ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ал-Хоразмий номли Урганч Давлат университети

Қўлёзма ҳуқуқида

Рахимова Фазилат Отабековна

ЧЕКЛИ ОРАЛИҚДА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ МАСАЛАСИ УЧУН МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

Мутахассислик: 5А 460102 – «Дифференциал тенгламалар»

ДИССЕРТАЦИЯ

"Математика магистри" академик даражасини олиш учун

Иш кўриб чиқилди ва ҳимояга рухсат берилди
«Математик физика ва амалий математика»
кафедраси мудири:
_______ ф.-м.ф.н., доц. Ўразбоев Ғ.Ў.
«____»___________2007 й.

Илмий раҳбар:
_________ ф.-м.ф.н., доц. Бобожонов Б.А

Илмий консультант:
______ ф.-м.ф.н., доц. Яхшимуратов А.Б

Урганч – 2007 й.

М У Н Д А Р И Ж А

Кириш……………………………………………………………………………………

I БОБ. Штурм-Лиувилл операторининг тескари масалалари учун ягоналик теоре Малари

1-§. В.А.Амбарцумян ягоналик теоремаси……………………………………………..

2-§. Борг ягонвлик теоремаси………………………………………

3-§. Алмаштириш оператори. Марченко ягоналик теоремаси …………

4-§. Дирак системаси учун ягоналик теоремаси.

II БОБ.Штурм-Лиувилл операторининг тескари масалалари учун мавжудлик теоремалари.

1-§. $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар кетма-кетлиги буйича тескари масаланинг мавжудлиги**.**

2-§. Спектрал функция бўйича тескари масала мавжудлиги.

Адабиётлар

КИРИШ

Математика ва физиканинг бир қатор муҳим йўналишларининг ривожланишига Штурм-Лиувилл

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad (0 \le x \le \pi)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

чегаравий масаласи ва Штурм-Лиувилл оператори

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \qquad x \in R^1$$

спектрал назариясининг усуллари катта ҳисса қўшди. Одатда $q(x)$- функция Штурм-Лиувилл операторининг потенциали деб юритилади.

Бундай операторларни ўрганишга Бернулли ва Эйлернинг бундан 200 йил илгари ёзган машҳур ишлари асос бўлди. Бернулли, Даламбер ва Эйлерлар томонидан тор тебраниш тенгламасини интеграллашнинг бир нечта усуллари таклиф этилди. Кейинчалик Фурье иссиқлик тарқалиш тенгламасини интеграллаш масаласида Штурм-Лиувилл операторининг хос қийматлари ва хос функциялари муҳим роль ўйнашини кўрсатиб берди. Натижада, дифференциал операторларнинг хос қийматларини (спектрини), хос функцияларини топиш ва берилган ихтиёрий функцияни хос функциялар бўйича Фурье қаторига ёйиш масалаларига бўлган қизиқиш орта борди.

Биринчи бўлиб, В.А.Стеклов чекли оралиқда берилган чегаравий масаланинг хос функцияларидан тузилган система тўла система эканлигининг мукаммал исботини берди. Чексиз интервалларда берилган Штурм-Лиувилл оператори учун бу назария Г. Вейл [4] тамонидан умумлаштирилди. Кейинчалик бу масалага Е.Ч.Титчмарш [14], Н.Левинсон [7], Б.М.Левитан [8], В.А.Марченко [11], М.Г.Крейн [6] ва бошқа олимлар ўзининг улкан хиссаларини қўшдилар.

Берилган потенциал бўйича Штурм-Лиувилл операторининг спектрал характеристикаларини топиш масаласига спектрал анализнинг тўғри масаласи ва аксинча, спектрал характеристикалар бўйича Штурм-Лиувилл операторини тиклаш масаласига спектрал анализнинг тескари масаласи дейилади. Турли хил чегаравий шартлардаги спектрлар, спектрал функция, сочилиш назариясининг берилганлари ва шунга ўхшаш характеристикалар спектрал характеристикалар бўла олиши мумкин.

Тескари спектрал масалаларни ўрганиш XX аср бошларида бошланган бўлиб, бу йўналишнинг ривожига муҳим туртки бўлган илк натижа 1929 йилда В.А. Амбарцумян [1] томонидан олинган: Амбарцумяннинг бу натижаси муҳим эканлигига биринчи бўлиб швед математиги Г.Борг [2] эътибор берди. Умуман олганда Штурм-Лиувилл операторини битта спектр ягона равишда аниқлай олмаслигини ва Амбарцумян натижаси умумий қоидадан истисно эканини кўрсатди. У 1945 йилда иккита чегаравий шартга мос келадиган спектрлар Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исботлади. Борг ушбу ишида тенгламани иккита спектр ёрдамида қуриш алгоритмини ҳам берди, аммо λ_n ва μ_n сонлар спектр бўладиган Штурм-Лиувилл оператори мавжуд бўлсин деб фараз қилди. Боргнинг бу ишидан кейин тескари масалалар соҳасида муҳим изланишлар Левинсон томонидан олиб борилди ва бир қанча натижалар қўлга киритилди.

Тескари масалалар назариясида яна бир муҳим қадам 1950 йилда В.А.Марченко[11] томонидан қўйилди. У биринчи бўлиб алмаштириш операторини тескари спектрал масалаларни ўрганишга тадбиқ қилди ва спектрал функция Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исбот қилишга мувоффақ бўлди.

В.А.Марченко ягоналик теоремаси эълон қилингандан кейин спектрал функция бўйича Штурм-Лиувилл операторини тиклаш масаласи долзарб бўлди. Бу масала 1951 йилда И.М.Гельфанд ва Б.М. Левитан [5] томонидан ечилди. Сўнгра Б.М. Левитан ва М.Г. Гасымов [9] томонидан мукаммаллаштирилди.

Бу соҳанинг кейинги ривожига Л.А. Чудов [17], В.А.Марченко [12], М.Г.Крейн [6], Ю.М. Березанский [3], И.М. Гельфанд, Б.М.Левитан [5], Л.Д.Фаддеев [16], М.Г. Гасымов [9] ва бошқа олимлар ўзларининг улкан ҳиссаларини қўшдилар.

Ҳозирги кунда, бу соҳанинг квант физикасига, чизиқли ва ночизиқли хусусий хосилали тенгламалар назариясига, кристаллографияга, геологоразведка масалаларига муҳим тадбиқлари топиганлиги боис бу мавзу долзарблиги янада ортди. Бундай амалий боғланишлар Штурм-Лиувилл операторидан бошқа дифференциал операторларнинг ҳам спектрал назариясини ўрганиш алоҳида аҳамиятга эга эканлигини кўрсатди. Мазкур ишда Штурм-Лиувилл операторининг тескари масалалари учун ягоналик ва мавжудлик теоремалари ҳамда релятивистик физиканинг муҳим тенгламаларидан бири бўлган махсус кўринишдаги Дирак системаси учун ягоналик теоремаси ўрганилган ва умумий кўринишдаги Дирак системаси учун бу теорема ўринли эмаслигини кўрсатувчи мисоллар келтирилган.

Диссертацияда бажарилган ишларнинг қисқача баёни.

Қуйидаги чегаравий масалага Штурм-Лиувилл чегаравий масаласи дейилади

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0,\pi], \tag{0.1}$$

$$\begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Бу ерда $q(x) \in C[0,\pi]$ ҳақиқий узлуксиз функция бўлиб, α ва β берилган ҳақиқий сонлардир, λ эса комплекс параметр. $q(x)$ функцияга (0.1)+(0.2) Штурм-Лиувилл масаласининг потенциали дейилади.

Таъриф. λ параметрнинг (0.1)+(0.2) чегаравий масала нолдан фарқли ечимга эга бўладиган қийматларига хос қийматлар дейилади. Бу хос қийматларга мос келувчи нолдан фарқли ечимларга эса, хос функциялар дейилади.

(0.1)+(0.2) Штурм-Лиувилл масаласининг барча хос қийматларидан тузилган тўпламга (0.1)+(0.2) масаланинг спектри дейилади.

Теорема 1. $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ лар орқали ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, (0 \le x \le \pi)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

чегаравий масаланинг хос қийматларини белгилаймиз. Бунда $q(x) \in C[0, \pi]$. Агар $\lambda_n = n^2$, $n = 0,1,2,\ldots$ бўлса, у ҳолда $q(x) \equiv 0$ бўлади.

Амбарцумяннинг бу натижаси муҳим эканлигига биринчи бўлиб швед математиги Г.Борг [2] эътибор берди. Умуман олганда Штурм-Лиувилл операторини битта спектр ягона равишда аниқлай олмаслигини ва Амбарцумян натижаси умумий қоидадан истисно эканини кўрсатди. У 1945 йилда иккита чегаравий шартга мос келадиган спектрлар Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исботлади:

Теорема.2. $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ лар орқали ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, (0 \le x \le \pi)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad h, H \in R^1$$

чегаравий масаланинг хос қийматларини белгилаймиз. $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ лар орқали

ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, (0 \le x \le \pi)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \; h_1, H \in R^1, h \ne h_1$$

чегаравий масаланинг хос қийматларини белгилаймиз. λ_n ва μ_n сонлар кетма-кетлиги $q(x)$ потенциални ҳамда h, h_1, H сонларни ягона равишда аниқлайди.

Борг ушбу ишида тенгламани иккита спектр ёрдамида қуриш алгоритмини ҳам берди, аммо λ_n ва μ_n сонлар спектр бўладиган Штурм-Лиувилл оператори мавжуд бўлсин деб фараз қилди. Боргнинг бу ишидан кейин тескари масалалар соҳасида муҳим изланишлар Левинсон томонидан олиб борилди ва бир қанча натижалар қўлга киритилди.

Агар $q(x)$ потенциал $\int_0^\infty xq(x)dx < \infty$ шартни қаноатлантирса, у холда ушбу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = k^2 y, \ 0 < x < \infty$$
$$y(0) = 0$$

тенгламанинг қуйидаги ассимптотикага

$$u(x,k) \sim e^{-ikx} + S(k)e^{ikx}, \quad x \to \infty$$

эга бўлган ечими мавжуд эканлигини кўрсатиш мумкин. Бу ердаги $S(k)$ функцияга Штурм-Лиувилл операторининг сочилиш функцияси дейилади. Агар Штурм-Лиувилл оператори хос қийматларга эга бўлмаса, унинг $S(k)$-сочилиш функцияси $q(x)$-потенциални ягона аниқлаши мумкинлиги 1949 йилда Левинсон томонидан исботланди. Кейинчалик Штурм-Лиувилл оператори манфий хос қийматларга эга бўлса, унинг $S(k)$-сочилиш функцияси $q(x)$-потенциални ягона аниқлай олмаслигига Баргман бир қанча мисоллар тузди. Баргман томонидан тузилган мисоллар В.А.Марченко томонидан чуқур таҳлил қилинди. Натижада, Марченко Штурм-Лиувилл операторини ягона аниқлаш учун, унинг $S(k)$-сочилиш функциясини, $\lambda_j = -\chi_j^2, \ j = \overline{1,N}$-хос қийматларни ва $m_j, \ j = \overline{1,N}$-нормалловчи ўзгармасларни билиш зарурлигини кўрсатиб берди. Бу натижа ҳозирги кунда сочилиш назариясининг ягоналик теоремаси деб юритилади.

Тескари масалалар назариясида яна бир муҳим қадам 1950 йилда В.А.Марченко[11] томонидан қўйилди. У биринчи бўлиб алмаштириш операторини тескари спектрал масалаларни ўрганишга тадбиқ қилди ва спектрал функция Штурм-Лиувилл операторини ягона равишда аниқлашини исбот қилишга мувоффақ бўлди:

Теорема 3. $\rho_1(\lambda)$ функция ушбу

$$-y'' + q_1(x)y = \lambda y, (0 \le x < \infty)$$

$$y'(0)-h_1y(0)=0$$

Штурм-Лиувилл масаласининг бирорта спектрал функцияси, $\rho_2(\lambda)$ функция эса ушбу

$$-y''+q_2(x)y=\lambda y,(0\le x<\infty)$$

$$y'(0)-h_2y(0)=0$$

Штурм-Лиувилл масаласининг бирорта спектрал функцияси бўлиб,

$$\rho_2(\lambda)=c\rho_1(\lambda)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $q_1(x)\equiv q_2(x)$ *ва* $h_1=h_2$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $q_1(x),q_2(x)\in C[0,\pi]$, h_1,h_2-ҳақиқий сонлар.

Ушбу

$$B\cdot\frac{dy}{dx}+\Omega(x)y=\lambda y,\quad x\in(0,\pi), \tag{0.3}$$

Дирак системасини қуйидаги

$$\begin{cases} y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0\\ y_1(\pi)\cos\beta+y_2(\pi)\sin\beta=0 \end{cases} \tag{0.4}$$

чегаравий шартда қараймиз. Бу ерда $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\Omega(x)=\begin{pmatrix}v(x)+\mu & 0\\ 0 & v(x)-\mu\end{pmatrix}$,

$$y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\qquad v(x)\in C[0,\pi],\ \mu>0\ .$$

Теорема 5. *$\rho(\lambda)$ ва $\tilde{\rho}(\lambda)$ спектрал фунциялар $v(x)$, μ, α,β ва $\tilde{v}(x)$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ ларга мос спектрал функциялар бўлсин. Агар $\tilde{\rho}(\lambda)=\rho(\lambda)$, $\lambda\in R^1$ бўлса, у ҳолда $\tilde{v}(x)=v(x)$, $\tilde{\mu}=\mu$, $tg\tilde{\alpha}=tg\alpha$, $tg\,\tilde{\beta}=tg\beta$ бўлади.*

Ягоналик теоремалари бузилишига доир мисол.

Ушбу чегаравий масалани қараймиз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x\in(0,\pi) \tag{0.5}$$

$$\begin{cases} y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0 \\ y_1(\pi)\cos\beta+y_2(\pi)\sin\beta=0. \end{cases} \tag{0.6}$$

$p(x)\equiv 0,\quad q(x)\equiv 0$ бўлсин. Бу ҳолда (0.5)+(0.6) масалани хос кийматлари, хос функциялари ва нормалловчи ўзгармаслари мос равишда қуйидагиларга тенг бўлади:

$$\lambda_n=\frac{\beta-\alpha}{\pi}+n, \quad n\in Z\,,$$

$$y_n(x)=\begin{pmatrix} -\sin(\lambda_n x+\alpha) \\ \cos(\lambda_n x+\alpha) \end{pmatrix}, \qquad n\in Z\,,$$

$$\alpha_n=\sqrt{\pi}, \ n\in Z.$$

Энди (0.5) тенгламани ушбу

$$\begin{cases} y_1(0)\cos\alpha_1+y_2(0)\sin\alpha_1=0 \\ y_1(\pi)\cos\beta_1+y_2(\pi)\sin\beta_1=0. \end{cases} \tag{0.7}$$

чегаравий шартда қараймиз. (0.5)+(0.7) чегаравий масаланинг хос қийматлари, хос функциялари ва нормалловчи ўзгармасларини мос равишда $\tilde{\lambda}_n$, $\tilde{y}_n(x)$ ва $\tilde{\alpha}_n$, $n\in Z$ лар орқали белгилаймиз. Агар α_1 ва β_1 ларни ушбу $\beta_1-\alpha_1=\beta-\alpha$ тенгликни қаноатлантирадиган қилиб танласак $\lambda_n\equiv\tilde{\lambda}_n,\, n\in Z,\quad \alpha_n\equiv\tilde{\alpha}_n,\, n\in Z$ бўлади, яъни спектрал функциялар $\tilde{\rho}(\lambda)=\rho(\lambda),\, \lambda\in R^1$ устма-уст тушади, аммо (0.5)+(0.6) ва (0.5)+(0.7) чегаравий масалалар айнан устма-уст тушмайди.

Мазкур ишнинг II-бобида қуйидаги теоремалар ўрганилган:

Ушбу

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \qquad x\in[0,\pi] \tag{0.8}$$

$$\begin{cases} y'(0)-hy(0)=0 \\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \qquad h,H\in R' \end{cases} \tag{0.9}$$

чегаравий масалани қараймиз. Бунда $q(x)$ функция $[0,\pi]$ да интегралланувчи хақиқий функция. (0.8) тенгламанинг

$$y(0)=1 \ \ ,y'(0)=h \tag{0.10}$$

бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечимини $\varphi(x,\lambda)$ орқали белгилаймиз. $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2...$ сонлар (0.8)+(0.9) чегаравий масаланинг хос қийматлари бўлсин. У ҳолда $\varphi(x,\lambda_n)$ $(n=0,1,2...)$ функциялар берилган чегаравий масаланинг хос функциялари бўлади.

Ушбу

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{0.11}$$

сонларга нормалловчи сонлар дейилади. $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонларга (0.8)+(0.9) чегаравий масаланинг спектрал характеристикалари дейилади.**Теорема 2.1**. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетлиги ушб

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y, \qquad 0\le x\le\pi \\ y'(0)-hy(0)=0 \\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \quad q^m(x)\in L_1(0,\pi) \end{cases}$$

кўринишидаги масаланинг хос қийматлари ва нормалловчи ўзгармаслари бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир.

1) $\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{a_0}{n}+\overset{=}{0}(\frac{1}{n}),n\to\infty$

$$\sqrt{\alpha_n}=\frac{\pi}{2}+\overset{=}{0}(\frac{1}{n}),n\to\infty \tag{0.12}$$

2) $\lambda_n\ne\lambda_k$ агар $n\ne k$

$$\alpha_n>0,\ n=0,1,2,... \tag{0.13}$$

3) $$F(x,t)=\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x\cos\sqrt{\lambda_0}t-\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t-\frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right]$$

(0.14)

функциянинг $\left[0,\pi\right]\times\left[0,\pi\right]$ сохада $m+1$ тартибли ҳосиласи мавжуд.

Теорема 2.2. Агар $\left\{\lambda_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\left\{\alpha_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари учун ушбу

1) $$\sqrt{\lambda_{\text{n}}}=n+\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^3}+\underline{\underline{0}}(\frac{1}{n^4}),\ n\to\infty,\ (a_0=const)$$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\underline{\underline{0}}(\frac{1}{n^3}),\ n\to\infty \tag{0.15}$$

2) $\lambda_n\neq\lambda_k$ агар $n\neq k$

$$\alpha_n>0,\ \ n=0,1,2,... \tag{0.16}$$

шартлар бажарилса, у ҳолда $\left[0,\pi\right]$ кесмада абсалют узлуксиз бўлган $q(x)$ функция топилиб $\left\{\lambda_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\left\{\alpha_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари $q(x)$ потенциалли бирор Штурм-Лиувилл чегаравий масаланинг хос қийматлари ва нормалловчи сонлари бўлади.

Теорема 2.3. $\left\{\lambda_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\left\{\alpha_{\text{n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари ушбу

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y, & 0\le x\le\pi\\ y'(0)-hy(0)=0 & \\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, & q^m(x)\in L_1(0,\pi)\end{cases} \tag{0.17}$$

кўринишдаги масаланинг ҳос қийматлари ва нормаловчи сонлари бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир:

1) $$\sqrt{\lambda_{\text{n}}}=n+\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^3}+\frac{\gamma_n}{n^3},$$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\frac{\tau_n}{n^3}$$, бу ерда $\text{a}_0=const,\ b_0=const$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2<\infty,\quad \sum_{\text{n}=1}^{\infty}\tau_{\text{n}}^2>\infty$

$\lambda_n\neq\lambda_k\ \ (n\neq k)$ ва $\alpha_n>0,\ n=0,1,2,...$

Ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 \le x < \infty \\ y'(0) = hy(0), & q(x) \in C^n[0,\infty) \end{cases} \tag{0.18}$$

Штурм-Лиувилл масаласини қараймиз.

Теорема 2.3. Бирор монотон ўсувчи $\rho(\lambda)$ функция (6.1) кўринишидаги Штурм-Лиувилл чегаравий масаласининг спектрал функцияси бўлиши учун ушбу иккита

I. $$\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^{N} \cos\sqrt{\lambda}x d\sigma(\lambda)$$

тенглик билан аниқланадиган функциялар кетма-кетлиги $N \to \infty$ да бирор $\Phi(x) \in C^{n+1}(0,\infty)$ функцияга интилади. Бу ерда

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}, & \lambda > 0 \\ \rho(\lambda), & \lambda \le 0; \end{cases}$$

II. Ихтиёрий $f(x) \in L^2(0,\infty)$ узлуксиз финит функция учун қуйидаги

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

тенглик ўринли бўлса, $f(x) \equiv 0$ бўлади. Бу ерда

$$E(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \cos\sqrt{\lambda}x dx.$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

I-БОБ.

Штурм-Лиувилл операторининг тескари масалалари учун ягоналик теоремалари.

§1.1. В.А.Амбарцумян ягоналик теоремаси.

Теорема (Амбарцумян 1929). Ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{1.2}$$

чегаравий масаланинг хос қийматларини $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ лар орқали белгилаймиз. Бунда $q(x) \in C[0,\pi]$. Агар $\lambda_n = n^2$, $n = 0,1,2,...$ бўлса, у ҳолда $q(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0,\pi]$ бўлади.

Исбот. Бизга олдиндан маълум бўлган ушбу асимптотик

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{\gamma_n}{n} \quad \text{ёки} \quad \lambda_n = n^2 + a_0 + \underset{=}{0}(\frac{1}{n^2}), \tag{1.3}$$

$$\gamma_n \to 0 \text{ агар } n \to \infty. \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)dt,$$

формулага кўра, агар $\lambda_n = n^2$, $n = 0,1,2,...$ бўлса $\int_0^\pi q(t)dt = 0$ (1.4)

бўлади. Иккинчи томондан хос қийматларнинг экстремал хоссасига кўра (1.1)+(1.2) масаланинг биринчи $\lambda_0 = 0$ хос қиймати

$$\int_0^\pi y^2(x,\lambda)dx = 1 \quad \text{ва} \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

яъни

$$D = \{y(x) : y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad \|y(x) = 1\|\}$$

функциялар синфида ушбу

$$(Ly, y) = \int_0^\pi \left(y'^2 + q(x)y^2\right)dx$$

функционалнинг энг кичик қиймати билан устма-уст тушади. Ушбу $y_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ функция D га киради, ҳамда (1.4) ни ҳисобга олсак $(Ly_{0,}y_0)=0$ бўлади, бундан эса $y_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ функция $\lambda_0=0$ да (1.1) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$Ly_0=0 \Rightarrow q(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0\,.$$

Бундан эса теорема исботи келиб чиқади, яъни $q(x)\equiv 0$, $\forall x\in[0,\pi]$.

Бу теореманинг бошқа исботини келтирамиз.

Исбот. λ_0 га мос келувчи хос функцияни $y_0(x)$ билан белгилаймиз. Осцилляция теоремасига кўра $y_0(x)\neq 0,\quad x\in[0,\pi]$.

$$0=\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)'dx=\int_0^{\pi}\frac{y_0''(x)y_0(x)-y_0'^{\,2}(x)}{y^2{}_0(x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{y_0''(x)}{y_0(x)}dx-\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{[q(x)-\lambda_0]\cdot y_0(x)}{y_0(x)}dx-\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2dx=\int_0^{\pi}q(x)dx-\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2dx,$$

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2dx=\int_0^{\pi}q(x)dx \tag{1.5}$$

(1.3)-асимптотикага кўра, агар $\lambda_n=n^2,\quad n=0,1,2,\ldots$ бўлса $\int_0^{\pi}q(t)dt=0$ бўлади. (1.5) га кўра

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2dx=0.$$

Бундан эса $y_0'(x)\equiv 0 \;\Rightarrow\; y_0(x)\equiv C\neq 0.$ Агар $C=0$ бўлса, ягоналик теоремасига кўра $y_0(x)\equiv 0$ бўлади. Бу эса $y_0(x)$ нинг хос функция эканлигига зиддир. Шунинг учун $y_0(x)\equiv C\neq 0.$ Буни тенгламага қўйсак,

$$0+q(x)\cdot C=0\cdot C \quad\Rightarrow\quad q(x)\equiv 0,\;\forall x\in[0,\pi].$$

келиб чиқади. **Теорема исботланди.**

§2. Борг ягоналик теоремаси.

Ушбу

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \qquad 0 \le x \le \pi \tag{1.6}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{1.7}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{1.8}$$

чегаравий масаланинг хос қийматлар тўпламини, яъни спектрини $S(h,H,q)$ орқали белгилаймиз. Бунда h,H ва $q(x)$ - ҳақиқий бўлиб, $q(x) \in C[0,\pi]$. (1.6) тенглама билан бирга ушбу

$$\varphi'' + (\lambda - r(x))\varphi = 0, \;\; 0 \le x \le \pi, \qquad r(x) \in C[0,\pi] \tag{1.9}$$

тенгламани қараймиз. (1.9)+(1.7)+(1.8) чегаравий масаланинг спектрини $S(h,H,\mathrm{r})$ орқали белгилаймиз. (1.6)+(1.7)+(1.8) чегаравий масалада H ни H_1 га ўзгартириш натижасида хосил бўлган чегаравий масаланинг спектрини $S(h,H_1,q)$ оркали белгилаймиз.

Теорема 2.1 (Борг). Агар $H \ne H_1$ учун

$$S(h,H,q) = S(h,H,r)$$

$$S(h,H_1,q) = S(h,H_1,r)$$

бўлса, у ҳолда $q(x) \equiv r(x)$, $\forall x \in [0,\pi]$ бўлади.

Исбот. $S(h,H,q)$ тўплам элементларини $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n...$ орқали белгилаймиз. Теорема шартига кўра $S(h,H,q) = S(h,H,r)$. бўлгани учун ушбу тенгликлар ўрили:

$$y''(x,\lambda_n) + (\lambda_n - q(x)) \cdot y(x,\lambda_n) = 0 \tag{1.10}$$

$$y'(0,\lambda_n) - h \cdot y(0,\lambda_n) = 0 \tag{1.11}$$

$$y'(\pi,\lambda_n) + H \cdot y(\pi,\lambda_n) = 0 \tag{1.12}$$

$$\varphi''(x,\lambda_n) + (\lambda_n - r(x)) \cdot \varphi(x,\lambda_n) = 0 \tag{1.13}$$

$$\varphi'(0,\lambda_n) - h \cdot \varphi(0,\lambda_n) = 0 \tag{1.14}$$

$$\varphi'(\pi,\lambda_n) + H \cdot \varphi(\pi,\lambda_n) = 0\,. \tag{1.15}$$

(1.10) тенглмани $\varphi(x,\lambda_n)$ функцияга, (1.13) тенгламани $y(x,\lambda_n)$ га кўпайтириб, (1)- тенгликдан (2)-тенгликни айирамиз ва $(0,\pi)$ оралиқда интеграллаймиз

$$(y''\cdot\varphi-\varphi''\cdot y)+(r(x)-q(x))\cdot y(x,\lambda_n)\cdot\varphi(x,\lambda_n)=0$$

$$\int_0^\pi (y'\cdot\varphi-\varphi'\cdot y)^{'}dx+\int_0^\pi[r(x)-q(x)]y(x,\lambda_n)\cdot\varphi(x,\lambda_n)dx=0$$

$$(y'(x,\lambda_n)\cdot\varphi(x,\lambda_n)-\varphi'(x,\lambda_n)\cdot y(x,\lambda_n))\Big|_0^\pi+$$

$$+\int_0^\pi[r(x)-q(x)]\cdot y(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)dx=0$$

Бу тенгликдаги биринчи йиғинди (1.11),(1.12),(1.14),(1.15) ларга кўра нолга тенг. Бунга кўра бу тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\int_0^\pi[r(x)-q(x)]y(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\mathrm{dx}=0 \tag{1.16}$$

Худди шунга ўхшаш тенглик $S(h,H_1,q)$ тўплам элементлари учун ҳам ўринли, у ҳолда ушбу $\{y(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ функциялар системаси $L(0,\pi)$ фазода тўла система ташкил қилганлиги учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади: $r(x)-q(x)=0$, $\forall x\in[0,\pi]$. **Теорема исбот бўлди.**

Агар $h=H$ ва $q(\pi-t)=q(t),\quad r(\pi-t)=r(t)$ (1.17)

бўлса, у ҳолда $q(t)$ ва $r(t)$ нинг $(0,\pi)$ да устма-уст тушиши учун битта спектрнинг устма-уст тушиши етарли, яъни потенциал симметрик бўлса, у ҳолда битта спектр потенциални ягона аниқлайди:

Теорема 2.2. $H=h$ бўлиб, $q(\pi-t)=q(t),\quad r(\pi-t)=r(t)$ бўлсин. Агар $S(h,h,q)=S(h,h,r)$ бўлса, у ҳолда $q(t)=r(t)$, $\forall x\in[0,\pi]$ бўлади.

Теорема исботидан олдин ушбу леммани исботсиз келтириб ўтамиз.

Лемма. $\varphi_{\mathrm{h}}(t,\lambda_n)$ орқали ушбу

$$y''+\{\lambda_{\mathrm{n}}-q(t)\}y=0 \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} y'(0)-hy(0)&=0 \\ y'(\pi)+hy(\pi)&=0. \end{aligned} \qquad (1.19)$$

чегаравий масаланинг хос функцияларини белгилаймиз.Агар $q(\pi-t)=q(t)$ бўлса, у ҳолда $\varphi_n^2(t,\lambda_n)$ функциялар системаси $(0,\pi)$ оралиқда $f(\pi-t)=f(t)$ шартни қаноатлантирувчи $f(t)$ функциялар фазосида тўла система ҳосил қилади.

Теорема исботини давом қилдирамиз. $\varphi_n(t,\lambda_n)$ $n=1,2,3,...$ функциялар (1.18)+(1.19) нинг хос функциялари бўлса, у ҳолда ушбу

$$\varphi_n(\pi-t,\lambda_n)=\alpha_n\varphi_n(t,\lambda_n) \qquad (1.20)$$

муносабат ўринли. Бунда $\alpha_n=(-1)^{n-1}$. (1.16),(1.17) ва (1.20) дан

$$\int_0^{\pi}[r(t)-q(t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[r(t)-q(t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[r(t)-q(t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[r(t)-q(t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[r(\pi-t)-q(\pi-t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[r(t)-q(t)]\cdot\varphi(t,\lambda_n)y(t,\lambda_n)dt=0.$$

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ да $\{y(t,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялар системаси тўла система ташкил қилгани учун $r(t)-q(t)=0$, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ келиб чиқади. (1.17) га кўра $r(t)-q(t)\equiv 0$, $\forall t\in[0,\pi]$ бўлади. **Теорема 2.2 исбот бўлди.**

§3. Алмаштириш оператори. Марченко ягоналик теоремаси.

Қуйидаги Штурм-Лиувилл чегаравий масаласини кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 \le x < \infty) \\ y'(0) = hy(0), \end{cases} \tag{1.21}$$

бу ерда $q(x)$ функция $[0,\infty)$ ораликда узлуксиз бўлган ҳақиқий функция, h ихтиёрий ҳақиқий сон ва λ ҳақиқий параметр деб қаралади.

Ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 \le x < \infty) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = h \end{cases} \tag{1.22}$$

Коши масаласининг ечимини $\varphi(x,\lambda)$ орқали белгилаймиз.

Теорема (*Г.Вейл, 1910 й.*). (1.21) чегаравий масала учун бутун ўкда аникланган, ўсувчи, чапдан узлуксиз, $\rho(-0) = 0$ шарт билан нормалланган шундай $\rho(\lambda)$ функция мавжудки, бунда $L^2(0,\infty)$ фазодан олинган ихтиёрий $f(x)$ функция учун

$$\int_0^\infty f^2(x)dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.23}$$

тенглик бажарилади. Бу ерда $F(\lambda)$ функция

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

кетма-кетликнинг $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty,+\infty)$ фазодаги лимитини билдиради.

(1.23) тенгликка ярим ўкда берилган Штурм-Лиувилл масаласи учун **Парсевал тенглиги** дейилади, $\rho(\lambda)$ функцияга (1.21) масаланинг **спектрал функцияси** дейилади, $F(\lambda)$ функцияга эса $f(x)$ функциянинг $\varphi(x,\lambda)$ ечимлар бўйича ёзилган **Фурье алмаштириши** дейилади ва у

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

каби белгиланади.

Изох: Спектрал функция умуман олганда ягона эмас.

Таъриф. Агар $\rho(\lambda)$ спектрал функция бирор λ_0 нуқтанинг кичик атрофида ўзгармас бўлса, λ_0 нуқта (1.21) масаланинг **регуляр нуқтаси** дейилади. Регуляр бўлмаган нуқталар тўпламига (1.21) масаланинг **спектри** дейилади ва у E ҳарфи билан белгиланади. Спектрал функциянинг узилиш нуқталарига (1.21) масаланинг хос қийматлари дейилади. Спектрнинг ажралган нуқталари тўпламига спектрнинг дискрет қисми дейилади.

E нормалланган чизиқли фазо бўлиб, A ва B унинг E_1, E_2 қисм фазоларида аниқланган чизиқли операторлар бўлсин.

Таъриф. Ўзи ва тескариси E фазода узлуксиз бўлган,

$$XA = BX \text{ ёки } A = X^{-1}BX$$

шартни қаноатлантирувчи $X : E_1 \to E_2$ чизиқли операторга A ва B операторлар учун алмаштириш оператори дейилади.

Лемма 1. Агар $\varphi \in E_1$ вектор A операторнинг λ хос қийматига мос келувчи хос вектори бўлса, $\psi = X\varphi$ вектор B операторнинг худди шу λ хос қийматига мос келувчи хос вектори бўлади.

Исбот. $B\psi = BX\varphi = XA\varphi = X\lambda\varphi = \lambda X\varphi = \lambda\psi$.

Лемма 1 исботланди.

Лемма 2. A, B, C операторлар мос равишда E фазонинг E_1, E_2, E_3 қисм фазоларида аниқланган операторлар бўлиб, A ва B операторлар учун алмаштириш оператори X, B ва C операторлар учун алмаштириш оператори Y бўлса, A ва C операторлар учун алмаштириш оператори YX бўлади.

Исбот. Алмаштириш операторининг таърифига кўра $XA = BX$, $YB = CY$ бўлади. Иккинчи тенгликдан $B = Y^{-1}CY$ ни топиб, биринчисига қўйсак, ушбу $XA = Y^{-1}CYX$ тенликка эга бўламиз, яъни $(YX)A = C(YX)$ тенглик келиб чиқади. **Лемма 2 исботланди.**

Энди ярим ўқда берилган Штурм-Лиувилл оператори учун алмаштириш операторининг кўринишини топиш билан шуғулланамиз.

$E = C^1[0,\infty)$ бўлиб, A ва B операторлар қуйидаги

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x), \qquad 0 \le x < \infty, \tag{1.24}$$

$$B = -\frac{d^2}{dx^2} + q_2(x), \qquad 0 \le x < \infty \tag{1.25}$$

кўринишга эга бўлсин. Бу ерда $q_1(x), q_2(x)$ функциялар $[0,\infty)$ оралиқда берилган узлуксиз функциялардир.

E_k орқали E фазодаги $f'(0) = h_k f(0)$, $(k = 1{,}2)$ шартни қаноатлантирувчи, икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар тўпламини белгилайлик, h_1 ва h_2 сонлар иҳтиёрий чекли хақиқий сонлар бўлсин.

Теорема 1. A ва B операторлар учун алмаштириш оператори мавжуд бўлиб, у учун қуйидаги тасвир ўринли:

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) f(t)dt. \tag{1.26}$$

Бу ерда $K(x,t)$ ядро қуйидаги

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q_2(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q_1(t)K \tag{1.27}$$

тенгламани ва

$$K(x,x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\int_0^x [q_2(s) - q_1(s)]ds, \tag{1.28}$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t} - h_1 K\right)\Bigg|_{t=0} = 0 \tag{1.29}$$

шартларни қаноатлантиради. Аксинча, $K(x,t)$ функция (1.27) тенгламанинг (1.28), (1.29) шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлса, (1.26) тенглик билан берилган X оператор A ва B чизиқли операторлар учун алмаштириш оператори бўлади.

Исбот. 1. $Xf(x) \in E_2$ бўлгани учун

$$(Xf)'\big|_{x=0} = h_2 (Xf)\big|_{x=0} = h_2\left(f(x) + \int_0^x K(x,t) f(t)dt \right)\Bigg|_{x=0} = h_2 f(0)$$

тенглик ўринли бўлади. Иккинчи томондан, (1.26) тенгликдан ҳосила олиб, ушбу

$$(Xf)' = f'(x) + K(x,x)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} f(t)dt \tag{1.30}$$

тенгликда $x = 0$ десак, қуйидаги

$$(Xf)'\big|_{x=0} = f'(0) + K(0,0)f(0) = h_1 f(0) + K(0,0)f(0) =$$
$$= \big(h_1 + K(0,0)\big)f(0)$$

ифода ҳосил бўлади. $f \in E_1$ функциянинг иҳтиёрий эканлигидан ушбу

$$K(0,0) = h_2 - h_1 \tag{1.31}$$

тенглик келиб чиқади.

Энди $B(Xf) = X(Af)$ шартни ишлатамиз. (1.30) тенгликдан ҳосила олиб,

$$(Xf)'' = f''(x) + f(x)\frac{d}{dx}K(x,x) + K(x,x)f'(x) +$$
$$+ \frac{\partial K}{\partial x}\big|_{t=x} f(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} f(t)dt$$

ушбу

$$B(Xf) = -(Xf)'' + q_2(x)(Xf) = -f''(x) - f(x)\frac{d}{dx}K(x,x) -$$
$$- K(x,x)f'(x) - \frac{\partial K}{\partial x}\big|_{t=x} \cdot f(x) + q_2(x)f(x) - \int_0^x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q_2(x)K\right) f(t)dt \tag{1.32}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $X(Af)$ ифодада қуйидаги

$$\int_0^x K(x,t)f''(t)dt = \int_0^x K(x,t)df'(t) = K(x,x)f'(x) - K(x,0)f'(0) -$$
$$- \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} df(t) = K(x,x)f'(x) - h_1 K(x,0)f(0) - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\big|_{t=x} f(x) +$$
$$+ \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} f(0) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} f(t)dt$$

бўлаклаб интеграллашни ишлатсак, ушбу

$$X(Af) = \left[- f''(x) + q_1(x) f(x)\right] + \int_0^x K(x,t)\left[- f''(t) + q_1(t) f(t)\right]dt =$$

$$= - f''(x) + q_1(x) f(x) + \left(h_1 K(x,t) - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right)\Big|_{t=0} f(0) -$$

$$- K(x,x) f'(x) + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x} f(x) - \int_0^x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q_1(t) K \right) f(t)dt \qquad (1.33)$$

тенглик келиб чиқади.

(1.32) ва (1.33) ифодаларни бир-бирига тенглаб, ушбу

$$- f(x) \frac{d}{dx} K(x,x) - \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} f(x) + q_2(x) f(x) -$$

$$- \int_0^x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q_2(x) K \right) f(t)dt = \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x} f(x) + q_1(x) f(x) +$$

$$+ \left(h_1 K(x,t) - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right)\Big|_{t=0} f(0) - \int_0^x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q_1(t) K \right) f(t)dt \qquad (1.34)$$

тенгликка эга бўламиз. (1.34) тенгликда қуйидаги

$$\frac{dK(x,x)}{dx} = \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}$$

формуладан ва $f(x)$ функциянинг иҳтиёрий эканлигидан фойдалансак, ҳамда $K(0,0) = h_2 - h_1$ тенгликни эътиборга олсак (1.27), (1.28), (1.29) тенгликлар келиб чиқади.

Биз A ва B чизиқли операторлар учун алмаштириш оператори (1.26) қуринишда изланса, унинг ядроси (1.27), (1.28), (1.29) шартларни қаноатлантиришини исботладик.

$K(x,t)$ функция (1.27), (1.28), (1.29) шартларни қаноатлантиришидан (1.26) тенглик билан бериладиган оператор A ва B операторларнинг алмаштириш оператори бўлишини кўрсатиш учун қилинган ишларни тескари тартибда бажариш етарли.

2. Энди эса, (1.27)+(1.28)+(1.29) масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз. Бунинг учун аввало алмаштириш операторининг иккинчи хоссасидан фойдаланиб, бу масала ўрнига соддарок масалани қараймиз, яъни умумийликни бузмаган ҳолда $q_2(x) \equiv 0,\ h_1 = 0$ ёки $h_2 = 0$ деб ҳисоблаш мумкин эканини кўрсатамиз:

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\ ,\quad B = -\frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad C = -\frac{d^2}{dx^2} + r(x)$$

бўлиб,

$$E_1 = \{f(x) \in E| \quad f'(0) = h_1 f(0)\},$$

$$E_2 = \{f(x) \in E| \quad f'(0) = 0\},$$

$$E_3 = \{f(x) \in E| \quad f'(0) = h_3 f(0)\}$$

бўлсин. Бундан ташқари A ва B операторлар учун алмаштириш оператори ушбу

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x K_1(x,t) f(t)dt, \tag{1.35}$$

кўринишда, B ва C операторлар учун алмаштириш оператори қуйидагича

$$Yf(x) = f(x) + \int_0^x K_2(x,t) f(t)dt \tag{1.36}$$

кўринишда бўлсин. У ҳолда A ва C операторлар учун алмаштириш оператори ушбу

$$(YX)f(x) = Y\left\{ f(x) + \int_0^x K_1(x,t) f(t)dt \right\} = f(x) + \int_0^x K_1(x,s) f(s)ds +$$

$$+ \int_0^x K_2(x,t)\left[f(t) + \int_0^t K_1(t,s) f(s)ds \right]dt = f(x) +$$

$$+ \int_0^x \left[K_1(x,t) + K_2(x,t) + \int_t^x K_2(x,s)K_1(s,t)ds \right] f(t)dt =$$

$$= f(x) + \int_0^x K_3(x,t) f(t)dt,$$

кўринишда бўлади. Бу ерда

$$K_3(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) + \int_t^x K_2(x,s)K_1(s,t)ds\,.$$

3. Демак, (1.27)+(1.28)+(1.29) масалани текширишни $q_2(x) \equiv 0$ ва h_1 ёки h_2 нолга тенг бўлган ҳолда олиб бориш етарли. Биз $h_2 = 0$ бўлган ҳолни кўриб чиқамиз, $h_1 = 0$ бўлган ҳолда ҳам худди шундай бўлади.

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)K, \tag{1.37}$$

$$K\big|_{t=x} = -h - \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds, \tag{1.38}$$

$$\left(\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} - hK(x,t)\right)\bigg|_{t=0} = 0 \tag{1.39}$$

масала ечими мавжудлигини ва ягоналигини кўрсатишимиз керак.

Агар бу масалада ушбу $\xi = x + t, \quad \eta = x - t$ алмаштиришни бажарсак, қуйидаги

$$K_x = K_\xi + K_\eta,$$

$$K_{xx} = (K_\xi + K_\eta)_\xi + (K_\xi + K_\eta)_\eta = K_{\xi\xi} + 2K_{\xi\eta} + K_{\eta\eta},$$

$$K_t = K_\xi - K_\eta,$$

$$K_{tt} = (K_\xi - K_\eta)_\xi - (K_\xi - K_\eta)_\eta = K_{\xi\xi} - 2K_{\xi\eta} + K_{\eta\eta}$$

формулалардан, ушбу

$$K_{\xi\eta} = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)K$$

$$K\big|_{\eta=0} = -h - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\xi}{2}} q(s)ds,$$

$$(K_\xi - K_\eta - hK)\big|_{\eta=\xi} = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Энди эса оҳирги масалага эквивалент бўлган интеграл тенглама тузамиз. Бунинг учун охирги масалада қуйидаги

$$K(x,t) = K\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) = A(\xi, \eta)$$

белгилашни киритиб, уни

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A, \tag{1.40}$$

$$A(\alpha,0) = -h - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} q(s)ds, \tag{1.41}$$

$$(A_\alpha - A_\beta - hA)\Big|_{\beta=\alpha} = 0 \tag{1.42}$$

кўринишда ёзиб олиб, (1.40) тенгликни $[0,\eta]$ оралиқда β бўйича интеграллаймиз:

$$A_\alpha(\alpha,\eta) - A_\alpha(\alpha,0) = -\frac{1}{4}\int_0^\eta q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta. \tag{1.43}$$

(1.41) тенгликка асосан $A_\alpha(\alpha,0) = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ бўлгани учун ушбу

$$A_\alpha(\alpha,\eta) = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{4}\int_0^\eta q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta \tag{1.44}$$

тенглик ўринли бўлади. (1.44) тенгликни $[\eta,\xi]$ оралиқда α бўйича интеграллаб, ушбу

$$A(\xi,\eta) - A(\eta,\eta) = -\frac{1}{4}\int_\eta^\xi q\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha - \frac{1}{4}\int_\eta^\xi\left\{\int_0^\eta q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta\right\}d\alpha \tag{1.45}$$

айниятга эга бўламиз.

Энди $A(\eta,\eta)$ ни хисоблаймиз. (1.42) тенгликка қура ушбу

$$2A_\alpha\Big|_{\beta=\alpha} = (A_\alpha + A_\alpha)\Big|_{\beta=\alpha} = A_\alpha\Big|_{\beta=\alpha} + A_\alpha\Big|_{\beta=\alpha} = A_\alpha\Big|_{\beta=\alpha} +$$

$$+(A_\beta + hA)\Big|_{\beta=\alpha} = (A_\alpha + A_\beta + hA)\Big|_{\beta=\alpha} = \frac{dA(\alpha,\alpha)}{d\alpha} +$$

$$+hA(\alpha,\alpha) = e^{-h\alpha}(e^{h\alpha}A(\alpha,\alpha))' \tag{1.46}$$

айният бажарилади. (1.44) ва (1.46) тенгликлардан қуйидаги

$$(e^{h\alpha}A(\alpha,\alpha))' = -\frac{1}{2}e^{h\alpha}\left\{q\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \int_0^\alpha q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta\right\} \tag{1.47}$$

формула келиб чиқади. (1.47) айниятни $[0,\eta]$ оралиқда α бўйича интеграллаймиз ва (1.41) шартдан фойдаланиб, қуйидаги

$$A(\eta,\eta)=-he^{-h\eta}-\frac{1}{2}e^{-h\eta}\int_{0}^{\eta}e^{h\alpha}\left\{q\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\int_{0}^{\alpha}q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta\right\}d\alpha \quad (1.48)$$

тенгликни келтириб чиқарамиз. (1.48) ифодани (1.45) тенгликка қўйиб, ушбу

$$\begin{aligned}A(\xi,\eta)=&-he^{-h\eta}-\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}q\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha-\frac{1}{2}e^{-h\eta}\int_{0}^{\eta}e^{h\alpha}q\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha-\\&-\frac{1}{2}e^{-h\eta}\int_{0}^{\eta}e^{h\alpha}\left\{\int_{0}^{\alpha}q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta\right\}d\alpha-\qquad(1.49)\\&-\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\left\{\int_{0}^{\eta}q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)A(\alpha,\beta)d\beta\right\}d\alpha\end{aligned}$$

айниятга эга бўламиз, яъни $A(\alpha,\beta)$ функция (1.49) интеграл тенгламани қаноатлантирар экан. Аксинча, $A(\alpha,\beta)$ функция (1.49) интеграл тенгламани қаноатлантирса ва $q(x)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, (1.49) интеграл тенгламадан фойдаланиб $A(\alpha,\beta)$ функция (1.40)+(1.41)+(1.42) масаланинг ечими бўлишини тўғридан-тўғри текшириб кўриш мумкин.

(1.49) тенглама Волтерра туридаги интеграл тенглама бўлгани учун унинг ечими мавжуд ва ягонадир. Буни кетма-кет яқинлашишлар усули билан кўрсатиш мумкин.

$q(x)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлмаса, уни узлуксиз дифференциалланувчи $q_n(x)$ функциялар билан яқинлаштириб, $K_n(x,t)$ функциялар кетма-кетлигини хосил қиламиз, бу кетма-кетликнинг лимити $K(x,t)$ алмаштириш операторининг ядроси бўлади. **Теорема 1 исботланди**.

Изох. Шуни айтиб ўтиш керакки, $K(x,t)$ ядро λ параметрга боғлик эмас.

Мисол 1. Агар теорема 1 нинг шартида A ва B операторлар қуйидаги

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}, \qquad h_1=0$$

ва

$$B=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x), \qquad h_2=h$$

кўринишда берилган бўлса, алмаштириш оператори ушбу

$$Xf(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $K(x,t)$ ядро ушбу

$$\begin{cases} K_{xx}-q(x)K=K_{tt} \\ K(x,x)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds \\ K_t\big|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{1.50}$$

масаланинг ечимидир.

$\varphi(x,\lambda)$ ва $\varphi_0(x,\lambda)$ орқали мос равишда қуйидаги

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y \\ y(0)=1 \\ y'(0)=h \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} -y''=\lambda y \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Коши масалаларининг ечимларини белгилайлик. Бизга маълумки $\varphi_0(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x$ бўлади. Алмаштириш операторининг хоссасига кўра ушбу

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt \tag{1.51}$$

тенглик ўринли бўлади.

Мисол 2. Агар теорема 1 нинг шартида A ва B операторлар ушбу

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x), \qquad h_1=h$$

ва

$$B=-\frac{d^2}{dx^2}, \qquad h_2=0$$

кўринишда берилган бўлсин десак, алмаштириш оператори қуйидаги

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x H(x,t) f(t)dt$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $H(x,t)$ ядро ушбу

$$\begin{cases} H_{xx} = H_{tt} - q(t)H \\ H(x,x) = -h - \dfrac{1}{2}\int_0^x q(s)ds \\ (H_t - hH)\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1.52}$$

масаланинг ечимидир.

Алмаштириш операторининг хоссасига кўра ушбу

$$\cos\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{1.53}$$

тенглик бажарилади.

Изох. Бу ерда ҳам $H(x,t)$ ядро λ параметрга боғлиқ эмас.

Ушбу

$$q(x) = 2\frac{dK(x,x)}{dx}, \tag{1.54}$$

$$q(x) = -2\frac{dH(x,x)}{dx} \tag{1.55}$$

ва

$$h = K(0,0) = -H(0,0) \tag{1.56}$$

боғланишлар тескари масала ечишда муҳим аҳамият касб этади.

Теорема 3.1 (*В.А.Марченко, 1950 й.*). $\rho_1(\lambda)$ функция ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q_1(x)y = \lambda y, \qquad (0 \le x < \infty) \\ y'(0) = h_1 y(0) \end{cases} \tag{1.57}$$

Штурм-Лиувилл масаласининг бирорта спектрал функцияси, $\rho_2(\lambda)$ функция эса ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q_2(x)y = \lambda y, \qquad (0 \le x < \infty) \\ y'(0) = h_2 y(0) \end{cases} \tag{1.58}$$

Штурм-Лиувилл масаласининг бирорта спектрал функцияси бўлиб,

$$\rho_2(\lambda) = C\rho_1(\lambda), \qquad C = \text{const}$$

тенглик бажарилса, у холда $q_1(x) \equiv q_2(x)$ ва $h_1 = h_2$ тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функциялар $[0,\infty)$ ораликда узлуксиз хақиқий функциялар, h_1, h_2 эса хақиқий сонлар.

Исбот. $\varphi(x,\lambda)$ орқали $-y'' + q_1(x)y = \lambda y$ тенгламанинг қуйидаги

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h_1$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини, $\psi(x,\lambda)$ билан эса $-y'' + q_2(x)y = \lambda y$ тенгламанинг қуйидаги

$$\psi(0,\lambda) = 1, \qquad \psi'(0,\lambda) = h_2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини белгилаймиз. У ҳолда алмаштириш операторининг хоссасига кўра ушбу

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{1.59}$$

тенглик ўринли бўлади. $b \in [0,\infty)$ ихтиёрий сон бўлсин ва $f(x)$ функция $x > b$ бўлганда нолга айланувчи иҳтиёрий узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг $\psi(x,\lambda)$ ечимлар бўйича Фурье алмаштириши

$$F(\lambda) = \int_0^b f(x)\psi(x,\lambda)dx \tag{1.60}$$

мавжуд бўлиб, Парсевал тенглиги ушбу

$$\int_0^b f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho_2(\lambda) = C\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho_1(\lambda) \tag{1.61}$$

кўринишда бўлади. (1.60) тенгликда $\psi(x,\lambda)$ ўрнига унинг (3.39) тенглик билан аниқланган қийматини қўйиб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак, қуйидаги

$$F(\lambda) = \int_0^b g(x)\varphi(x,\lambda)dx \tag{1.62}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$g(x) = f(x) + \int_x^b K(t,x) f(t)dt.$$

Кўриниб турибдики, $g(x)$ функция ҳам $x > b$ бўлганда нолга айланади. (1.62) тенгликдаги $F(\lambda)$ функция $g(x)$ функциянинг $\varphi(x,\lambda)$ ечимлар бўйича ёзилган Фурье алмаштириши бўлади. Шунинг учун Парсевал тенглигидан ва (1.61) тенгликдан қуйидаги

$$\int_0^b g^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho_1(\lambda) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho_2(\lambda) = \frac{1}{C}\int_0^b f^2(x)dx$$

тенгликларга эга бўламиз. Бундан эса ушбу

$$C\int_0^b g^2(x)dx = \int_0^b f^2(x)dx$$

тенглик келиб чиқади. Шунинг учун қуйидаги

$$Af = \sqrt{C}\left\{ f(x) + \int_x^b K(t,x) f(t)dt \right\}$$

оператор $L^2(0,b)$ фазода унитар бўлади. A унитар оператор учун эса $(A^*)^{-1} = A$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда A^* оператор A операторга қўшма бўлган оператор, яъни ушбу

$$\int_0^b Af(x)\cdot h(x)dx = \int_0^b f(x)A^*h(x)dx$$

шартни қаноатлантирувчи оператордир.

$$\int_0^b Af(x)\cdot h(x)dx = \int_0^b \sqrt{C}\left[f(x) + \int_x^b K(t,x) f(t)dt \right] h(x)dx =$$

$$= \sqrt{C}\left[\int_0^b f(x)h(x)dx + \int_0^b h(x)\int_x^b K(t,x) f(t)dtdx \right] =$$

$$= \int_0^b \sqrt{C}\left\{ h(x) + \int_0^x K(x,s)h(s)ds \right\} f(x)dx,$$

яъни

$$A^*h(x) = \sqrt{C}\left(h(x) + \int_0^x K(x,s)h(s)ds \right) \tag{1.63}$$

бўлади.

A^* оператор Волтерра туридаги оператор бўлгани учун $(A^*)^{-1}$ оператор мавжуд ва у ҳам Волтерра туридаги оператор бўлади:

$$(A^*)^{-1}h(x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\left\{h(x) + \int_0^x H(x,t)h(t)dt\right\}. \qquad (1.64)$$

Ушбу $(A^*)^{-1} = A$ тенгликка кўра

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\left(h(x) + \int_0^x H(x,t)h(t)dt\right) = \sqrt{C}\left(h(x) + \int_x^b K(t,x)h(t)dt\right)$$

$$h(x) + \int_0^x H(x,t)h(t)dt = C\left(h(x) + \int_x^b K(t,x)h(t)dt\right) \qquad (1.65)$$

айният келиб чиқади. x нуқтани тайинлаб, $t < x$ қийматлар учун $h(t)$ функция нолга тенг ва қолган жойларда ихтиёрий деб олсак, (1.65) айниятга асосан қуйидаги

$$C\left(h(x) + \int_x^b K(x,t)h(t)dt\right) = h(x) \qquad (1.66)$$

тенгликка эга бўламиз. Бунда $x = b$ десак ва $h(b)$ нинг ихтиёрий эканлигини эътиборга олсак, $C = 1$ келиб чиқади.

Демак,

$$\int_x^b K(x,t)h(t)dt = 0 \qquad (1.67)$$

бўлар экан. Агар охирги тенгликда $h(t) = K(x,t)$ десак, $K(x,t) \equiv 0$ бўлишини кўрамиз. (3.39) формулага асосан

$$\varphi(x,\lambda) \equiv \psi(x,\lambda)$$

тенгликка эга бўламиз. Бошланғич шартлардан $h_1 = h_2$ тенглик келиб чиқади. (3.37) ва (3.38) масалалардаги дифференциал тенгламалардан

$$-\varphi'' + q_1(x)\varphi = \lambda\varphi$$

$$-\varphi'' + q_2(x)\varphi = \lambda\varphi$$

хосил бўлади, яъни

$$[q_1(x) - q_2(x)]\varphi(x,\lambda) = 0$$

бўлар экан. $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функцияларнинг узлуксизлигини ва $\varphi(x,\lambda)$ функция нолларининг ажралганлигини эътиборга олиб, $q_1(x) \equiv q_2(x)$ айниятни келтириб чиқарамиз. **Теорема 3.1 исботланди.**

Марченко теоремасидан фойдаланиб 2§ да келтирилган Борг теоремасининг бошқача исботини келтирамиз.

Ушбу

$$\varphi'' + \{\lambda - q(t)\}\varphi = 0 \tag{1.68}$$

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0 \tag{1.69}$$

$$\varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0 \tag{1.70}$$

чегаравий масаланинг хос қийматлар тўпламини $S = S(q,h,H)$ орқали белгилаймиз.

$$\varphi'' + \{\lambda - r(t)\}\varphi = 0 \tag{1.71}$$

$$\varphi'(0) - h^*\varphi(0) = 0 \tag{1.72}$$

$$\varphi'(\pi) + H^*\varphi(\pi) = 0 \tag{1.73}$$

чегаравий масаланинг хос қийматлар тўпламини $S(h^*,H^*,r)$ орқали белгилаймиз.

Теорема 3.1. Агар $S(h,H,q) = S(h^*,H^*,r)$ ва $S(h,H_1,q) = S(h^*,H_1^*,r)$ $H_1 \neq H,\ H_1^* \neq H^*$ бўлса, у ҳолда $h = h^*,\quad H = H^*,\quad H_1 = H_1^*,\quad q(t) = r(t)$ бўлади.

Исбот. $S(h,H,q) = S(h^*,H^*,r)$ тўпламнинг элементлари кетма-кетлигини $\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_n...$ орқали белгилаймиз. Агар $\varphi(t,\lambda_n)$ (3.48)+(3.49)+(1.70) масаланинг хос функциялари, $\psi(t,\lambda_n)$ (1.71)+(1.72)+(1.73) масаланинг хос функциялари бўлса, у ҳолда

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left\{ \int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda_n)dt \right\}^{-1}, \qquad \sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left\{ \int_0^\pi \phi^2(t,\lambda_n)dt \right\}^{-1}$$

бўлади. Шунинг учун биз $\int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda_n)dt = C\int_0^\pi \phi^2(t,\lambda_n)dt \qquad n=1,2,....$ (1.75)

эканлигини исбот қилсак, у ҳолда Марченко теоремасига кўра Борг теоремасининг исботи келиб чиқади. $\varphi(t,\lambda)$ орқали (1.68) тенгламанинг

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi'(0)=h \tag{1.76}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини белгилаймиз. (1.68) тенгламада λ ни μ га алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\varphi''(t,\mu)+\{\mu-q(t)\}\varphi(t,\mu)=0. \tag{1.77}$$

(1.68) тенгламани $\varphi(t,\mu)$ га кўпайтирамиз, (1.77) тенгламани $\varphi(t,\lambda)$ га кўпайтирамиз ва биридан иккинчисини айириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$[\varphi'(t,\lambda)\cdot\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\lambda)\cdot\varphi'(t,\mu)]'=(\mu-\lambda)\varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu).$$

Охирги тенгламани $(0,\pi)$ оралиқда интеграллаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\varphi_t'(\pi,\lambda)\cdot\varphi(\pi,\mu)-\varphi(\pi,\lambda)\cdot\varphi_t'(\pi,\mu)}{\mu-\lambda}=\int_0^\pi \varphi(t,\lambda)\cdot\varphi(t,\mu)dt.$$

Бу тенгликда $\mu\to\lambda$ да лимитга ўтамиз, натижада

$$\int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda)dt=\varphi_t'(\pi,\lambda)\cdot\varphi_\lambda'(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\cdot\varphi_{t\lambda}''(\pi,\lambda) \tag{1.78}$$

бўлади. Ҳар бир фиксирланган t да $\varphi(t,\lambda)$ ва $\varphi_t'(t,\lambda)$ лар бутун функциялар бўлади. Шунинг учун $\varphi_t'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)$ функция қуйидагича

$$\varphi_t'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=C_1\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)=C_1\cdot\Phi_1(\lambda) \qquad C_1=const \tag{1.79}$$

чексиз кўпайтувчига ёйилади. Худди шундай, агар $\{\mu_n\}=S(h,H_1,q)$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi_t'(\pi,\lambda)+H_1\varphi(\pi,\lambda)=C_2\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)=C_2\cdot\Phi_2(\lambda)\ ,\ C_2=const \tag{1.80}$$

бўлади. (1.79)-(1.80) системаларни ечиб,

$$\varphi_t' = \frac{H_1 C_1 \varPhi_1 - C_2 H \varPhi_2}{H_1 - H} \tag{1.81}$$

$$\varphi(\pi,\lambda) = \frac{C_1 \varPhi_1 - C_2 \varPhi_2}{H - H_1} \tag{1.82}$$

ларни топамиз. Бу тенгламаларни λ бўйича дифференциаллаб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\varphi_\lambda'(\pi,\lambda) = \frac{C_1 \varPhi_1' - C_2 \varPhi_2'}{H - H_1} \tag{1.83}$$

$$\varphi_{t\lambda}''(\pi,\lambda) = \frac{H_1 C_1 \varPhi_1' - H C_2 \varPhi_2'}{H_1 - H} \ . \tag{1.84}$$

(1.81), (1.82),(1.83) ва (1.84) ларни (1.78) га қўйиб, содда шакл алмаштиришдан кейин қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda)dt = \frac{C_1 C_2}{H_1 - H}(\varPhi_1 \varPhi_2' - \varPhi_2 \varPhi_1'). \tag{1.85}$$

Хусусан, $\lambda = \lambda_n$ учун

$$\int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda)dt = \frac{C_1 C_2}{H - H_1} \varPhi_1'(\lambda_n) \varPhi_2(\lambda_n) \tag{1.86}$$

ўринли. Агар $S(h,H,q) = S(h^*,H^*,r)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликни ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

$$\int_0^\pi \phi^2(t,\lambda_n)dt = \frac{C_1 * C_2 *}{H * - H_1 *} \varPhi_1'(\lambda_n) \varPhi_2(\lambda_n) \tag{1.87}$$

(1.86)-(1.87) дан (1.74) келиб чиқади. **Теорема 3.2 исботланди.**

Агар (1.68) тенгламада *q(x)* коэффициент

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1.88}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{1.89}$$

Штурм-Лиувилл масаласи чеклита манфий хос қийматларга эга бўлиб, $\lambda > 0$ учун спектр узлуксиз бўлади, яъни спектрал $\rho(\lambda)$ функция $\lambda > 0$да узлуксиз бўлади. Қуйидагича $\sqrt{\lambda} = \mathrm{s}$ белгилаш киритамиз. Ушбу

$$M_\alpha(s) = i\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty q(t)e^{-ist}\varphi_\alpha(t,\lambda)dt$$

функцияни қараймиз. Бунда $\varphi_\alpha(\mathrm{t},\lambda)$ функция (1.88) тенгламанинг (1.89) шартини қаноатлантирувчи ечими.

$M_\alpha(s)$ функция қуйи ярим текисликда аналитик бўлиб, ҳақиқий ўққа узлуксиз давом қилади. $\alpha > 0$ ва $t \to \infty$ учун

$$\varphi_\alpha(t,\lambda) = |M_\alpha(s)|\sin(st - \delta_\alpha(s)) + \overset{=}{0}(1).$$

Бу ерда $\delta_\alpha(s) = \arg M_\alpha(s)$, $\delta_\alpha(s)$ функцияга (1.88) тенгламанинг сочилиш

функцияси дейилади. $\rho(\lambda)$ функция қуйидаги

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_{\mathrm{k}} < \lambda} \left\{ \int_0^\infty \varphi_\alpha^2(t,\lambda_k)dt \right\}^{-1}, \lambda < 0 \\ \sum\limits_{\lambda_{\mathrm{k}} < \lambda} \left\{ \int_0^\infty \varphi_\alpha^2(t,\lambda_k)dt \right\}^{-1} + \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}|M(\mu)|^2}, \lambda > 0 \end{cases} \tag{1.90}$$

формула бўйича аниқланади**.**

Теорема (*Левинсон*). $\delta_\alpha(\mathrm{s})$ сочилиш функцияси, $\lambda_{\mathrm{j}} = -\chi_j^2$, $j = 1,2,3,\ldots$ хос қийматлар ва $m_j = \int\limits_0^\infty \varphi^2(t,\lambda_k)dt,\ k = \overline{1,n}$ нормалловчи ўзгармаслар (1.88) тенгламани ва (1.89) чегаравий шартни ягона аниқлайди.

Исбот. Марченко теоремасига кура $\lambda_{\mathrm{j}}, m_j$ $\delta_\alpha(s)$лар $\rho(\lambda)$функцияни ягона аниқлашини кўрсатиш етарли. $\lambda < 0$ учун бу ўз-ўзидан равшан. Энди $\lambda \geq 0$ учун кўрсатамиз. Бунинг учун $\delta_\alpha(s)$ сочилиш функцияси $M_\alpha(s)$ ни ҳақиқий s ларда бир қийматли аниқлашини кўрсатиш етарли. Биз қуйидагига эгамиз:

$$\ln M_\alpha(s) = \ln|M_\alpha(s)| + i\arg M_\alpha(s)$$

Хақиқий ўқда $\arg M_\alpha(s) = \delta_\alpha(s)$ маълум. Шундай қилиб $\ln M_\alpha(s)$ аналитик функциянинг мавҳум қисми ҳақиқий ўқда маълум. Ушбу

$$\ln M_\alpha(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_\alpha(\tau)}{\mathrm{s} - \tau} d\tau$$

формулага кўра аналитик функциянинг мавҳум қисми бўйича функциянинг ўзи ҳам тикланади. Бу формуладан ҳақиқий $\mathrm{s} = \sigma$ лар учун қуйидаги

$$\ln|M_\alpha(s)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_\alpha(\tau)}{\sigma - \tau} d\tau \qquad (1.91)$$

тенглик ўринли. Шундай қилиб $M_\alpha(\sigma)$ функция ҳақиқий σ лар учун сочилиш фазаси бўйича бир қийматли аниқланади. Бу эса теорема исботини беради.

§4. Дирак системаси учун ягоналик теоремаси.

Ушбу Дирак системасини

$$\begin{cases} U_2' + (V(x) + \mu)U_1 = \lambda U_1 \\ -U_1' + (V(x) - \mu)U_2 = \lambda U_2, \qquad x \in (0, \pi) \end{cases} \qquad (1.92)$$

қуйидаги чегаравий шартда

$$U_1(0)\cos\alpha + U_2(0)\sin\alpha = 0 \qquad (1.93)$$

$$U_1(\pi)\cos\beta + U_2(\pi)\sin\beta = 0 \qquad (1.94)$$

қараймиз. Бу ерда $V(x) \in C[0, \pi]$, $\mu > 0$, $\lambda \in C$. (1.92) тенгламани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(x) + \mu - \lambda & 0 \\ 0 & V(x) - \mu - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ёки

$$B \cdot \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y,$$

бунда $B=\begin{pmatrix} 0\,1 \\ -1\,0 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix}$, $\Omega(x)=\begin{pmatrix} V(x)+\mu & 0 \\ 0 & V(x)-\mu \end{pmatrix}$.

(1.92)-(1.94) масаланинг спектрал функцияси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\rho(\lambda)=\begin{cases} \sum\limits_{0<\lambda_n\le\lambda}\frac{1}{\alpha_n{}^2}, & \lambda>0 \\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n\le 0}\frac{1}{\alpha_n{}^2}, & \lambda<0 \end{cases} \tag{1.95}$$

бунда

$$\alpha_n{}^2=\int_0^\pi\left[U_1{}^2(x,\lambda_n)+U_2{}^2(x,\lambda_n)\right]dx, \quad n\in Z.$$

$\begin{pmatrix} U_1(x,\lambda) \\ U_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ функция (1.92) тенгламанинг

$$\begin{cases} U_1(0,\lambda)=\sin\alpha \\ U_2(0,\lambda)=-\cos\alpha \end{cases} \tag{1.96}$$

шартни каноатлантирувчи ечими. $m(\lambda)=\frac{v_2(0,\lambda)}{v_1(0,\lambda)}$ тенглик ёрдамида

m функцияни киритамиз. Бунда $\begin{pmatrix} v_1(x,\lambda) \\ v_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ функция қуйидаги

$$v_1(\pi,\lambda)=\sin\beta, \qquad v_2(\pi,\lambda)=-\cos\beta. \tag{1.97}$$

шартларни қаноатлантирувчи функция.

Теорема 4.1. $\rho(\lambda)$ ва $\rho^*(\lambda)$ спектрал функциялар $V(x),\mu,\alpha,\beta$ ва $V^*(x),\mu^*,\alpha^*,\beta^*$ ларга мос спектрал функциялар булсин. Агар

$$\rho^*(\lambda)=\rho(\lambda) \;\; \lambda\in R'$$

булса, у холда $V^*(x)=V(x)$, $\mu^*=\mu$, $tg\beta^*=tg\beta$, $tg\alpha^*=tg\alpha$ булади.

Исбот. Бизга (1.92)-(1.94) масаланинг Грин матрица функцияси керак. У куйидагича аникланади:

$$G(x,y,\lambda)=\rho\cdot V\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{U(x,\lambda_n)U^T(y,\lambda_n)}{\alpha_n{}^2(\lambda-\lambda_n)}, \lambda\ne\lambda_n \tag{1.98}$$

бу ерда

$$U=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix},\quad U\cdot v^T=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}U_1v_1 & U_1v_2\\U_2v_1 & U_2v_2\end{pmatrix},\qquad \rho\cdot V\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}=\underset{N\to\infty}{Lim}\sum_{-N}^{N}a_n\,.$$

(1.98) катор хар бир (x,y) нуктада якинлашувчи булиб, якинлашиш $x=y$ диоганалдан ташкарида локал текис яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун Грин матрица функцияси $x<y$ ва $x>y$ лар учун узлуксиз булади ва унинг йигиндисини куйидагича ёзиш мумкин.

$$G(x,y,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{1}{W(\lambda)}U(x,\lambda)\cdot v^T(y,\lambda), & x<y\\ -\dfrac{1}{W(\lambda)}v(x,\lambda)\cdot U^T(y,\lambda), & y<x\end{cases}\tag{1.99}$$

бу ерда $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ ва $W(\lambda)=U_1(x,\lambda)v_2(x,\lambda)-U_2(x,\lambda)v_1(x,\lambda)$ W функция x га боглик эмас.

$$\begin{aligned}&W_x'=U_1'v_2-U_2'v_1+U_1v_2'-U_2v_1'=(V-m-\lambda)U_2v_2-(\lambda-V-m)U_1v_1+\\&+(\lambda-V-m)U_1v_1-(V-m-\lambda)U_2v_2=0.\end{aligned}$$

Лемма 4.1

$$G_{11}(0,0,\lambda)=\sin^2\alpha\cdot p\cdot v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha},$$ бунда

$$G(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}G_{11}(x,y,\lambda) & G_{12}(x,y,\lambda)\\G_{21}(x,y,\lambda) & G_{22}(x,y,\lambda)\end{pmatrix}$$ ва $$p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}\,.$$

Исбот. Ушбу айирмани караймиз: $G_{11}(0,0+0,\lambda)-G_{11}(0,0,\lambda)$. Таърифга кура

$$G_{11}(0,y,\lambda)=\sin\alpha\cdot p\cdot V\cdot\sum\frac{U_1(y,\lambda_n)}{\alpha_n^{\ 2}(\lambda-\lambda_n)}$$

Ушбу асимптотик

$$U_1(x,\lambda)=\sin\left\{\lambda x-\int_0^x V(t)dt+\alpha\right\}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|}\right),\tag{1.100}$$

$$U_2(x,\lambda)=-\cos\left\{\lambda x-\int_0^x V(t)dt+\alpha\right\}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{|\lambda|}\right),|\lambda|\to\infty\tag{1.101}$$

$$\alpha_n{}^2 = n + \underline{\underline{O}}(\frac{1}{1+|n|}), \qquad \alpha_n{}^2(\lambda - \lambda_n) = -\pi n + \underline{\underline{0}} \tag{1.102}$$

формулаларга кўра ушбу йиғинди

$$\sin\alpha \cdot p.V.\sum_{n\neq 0} \frac{\sin(\lambda_n y - \int\limits_0^y V(t)dt + \alpha)}{-\pi n} \tag{1.103}$$

қандай сакрашга эга бўлса, G_{11} ҳам худди шундай сакрашга эга бўлади (чунки айирма узлуксиздир).

Энди хос қийматлар асимптотикасидан фойдалансак.

$$\lambda_n = n + \frac{v}{\pi} + \underline{\underline{0}}(\frac{1}{1+|n|}), \quad v = \beta - \gamma + \int\limits_0^y V(t)dt \tag{1.104}$$

қуйидагига эга бўламиз.

$$\sin(\lambda_n y - \int\limits_0^y V(t)dt + \alpha) = \sin\left\{ny + a(y) + \underline{\underline{0}}(\frac{1}{1+|n|})\right\}$$

$$a(y) = \frac{v}{\pi} y - \int\limits_0^y V dt + \alpha.$$

Демак (1.103) функция ушбу $\sin\alpha\rho \cdot V \cdot \sum\limits_{n\neq 0} \frac{\sin(ny + a(y))}{-\pi n}$ (1.105)

функция бир ҳил сакрашга эга бўлади.

$$\sin\alpha\rho \cdot V \cdot \sum_{n\neq 0} \frac{\sin(ny + a(y))}{-\pi n} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot a(y) \cdot \frac{2}{-\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} \tag{1.106}$$

Маълумки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n}$ қатор $(0,2\pi)$ да берилган $\frac{\pi - y}{2}$ функциянинг Фурье каторидир. Бу функция $y = 0$ нуқтада $\frac{\pi}{2}$ сакрашга эга. Шундай қилиб (1.106) функция $-\sin\alpha\cos\alpha$ сакрашга эга. Шунинг учун (1.103) дан ушбу тенгликка эга бўламиз.

$$G_{11}(0,0,\lambda)-G_{11}(0,0+0,\lambda)=\sin\alpha\cos\alpha$$

$$G_{11}(0,0,\lambda)-\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{W(\lambda)}U_1(0,\lambda)\cdot v_1(0,\lambda)=$$

$$=-\frac{\sin\alpha\cdot v_1(0,\lambda)}{U_1(0,\lambda)\cdot v_2(0,\lambda)-U_2(0,\lambda)\cdot v_1(0,\lambda)}=-\frac{\sin\alpha\cdot v_1(0,\lambda)}{\sin\alpha\cdot v_2(0,\lambda)+\cos\alpha\cdot v_1(0,\lambda)}=$$

$$=\frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot m(\lambda)+\cos\lambda}$$

Лемма исботланди.

Лемма 4.2 Ушбу тенглик ўринли

$$G_{11}(0,0,\lambda)=\cos^2\alpha\cdot p\cdot v\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=-\sin\alpha\cos\alpha+\frac{m(\lambda)\cos\alpha}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha}$$

Исбот. Худди юқоридагидек фикрлаш юритамиз.

$G_{22}(0,0+0,\lambda)-G_{22}(0,0,\lambda)$ сакрашни топамиз. Таърифга кўра

$$G_{22}(0,y,\lambda)=p\cdot V\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{U_2(0,\lambda_n)\cdot U_2(y,\lambda_n)}{\alpha_n{}^2(\lambda-\lambda_n)},\quad \lambda\neq\lambda_n \quad \text{яъни}$$

$$G_{22}(0,y,\lambda)=-\cos\alpha p\cdot V\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{U_2(y,\lambda_n)}{\alpha_n{}^2(\lambda-\lambda_n)},$$

(1.101)+(1.102) асимптотик формулаларга кўра ушбу йиғинди

$$\cos\alpha\cdot\rho\cdot V\cdot\sum_{n\neq0}\frac{\cos(\lambda_n y-\int_0^y V(t)dt+\alpha)}{-\pi n} \tag{1.107}$$

қандай сакрашга эга бўлса, $G_{22}(0,y,\lambda)$ ҳам худди шундай сакрашга эга бўлади.(1.104) асимптотикага кўра

$$\cos(\lambda_n y-\int_0^y V(t)dt+\alpha)=\cos\left\{ny+a(y)+\underline{\underline{0}}\left(\frac{1}{1+|n|}\right)\right\}.$$

Демак (1.107) йиғинди ушбу

$$\cos\alpha\cdot\rho\cdot V\cdot\sum_{n\neq0}\frac{\cos(ny+a(y))}{-\pi n}$$

функция билан бир ҳил сакрашга эга бўлади.

$$\cos\alpha\cdot\rho\cdot V\cdot\sum_{n\neq 0}\frac{\cos(ny+a(y))}{-\pi n}=\cos\alpha\cdot\sin a(y)\cdot\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n}.$$

Бунда сакраш $\sin\alpha\cos\alpha$ га тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб

$$G_{22}(0,0,\lambda)+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\cos\alpha\cdot v_2(0,\lambda)}{\sin\alpha\cdot v_2(0,\lambda)+\cos\alpha\cdot v_1(0,\lambda)}=\frac{m(\lambda)\cos\alpha}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Лемма исботланди.

Натижа 4.1.

А) Агар $\sin\alpha\neq 0$ булса, у холда

$$p\cdot v\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=ctg\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha}$$

В) Агар $\cos\alpha\neq 0$ булса , у холда

$$p\cdot v\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=-tg\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{m(\lambda)}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha}$$

С)

$$p\cdot v\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}=\frac{m(\lambda)\cos\alpha-\sin\alpha}{m(\lambda)\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Натижа 4.2.

Спектрал функция $tg\alpha$ ва $m(\lambda)$ функцияни бир қийматли аниқлайди ва аксинча $m(\lambda)$ функция ва $tg\alpha$ спектрал функцияни бир қийматли аниқлайди.

Исбот. Спектрал функция αни бир қийматли аниқлайди , яъни $tg\alpha$ ни бир қийматли аниқлайди . 4.1 с) натижага кўра $m(\lambda)$ ни ҳам бир қийматли аниқлайди . $m(\lambda)$ ва $tg\alpha$

$$p\cdot v\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}$$

алмаштиришни бир кийматли аниклайди ва стильтес тескари алмаштиришидан $\rho(t)$ ни бир кийматли аниклаши келиб чикади.

Теорема 4.1 исботини давом қилдирамиз. Чегаравий шартни $\alpha=0$ да караймиз, у холда 4.1 в) натижага кура

$$m(\lambda) = p\cdot v\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{\lambda - t}$$

Стильтес тескари алмаштиришини куллаб $\rho(\lambda)$ ни топамиз. $\rho(\lambda)$ буйича $V(x)$ва $tg\beta$ни топамиз. **Теорема 4.1 исботланди.**

Ягоналик теоремалари бузилишига доир мисол.

Ушбу чегаравий масалани қараймиз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x\in(0,\pi) \qquad (1.108)$$

$$\begin{cases} y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0 \\ y_1(\pi)\cos\beta + y_2(\pi)\sin\beta = 0. \end{cases} \qquad (1.109)$$

$p(x)\equiv 0, \quad q(x)\equiv 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1.108)+(1.109) масалани хос кийматлари, хос функциялари ва нормалловчи ўзгармаслари мос равишда қуйидагиларга тенг бўлади:

$$\lambda_n = \frac{\beta-\alpha}{\pi} + n, \quad n\in Z,$$

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_n x + \alpha) \\ \cos(\lambda_n x + \alpha) \end{pmatrix}, \qquad n\in Z, \ \alpha_n = \sqrt{\pi}, \ n\in Z.$$

Энди (1.108) тенгламани ушбу

$$\begin{cases} y_1(0)\cos\alpha_1 + y_2(0)\sin\alpha_1 = 0 \\ y_1(\pi)\cos\beta_1 + y_2(\pi)\sin\beta_1 = 0. \end{cases} \qquad (1.110)$$

чегаравий шартда қараймиз. (1.108)+(1.110) чегаравий масаланинг хос қийматлари, хос функциялари ва нормалловчи ўзгармасларини мос равишда $\tilde{\lambda}_n$, $\tilde{y}_n(x)$ ва $\tilde{\alpha}_n$, $n\in Z$ лар орқали белгилаймиз. Агар α_1 ва β_1 ларни ушбу $\beta_1 - \alpha_1 = \beta - \alpha$ тенгликни қаноатлантирадиган қилиб танласак $\lambda_n \equiv \tilde{\lambda}_n$, $n\in Z$, $\alpha_n \equiv \tilde{\alpha}_n$, $n\in Z$ бўлади, яъни спектрал функциялар $\tilde{\rho}(\lambda) = \rho(\lambda)$, $\lambda\in R^1$ устма-уст тушади, аммо (1.108)+(1.109) ва (1.108)+(1.110) чегаравий масалалар айнан устма-уст тушмайди.

II. БОБ

Штурм-Лиувилл операторининг тескари масалалари учун мавжудлик теоремалари.

§2.1. $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар кетма-кетлиги буйича тескари масаланинг мавжудлиги.

Ушбу параграфда $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг спектрал характеристикалар булиши учун зарур ва етарли шартлар келтириб чиқарилган. Ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in [0,\pi] \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \qquad h, H \in R' \end{cases} \tag{2.2}$$

чегаравий масалани қараймиз. Бунда $q(x)$ функция $[0,\pi]$ да интегралланувчи хақиқий функция. (2.1.1) тенгламанинг

$$y(0) = 1 \ , y'(0) = h \tag{2.3}$$

бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечимини $\varphi(x,\lambda)$ орқали белгилаймиз. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2...$ сонлар (2.1.1)+(2.2) чегаравий масаланинг хос қийматлари бўлсин. У ҳолда $\varphi(x,\lambda_n)$ $(n = 0,1,2...)$ функциялар берилган чегаравий масаланинг хос функциялари бўлади.

Ушбу

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{2.4}$$

сонларга нормалловчи сонлар дейилади. $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонларга (2.1.1)+(2.2) чегаравий масаланинг спектрал характеристикалари дейилади.

Ушбу параграфда олдиндан берилган $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар кетма-кетлаги (2.1.1)+(2.2) кўринишидаги биророта чегаравий масаланинг спектрал характеристикалари бўлиши учун зарурий ва етарли шартлар келтирилади.

Бизга теорема исботида керак бўладиган ушбу асимптотик формулаларни исботсиз келтириб ўтамиз. Исботи билан [...] иш иловасида танишишингиз мумкин.

Агар $q^{(m)}(x)\in L_1(0,\pi)$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{a_0}{n}+\ldots+\frac{a_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}}+\frac{\gamma_n}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}} \tag{2.5}$$

$$\sqrt{\alpha_n}=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\ldots+\frac{b_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}}+\frac{\tau_n}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}} \tag{2.6}$$

бўлади. Бу ерда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt\right] \tag{2.7}$$

$a_1,\ldots,a_{\left[\frac{m}{2}\right]}$ ва $b_1,\ldots,b_{\left[\frac{m}{2}\right]}$ ўзгармас сонлар, $[x]$ белги x сонининг бутун қисмини билдиради.

Агар m жуфт сон бўлса, у ҳолда $\gamma_n=\overset{=}{0}(1)$ ва $\tau_n=\overset{=}{0}\left(\frac{1}{n}\right)$ ёки

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{\ 2}<\infty \quad \text{ва} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2<\infty \quad \text{ёки} \quad \gamma_n=\underset{=}{0}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \tau_n=\underset{=}{0}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

бўлади.

Агар m ток сон бўлса, у ҳолда $\gamma_n=\overset{=}{0}\left(\frac{1}{n}\right)$ ва $\tau_n=\overset{=}{0}(1)$ ёки

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2<\infty \quad \text{ва} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\tau_n^{\ 2}<\infty \quad \text{ёки} \quad \gamma_n=\underset{=}{0}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \tau_n=\underset{=}{0}\left(\frac{1}{n}\right) \ \text{бўлади.}$$

Теорема 2.1. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетлиги ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 \le x \le \pi \\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, & q^m(x) \in L_1(0,\pi) \end{cases}$$

кўринишидаги масаланинг хос қийматлари ва нормалловчи ўзгармаслари бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир.

1) $\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \overset{=}{0}(\frac{1}{n}), n \to \infty$

$$\sqrt{\alpha_n} = \frac{\pi}{2} + \overset{=}{0}(\frac{1}{n}), n \to \infty \qquad (2.8)$$

2) $\lambda_n \ne \lambda_k$ агар $n \ne k$

$$\alpha_n > 0,\ n = 0,1,2,... \qquad (2.9)$$

3) $F(x,t) = \frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x\cos\sqrt{\lambda_0}t - \frac{1}{\pi}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right] \qquad (2.10)$$

функциянинг $[0,\pi]\times[0,\pi]$ сохада $m+1$ тартибли ҳосиласи мавжуд.

Исбот. *зарурийлиги.*

$\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонларнинг таърифлари ҳамда (2.5)ва (2.6)асимптотик формулаларга асосан зарурийлик қисмини исбот қилиш учун $F(x,t)$ функция $m+1$ тартибли ҳосилага эга бўлишини кўрсатиш лозим.

$t < x$ деб ҳисоблаймиз. (2.8) ва (2.9) асимптотик формулаларга кўра (2.10) қатор барча $x \ne t$ қийматларда яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун

$$\int_0^x\int_0^t F(u,v)dudv = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^x\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_0}u\cos\sqrt{\lambda_0}vdudv - \frac{xt}{\pi} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\int_0^t\left\{\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}u\cos\sqrt{\lambda_n}v}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\cos nu\cos nv\right\}dudv$$

бўлади. Ушбу $\cos\sqrt{\lambda}x=\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt$ тасвирдан фойдаланиб охирги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз.

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^t F(u,v)dudv=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^x\int\limits_0^t \varphi(\mathrm{u},\lambda_\mathrm{n})\varphi(\mathrm{v},\lambda_\mathrm{n})dudv+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x \varphi(x,\lambda_n)dv\cdot\int\limits_0^t du\int\limits_0^u H(u,s)\varphi(s,\lambda_n)ds+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x du\int\limits_0^t dv\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v H(u,t_1)H(v,t_2)\cdot\varphi(t_1,\lambda_n)\cdot\varphi(t_2,\lambda_n)dt_1dt_2\right\}-$$
$$-\frac{xt}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ny}{n^2}$$

Бу ерда Парсевал тенглигини исботласак,

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^t F(u,v)dudv=\int\limits_0^x du\int\limits_u^t H(s,u)ds+\int\limits_0^t du\int\limits_u^x H(s,u)ds+$$
$$+\int\limits_0^t ds\int\limits_s^x H(u,s)du\int\limits_s^t H(v,s)dv.$$

келиб чиқади. Охирги тенгликнинг иккала томонига ҳам $\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{t}}$ операторни қўллаб

$$F(x,t)=H(x,t)+\int\limits_0^t H(x,s)H(t,s)ds \qquad (2.11)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $t<x$ да $H(t,x)\equiv 0$ бўлишини эътиборга олдик. $H(x,t)$ функция $m+1$ тартибли ҳосилага эга бўлганида, (2.11)га кўра $F(x,t)$ функция хам $m+1$ тартибли ҳосилага эга бўлиши келиб чиқади. **Зарурлик қисми исботланди.**

Исбот. *Етарлилиги.* Айтайлик бизга (2.8) ва (2.9) асимптотикаларни қаноатлантирувчи турлича бўлган $\lambda_0,\lambda_1,...$ сонлар ва $\alpha_0,\alpha_1,...$ мусбат сонлар берилган бўлсин. (2.10) формула ёрдамида аниқланган $F(x,t)$ функция $m+1$

тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. $(0 \le t \le x \le \pi)$ Худди юқоридаги каби $K(x,t)$ ядро учун

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)dt = 0\,, \qquad 0 \le t \le x \le \pi \tag{2.12}$$

тенгламани келтириб чиқариш мумкин $(t < x$ да $K(x,t) \equiv 0)$

(2.12) тенгламани ечими мавжуд ва ягоналигини исботлаймиз. Бунинг учун Фредголъм теоремасига кўра қуйидаги бир жинсли тенглама

$$g(t) + \int_0^{\text{x}} F(s,t)g(s)ds = 0 \tag{2.13}$$

фақат ноль ечимга эга бўлишини кўрсатиш етарли. (2.13) тенглама $g(t) \neq 0$ ечимга эга бўлсин деб фараз қилайлик. (2.13) тенгламани $g(t)$ га кўпайтириб $[0, x]$ оралиқда интеграллаймиз.

$$\int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x\int_0^x F(s,t)g(s)g(t)dsdt = 0\ .$$

(2.10) ифодага асосан охирги тенгликни қуйидаги тарзда ёзиш мумкин:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\alpha^2{}_{\mathrm{n}}}(\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda_n}\,tdt)^2 = 0$$

барча $\alpha_n > 0$ бўлгани учун

$$\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda_n}tdt = 0, \quad n = 1,2,\ldots \tag{2.14}$$

бўлади.

(2.8) асимптотик формулалардан Левинсон теоремасига мувофиқ $\left\{\cos\sqrt{\lambda_{\mathrm{n}}}t\right\}$ функциялар системаси $L_2(0,\pi)$ фазода тўла ва чизиқли эркли бўлади.

$[....]$ қаранг. Шунинг учун (2.14) тенгликлардан $g(t)\equiv 0$ бўлиши келиб чиқади.

Бу эса фаразимизга зиддир.

Худди $[...]$ ишдаги каби ушбу

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt \qquad (2.15)$$

функция қуйидаги

$$\varphi''+[\lambda-q(x)]\varphi=0 \qquad (2.16)$$

тенгламани ва ушбу

$$\varphi(0,x)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=K(0,0)=-F(0,0)=h \qquad (2.17)$$

бошланғич шартларни қаноатлантириши кўрсатилади. Бу ерда

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx} \qquad (2.18)$$

бўлиб, $q^{(m)}(x)\in L_2(0,\pi)$.

Энди $\varphi(x,\lambda_n)$ $n=0,1,2,...$функциямиз ортаганаллигини кўрсатиш ва π нуқтадаги чегаравий шартни тенглаш қолди ҳолос.

Худди $[...]$ ичидаги каби Парсевал тенглиги келтириб чиқарилади:

Иҳтиёрий $f(x),g(x)\in L_2(0,\pi)$ функциялар учун ушбу

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda)dx\int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda)dt \qquad (2.19)$$

айният бажарилади.

(2.19) Парсевал тенглигидан фойдаланиб,

$$\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt\right)\varphi(x,\lambda_n) \qquad (2.20)$$

қатор $[0,\pi]$ кесмада яқинлашувчи бўлган ҳолда ушбу

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty c_n\varphi(x,\lambda_n) \qquad (2.21)$$

тасвир ўринли бўлишини келтириб чиқариш мумкин. Бу ерда

$$c_n = \frac{-1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \tag{2.22}$$

Хусусан, Грин айнияти ва α_n, λ_n кетма-кетликларнинг асимптотикасидан $f(x)=\varphi(x,\lambda_k)$, $k=0,1,2,...$ бўлган ҳолда (2.20) қатор абсолют ва текис яқинлашиши келиб чиқади. Шунинг учун

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_k)dt\right]\varphi(x,\lambda_n) \tag{2.23}$$

ҳосил бўлади.

$\left\{\cos\sqrt{\lambda_n}x\right\}$ функциялар системаси $L_2[0,\pi]$ фазода чизиқли эркли бўлганидан (2.15) формулага асосан $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ функциялар системаси ҳам $L_2[0,\pi]$ фазода чизиқли эркли бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун

$$\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_k)\varphi(t,\lambda_n)dt=\begin{cases}0, n\neq k\\ \alpha_n, n=k\end{cases} \tag{2.24}$$

Бу эса (2.19) Парсевал тенглиги билан бирга $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ система $L_2[0,\pi]$ фазода тўла ортогонал система эканлигини билдиради. π нуқтадаги чегаравий шартни чиқариш учун ушбу

$$\varphi''(x,\lambda_n)+[\lambda_n-q(x)]\varphi(x,\lambda_n)=0$$

$$\varphi''(x,\lambda_k)+[\lambda_k-q(x)]\varphi(x,\lambda_k)=0$$

тенгликлардан фойдаланамиз.

Биринчи тенгламани $\varphi(x,\lambda_k)$ га ва иккинчи тенгламани $\varphi(x,\lambda_k)$ га кўпайтириб ҳосил бўлган тенгликларни бир-биридан айирсак

$$[\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_k)-\varphi'(x,\lambda_k)\varphi(x,\lambda_n)]'=(\lambda_k-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_k)$$

айният келиб чиқади. Бу айниятни $[0,\pi]$ оралиқда интеграллаб, (2.24) ортоганаллик шартлари ва (2.17) бошланғич шартларни ҳисобга олсак

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_k)-\varphi'(\pi,\lambda_k)\varphi(\pi,\lambda_n)=0,$$

яъни

$$\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}=\frac{\varphi'(\pi,\lambda_k)}{\varphi(\pi,\lambda_k)}$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб $\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}$ нисбат n га боғлик эмас, уни H билан белгилаймиз:

$$H=\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}\,.$$

Теорема 2.1 тўла исботланди.

Теорема 2.2. Агар $\{\lambda_{\text{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\{\alpha_{\text{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари учун ушбу

1) $\sqrt{\lambda_{\text{n}}}=n+\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^3}+\underline{\underline{0}}(\frac{1}{n^4}),\ n\to\infty,\ (a_0=const)$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\underline{\underline{0}}(\frac{1}{n^3}),\, n\to\infty \tag{2.25}$$

2) $\lambda_n\neq\lambda_k$ агар $n\neq k$

$$\alpha_n>0,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.26}$$

шартлар бажарилса, у ҳолда $[0,\pi]$ кесмада абсалют узлуксиз бўлган $q(x)$ функция топилиб $\{\lambda_{\text{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\{\alpha_{\text{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари $q(x)$ потенциалли бирор Штурм-Лиувилл чегаравий масаланинг хос қийматлари ва нормалловчи сонлари бўлади.

Исбот. Теорема 2.1га асосан ушбу

$$F(x,t)=\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x\cos\sqrt{\lambda_0}t-\frac{1}{\pi}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n}-\frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right\}$$

функция $[0,\pi]\times[0,\pi]$ соҳада биринчи тартибли абсолют узлуксиз ҳосилаларга эга бўлишини кўрсатиш кифоя. Бунинг учун эса ушбу

$$a(x)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_{\mathrm{n}}}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x-\frac{2}{\pi}\cos nx\right\}$$

функция $0\le x\le 2\pi$ ораликда биринчи тартибли абсолют узлуксиз ҳосилага эга бўлишини кўрсатиш етарли. Агар (2.25) ва (2.26) асимптотик формулаларни $a(x)$ учун ёзилган ифодасига қўйсак биринчи томондан, икки марта ҳадлаб дифференциалланувчи қаторлар ажралиб чиқади. Чунки икки марта ҳадлаб ҳосила олиш натижасида $\mathrm{L}_2(0,\pi)$ фазонинг нормаси бўйича яқинлашувчи қаторлар ҳосил бўлади. Иккинчи томондан, биз ушбу $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sinnx}}{\mathrm{n}}$ қаторнинг формал ҳосилалари ёрдамида тузилган қаторларни ажратиб оламиз.([...])

Ушбу $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sinnx}}{\mathrm{n}}=\frac{\pi-\mathrm{x}}{2},\ 0<x<2\pi$ тенгликка асосан бу қатор формал ҳосилаларига ораликда узлуксиз бўлган функциялар мос келади.

Теорема 2.2 исботланди.

Теорема 2.3. $\{\lambda_{\mathrm{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\{\alpha_{\mathrm{n}}\}_{n=0}^{\infty}$ сонлар кетма-кетликлари ушбу

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y, & 0\le \mathrm{x}\le\pi\\ y'(0)-hy(0)=0\\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, & q^{m}(x)\in L_1(0,\pi)\end{cases}\tag{2.27}$$

кўринишдаги масаланинг ҳос қийматлари ва нормаловчи сонлари бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир:

1) $\sqrt{\lambda_{\mathrm{n}}}=n+\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^3}+\frac{\gamma_n}{n^3},$

$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\frac{\tau_n}{n^3}$, бу ерда $\mathrm{a}_0=const,\ b_0=const$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2<\infty,\quad \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\tau_{\mathrm{n}}^2>\infty$

$\lambda_n\ne\lambda_k\ \ (n\ne k)$ ва $\alpha_n>0,\ n=0,1,2,\ldots$

Исбот. *Зарурийлик қисми.*

(2.5) ва (2.6) асимптотик формулалардан келиб чиқади.([...] қаранг)

Етарлилигини исботлаймиз.

Бизга теореманинг етарлилик шартларини қаноатлантирувчи $\{\lambda_{\mathrm{n}}\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар берилган бўлсин. (2.27) ва (2.28) асимптотик формулаларни $F(x,t)$ функциянинг ифодасига қўйсак, $F(x,t)$ функциянинг учунчи ҳосилалари $L_2(0,\pi)$ фазога тегишли бўлиши кўринади. Бундан улар $L_1(0,\pi)$ фазога қарашли бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун теорема 2.1 даги фикрлаш бу ҳолда ҳам ўринли бўлади.

$$q(x) = 2\frac{dK(x,x)}{dx}$$

функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $L_2(0,\pi)$ га тегишли бўлиши $[...]$ да келтирилган.

Теорема 2.3 исботланди.

2.2§. Спектрал функция бўйича тескари масала мавжудлиги.

Ушбу

$$F_N(x,t)=\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}td\sigma(\lambda) \tag{2.28}$$

формула ёрдамида $F_N(x,t)$ функциялар кетма-кетлигини аниқлаймиз. $F_N(x,t)$ функциялар кетма-кетлиги мавжуд, чунки бу ҳолда спектр қуйидан чегараланганлиги сабабли (5.1) интеграл чекли оралик бўйича олинади.

Таъриф. Хар бир тайинланган (x,t) жуфтликда яқинлашувчи ва (x,t) текисликнинг ҳар бир чегараланган соҳасида чегараланган $F_N(x,t)$ функциялар кетма-кетлигига чегараланиб яқинлашувчи функциялар кетма-кетлиги дейилади.

Лемма 1. $q(x)$ функциянинг $[0,\infty)$ ораликда n- тартиблигача ҳосилалари мавжуд бўлиб, улар ҳар бир чекли оралиқда жамланувчи бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\Phi_N(x)=\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}xd\sigma(\lambda) \tag{2.29}$$

функциялар кетма-кетлиги $\Phi(x)=H(x,0)$ функцияга чегараланиб яқинлашади, ҳамда $\Phi(x)$ функция $(n+1)$- тартиблигача ҳосилалари мавжуд бўлиб, улар ҳар бир чекли оралиқда жамланувчи бўлади.

Исбот. Аввало $\Phi_N(x)$ кетма-кетликни ушбу

$$\Phi_N(x)=\int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}xd\rho(\lambda)+\int_{0}^{N}\cos\sqrt{\lambda}xd\sigma(\lambda) \tag{2.30}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Сўнгра x ўзгарувчининг иҳтиёрий қийматларида

$$\int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}xd\rho(\lambda) \tag{2.31}$$

интеграл мавжуд эканлигини исботлаймиз.

Ушбу

$$\cos\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{2.32}$$

тенгликни $(0,x)$ оралиқда интеграллаб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак, қуйидаги

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^x \left\{1 + \int_t^x H(s,t)ds\right\}\varphi(t,\lambda)dt$$

айниятга эга бўламиз. Кўриниб турибдики, $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ функция

$$g(t) = \begin{cases} 1 + \int_t^x H(s,t)ds, & t \le x \\ 0, & t > x \end{cases}$$

функциянинг $\varphi(t,\lambda)$ ечим бўйича ёзилган Фурье алмаштириши бўлади. Шунинг учун Парсевал тенглигига кўра

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 d\rho(\lambda) = \int_0^x g^2(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликдан ушбу

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 d\rho(\lambda)$$

итегралнинг x ўзгарувчининг ихтиёрий қийматларида мавжуд эканлиги келиб чиқади. Бундан эса, (2.31) интеграл мавжуд бўлиши кўринади. Агар

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt$$

тенгликни эътиборга олсак,

$$\omega(x,N) = \int_{-\infty}^{N} \varphi(x,\lambda)d\rho(\lambda) \tag{2.33}$$

интеграл мавжудлигини кўрамиз. $\omega(x,N)$ функцияга Штурм-Лиувилл масаласининг спектрал ядроси дейилади. $\omega_0(x,N)$ функция ушбу

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) - hy(0) = 0$$

масаланинг спектрал ядроси бўлсин. Маълумки, $h \geq 0$ бўлганда (соддалик учун шундай деб хисоблаймиз)

$$\omega_0(x,N) = \frac{1}{\pi}\int_0^N \left\{\cos\sqrt{\lambda}x + h\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{h^2+\lambda}d\lambda \tag{2.34}$$

бўлади. Бошка томондан, x ўзгарувчининг ихтиёрий чекли ўзгариш оралиғида қуйидаги асимптотик формула ўринли бўлади:

$$\omega(x,N) = \omega_0(x,N) + o(1),\ (N \to \infty). \tag{2.35}$$

Шунинг учун

$$\int_0^x H(x,t)\omega(t,N)dt = \int_0^x H(x,t)\omega_0(t,N)dt + o(1),\ (N \to \infty) \tag{2.36}$$

тенглик ўринли.

(2.35) ва (2.36) тенгликларни бир-бирига қўшсак ва $\omega(x,N)$ функциянинг (2.33) тенгликдаги ифодасини эътиборга олсак,

$$\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)d\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^x H(x,t)\left\{\int_{-\infty}^N \varphi(t,\lambda)d\rho(\lambda)\right\}dt =$$

$$= \omega_0(x,N) + \int_0^x H(x,t)\omega_0(t,N)dt + o(1),\ (N \to \infty)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликнинг чап томонида интеграллаш тартибини ўзгартирсак ((2.33) интеграл мавжуд бўлганлиги учун бу амални бажариш мумкин) ва (2.32) формулани эътиборга олсак, ушбу

$$\int_{-\infty}^N \cos\sqrt{\lambda}xd\rho(\lambda) = \omega_0(x,N) +$$

$$+\int_0^x H(x,t)\omega_0(t,N)dt + o(1),\ (N \to \infty) \tag{2.37}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг хар иккала томонидан

$$\int_{-\infty}^N \cos\sqrt{\lambda}xd\rho_0(\lambda)$$

функцияни айирсак,

$$\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^{N} \cos\sqrt{\lambda}x d\sigma(\lambda) = \omega_0(x,N) - \frac{1}{\pi}\int_0^N \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} d\lambda +$$
$$+\int_0^x H(x,t)\omega_0(t,N)dt + o(1), \ (N \to \infty) \tag{2.38}$$

тенгликка эга бўламиз. (2.34) ва (2.38) формулалардан ушбу

$$\Phi_N(x) = \chi_N(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^x H(x,t)\frac{\sin\sqrt{N}t}{t}dt +$$
$$+\int_0^x H(x,t)\chi_N(t)dt + o(1), (N \to \infty) \tag{2.39}$$

тенглик келиб чиқади. Бу ерда

$$\chi_N(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^N \frac{h^2}{(h^2+\lambda)\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x d\lambda + \frac{h}{\pi}\int_0^N \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{h^2+\lambda}d\lambda. \tag{2.40}$$

Қуйидаги

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -h, & x = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

белгилашни киритайлик. $\chi_N(x)$ функция $N \to \infty$ да $U(x)$ функцияга чегараланиб яқинлашади. Хакикатдан ҳам, агар $x > 0$ бўлса, $N \to \infty$ да

$$\chi_N(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^N \frac{h^2}{(h^2+\lambda)\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x d\lambda + \frac{h}{\pi}\int_0^N \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{h^2+\lambda}d\lambda \to$$
$$\to -he^{-hx} - \frac{d}{dx}e^{-hx} = 0.$$

Агар $x = 0$ бўлса, $\chi_N(0) \to -h$ бўлади.

$\chi_N(x)$ функциянинг чегараланганлиги куйидаги

$$\int_a^N \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{h^2+\lambda}d\lambda = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{N}} \frac{\mu\sin\mu x}{h^2+\mu^2}d\mu = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{N}} \frac{\sin\mu x}{\mu}d\mu + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{N}} \frac{2h^2}{\mu^3}d\mu + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

бахолашдан келиб чиқади.

Энди

$$\begin{aligned} V_N(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^x H(x,t)\frac{\sin\sqrt{N}t}{t}dt = \\ &\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{H(x,t)-H(x,0)}{t}\sin\sqrt{N}tdt + \frac{2}{\pi}H(x,0)\int_0^x \frac{\sin\sqrt{N}t}{t}dt \end{aligned} \tag{2.42}$$

интегрални қараймиз. Бу ёйилмадан, $0 \le x \le b < \infty$ қийматларда ушбу

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^x H(x,t)\frac{\sin\sqrt{N}t}{t}dt\right| \le \frac{2}{\pi}\int_0^x \left|\frac{H(x,t)-H(x,0)}{t}\right|dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left|H(x,0)\right|\left|\int_0^{\sqrt{N}x}\frac{\sin t}{t}dt\right| \le C(b)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда $C(b)$ – ўзгармасни билдиради.

Демак, x ўзгарувчининг иҳтиёрий чекли ўзгариш оралиғида $V_N(x)$ функциялар кетма-кетлиги чегаралаган бўлади. Агар

$$\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}$$

тенгликни эътиборга олсак, (2.42) тасвирдан

$$\lim_{N\to\infty} V_N(x) = \begin{cases} H(x,0), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

тенглик ҳосил бўлади.

$\chi_N(x)$ ва $V_N(x)$ функциялар кетма-кетлиги чегараланиб яқинлашишидан (2.39) тенгликка асосан $\Phi_N(x)$ функциялар кетма-кетлиги чегараланиб яқинлашиши келиб чиқади ҳамда

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N(x) = \begin{cases} H(x,0), & x \ne 0 \\ -h, & x = 0. \end{cases}$$

$$H(0,0) = -h$$

эканини эьтиборга олсак, $\Phi_N(x)$ функциялар кетма-кетлиги $H(x,0)$ функцияга чегараланиб яқинлашишини топамиз.

Лемма 1 исботланди.

Лемма 2. x нинг ҳар бир тайинланган қийматида ташувчиси $(0, x)$ интервалда бўлган ихтиёрий узлуксиз финит функция $g(t)$ учун

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^x F_N(x,t)g(t)dt+\int_0^x K(x,t)g(t)dt+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_0^x K(x,s)F_N(s,t)ds\right\}dt=0 \qquad (2.43)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Ёйилма ҳақидаги теоремага асосан $g(t)$ финит функция бўлганлиги учун ушбу

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda)d\rho(\lambda)\right\}dt=g(x)\equiv 0$$

тенглик ўринли бўлади. Ушбу

$$\cos\sqrt{\lambda}t=\varphi(t,\lambda)+\int_0^t H(t,s)\varphi(s,\lambda)ds$$

формуладан фойдаланиб, қуйидаги лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}td\rho(\lambda)\right\}dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda)d\rho(\lambda)\right\}dt+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g(t)\left\{\int_0^t H(t,s)\left[\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)\varphi(s,\lambda)d\rho(\lambda)\right]ds\right\}dt=$$

$$=0+\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty\left\{\int_s^\infty g(t)H(t,s)dt\right\}\left\{\int_{-\infty}^N \varphi(x,\lambda)\varphi(s,\lambda)d\rho(\lambda)\right\}ds=$$

$$=\int_x^\infty g(t)H(t,x)dt=0,$$

чунки $t\ge x$ қийматлар учун $g(t)\equiv 0$.

Қуйидаги $\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K(x,s)\cos\sqrt{\lambda}sds$

формуладан фойдаланиб, ушбу

$$\int_{-\infty}^{N}\varphi(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}td\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}td\rho(\lambda)+$$

$$+\int_{0}^{x}K(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}sd\rho(\lambda)\right\}d\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}td\rho_0(\lambda)+$$

$$+\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}td\sigma(\lambda)+\int_{0}^{x}K(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}sd\rho_0(\lambda)\right\}ds+$$

$$+\int_{0}^{x}K(x,s)\left\{\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}sd\sigma(\lambda)\right\}ds$$

айниятни келтириб чиқарамиз. Уни $g(t)$ функцияга кўпайтирамиз ва $[0,\infty)$ оралиқда *t* бўйича интеграллаб, $N\to\infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\begin{aligned}0=g(x)+\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{\infty}g(t)F_N(x,t)dt+\int_{0}^{x}K(x,s)g(s)ds+\\+\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{\infty}g(t)\left\{\int_{0}^{x}K(x,s)F_N(s,t)ds\right\}dt.\end{aligned}\qquad(2.44)$$

Бу тенгликда $g(x)\equiv 0$ эканлигини этиборга олсак (2.43) айният ҳосил бўлади. **Лемма 2 исботланди.**

Теорема 1. Алмаштириш операторининг ядроси $K(x,t)$ ушбу

$$K(x,t)+F(x,t)+\int_{0}^{x}K(x,s)F(s,t)ds,\quad(0\le t\le x)\qquad(2.45)$$

интеграл тенгламани қаноатлантиради. Бу ерда $F(x,t)$ ядро

$$F_N(x,t)=\int_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}td\sigma(\lambda)\qquad(2.46)$$

кетма-кетликнинг $N\to\infty$ даги лимитини билдиради ва

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases}\rho(\lambda)-\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \lambda>0\\ \rho(\lambda) & \lambda\le 0\end{cases}\qquad(2.47)$$

тенглик билан аниқланади.

Агар $q(x)$ функция $[0,\infty)$ ораликда n марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, $F(x,t)$ функция $0 \le t \le x$ тўпламда $n+1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. Теореманинг биринчи қисми лемма 2 дан келиб чиқади. Дифференциалланувчанлигини исбот қилиш қолади холос.

Алмаштириш операторини ўрганганимизда, $A(\xi,\eta)$ учун ёзилган Волтерра туридаги интеграл тенгламадан $q(x)$ функция n марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, $K(x,t)$ ядронинг $x \ge t$ тўпламда $n+1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

Энди Гельфанд-Левитан интеграл тенгламасида $K(x,t)$ функция маълум деб, бу тенгламани $F(x,t)$ функцияга нисбатан қараймиз. У ҳолда бу тенглама Волтерра туридаги интеграл тенглама бўлади ва шунинг учун унга кетма-кет яқинлашишлар усулини қуллаш мумкин бўлади. Бу йул билан ҳосил қилинган қаторни $n+1$ марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлади. **Теорема 1 исботланди.**

Изох. Қуйидаги белгилашларни

$$\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^{N} \cos\sqrt{\lambda}\, d\sigma(\lambda), \quad \Phi(x) = \lim_{N\to\infty} \Phi_N(x)$$

эътиборга олиб, $0 \le t \le x$ қийматлар учун

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)\right] \tag{2.48}$$

$$F(x,x) = \frac{1}{2}\left[\Phi(2x) + \Phi(0)\right] \tag{2.49}$$

тенгликлар ўринли бўлишини кўриш мумкин.

(2.49) тенгликка кўра, агар $F(x,t)$ функция $x \ge t$ бўлганда $n+1$ тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функция $x \ge 0$ бўлганда $n+1$ тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлади. (2.48) формуладан эса, аксинча $\Phi(x)$ функция қанча марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса,

$F(x,t)$ функция ҳам шунча марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

Бизга кейинчалик спектрал функциянинг қуйидаги оддий хоссаси керак бўлади.

Теорема 2. $f(x)\in L^2(0,\infty)$ иҳтиёрий узлуксиз финит функция бўлиб, қуйидаги

$$E(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\sqrt{\lambda}xdx$$

тенглик ўринли бўлсин. Агар ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)d\rho(\lambda)=0 \tag{2.50}$$

тенглик бажарилса, $f(x)\equiv 0$ бўлади.

Исбот. Қуйидаги

$$E(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\left[\varphi(x,\lambda)+\int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt\right]dx=$$

$$=\int_0^\infty f(x)\varphi(x,\lambda)dx+\int_0^\infty\left\{\int_0^x f(x)H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt\right\}dx$$

тengликнинг ўнг томонидаги иккинчи интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз:

$$E(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\varphi(t,\lambda)dt+\int_0^\infty\left\{\int_t^\infty f(x)H(x,t)dx\right\}\varphi(t,\lambda)dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{f(t)+\int_t^\infty f(x)H(x,t)dx\right\}\varphi(t,\lambda)dt=\int_0^\infty g(t)\varphi(t,\lambda)dt.$$

Демак, $E(\lambda)$ функция $g(t)$ функциянинг $\varphi(x,\lambda)$ ечимлар бўйича Фурье алмаштириши экан. Парсевал тенглигига кўра ушбу

$$\int_0^\infty g^2(t)dt=\int_0^\infty E^2(\lambda)d\rho(\lambda)$$

тенглик ўринли бўлгани учун (2.50) шартга биноан қуйидаги

$$\int_0^\infty g^2(t)dt = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан эса $g(t) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади, яъни

$$f(x) + \int_t^\infty f(x)H(x,t)dx = 0 \qquad (2.51)$$

айният бажарилади. $f(x)$ финит функция бўлганлиги учун (2.51) тенгликдаги интеграл чекли оралиқда олинади, шунинг учун (2.51) тенглама Волтерра туридаги интеграл тенглама бўлади, бундан эса $f(x) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. **Теорема 2 исботланди.**

Олдинги параграфда ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 \le x < \infty \\ y'(0) = hy(0), & q(x) \in C^n[0,\infty) \end{cases} \qquad (2.52)$$

Штурм-Лиувилл масаласининг спектрал функцияси $\rho(\lambda)$ учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши кўрсатилди:

I. $$\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^{N} \cos\sqrt{\lambda}x d\sigma(\lambda)$$

тенглик билан аниқланадиган функциялар кетма-кетлиги $N \to \infty$ да бирор $\Phi(x) \in C^{n+1}(0,\infty)$ функцияга интилади. Бу ерда

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}, & \lambda > 0 \\ \rho(\lambda), & \lambda \le 0; \end{cases}$$

II. Ихтиёрий $f(x) \in L^2(0,\infty)$ узлуксиз финит функция учун қуйидаги

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)d\rho(\lambda) = 0$$

тенглик ўринли бўлса, $f(x) \equiv 0$ бўлади. Бу ерда

$$E(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\cos\sqrt{\lambda}x dx.$$

Энди, бирор монотон ўсувчи $\rho(\lambda)$ функция учун юкоридаги **I** ва **II** шартлар бажарилса, у бирор бир Штурм-Лиувилл чегаравий масаласининг спектрал функцияси бўлиб, $q(x) \in C^n[0,\infty)$ бўлишини кўрсатамиз.

Ушбу

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)\right]$$

тенглик ёрдамида $F(x,t)$ функцияни аниқлаймиз ва қуйидаги

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \quad (0 \le t \le x < \infty) \tag{2.53}$$

интеграл тенгламани тузамиз.

Теорема 1. Хар бир тайинланган $x > 0$ учун (2.53) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягонадир.

Исбот. (2.53) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона эканлигини кўрсатиш учун Фредгольм теоремасига кўра x параметрнинг ҳар бир тайинланган мусбат қийматида, ушбу

$$g(t) + \int_0^x F(s,t)g(s)ds = 0 \tag{2.54}$$

бир жинсли интеграл тенглама фақат нол ечимга эга бўлишини кўрсатиш етарли.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни (2.54) тенгламани қаноатлантирувчи нолдан фарқли узлуксиз $g(t) \in L^2(0,\infty)$ функция мавжуд деб фараз қилайлик. (2.54) тенгликни $g(t)$ функцияга кўпайтириб, $(0,x)$ оралиқда t бўйича интеграллаймиз:

$$\int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x\int_0^x F(s,t)g(s)g(t)dsdt = 0. \tag{2.55}$$

$F(s,t)$ функциянинг ифодасини (2.55) тенгликка қўйиб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак, ушбу

$$\int_0^x g^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x\int_0^x g(s)g(t)\cos\sqrt{\lambda}s\cos\sqrt{\lambda}tdsdt\right\}d\rho(\lambda) -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x\int_0^x g(s)g(t)\cos\sqrt{\lambda}s\cos\sqrt{\lambda}tdsdt\right\}d\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\right)=0 \qquad (2.56)$$

айният ҳосил бўлади. Уни қуйидаги

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda}tdt\right\}^2 d\rho(\lambda)- \\ -\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt\right\}^2 d\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\right)=0 \qquad (2.57)$$

қуринишда ёзиш мумкин.

Парсевал тенглигидан фойдалансак, ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda}tdt\right\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

тенглик ҳосил бўлади. **II** шартга кўра бу ҳол фақат $g(t)\equiv 0$ бўлганда бажарилади. Фаразимиз нотўғри экан, яъни (2.54) тенглама фақат нол ечимга эга. **Теорема 1 исботланди.**

Гельфанд-Левитан интеграл тенгламасидан, $F(x,t)$ функция t бўйича қанча ҳосилага эга бўлса, $K(x,t)$ функция ҳам t бўйича шунча ҳосилага эга бўлиши кўринади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$K(x,t)=-F(x,t)-\int_0^x K(x,s)F(s,t)ds=0, \quad (0\le t\le x)$$

тенглик ўнг томони t ўзгарувчи бўйича қанча марта дифференциалланувчи бўлса унинг ўнг томони ҳам t ўзгарувчи бўйича шунча марта дифференциалланувчи бўлади.

$K(x,t)$ функциянинг x бўйича дифференциалланувчанлигини текшириш куйидаги леммага асосланади.

Лемма 1. Ушбу

$$\psi(x,\mu)+\int_0^1 H(x,t,\mu)\psi(t,\mu)dt=f(x,\mu) \qquad (2.58)$$

интеграл тенглама берилган бўлиб, унинг $H(x,t,\mu)$ ядроси ва $f(x,\mu)$ озод ҳади μ параметрга ва x ўзгарувчига нисбатан узлуксиз бўлсин. У ҳолда, агар бир жинсли тенглама μ параметрнинг μ_0 қийматида фақат нол ечимга эга бўлса, μ_0 нуқтанинг бирор атрофида (2.58) интеграл тенгламанинг ечими x ва μ га нисбатан узлуксиз функция бўлади. Агар $H(x,t,\mu)$ ва $f(x,\mu)$ функциялар m марта μ бўйича узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, (2.58) тенгламанинг ечими ҳам μ бўйича m марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. 1. (2.58) тенгламанинг $H(x,t,\mu)$ ядроси узлуксиз бўлганлиги учун, уни қуйидагича

$$H(x,t,\mu) = H(x,t,\mu_0) + \tilde{H}(x,t,\mu) = H_0 + \tilde{H}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ерда μ параметрнинг μ_0 нуқта атрофидаги қийматлари учун

$$\left|\tilde{H}(x,t,\mu)\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Қулайлик учун (2.58) тенгламани ушбу

$$\psi + H_0\psi + \tilde{H}\psi = f$$

символик кўринишда ёзиб оламиз. Фредгольм теоремасига кўра $(I + H_0)^{-1}$оператор мавжуд. Охирги тенгликка $(I + H_0)^{-1}$ операторни таъсир қилдирамиз:

$$\psi + (I + H_0)^{-1}\tilde{H}\psi = f(I + H_0)^{-1} \qquad (2.59)$$

$(I + H_0)^{-1}\tilde{H}$ оператор нормасини хохлаганча кичрайтиш мумкин бўлганлиги учун (2.59) тенгламага кетма-кет яқинлашишлар усулини қўллаш мумкин, бундан эса $\psi(x,\mu)$ ечимнинг μ_0 нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади.

2. Дифференциалланувчанлигини исботлаш учун $H(x,t,\mu)$ функцияни $H = H_m + \tilde{H}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бунда

$$H_m = H(x,t,\mu_0) + \frac{\partial H}{\partial \mu}\Big|_{\mu=\mu_0}(\mu - \mu_0) + \ldots + \frac{1}{m!}\frac{\partial^m H}{\partial \mu^m}\Big|_{\mu=\mu_0}(\mu - \mu_0)^m.$$

Бу ерда μ параметрнинг μ_0 нуқта атрофидаги қийматлари учун

$$\left|\widetilde{H}(x,t,\mu)\right| < |\mu - \mu_0| \cdot \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Лемма исботининг биринчи қисмига кўра $(I + H_m)^{-1}$ оператор мавжуд. Демак, ушбу

$$\psi - (I + H_m)^{-1}\widetilde{H}\psi = f(I + H_m)^{-1}$$

тенгамага кетма-кет яқинлашишлар усулини қўллаш мумкин. Бундан эса $\psi(x,\mu)$ ечимнинг μ бўйича μ_0 нуқта атрофида m марта дифференциалланувчилиги келиб чиқади. **Лемма 1 исботланди.**

Келтирилган леммани Гельфанд-Левитан интеграл тенгламасига қўллаймиз.

Бунинг учун

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \quad (0 \le t \le x)$$

интеграл тенгламада $x = \mu$, $s = \mu u$ ва $t = \mu\tau$ алмаштириш бажарамиз:

$$K(\mu,\mu\tau) + F(\mu,\mu\tau) + \int_0^1 K(\mu,\mu u)\mu F(\mu u,\mu\tau)du = 0, \quad (0 \le \tau \le 1). \qquad (2.60)$$

Агар, қуйидаги

$$\psi(\tau,\mu) = K(\mu,\mu\tau),$$
$$H(\tau,u,\mu) = \mu F(\mu u,\mu\tau),$$
$$f(\tau,\mu) = -F(\mu,\mu\tau)$$

белгилашларни киритсак, (2.60) тенглама (2.58) кўринишни олади. $H(\tau,u,\mu)$ ядро ва $f(\tau,\mu)$ озод ҳад узлуксиз эканлигидан юқоридаги леммага кўра $\psi(\tau,\mu)$ функция узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, $K(x,t)$ функция x бўйича узлуксиз экан.

Худди шу леммага асосан $F(x,t)$ функция x бйича $n+1$ марта дифференциалланувчи эканлигидан $K(x,t)$ функциянинг x буйича $n+1$ марта дифференциалланувчилиги келиб чиқади.

ХУЛОСА

Мазкур битирув иши Штурм-Лиувилл ва Дирак операторлари учун ягоналик ва мавжудлик теоремаларини ўрганишга бағишланган. Битирув иши иккита бобдан иборат бўлиб, биринчи бобда қуйидаги ягоналик теоремалари ўрганилган:

1) Амбарцумян теоремасининг иккита исботи келтирилган.
2) Иккита спектр Штурм-Лиувилл операторини ягона аниқлаши ўрганилган.
3) Спектрал функция Штурм-Лиувилл операторини ягона аниқлаши ўрганилган.
4) Умумий кўринишдаги Дирак оператори учун Борг теоремаси ўринли эмаслигини кўрсатувчи мисол кўрсатилган.

Иккинчи бобда мавжудлик теоремалари ўрганилган:

1) $\{\lambda_n\}$ ва $\{\alpha_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг спектрал характеристикалар бўлиши учун зарур ва етарли шартлар келтириб чиқарилган.
2) Спектрал функция бўйича тескари масала мавжудлиги кўрсатилган**.**

Адабиётлар

1. Амбарцумян В.А. // Uber eine Frege der Eigenwerttheore.-Zeitschr. Fur Physik, 1929, Bd.53, s.690-695.
2. Borg G. // Eine Umkerung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe.-Acta Math.,1946, Bd. 78.N1, s. 1-96.
3. Березанский Ю.М. // О теореме единственности в обратной задаче спектралного анализа для уравнения Шрёдингера.-Труды Моск. мат. об-ва, 1958,т.7, №3.
4. Weyl H. // Uber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehorige Entwicklungen willkurlinchen Funktionen.-Math.Ann.,1910,Bd.68, S.220-269.
5. Гельфанд И.М. и Левитан Б.М. //Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.-Изв.АН,сер.матем.,1951,т.15,с.309-360.
6. Крейн М.Г. // Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля.-ДАН 951,т.76,№1,с.21-24
7. Levinson N. //The inverse Sturm-Lionville problem.-Math.Tidsskr.B,1949,p.25-30.
8. Левитан Б.М.// Разложение по собственным функциям.-М; Гостехиздат, 1950.
9. Левитан Б.М. и Гасымов М.Г.// Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.-УМН. 1964,т.19,№2,с.3-63.
10. Левитан Б.М. / Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М. «Наука», 1984.
11. Марченко В.А.// Некоторые теории дифференциального оператора второго порядка.-ДАН, 1950,т.72,№3, с.457-460.
12. Марченко В.А. // Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн.- ДАН, 1955,т.104,№5, с.695-698.

13. Miklos Horvath.// On the inverse spectral theory of schrodinger and dirac operators. TRAN. OF THE AMERICAN MAT. SOCIETY, V. 353, N. 10, Pag. 4155-4171. May 17. 2001.
14. Титчмарш Э.Ч.//Разложения по собственным функциям,связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка,т.1,2-М.ИЛ,1959.
15. Тихонов А.Н.// О единственности решения задачи электроразведки.- ДАН,1949,т.69,№6,с.797-800.
16. Фаддеев Л.Д. // Обратная задача квантовой теории рассеяния. УМН, 1959, т.14,№4,с. 57-119.
17. Чудов Л.А. // Обратная задача Штурма-Лиувилля.- Мат. Сбор. 1949, т.25(67), №3, с.451-454.
18. Левитан Б.М / Теория операторов обобщонного сдвига. 1973, Москва «Наука»
19. Delsart J. /Une extension nouvelle de la theorie de fonction presque-periodiques de Bohr. 1939.
20. Дельсарт Ж. Лионс Ж./ Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe. 1957.
21. Крейн М.Г./ Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. ДАН 1951.
22. Левин Б.Я./ Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. ДАН, 1956.
23. Левитан Б.М.и Мейман Н.Н /О теореме единственности. ДАН, 1951.
24. Левитан Б.М.и Саргсян И.С/Введение в спектральную теорию. М, Наука, 1970.
25. Повзнер А. Я./О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси. Мат. 1948.
26. Чудов Л.А./Обратная задача Штурма-Лиувилля. Мат.1949.
27. Чудов Л.А./ Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. Мат.1980.