,\beta_k \cdot \alpha_2 \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_2 > 0$$

Покажем, что вектор $\alpha = \alpha_2 - \dfrac{\beta_{k+1} \cdot \alpha_2}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \alpha_1$ - искомый.

Действительно,

$$\beta_i \cdot \alpha = \beta_i \cdot \alpha_2 - \frac{\beta_{k+1} \cdot \alpha_2}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} (\beta_i \cdot \alpha_1) = \alpha_2 \left( \beta_i - \frac{\beta_i \cdot \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \beta_{k+1} \right) =$$
$$= \beta_i \cdot \alpha_2 \le 0, \ i = 1,2,...,k;$$
$$\beta_{k+1} \cdot \alpha = \beta_{k+1} \cdot \alpha_2 - \frac{\beta_{k+1} \cdot \alpha_2}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} (\beta_{k+1} \cdot \alpha_1) = 0;$$
$$\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha_2 - \frac{\beta_{k+1} \cdot \alpha_2}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} (\gamma \cdot \alpha_1) = \alpha_2 \left( \gamma - \frac{\gamma \cdot \alpha_1}{\beta_{k+1} \cdot \alpha_1} \cdot \beta_{k+1} \right) =$$
$$= \gamma \cdot \alpha_2 > 0.$$

Лемма доказана.

***Следствие 1.*** Если система векторов $\beta_1, \beta_2,...,\beta_l$, $\gamma$ линейно независима, то найдутся векторы $\alpha' \cdot \alpha''$ такие, что

$$\beta_1 \cdot \alpha < 0, \ \beta_2 \cdot \alpha < 0,...,\beta_l \cdot \alpha < 0, \quad \gamma \cdot \alpha > 0;$$
$$\beta_1 \cdot \alpha < 0, \ \beta_2 \cdot \alpha < 0,...,\beta_l \cdot \alpha < 0, \quad \gamma \cdot \alpha < 0.$$

**Доказательство.** Так как векторы $\beta_1, \beta_2,...,\beta_l$, $\gamma$ линейно независимы, то $\gamma \notin R^+(\beta_1, \beta_2,...,\beta_l)$,

$$-\beta_i \notin R^+(\beta_i,...,\beta_{i-1}, -\gamma, \beta_{i+1},...,\beta_i), \quad i = 1,2,...,l$$

По лемме Фаркаша найдутся такие векторы $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_l$ такие, что

$$\beta_1 \cdot \alpha_0 \le 0, \beta_2 \cdot \alpha_0 \le 0,...,\beta_1 \cdot \alpha_0 \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_0 > 0,$$
$$\beta_1 \cdot \alpha_1 < 0, \beta_2 \cdot \alpha_1 \le 0,...,\beta_1 \cdot \alpha_1 \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_1 \ge 0,$$
$$\beta_1 \cdot \alpha_2 \le 0, \beta_2 \cdot \alpha_2 < 0,...,\beta_1 \cdot \alpha_2 \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_2 \ge 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_1 \cdot \alpha_l \le 0, \beta_2 \cdot \alpha_l \le 0,...,\beta_1 \cdot \alpha_l \le 0, \quad \gamma \cdot \alpha_l \ge 0.$$

Положим $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_i$.

Тогда

$$\beta_i \cdot \alpha' < 0, \quad i = 1,2,...,l, \quad \gamma \cdot \alpha' > 0.$$

Существование вектора $\alpha''$ доказывается аналогично.

***Следствие 2*** (необходимое условие экстремума функции).

Предположим, что $M_0$ – точка глобального экстремума функции *φ(M)* на множестве

$$\Omega = \{M \in R^n \mid f_i(M) \le 0, \quad i \in 1\}$$

Если все функции $f_i(M),\ i \in I$ и функция *φ(M)* дифференцируема в точке $M_0$, то векторы

$$grad\ f_i|_{M0}\ \ i \in I(M_0),\ grad\ \varphi|_{M0}$$

$$\left(I(M_0) = \{i \in I \mid f_i(M_0) = 0\}\right)$$

образуют линейно зависимую систему векторов.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что векторы

$$grad\ f_i|_{M0}\ \ i \in I(M_0),\ grad\ \varphi|_{M0}$$

линейно независимы. Тогда найдутся векторы $\alpha'$ и $\alpha''$ такие, что

$$\begin{cases} grad\ f_i|_{M0} \cdot \alpha' < 0,\ i \in I(M_0), \\ grad\ \varphi|_{M0} \cdot \alpha' > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} grad\ f_i|_{M0} \cdot \alpha'' > 0,\ i \in I(M_0), \\ grad\ \varphi|_{M0} \cdot \alpha'' < 0 \end{cases}$$

На основании обобщенного свойства градиента функции можно утверждать, что найдется число $t>0$ такое, что

$$M_{\alpha,t} \in \Omega,\ \varphi(M_{\alpha,t}) > \varphi(M_0),$$

$$M_{\alpha,t} \in \Omega,\ \varphi(M_{\alpha,t}) < \varphi(M_0).$$

Однако, это противоречит предположению о том, что $M_0$ – точка глобального экстремума функции *f(M)* на множестве Ω. Следствие доказано.

***Пример.*** Точка $M_0$ (1,1,1) принадлежит множеству

$$W = \{M \in R^3 \mid f_i(M) \le 0,\ i = 1{,}2\},$$

где

$$f_1(M) = x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 12,\ \ f_2(M) = x + y + z - 3,$$

причем $I(M_0)=\{1,2\}$.

Покажем, что точка $M_0$ (1,1,1) не является точкой глобального экстремума функции

$$\varphi(M) = x^2 + 2y^2 - z^2 \text{ на множестве } \Omega.$$

Так как $grad\ f_1 = \{2x, 16y, 6z\},\ grad\ f_2 = \{1,1,1\},\ grad\ \varphi = \{2x, 4y - 2z\}$, то $grad\ f_1|_{M0} = \{2,16,6\},\ grad\ f_2 \mid M_0 = \{1,1,1\},\ grad\ \varphi|_{M0} = \{2,4,-2\}$.

Нетрудно проверить, что векторы

$$grad\ f_1|_{M0},\ i \in I(M_0),\ grad\ \varphi|_{M0}$$

Образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, точка $M_0$(1,1,1) не является точкой глобального экстремума функции *φ(M)* на множестве Ω.

**Задачи для размышления:**

1. Доказать, что точка $M_0$(1,2) не является точкой глобального экстремума функции *φ(M)* на множестве Ω.

а) $\varphi(M) = xy + x^2,\ \Omega = \{M(x, y) \in R^2 \mid 2x^2 + y^2 \le 6,\ x^2 + y \ge 1\}$

б) $\varphi(M) = x + y, \Omega = \{M(x, y) \in R^2 \mid\ x^2 + y^2 \le 6,\ y \ge x^2\}$

2. Доказать, что точка $M_0$ (1,-1,1) не является точкой глобального экстремума функции $\varphi(M)$ на множестве $\Omega$:

а) $\varphi(M) = x^2 + xy + y^2 + z^2 + 2xz,$

$\Omega = \{M(x, y, z) \in R^3 \mid x^3 - y^3 + z^3 \le 3,\ y^2 + x \ge z,\quad x \ge 0\};$

б) $\varphi(M) = x + y - z,$

$\Omega = \{M(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 - 2xy + z^2 \le 4,\ x + 2y + 3z \le 2,\quad x \ge 0\};$

## Лекция № 37. Функция Лагранжа для отыскания глобальных экстремумов.

### П Л А Н

**1. Функция Лагранжа для отыскания глобальных экстремумов.**
**2. Примеры.**

Для отыскания глобальных экстремумов функции $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве

$$\Omega = \{M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \mid f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0,\ i \in I,\ I = \{1, 2, ..., l\}\}$$

составим вспомогательную функцию

$$L(x_1, ..., x_n, \mu_1, ..., \mu_l) = \mu_0\ \ \varphi(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x_1, ..., x_n)\,.$$

**Определение.** Функция $L(x_1, ..., x_n, \mu_1, ..., \mu_l)$ называется функцией Лагранжа отыскания глобальных экстремумов функции *φ(M)* на множестве $\Omega$.

**Теорема .** Пусть $M_0$ является точкой глобального экстремума функции *φ(M)* на множестве

$$\Omega = \{M \in R^n \mid f_i(M) \le 0,\ i \in I\}$$

Предположим, что все функции $f_i(M), i \in I$ и функция $\varphi(M)$ дифференцируемы в точке $M_0$. Тогда существует ненулевой набор $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_l$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mu_0 = 0{,}1;$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(M_0) = 0,\ j = 1, 2, .., n;$

3) $\mu_i \cdot f_i(M_0) = 0,\ i \in I\,.$

**Доказательство.** По следствию из леммы Фаркаша, векторы

$$grad\ f_i\,|_{M_0},\ i \in I(M_0) = \{i \in I \mid f_i(M_0) = 0\},\ grad\,\varphi \,|\, M_0$$

образуют линейно зависимую систему векторов. Значит, найдется ненулевой набор чисел $\mu_i$, $i \in I(M_0), \mu_0$ такой, что выполняется равенство

$$\mu_0 \cdot grad\,\varphi|_{M_0} + \sum_{i \in I(M_0)} \mu_i \cdot grad\ f_i|_{M_0} = \theta \qquad (1)$$

Если $\mu_0 \neq 0$, то равенство (1) можно разделить на это число. Тогда коэффициент при $grad\,\varphi|_{M_0}$ будет равен 1. Поэтому, без ограничеия общности можно считать, что в равенстве (1) коэффициент $\mu_0$ принимает только два значения? 0 или 1.

Положим $\mu_i = 0$ при $i \notin I(M_0)$. Тогда из равенства (1) получим:

$$\mu_0 \cdot grad\,\varphi|_{M_0} + \sum_{i \in I} \mu_i \cdot grad\ f_i|_{M_0} = \theta \qquad (2)$$

Так как

$$grad\,\varphi|_{M_0} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(M_0), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(M_0), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(M_0) \right\}$$

$$grad\ f_i|_{M_0} = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M_0), ..., \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(M_0), ..., \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(M_0) \right\}$$

то из равенства (2) следует:

$$\mu_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(M_0) + \sum_{i \in I} \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(M_0) = 0, \quad j = 1,2,...,n$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(M_0) = \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(M_0) + \sum_{i \in I} \mu_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(M_0) = 0, \ \ j = 1,2,..,n$$

Наконец, при всех $i \in I$ выполняется равенство

$$\mu_i f_i(M_0) = 0,$$

так как $f_0(M_0) = 0$ при $i \in I(M_0)$, а если $i \notin I(M_0)$, то $\mu_i = 0$. Теорема доказана.

***Замечание.*** Функция Лагранжа для отыскания глобальных экстремумов функции *φ(M)* на множестве

$$\Omega = \{M \in R^n \mid \ f_i(M) = 0, \ i \in K \subset I \ \ f_i(M) \leq 0, \ i \in I \setminus K\}$$

имеет следующий вид:

$$L = \mu_0 \cdot \varphi(M) + \sum_{i \in I} \mu_i \cdot f_i(M).$$

Можно доказать, что утверждение теоремы 14.2 сохраняется и в этом случае.

**Пример.** Функция $\varphi(M) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2$ имеет глобальный максимум и глобальный минимум на множестве

$$\Omega = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 8\}$$

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L = \mu_0 \left( x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 \right) + \mu_1 [(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 8].$$

На основании теоремы 24.1 можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_0(2x_1-2)+2\mu_1(x_1-2)=0, \\ \mu_0(2x_2-4)+2\mu_1(x_1-3)=0, \\ \mu_1[(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-8]=0. \end{cases} \qquad (3)$$

где $\mu_0, \mu_1$ - ненулевой набор чисел, а $\mu_0 = 0{,}1$.

Если $\mu_0 = 0$ $(\mu_1 \neq 0)$, то система (3) примет вид:

$$\begin{cases} x_1-2=0, \\ x_2-3=0, \\ (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-8=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Очевидно, что система (4) решений не имеет.

Пусть $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$. Тогда из (3) получим

$$\begin{cases} 2x_1-2=0, \\ 2x_2-4=0 \end{cases}$$

Откуда найдем точку $M_1(1{,}2) \in \Omega$.

Если $\mu_0 = 1, \mu_1 \neq 0$, то из системы (3) получим:

$$\begin{cases} 2x_1-2+2\mu_1(x_1-2)=0 \\ 2x_2-4+2\mu_1(x_2-3)=0 \\ (x_1-2)^2+(x_2-3)^2=8 \end{cases} \qquad (5)$$

Решив систему (5), найдем точки $M_2(4{,}5)$ и $M_3(0{,}1)$. Значения функции $\varphi(M)$ в найденных точках приведены в таблице:

Таблица 2

| $M$ | $M_1(1{,}2)$ | $M_2(4{,}5)$ | $M_3(0{,}1)$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi(M)$ | -5 | 13 | -3 |

Таким образом, $M_1(1{,}2)$ – точка глобального минимума, а $M_2(4{,}5)$ – глобального максимума функции $\varphi(M)$ на множестве $\Omega$, причем

$$\min_{\Omega}\varphi(M)=\varphi(M_1)=-5, \ \max_{\Omega}\varphi(M)=\varphi(M_2)=13.$$

**Задачи для размышления:**

Доказать, что функция $\varphi(M)$ имеет глобальный максимум и глобальный минимум на множестве $\Omega$. Найти точки глобального экстремума

1) $\varphi(M)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2, \Omega=\{M(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1^2+x_2^2 \le 52\}$

2) $\varphi(M)=x_1^2-x_2^2 \ \Omega=\{M(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1^2+x_2^2 \le 4\}$

3) $\varphi(M)=x_1+2x^2, \Omega=\{M(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1^2+x_2^2 \le 9, \ x_1 \ge 0\}$

4) $\varphi(M)=x_1^2+x^2 2x_3, \Omega=\{M(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2+2x_2^2+_3^2 \le 4\}$

5) $\varphi(M)=x_1-2x_2+2x_3, \Omega=\{M(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 9, \ x_3 \ge 0\}$.

6) $\varphi(M)=x_1x_2x_3, \Omega=\{M(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 12\}$

7) $\varphi(M) = x_1 x_2 x_3, \Omega = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3, \le 1\}$

8) $\varphi(M) = x_1 - 2x_2 + 2x_3, \Omega = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

9) $\varphi(M) = x_1 x_2 x_3, \Omega = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 2\}$

## Л и т е р а т у р а

**1.** Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.Физматгиз,1959.
**2.** Г.М.Фихтенгольц. Основы математического анализа. М. Наука, т.I, 1998.
**3.** В.А. Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ. М. Наука, т.I, 1998.
**4.** В.Е.Барбаумов, П.А.Андреянов, О.К.Смагина. N-мерное пространство. Функции. Экстремумы.
**5.** А.П.Карташев, Б.Л.Рождественский. Математический анализ. М. Наука.1984.
**6.** В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М. Высшая школа,1988.
**7.** Б.Н.Пшеничный. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. Наука 1969.
**8.** Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.Наука,1969.
**9.** Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. М.Наука,1985.

# С о д е р ж а н и е