

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OILY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

V.5460100-“Matematika” yo‘nalish uchun

TRIGONOMETRIYANING MAXSUS BO‘LIMLARI

fanida

MA’RUZALAR MATNI

Farg‘ona -2010

Ushbu ma'ruzalar matni bakalavriatning matematika yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan. Mavzuga oid ta'rif, teorema, tushunchalar va formulalar mukammal bayon qilingan. Mavzu oxirida nazorat uchun savollar kiritilgan va misollar yechilish usullari berilgan. Mustaqil ishlash uchun masala va mashqlar keltirilgan.

Tuzuvchilar:

Fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent H.Mahmudov
H.O'rinov
T.Bakirov

Taqrizchilar:

FarDU, fizika-matematika fanlari
nomzodi, dotsent Sh.Sobirov
TDPU, fizika-matematika fanlari
nomzodi, dotsent R.Turgunbaev

Mavzu: Boshlang'ich trigonometrik tushuncha (2 soat)

Reja:

1. Burchak va yo'ylar. Trigonometrik aylana.
2. Asosiy trigonometrik ayniyatlar.
3. Ixtiyoriy burchak. Trigonometrik funksiyalar va ularning choraklardagi ishoralari.

I. Aytaylik to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi xOy berilgan bo'lsin. Markazi koordinatalar boshida radiusi birga teng bo'lgan aylana yasaymiz. Hamda soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishni musbat yo'nalish va $A(1;0)$ nuqtani boshlang'ich nuqta deb qabul qilamiz. Bu birlik aylanadi $A(1;0)$ nuqtadan musbat yo'nalishda son miqdori t soniga teng bo'lgan yoy ajratamiz. U holda birlik aylananing abtsissasi x_t va ordinatasi y_t bo'lgan R_t nuqtasi t songa mos keladi (1-chizma).

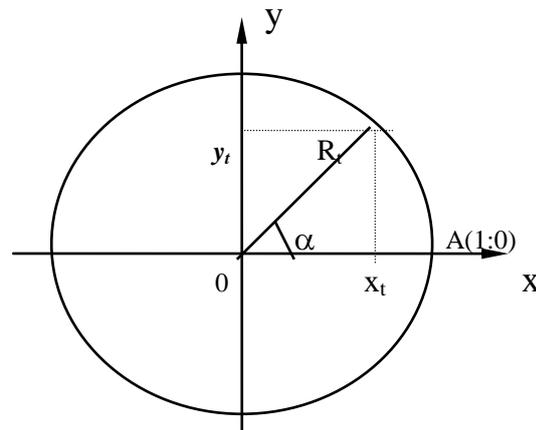
1-ta'rif. R_t nuqtaning x_t abtsissasi t son (α burchak) kosinusi, y_t ordinatasi esa t son (α burchak) ning cinusi deyiladi, ya'ni $x_t = \cos t$, $y_t = \sin t$.

2-Ta'rif. t son (α burchak) ning tangensi deb shu son (burchak) sinusining uning kosinusiga nis-

batiga aytiladi, ya'ni $\mathbf{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t}$,

Kontangensi deb shu son kosinusi-

ning uning sinusiga nisbatiga aytiladi, ya'ni $\mathbf{ctgt} = \frac{\cos t}{\sin t}$.



1-chizma.

II. Burchakning gradus o'lchovini radian o'lchovi va radian o'lchovini gradus o'lchoviga aylantirish.

$$\alpha = \frac{r}{180^0} a^0, \quad \alpha' = \frac{180^0}{r} a, \quad 1 \text{ radian} = 57^0 17' 15''$$

III. Trigonometrik funktsiyalarning asosiy xossalari.

1. $y = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [-1; 1]$, toq funktsii, davri $T = 2\pi$,

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \quad k \in \mathbb{Z} \text{ da o'sadi,}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \quad k \in \mathbb{Z} \text{ da kamayadi. } y = \sin(\omega x + b) \text{ ning davri } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ga}$$

teng bo'ladi.

2. $y = \cos x$, $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-1; 1]$, juft funksiya, davri $\mathbf{T} = 2\pi$ $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ da kamayadi. $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ da o'sadi.

$y = \cos(\omega x + b)$ ning davri $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ ga teng bo'ladi.

3. $y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ $E(f) = \mathbf{R}$ toq funksiya davri

$\mathbf{T} = \pi$, $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ oraliqda o'sadi, $y = \operatorname{tg}(\omega x + b)$ ning davri $\frac{\pi}{\omega}$ ga teng bo'ladi.

4. $y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$; $E(f) = \mathbf{R}$ toq funksiya, davri $\mathbf{T} = \pi$;

$(k\pi, \pi + k\pi)$ da kamayadi, $y = \operatorname{ctg}(\omega x + b)$ ning davri $\mathbf{T} = \frac{\pi}{\omega}$ ga teng bo'ladi.

IV. Trigonometrik funksiyalar qiymatlarining choraklardagi ishoralari

chorak	sinus $\sin x$	kosinus $\cos x$	tangens $\operatorname{tg} x$	kotangens $\operatorname{ctg} x$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

V. Ba'zi burchaklar trigonometrik funksiyalarning qiymatlari

burchaklar funksiyalar	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

VI. Keltirish formulalari

burcha klar funk- tsiyalar	$-\alpha$	$90^0 - \alpha$	$90^0 + \alpha$	$180^0 - \alpha$	$180^0 + \alpha$	$270^0 - \alpha$	$270^0 + \alpha$	$360^0 - \alpha$
		$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Misol. $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\sin\frac{41\pi}{6} = -\sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

VII. Bir argumentning trigonometrik funksiyalari orasidagi asosiy ayniyatlar

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

VIII. Trigonometrik funksiyalar uchun qo'shish formulalari

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Misol. $\frac{\sin 3\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$ ni soddalashtiring.

Yechish.

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} &= \frac{\sin(3\alpha + \alpha)}{2\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\sin 2\alpha \end{aligned}$$

IX. Ikkilangan va yarim burchakning trigonometrik funksiyalari

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \quad 1 \pm \sin 2\alpha = (\cos\alpha \pm \sin\alpha)^2$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Ifodalarni soddalashtiring.

1. $\sin \frac{18\pi}{17} \cos \frac{\pi}{17} - \cos \frac{18\pi}{17} \cdot \sin \frac{\pi}{17}$;

2. $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;

3. $\sin 73^\circ \cos 17^\circ - \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;

4. $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$;

5. $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$;

6. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha) \cos(-\beta)$;

7. $\cos(-\alpha) \sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta)$;

8. $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;

9. $\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$;

10. $\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

11. $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

12. $2\cos^2 3\alpha - 1$;

13. $\frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$;

14. $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

15. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

16. $\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

17. $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) \sin 2\alpha$;

18. $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$;

19. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$;

20. $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$;

21. $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{1 + \cos\alpha - 2\sin^2 2\alpha}$;

22. $\cos + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

23. Quyida keltirilgan funktsiyalarning qaysi birlari davriy

1) $y = x \sin x$, 2) $y = \sin 2x$, 3) $y = \cos(x+2)$,

4) $y = 2 \operatorname{tg} x$, 5) $y = \sin^2 x$, 6) $y = \sin x^2$

24. Quyidagi funktsiyalarning davrini toping.

1) $y = 3 \sin(3x+3)$, 2) $y = 5 \cos\left(\frac{x}{5} + 1\right)$;

3) $y = 7 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}x + 2\right)$; 4) $y = 8 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x + 5\right)$.

Trigonometrik funksiya grafigi

Reja

1. Trigonometrik funktsiyalarning juft va toqligi.
2. $y = \sin x$ funksiya grafigi va xossalari.
3. $y = \cos x$ funksiya grafigi va xossalari.
4. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funktsiyalar grafiklari va xossalari.
5. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funktsiyalar grafiklari va xossalari.

Trigonometrik funktsiyalarni grafiklari.

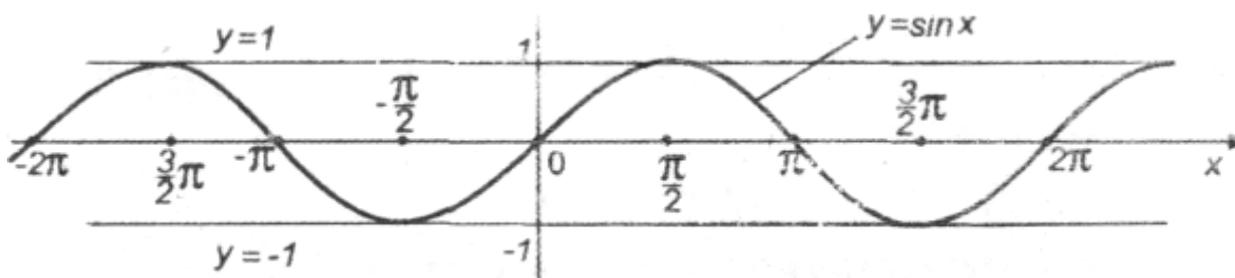
$y = \sin x$ toq funksiya bo'lib, uning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik, ya'ni barcha $x \in \mathbf{R}$ da, $\sin(-x) = -\sin x$.

$y = \sin x$ funksiya $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$) qiymatlarda musbat, $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$) qiymatlarda manfiy, $x = \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$) qiymatlarda esa u nolga teng. $0; \pm n, \pm 2n, \dots, \pm nn, \dots$ ($n \in \mathbf{Z}$) qiymatlar $y = \sin x$ funktsiyaning nollari deyiladi.

$y = \sin x$ funksiya $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ qiymatlarda monoton o'sadi,

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ qiymatlarda monoton kamayadi.

$y = \sin x$ funksiya 2π davrli davriy funksiya bo'lib, uning grafigini $[0; 2\pi]$ oraliqda chizish yetarli.



Boshqa oraliqlarda grafikni chizish uchun esa grafikni $2\pi; 4\pi; 6\pi$ va h.k. masofaga surish yetarii hosii bo'lgan chiziq (grafik) **sinusoyida** deyiladi.

$y = \cos x$ juft funksiya, ya'ni barcha $x \in \mathbb{R}$ da $\cos(-x) = \cos x$. Uning grafigi oy o'qqa nisbatan simmetrik.

4. $y = \cos x$ funksiya- $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ qiymatlarda musbat,

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ qiymatlarda esa manfiy, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ qiymatlarda esa u nolga teng

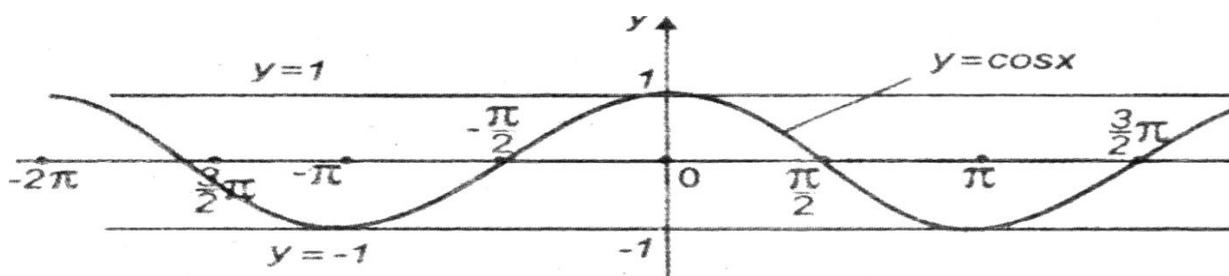
$(\pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{3\pi}{2}; \dots, \pm \frac{(2k+1)\pi}{2}, \dots$ funksiyaning nollari), bu yerda $k \in \mathbb{Z}$.

5. $y = \cos x$ funksiya $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) qiymatlarda monoton kamayadi;

$\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) qiymatlarda monoton o'sadi.

6. $y = \cos x$ funksiya 2π davriy funksiya bo'lib, uning grafigini $[0; 2\pi]$ oraliqda chizish etarii.

Hosil bo'lgan grafik (chiziq) kosinusoida deyiladi va uni $y = \sin x$ funksiya grafigini chapga $\frac{\pi}{2}$ - masofa qadar surilgan sinusoida deb qarash mumkin.



$y = A \sin(mx + \phi)$ funksiya grafigini bir necha bosqichga ajratib yasaymiz.

$y = A \sin mx$ funksiyaning graflgi:

1. Bu funksiyaning grafigini chizish uchun uni $y = \sin x$ funksiya bilan taqqoslaymiz.

Grafik ox o'q bo'ylab ikki marta qisiladi.

2. $y = \sin \frac{x}{2}$ funksiya grafigini chizish uchun uni $y = \sin x$ bilan taqqoslab, $\frac{x}{2} = 2\pi, x = 4\pi$

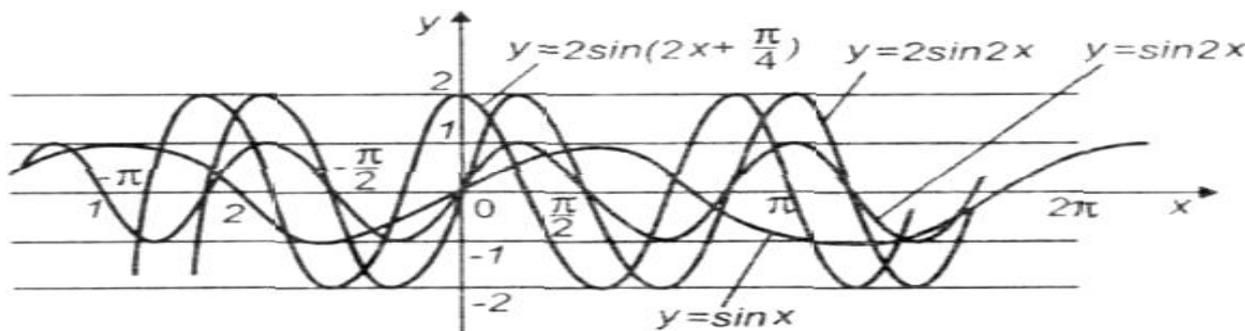
kichik davr topiladi.

3. $y = A \sin mx$ funksiya grafigini yasash uchun $y = \sin mx$ ning qiymatlarini A ga ko'paytirish kifoya. Grafik Oy o'q bo'ylab, ikki marta cho'zishdan hosil bo'ladi.

4. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$ grafigini yasash uchun $y = \sin \frac{x}{2}$ grafigini ou o'q bo'ylab ikki marta cho'zish

kerak.

$y = A \cos (mx + \phi)$ funksiyaning grafigini ham shunga o'xshash yasash mumkin.



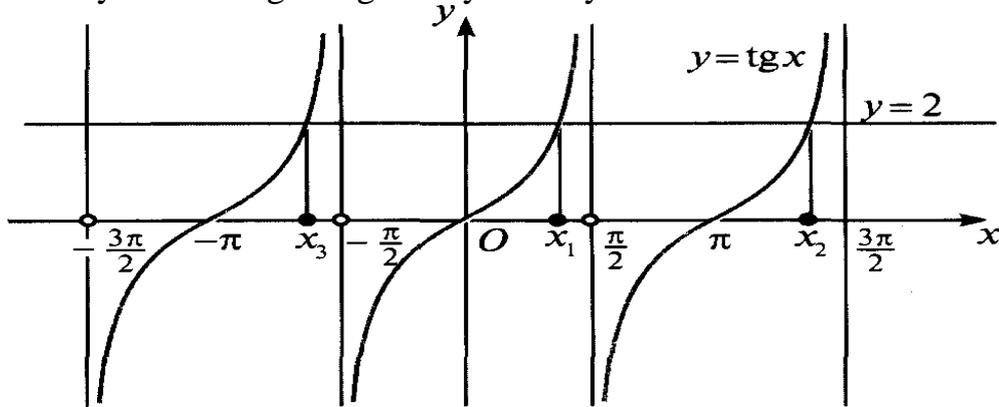
1. $\text{tg} x$ funksiya toq funksiya, ya'ni $\text{tg}(-x) = -\text{tg} x$.

2. $y = \text{tg} x$ funksiya $\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ qiymatlarda musbat,

$-\frac{\pi}{2} \leq x < \pi k, k \in Z$ qiymatlarda manfiy, $x = \pi k, k \in Z$ qiymatlarda nolga aylanadi.

3. $y = \text{tg} x$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida monoton o'suvchi.

4. $y = \text{tg} x$ funksiya davri π ga teng davriy funksiya.



Eslatma. $y = \text{tg} x$ funksiya $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ qiymatlarda aniqlanmagan, ya'ni uzilishga ega

bo'lib, $x = \pm \frac{\pi}{2}, x = \pm 3 \frac{\pi}{2}, \dots$ to'g'ri chiziqlar $y = \text{tg} x$ funksiya grafigiga asimtota deyiladi.

1. $y = \text{ctg} x$ funksiya toq funksiya, ya'ni $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg} x$.

2. $y = \text{ctg} x$ funksiya $\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ qiymatlarda musbat,

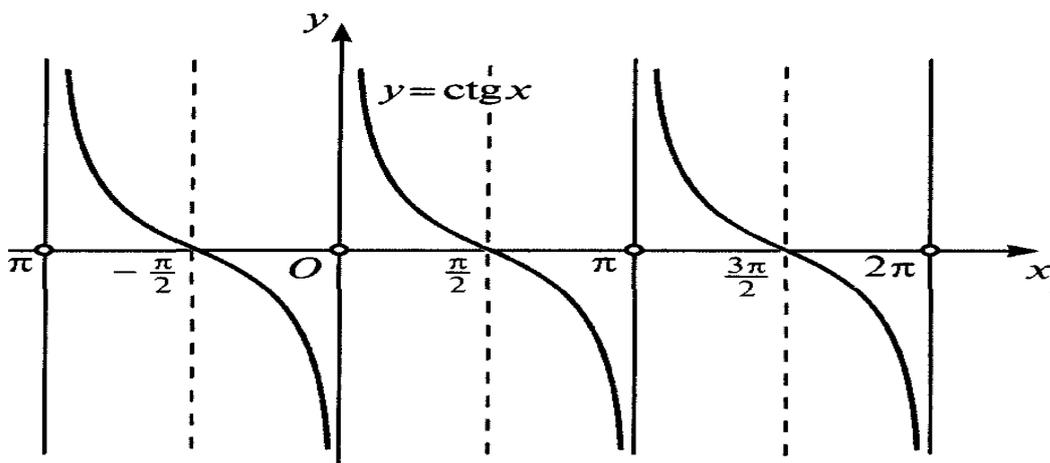
$-\frac{\pi}{2} \leq x < \pi k, k \in Z$ qiymatlarda manfiy, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ qiymatlarda nolga aylanadi.

3. $y = \text{ctg} x$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida monoton kamayadi.

4. $y = \text{ctg} x$ funksiya davri π ga teng davriy funksiya.

1-eslatma. $y = \text{ctg} x$ funksiya $x = \pi k, k \in Z$ qiymatlarda aniqlanmagan, ya'ni uzilishga ega bo'lib, $x = 0$ (OY o'q), $x = \pm \pi, x = \pm 2\pi, \dots$. To'g'ri chiziqlar $y = \text{ctg} x$ funksiya grafigiga asimtota deyiladi. $x \rightarrow \pi$ bo'lganda $\text{ctg} x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$ bo'lganda $\text{ctg} x \rightarrow \infty$.

2-eslatma. $y = \text{ctg} x$ funksiyaning grafigini $(0; \pi)$ oraliqda chizish yetarli. Uni $\pi; 2\pi; 3\pi; \dots, \pi k, \dots$, masofaga ketma-ket ko'chirish bilan $y = \text{ctg} x$ funksiyaning to'la grafigi hosil qilinadi.



$y = \text{ctgx}$ funksiyaning grafigini chizishda $\text{ctgx} = -\text{tg}(x + \frac{\pi}{2})$ tenglikdan foydalaniladi.

3-mavzu. Trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalari (4 soat)

Reja

1. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari.
2. Ikkilangan burchakning va yarim burchakning trigonometrik funksiyalari.
3. Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish va yig'indini ko'paytmaga keltirish formulalari.

Trigonometrik funksiyalar yig'indisini ularning ko'paytmasi bilan almashtirish

Sinuslar yig'indisi uchun quyidagi formula o'rinli

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1)$$

Bu formani o'rinli ekanligini isbotlaylik $\frac{\alpha + \beta}{2} = x$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = y$

deb belgilasak, u holda $x + y = \alpha$ $x - y = \beta$ tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x +$

$$+ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cos x = 2 \sin x \cdot \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ni qilamiz.}$$

Quyidagi formulalarni isboti ham (1) formula kabi isbotlanadi.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\text{ctg } \alpha \pm \text{ctg } \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Misollar. 1) $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ =$$

$$\sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2) $\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \right) \sin \frac{\pi}{12}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{aligned} \left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \right) \sin \frac{\pi}{12} &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{12} + \alpha - \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{12} - \alpha + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

3. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$ ni hisoblang

Yechish.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) &= -2 \sin \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\pi}{4} + \beta\right)}{2} \cdot \sin \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \beta - \frac{\pi}{4} - \beta\right)}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(-\beta) = 2 \sin \beta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \sin \beta. \end{aligned}$$

II. Ko'paytmani yig'indiga keltirish formulari

Quyidagi formulalar o'ringa ega:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \quad \alpha = \beta \quad \text{b} \quad \forall \text{ } \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

Bu formulalardan bittasini isbotlaylik

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \text{ formulani ibotlang.}$$

$$\text{Isbot. } \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta +$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

Misol. $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$ ni soddalashtiring.

$$\text{Yechish. } 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha - \frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha + \frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \right] = \cos 4\alpha + \cos \frac{\pi}{2} = \cos 4\alpha$$

III. $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ ifodani almashtirish.

a) yordamchi burchak φ kritish usuli:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

b) ratsionallashtiruvchi almashtirish kritish usuli:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \left(-b \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b \right)$$

4. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR.

Teskari trigonometrik funktsiyalarni aniqlashda quyidagi ildizlar haqidagi umumiy teoremdan foydalanamiz.

Teorema . Agar $y=f(x)$ funktsiya. J oraliqda aniqlangan va o'suvchi (yoki kamayuvchi) bo'lib, a shu oraliqdagi funktsiyaning ixtiyoriy qiymati bo'lsa, u holda $f(x)=a$ tenglama J oraliqda yagona ildizga ega.

Natija. Agar $f(x)$ funktsiya $[a;b]$ intervalda monoton funktsiya bo'lsa, u holda $a \leq x \leq b$ da bu funktsiyaga teskari funktsiya mavjud bo'ladi.

Yuqoridagi natijadan foydalanib, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ funktsiyalarga teskari bo'lgan funktsiyalarni aniqlaymiz.

I. $y=\sin x$ funktsiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib,

-1 dan 1 gacha bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qiladi. Natijaga asosan $y=\sin x$ funktsiyaga $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda teskari funktsiya mavjud.

$|a| \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir a con uchun

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda sinusi a ga teng bo'lgan b burchak mavjud. Bu sonni a conining arksinusi deyiladi. Va $b=\operatorname{arcsin} a$ ko'rinishda yoziladi. Aniqlashimizga asosan: $\sin(\operatorname{arcsin} a)=a$

Demak, $y=\sin x$ funktsiyaning $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda teskari funktsiyasi $x=\arcsin y$

ko'rinishga ega bo'ladi. Funktsiyaning ananaviy belgilanishiga asosan $y=\sin x$ funktsiyaga teskari funktsiyani $y=\arcsin x$ ko'rinishda yozamiz.

Ta'rif. Sinusi x ga teng bo'lgan $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ burchakka $x \in [-1; 1]$

sonning arksinusi deyiladi.

Arksinusning ta'rifiga ko'ra $\sin(\arcsin x)=x$ ekanligi kelib chiqadi.

$y=\sin x$ funktsiyaning $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda teskari funktsiyasini bilgan holda,

uning ixtiyoriy monotonlik $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ oraliq'ida unga teskari

funktsiyani aniqlash mumkin. $y=\arcsin x + 2k\pi$ burchak sinusi x ga teng bo'lganligidan

$y \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Ixtiyoriy $k \in \mathbb{Z}$ uchun $y=\arcsin x + 2k\pi$ funktsiya $y=\sin x$ funktsiyaning

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ oraliqdagi teskari funktsiyasidan iborat.

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ oraliqning har birida $y=\sin x$ funktsiya uzluksiz,

kamayuvchi va 1 dan -1 gacha bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qiladi. $X=(\pi - \arcsin y) + 2k\pi$ burchakning sinusi y ga teng bo'lganda

$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ bo'ladi. Haqiqatdan ham

$\sin x = \sin((\pi - \arcsin y) + 2k\pi) = \sin(\pi - \arcsin y) = \sin(\arcsin y) = y$.

Demak, har bir $k \in \mathbb{Z}$ uchun $x=(\pi - \arcsin y) + 2k\pi$ funktsiya $y=\sin x$ funktsiyaning

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ oraliqdagi teskari funktsiyasidan iborat ekan.

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ va $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ oraliqlarning

birlashmasi esa $(-\infty, \infty)=\mathbb{R}$ - barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki $y=\sin x$ funktsiya teskari

$y=\arcsin x$ funktsiyani $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda tekshirish etarli ekan.

Demak, $y=\arcsin x$ funktsiyada x ning har bir qiymati

$-1 \leq x \leq 1$ kesmada bo'ladi, uning qiymatlari to'plami $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

kesmadan iborat bo'ladi. Shunga ko'ra $-1 \leq x \leq 1$ kesmaning tashqarasida $y = \arcsin x$ funktsiya o'z ma'nosini yo'qotadi.

Misol.

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ lar ta'rifga asosan, yechildi.

$\arcsin 0,013$, $\arcsin 0,12$; $\arcsin \frac{1}{3}$; $\arcsin \frac{2}{3}$; $\arcsin 0,2$ kabi misollar teskari

trigonometrik funktsiyaning qiymatlari jadvalidan foydalanib topiladi.

$\arcsin 2$, $\arcsin 3$. $\arcsin 2,1$, $\arcsin 5$ kabilar ma'noga ega emas.

$y = \arcsin x$ funktsiya argumentining ishorasi o'zgarib, absolyut miqdori o'zgarib, ya'ni bu funktsiya to'q: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

ISBOT: Ma'lumki $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ tengsizlikdan

$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin x \geq -\frac{\pi}{2}$ ekanligi kelib chiqadi, bundan

$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$ bo'ladi.

Demak: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ekan

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\arcsin \frac{\pi}{3} \text{ ma'noga ega emas, chunki } -\frac{\pi}{3} < -1$$

$$\arcsin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\arcsin \frac{2\pi}{3} \text{ ma'noga ega emas, chunki } \frac{2\pi}{3} > 1$$

Endi $x = \arcsin y$ tenglikda y o'zgaruvchini $\sin x$ ga almashtirib va x ga cheklanishlarni e'tiborga olib, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

Cinus funktsiyasining davriyligidan $y = \arcsin(\sin x)$ funktsiya ham davriy bo'lib uning davri ham 2π ga teng. Shuning uchun bu funktsiyani $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ oraliqda tekshirish kifoyadir.

Agar $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'lsa, ta'rifdan $y = x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ bo'lsa, bu holda $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'lib, $\sin(\pi - x) = \sin x$

dan $y = \arcsin x = \pi - x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ bo'lsa, $y = -\pi - x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ bo'lsa, $y = x + 2\pi$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagilardan

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & \text{agar } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ x - 2\pi, & \text{agar } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \\ -\pi - x, & \text{agar } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] \\ x + 2\pi, & \text{agar } x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \quad (2)$$

tenglikni yozish mumkin.

Umumiy holda quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & \text{agar } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ (2k + 1)\pi - x, & \text{agar } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (3)$$

(2) va (3) formulalardan foydalanib, ba'zi misollarni juda ason yechish mumkin.

Misollar

1. $7 \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)$ ni hisoblang

Yechish. $\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ekanligidan (2) ga asosan

$7 \cdot \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right) = 7 \cdot \frac{\pi}{7} = \pi$ bo'ladi.

2. $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{7}\right)$ ni qaraylik

Yechish: $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$ bu erda $\frac{6\pi}{7} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ kesmaga tegishli

ekanligidan (2) ga asosan $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right) = \pi - \frac{6\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$ ga ega bo'lamiz.

3. $\text{Arcsin}(\sin 5)$ ni hisoblang. Bu erda $5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ bo'lganligi uchun (2) ga

ko'ra $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$ bo'ladi.

4. $\text{Arcsin}(\sin 10)$ ni hisoblang. Bu erda (3) formulaga asosan, $k=1$ da $10 \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ ekanligidan $\arcsin(\sin 10) = 3\pi - 10$ bo'ladi.

II. $Y = \cos x$ funktsiya $[0; \pi]$ oraliqda monoton kamayuvchi bo'lib 1 dan -1 gacha bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qiladi. Yuqorida berilgan natijaga asosan $y = \cos x$ funktsiyaga $x \in [0; \pi]$ oraliqda teskari funktsiya mavjud. $|a| \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir a con uchun $[0; \pi]$ oraliqda kosinusi a ga teng bo'lgan b burchak mavjud. Bu burchakni a conining arkkosinusi deyiladi. Va $b = \arccos a$ ko'rinishda yoziladi.

TA'RIF Kosinusi x ga teng bo'lgan $\arccos x \in [0; \pi]$ burchakka $x \in [-1; 1]$ sonning arkkosinusi deyiladi.

Arkkosinusning ta'rifiga ko'ra $\cos(\arccos x) = x$ ekanligi kelib chiqadi. Bulardan ko'rinadiki $y = \cos x$ funktsiyaning $[0; \pi]$ oraliqda teskari funktsiyasi $x = \arccos y$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Funktsiyaning ananaviy belgilanishiga asosan $y = \cos x$ funktsiyaga teskari funktsiyani $y = \arccos x$ ko'rinishda yozamiz. Demak, $\cos(\arccos x) = x$ ekan.

$y = \arccos x$ funktsiyaning aniqlanish sohasi $-1 \leq x \leq 1$ kesmadan iborat bo'lib, funktsiya bu kesmadan tashqarida mavjud bo'lmaydi.

$y = \arccos x$ funktsiya argumentining ishorasit o'zgarsa, ya'ni $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $\arccos x = y$ desak, arkkosinus ta'rifiga ko'ra $x = \cos y$ bo'ladi. $0 \leq \arccos x \leq \pi$ ekanligidan $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$ va $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$ bo'ladi. Demak, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ ekan.

Misollar. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\arccos 0,35$, $\arccos \frac{2}{5}$, $\arccos 0,7135$ -lar jadvaldan foydalanib topiladi.

$\arccos \frac{3}{2}$, $\arccos \frac{\pi}{2}$; $\arccos(-\sqrt{5})$ lar ma'noga ega emas, chunki

$\frac{3}{2} > 1$; $\frac{\pi}{2} > 1$, $1 - \sqrt{5} < -1$.

Ixtiyoriy $k \in \mathbb{Z}$ uchun $y = \arccos x + 2k\pi$ funktsiya $y = \cos x$ funktsiyaning $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$ oraliqda teskari funktsiyasidan iborat $[-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$ va $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$ $k \in \mathbb{Z}$ oraliqlarning birlashmasi \mathbf{R} - barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, $y = \cos x$ funktsiyaga teskari $y = \arccos x$ funktsiyani tekshirish uchun uni $[0; \pi]$ oraliqda tekshirish etarli ekan.

Endi $y = \arccos(\cos x)$ funktsiyani ko'rib chiqaylik. Kosinus funktsiyaning davriyligidan $y = \arccos(\cos x)$ funktsiya ham davriy, uning davri 2π ga teng.

Agar $x \in [0; \pi]$ bo'lsa, $y = \arccos(\cos x) = x$ bo'ladi.

Agar $x \in [\pi; 2\pi]$ bo'lsa, $y = \arccos(\cos x) = 2\pi - x$ bo'ladi.

Xuddi shuningdek, agar $x \in [3\pi; 4\pi]$ bo'lsa, $y = \arccos(\cos x) = x - 2\pi$, agar $x \in [2\pi; 3\pi]$ bo'lsa, $y = \arccos(\cos x) = 4\pi - x$ bo'ladi.

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi tenglikni yozish mumkin.

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & \text{gar } x \in [0; \pi] \\ 2\pi - x, & \text{gar } x \in [\pi; 2\pi] \\ x - 2\pi, & \text{gar } x \in [2\pi; 3\pi] \\ 4\pi - x, & \text{gar } x \in [3\pi; 4\pi] \end{cases} \quad (4)$$

Umumiy holda quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz.

$$y = \arccos(\cos x) \begin{cases} x - 2k\pi, & \text{gar } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \text{ bo'lsa} \\ 2k\pi - x, & \text{gar } (2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (5)$$

III. $y = \operatorname{tg} x$ funktsiya $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda uzluksiz, o'suvchi va \mathbf{R} dagi barcha

qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun ixtiyoriy $a \in \mathbf{R}$ son uchun $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda

$\operatorname{tg} x = a$ tenglamaning yagona vildizi mavjud. Bu v soni a sonining arctg angensi deyiladi va uni $b = \operatorname{arctg} a$ ko'rinishda yoziladi.

Shunday qilib, $y = \operatorname{arctg} x$ funktsiya $y = \operatorname{tg} x$ funktsiyaning $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

oraliqda teskari funktsiyasidan iborat.

TA'RIF. Tangensi x ga teng bo'lgan $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ burchakka $x \in \mathbf{R}$

sonining arktangensi deyiladi.

Arktangensning ta'rifiga ko'ra $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $k \in \mathbb{Z}$ uchun $y = \operatorname{arctg} x + k\pi$ funktsiya $y = \operatorname{tg} x$ funktsiyaning

$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ oraliqdagi teskari funktsiyasidan iborat.

$y = \arctg x$ funktsiya $-\infty < x < +\infty$ oraliqda $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'sadi.

$y = \tg x$ funktsiya toqligidan $y = \arctg x$ funktsiya ham toq bo'ladi. Ya'ni $y = \arctg x$ funktsiya argumentning ishorasi o'zgaranda funktsiyaning ishorasi ham o'zgaradi, lekin miqdori o'zgarmaydi.

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

Endi $y = \arctg(\tg x)$ funktsiyani tekshiraylik $y = \tg x$ funktsiyaning va $y = \arctg x$ funktsiyalarning davriyligidan $y = \arctg(\tg x)$ funktsiya ham davriy bo'lib, uning davri ham π ga teng.

Yuqoridagilarni e'tiborga olsak, $-\frac{\pi}{2} < \arctg(\tg x) < \frac{\pi}{2}$ bo'lib, agar

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, unda $\arctg(\tg x) = x$; agar $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ bo'lsa, unda $\arctg(\tg x) = x - \pi$;

agar $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ bo'lsa, unda

$\arctg(\tg x) = x - 2\pi$; agar $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, unda $\arctg(\tg x) = x + \pi$ bo'ladi. Bulardan quyidagi aynimiyatga ega bo'lamiz.

$$\arctg(\tg x) = \begin{cases} x, & \text{agar } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \pi, & \text{agar } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi, & \text{agar } -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (6)$$

Umumiy holda agar $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo'lsa,

$\arctg(\tg x) = x - k\pi$ tenglik o'rinli bo'ladi.

IV. $y = \ctg x$ funktsiya $(0; \pi)$ oraliqda uzluksiz, kamayuvchi va \mathbf{R} dan barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Shuning uchun har bir $a \in \mathbf{R}$ son uchun $(0; \pi)$ oraliqda $\ctg x = a$ tenglamaning yagona ildizi mavjud. Bu b soni a sonining arkkotangensi deyiladi va uni $b = \text{arcctg } a$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, $y = \ctg x$ funktsiyaning $(0; \pi)$ oralikdagi teskari funktsiyasi $y = \text{arcctg } x$ dan iborat.

TA'RIF. $\text{arcctg } x$ kotangenski x ga teng bo'lgan 0 dan π gacha oralikdagi burchakdan iborat.

Ta'rifdan $\ctg(\text{arcctg } x) = x$ ekanligi kelib chiqadi. $y = \ctg x$ funktsiyaning davri π ga teng ekanligidan $y = \text{arcctg } x + k\pi$ funktsiya $y = \ctg x$ funktsiyaning $(k\pi; \pi + k\pi)$ oraliqdagi teskari funktsiyasi bo'ladi.

$y = \text{arcctg}(\ctg x)$ funktsiya ham davriy uning davri π ga teng.

$$y = \operatorname{arctg}(ctgx) = \begin{cases} x, \text{ agar } < x < \pi \\ x - \pi, \text{ agar } \pi < x < 2\pi \\ x + \pi, \text{ agar } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Umumiy holda, agar $k\pi < x < \pi + k\pi$ bo'lsa.

$\operatorname{arctg}(ctgx) = x - k\pi$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Biz yuqorida $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(tgx)$ va $\operatorname{arctg}(ctgx)$ larni hisoblash uchun formulalarni keltirib chiqadik

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(tgx) + \operatorname{arctg}(ctgx) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (8)$$

ayniyatlarni e'tiborga olsak, $\arcsin(\cos x)$, $\arccos(\sin x)$, $\operatorname{arctg}(ctgx)$ va $\operatorname{arctg}(tgx)$ larni hisoblashni $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\operatorname{arctg}(tgx)$, $\operatorname{arctg}(ctgx)$ larni birini hisoblashga keltiriladi:

1-misol. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$ ni hisoblang

Yechish. $\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$ tenglikni

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$ kelib chiqadi. Bundan $x \in [0; \pi]$ bo'lganda

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ bo'ladi.

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{7\pi - 2\pi}{14} = \frac{5\pi}{14}$$

2-misol. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)\right)$ ni hisoblang

Yechish. (7) tenglikdan

$\arcsin\left(\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)\right)$ kelib chiqadi.

$\frac{11\pi}{7} \in [\pi; 2\pi]$ bo'lgani uchun (4) ga asosan.

$$\arcsin\left(\cos\frac{11\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(2\pi - \frac{11\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\pi + \frac{11\pi}{7} = \frac{7\pi - 28\pi + 22\pi}{14} = \frac{29\pi - 28\pi}{14} = \frac{\pi}{14}$$

(7) tenglikdan $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$ ga ega bo'lamiz. Bu

tenglikdan $\arccos(\sin x)$ ni qiymati x ni qaysi oraliqlarga qarashli ekanligini hisobga olgan holda $\arcsin(\sin x)$ ni qiymatini hisoblashga keltiriladi.

3-Misol. $\arccos\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right)$ ni hisoblang

Yechish. $\arccos\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right)$

$\frac{8\pi}{7} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ bo'lganligi uchun $\arcsin\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = \pi - \frac{8\pi}{7}$ ga teng bo'ladi.

Bundan

$$\arccos\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \pi + \frac{8\pi}{7} = \frac{7\pi - 14\pi + 16\pi}{14} = \frac{9\pi}{14}$$

kelib chiqadi.

Demak, $\arccos\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = \frac{9\pi}{14}$

(8) tenglamadan

$$\arccotg(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} x), \quad \arctg(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - \arccotg(\operatorname{ctg} x).$$

kelib chiqadi bulardan foydalanib quyidagi misollarni oson hal qilish mumkin.

4-Misol. $\arctg(\operatorname{ctg} 7)$ ni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagilarni e'tiborga olsak,

$$\arctg(\operatorname{ctg} 7) = \frac{\pi}{2} - \arccotg(\operatorname{ctg} 7), \quad \arccotg(\operatorname{ctg} 7) = 7 - 2\pi \quad \text{ga teng, bundan,}$$

$$\arctg(\operatorname{ctg} 7) = \frac{\pi}{2} - (7 - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - 7 + 2\pi \quad \arctg(\operatorname{ctg} 7) = \frac{5\pi}{2} - 7 \quad \text{bo'ladi. Demak,}$$

$$\arctg(\operatorname{ctg} 7) = \frac{5\pi}{2} - 7 \quad \text{bo'ladi.}$$

5-Misol. $\arccotg\left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}\right)$ ni hisoblang

$$\text{Yechish. } \arccotg\left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{9\pi}{7} - \pi\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{7} + \pi = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\pi}{7} = \frac{21\pi - 18\pi}{14} = \frac{3\pi}{14}; \quad (6) \text{ ni e'tiborga olsak, Demak,}$$

$$\arccotg\left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{14}$$

Yuqoridagi teskari trigonometrik funktsiyalarning aniqlanishiga asosan quyidagi jadvalni to'ldirish mumkin.

t.n	Funktsiya	aniqlanish sohasi	uzgarish sohasi (qiymatlar sohasi)
1	$y=\arcsinx$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2	$y=\arccosx$	$[-1;1]$	$[0; \pi]$
3	$y=\arctgx$	$(-\infty; \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
4	$y=\text{arcctgx}$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \pi)$

Teskari trigonometrik funktsiyalarning xossalaridan

$$\arcsin(-x)=-\arcsinx, \quad \text{arctg}(-x)=-\text{arctgx},$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccosx, \quad \text{arcctg}(-x)=\pi-\text{arcctgx}$$

larni keltirish mumkin.

Teskari trigonometrik funktsiyalarning ta'rifidan $|a|\leq 1$ bo'lganda.

$\sin(\arcsina)=a$ $\cos(\arccosa)=a$ va ixtiyoriy va ixtiyoriy $a\in\mathbf{R}$ son uchun $\text{tg}(\text{arctga})=a$ $\text{stg}(\text{arcctga})=a$ tengliklar o'rinli ekan.

$$\begin{array}{ll} \text{Endi } \sin(\arccosx), & \cos(\arcsinx), \\ \sin(\text{arctgx}), & \cos(\text{arctgx}), \\ \sin(\text{arcctgx}), & \cos(\text{arcctgx}), \\ \text{tg}(\arcsinx), & \text{tg}(\text{arcctgx}), \\ \text{tg}(\arccosx), & \text{ctg}(\arcsinx), \\ \text{ctg}(\arccosx), & \text{ctg}(\text{arctgx}) \end{array}$$

- larni qanday (hisoblash) almashtirishni ko'rib chiqaylik.

1) $\sin(\arccosx)$ ni ko'raylik, ayniyatda $\varphi=\arccos x$ desak, quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz.

$$\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \pm\sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2},$$

$0\leq\varphi\leq\pi$ ekanligidan va $|x|\leq 1$ bo'lsa, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

2) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ buni yuqoridagi kabi keltirib chiqarish mumkin, bu erda $|x|\leq 1$

3) ixtiyoriy $x\in\mathbf{R}$ son uchun esa:

$$\text{tg}(\text{arcctgx}) = \frac{1}{\text{ctg}(\text{arcctgx})} = \frac{1}{x}$$

$$4) \sin(\text{arctgx}) = \frac{\text{tg}(\text{arctgx})}{\sqrt{1+\text{tg}^2(\text{arctgx})}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

5) ixtiyoriy $x\in\mathbf{R}$ son uchun

$$\text{ctg}(\text{arctgx}) = \frac{1}{x},$$

$$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arcctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\arcctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6- misol. $tg(\arccos x) = ctg(\arcsin x)$ ekanligini isbotlang.

Isboti. Ayniyatni har ikki tomonini soddalashtiramiz.

$$1) \quad tg(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$2) \quad ctg(\arcsin x) = \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{ayniyat isbotlandi bu erda}$$

$\sin(\arcsin x) = x$ va $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; $\cos(\arccos x) = x$,

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ lardan foydalandik.

7- misol. $\sin(2\arcsin x) = \sin(2\arccos x)$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Ayniyatni har ikki tomonini soddalashtiramiz.

$$1) \quad \sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$2) \quad \sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) = 2 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot x = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Demak, $\sin(2\arcsin x) = \sin(2\arccos x)$.

Bir turdagi teskari trigonometrik funktsiyani ikkinchi turdagi trigonometrik funktsiyaga almashtirishni quyidagi jadvalda keltiramiz.

1	$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
2	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$
3	$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
4	$\sin(\arcctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arcctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
5	$tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
6	$tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$tg(\arctg x) = x$	$ctg(\arctg x) = \frac{1}{x}$
8	$tg(\arcctg x) = \frac{1}{x}$	$ctg(\arcctg x) = x$
9	$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$	$\cos(2\arcsin x) = 1-2x^2$

10	$\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$	$\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$
11	$\sin(2\arctg x) = \frac{2x}{1+x^2}$	$\cos(2\arctg x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$
12	$\operatorname{tg}(2\arctg x) = \frac{2x}{1-x^2}$	$\operatorname{ctg}(2\arctg x) = \frac{1-x^2}{2x}$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Hisoblang:

1. $12\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2. $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4. $6\arctg\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
5. $2\arctg 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 6. $3\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
7. $5\arctg\left(-\sqrt{3}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8. $2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
9. $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 10. $4\arctg 1 + 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
11. $2\arctg(-1) + 3\arctg\left(-\sqrt{3}\right)$; 12. $\sin\left(3\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arccos \frac{1}{2}\right)$;
13. $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\arccos(-1)$;
14. $\cos\left(3\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 15. $\cos^2\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$;
16. $\sin\left(2\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$; 17. $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$;

4-mavzu. Trigonometrik tenglama va tengsizliklar (4 soat)

Reja

1. Trigonometrik tenglamalar.
2. Trigonometrik tengsizliklar

Trigonometrik tenglama deb, noma'lumning trigonometrik funksiyalariga nisbatan algebraik bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Har qanday trigonometrik tenglamani yechish, quyidagi eng sodda trigonometrik tenglamalardan birini yechishga keltiriladi.

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

a - haqiqiy sonning har turli oraliqlardagi qiymatlari uchun yuqoridagi tenglamalarning yechimlari quyidagi jadvalda berilgan.

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
$ a < 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$ a > 1$	\emptyset	\emptyset
$a = 0$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = (1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{tg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	
	$\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	

Xususiy holda:

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad \sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = 1, x = 2k\pi; \quad \cos x = -1, x = \pi + 2k\pi; \quad \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \text{ da } x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad \operatorname{tg} x = 0, x = k\pi; \quad \operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} - k\pi \quad \text{Yuqorida hamma joyda } k \in \mathbb{Z}$$

I. Sodda trigonometrik tenglamalar.

1-misol. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ tenglamani yeching.

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{6}(1+3k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Javob: $x = \frac{\pi}{6}(1+3k), \quad k \in \mathbb{Z}$

2-misol. $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tenglamani yeching.

$$\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{x} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{8}{4k + (-1)^k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Javob: $x = \frac{8}{4k + (-1)^k}, \quad k \in \mathbb{Z}$

2. Algebraik tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar.

3-misol. $\sin x - \cos 2x = 0$ tenglamani yeching.

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow -\cos 2x = 2\sin^2 x - 1$$

ekanligini e'tiborga olsak berilgan tenglama $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ tenglamaga tengkuchli.

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bundan $\sin x = -1$ yoki $\sin x = \frac{1}{2}$ tenglamalarga ega bo'lamiz.

Bularni echsak $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$ lar hosil bo'ladi. Agar $n=2k$

desak $x = (-1)^{2k} \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, agar, $n=2k+1$ desak

$$x = (-1)^{2k+1} \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{natijada}$$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. larga ega bo'lamiz. Bu

uchta yechimni birlashtirib uni $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

Haqiqatan ham, agar $m=3k-1$ desak $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, agar $m=3k$ desak

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, agar $m=3k+1$ desak $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ yechimlar kelib chiqadi. Demak,

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Agar trigonometrik tenglamalar ikki xil uchul bilan yechilgan bo'lsa, bu tenglama yechimlar to'plamining yozilishi turlicha bo'lishi mumkin. O'quvchi tenglamani echgandan so'ng, biz keltirgan javobdan farqli (yozilishi jihatdan yechimga ega bo'lsa, bu javoblarning ekvivalentligini isbot qilish maqsadga muvofiqdir.

Agar trigonometrik tenglamaning yechimlari to'plami bir necha formulalar orqali yozilgan bo'lsa, ba'zan ularni birlashtirish va javobni soddaroq ko'rinishda yozish mumkin. (3-Misolga qarang).

3. $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan birjinsli bo'lgan tenglamalar.

4-misol. $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama birjinsli bo'lgani uchun $\cos^2 x \neq 0$, tenglamani har ikki tomonini $\cos^2 x \neq 0$ ga bo'lib.

$2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan $\operatorname{tg} x = t$ deb

$2t^2 + 3t + 1 = 0$ ga ega bo'lamiz, buni echamiz: $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$ yoki

$$\operatorname{tg} x = -1, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Demak, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Javob: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Bir xil ikkita trigonometrik funktsiyalarning tengligiga keltiriladigan tenglamalar.

a) $\sin x = \sin y \Leftrightarrow \{x - y = 2k\pi, x + y = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

s) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5.-misol $\sin 3x - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin 5x \Leftrightarrow \{5x - 3x = 2k\pi$

$$5x + 3x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Javob: } x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6-misol. $\cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi, \\ 3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}(4k + 1), \quad x = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Javob: } x = \frac{\pi}{8}(4k + 1), \quad x = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Ko'paytuvchilarga ajraladigan tenglamalar.

7-Misol. $2\sin^3x + \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 - 1) + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0, \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Javob: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

6. Yig'indini ko'paytmaga keltirib yechiladigan tenglamalar.

8-Misol. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0, \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bu erda $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ formuladan foydalanildi.

Javob: $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

7. Ko'paytmani yig'indiga keltirib yechiladigan tenglamalar.

9-misol. $\sin 7x \cos 3x = \sin 6x \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x) =$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0, \cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Javob: $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

8. Darajasi pasaytiriladigan tenglamalar.

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ formulalardan foydalaniladi.

10-Misol. $2\sin^2 x + \cos^2 4x \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0,$

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

Javob: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9. $a \sin x + b \cos x = c$ ko'rinishdagi tenglamalar.

11-misol. $12 \cos 2x - 5 \sin 2x = -13$ tenglamani yeching.

Yechish: $12^2 + (-5)^2 = (-13)^2$ bo'lgani uchun berilgan tenglamani har ikki tomonini

13 ga bo'lsak.

$$\frac{12}{13} \cos 2x - \frac{5}{13} \sin 2x = -1 \text{ ni hosil qilamiz.}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \text{ ni e'tibor olsak } \cos \varphi = \frac{12}{13}, \sin \varphi = -\frac{5}{13}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi φ burchak mavjud, shuning uchun

$$\cos \varphi \cos 2x + \sin \varphi \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \cos(2x - \varphi) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \varphi = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} + k\pi$$

$$\text{Javob: } x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

TRIGONOMETRIK TENGSIZLIKLAR

1. $\sin x < a$

a	M
$-1 < a \leq 1$	$-\pi - \arcsin a + 2k\pi < x < \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a > 1$	R
$a \leq -1$	\emptyset

2. $\sin x > a$

a	M
$-1 \leq a < 1$	$\arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a < -1$	R
$a \geq 1$	\emptyset

3. $\cos x > a$

a	M
$-1 < a \leq 1$	$\arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a > 1$	R
$a \leq -1$	\emptyset

1. $\cos x > a$

a	M
$-1 \leq a < 1$	$-\arccos a + 2k\pi < x < \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$a < -1$	R
$a \geq 1$	\emptyset

$$5. \operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6. \operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + k\pi < x < \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow k\pi < x < \operatorname{arcctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bu erda M - tengsizlikning yechimlaridan iborat bo'lgan to'plam.

12-misol. $\sin x > \frac{1}{2}$ tengsizlikni yeching.

$$\text{Yechish: } \sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi < x < \pi - \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Javob: } \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

13-misol. $\cos 2x \leq -\frac{1}{2}$ tengsizlik yechilsin.

Yechish:

$$\cos 2x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \leq 2x \leq -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

14-misol. $\operatorname{tg} 2x > 1$ tengsizlik yechilsin.

Yechish:

$$\operatorname{tg} 2x > 1 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} 1 + k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Javob: } \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

15-misol. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + k\pi \leq \frac{x}{2} < \pi + k\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \frac{x}{2} < \pi + k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Javob: } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $1 - 4\sin x \cos x = 0;$

2. $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0;$

3. $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0;$

4. $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0;$

$$\begin{array}{ll}
5. 1 + \sin 5x \sin 4x = \sin 5x \cos 4; & 6. (2 \sin x - 1)(3 \sin x + 1) = 0; \\
7. (4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0; & 8. (2 \sin 2x - 1)(\sin 4x + 1) = 0; \\
9. 2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0; & 10. 4 \sin^2 x + \cos x - 3 \frac{1}{2} = 0; \\
11. 2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - 3 = 0; & 12. 2 \cos^2 x + \sin x - 2 = 0; \\
13. 25 \sin^2 x + 100 \cos x = 89; & 14. \cos 2x + 3 \sin x = 2; \\
15. 2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 3; & 16. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x + 3; \\
17. 3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x - \sin 2x = 0; & 18. \sin^2 x - \sin 2x = 3 \cos^2 x; \\
19. \sin 4x - 3 \cos 4x = 8 \sin^2 2x; & 20. 6 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos^2 x = 2; \\
21. \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos 2x}; & 22. \cos^2 - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 3; \\
23. 2 \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 3; & 24. 2 \sin 4x - 3 \sin^2 2x = 1; \\
25. \sin 2x = \sin 5x; & 26. \sin 3x = \cos x; \\
27. \cos 4x = \cos 6x; & 28. \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x; \\
29. \sin x^2 = \sin x; & 30. \operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 1; \\
31. \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = 1; & 32. \sin^2 x - \sin x = 0; \\
33. \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x = 0; & 34. \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0; \\
35. \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x; & 36. c'sx \operatorname{tg} 3x = 0.
\end{array}$$

5-mavzu. Trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar sistemasi. (2 soat)

Reja:

1. Trigonometrik tenglamalar sistemasi.
2. Trigonometrik tengsizliklar sistemasi.

Узулиги 2π га тенг бўлган $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиқда бу қўш тенгсизликни еч-

сак, $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ва $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ шартлар билан аниқланган ечимни топамиз.

Бунда $\sin x$ нинг даврини ҳисобга оламиз (224- шакл).

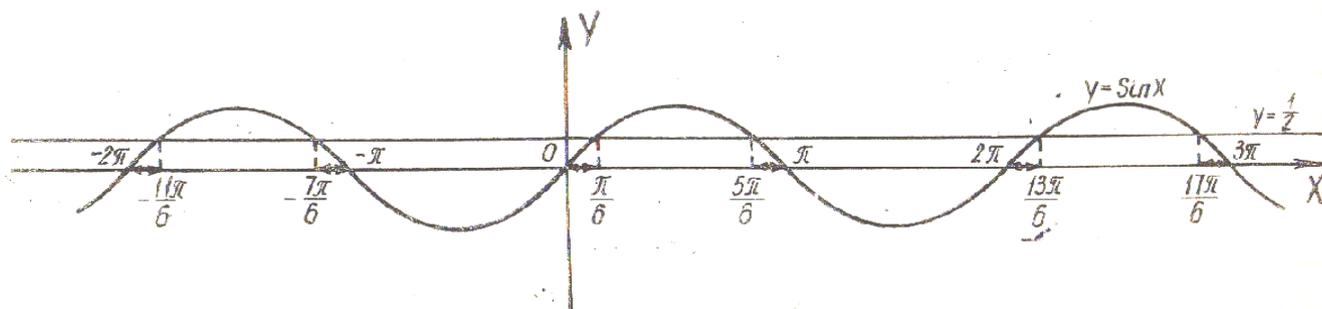
Ж а в о б. $2\pi k < x < 2\pi k + \frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Тенгламалар системаси.

I. Ҳар бир тенгламаси тригонометрик функцияларга нисбатан тенглама бўлган системалар.

5- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad (13)$$



224-шакл.

Ечилиши. $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi + \pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$) лар шартида аниқланган бу система бундай ечилади ($k, n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}
 (13) \iff & \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \cos x \cos y = \sin x \sin y \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \\
 & \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x-y = 2\pi n, \\ x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \\
 & \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n+k), \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n-k). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ж а в о б. $\left\{ \left(\frac{\pi}{3} (3n+3k \pm 1); \frac{\pi}{3} (3n-3k \pm 1) \right), n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

6-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Ечилиши. $u = \sin x$, $v = \cos y$ десак,

$$(14) \iff \begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{1}{2}, \\ v = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Бу ердан ($n, k \in \mathbb{Z}$):

$$(14) \iff \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y_k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\{(x_n; y_k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$.

7-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (15)$$

Ечилиши. Йиғиндини кўпайтмага келтириш формуласидан:

$$(15) \iff \begin{cases} \sin(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}, \\ \sin(x+y)\sin(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Агар $u = x + y$, $v = x - y$ деб белгилаб, сўнг системанинг иккинчи тенгламасини биринчисига бўлсак ($n, k \in \mathbb{Z}$):

$$(15) \implies \begin{cases} \sin u \cos v = \frac{1}{2}, \\ \sin u \sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} v = -\sqrt{3}, \\ \sin u = (-1)^n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \\ u = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Демак,

$$(15) \iff \begin{cases} x + y = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{3} + \pi n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} (2k + n), \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} (2k - n). \end{cases} \quad (15 \text{ a})$$

Ж а в о б. Ҳамма ечимлар тўплами (15 а) даги формулалар билан аниқланади.

II. Бир тенгламаси бурчаклар орасидаги боғланишни, иккинчиси уларнинг тригонометрик функциялари орасидаги боғланишни ифодаловчи тенгламалар системаси.

8- м и с о л. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{3\pi}{2}, \\ \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 y = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Ечилиши. Қуйида $n \in \mathbb{Z}$ лар учун

$$(16) \iff \begin{cases} y = \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}, \\ \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}, \\ 1 + \cos x + 1 - \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}, \\ \sin x = -\cos x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = \frac{\pi}{4} (4n - 1), \\ y_n = \frac{\pi}{8} (7 - 4n). \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} (4n - 1); \frac{\pi}{8} (7 - 4n) \right), n \in \mathbb{Z} \right\}$.

9-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12}, \\ \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} 2y. \end{cases} \quad (17)$$

Ечилиши. Система $x \neq \frac{\pi}{4} (1 + 2k)$, $y \neq \frac{\pi}{4} (1 + 2l)$, $x \neq \frac{\pi}{8} (8m - 1)$; $k, l, m \in \mathbb{Z}$ шартда аниқланган бўлиб, унда ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} (17) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{\pi}{12}, \\ \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{\pi}{12}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{\pi}{12}, \\ x = \frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{4} n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{4} n, \\ y_n = \frac{\pi}{48} - \frac{\pi}{4} n. \end{cases} \quad (17 \text{ a}) \end{aligned}$$

Ж а в о б. Ўзгарувчиларнинг (17 а) даги қийматлари системанинг аниқла-
ниш соҳасига киргани учун у ечим бўлади.

10-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases} \quad (18)$$

Ечилиши. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), $y \neq \pi + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) шартлар асосида

$$(18) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 3 \cos x \sin y, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x \sin y = \frac{1}{3}, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

бу ерда $\cos(x - y) = \cos |x - y| = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ экани ҳисобга олинди.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y + x) + \sin(y - x) = \frac{1}{3}, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

а) $x > y$ бўлса, $x - y = \frac{\pi}{3} \implies \sin(y - x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \sin(y + x) =$
 $= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$ бу ҳолда система ечимга эга эмас.

$$\text{б) } x < y \text{ бўлса, } x - y = -\frac{\pi}{3} \implies \sin(y - x) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Демак:

$$(18) \iff \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{3}, \\ x + y = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Бу ердан ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{cases} x_k = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi k}{2}, \\ y_k = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi k}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

Жавоб. Барча (19) лар билан аниқланган (x_k ; y_k) лар ечимдир.

Машқ. (1) ÷ (8) даги тенгсизликлар ечимини график равишда тасвирланг.

28- топшириқ. Тенгсизликларни ечинг:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x > \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x > 2$; г) $\sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 д) $\sin x > \frac{1}{3}$; е) $\cos x > -\frac{1}{2}$; ж) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$;
 и) $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 > 0$; б) $6 \cos^2 x - 11 \cos x + 4 > 0$; в) $\sin^2 x > \sin 2x$;
 г) $\cos 4x < -\cos 2x$; д) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$; е) $12 \cos^2 x + 7 \sin x < 13$.

3. а) $\cos 2x \sin x < 0$, $-\pi < x < \pi$; б) $2 \operatorname{tg} 2x \leq 3 \operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -3$;
 г) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$; д) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$; е) $2 \cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$;
 ж) $\sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \leq 0$.

29- топшириқ. Системаларни ечинг:

1. а)
$$\begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{3}{4}, \\ 3 \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} y; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2y = 1 \\ \operatorname{tg}(x - 2y) = \frac{4}{3}; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x + \cos 2y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} 2 \sin x = -\sin y, \\ 2 \cos x = \sqrt{3} \cos y; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2 \sin y \cos(x - y) = \sin x; \end{cases}$$

ж)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 5; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} \cos(x + y) = 2 \cos(x - y), \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \text{и) } \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{5} \cos y. \end{cases}$$

2. а)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
\text{в)} \begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0; \end{cases} \\
\text{д)} \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2y = 1, \\ \sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2y = 0; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \sin(x+y), \\ \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} = \frac{3}{4}; \end{cases} \\
\text{ж)} \begin{cases} \operatorname{tg} 2(x+y) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y, \\ 2 \sin(2x+y) \cos y + \cos 2y + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} 4 \sin x - 2 \sin y = 3, \\ 2 \cos x - \cos y = 0; \end{cases} \\
\text{и)} \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 \sin y, \\ \sin 2x - \sqrt{3} \sin 2y = -3 \cos 2y. \end{cases} \\
\text{3. а)} \begin{cases} 2 \sin x \cos y = 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y, \\ 2 \sin y \cos x = \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} y; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = 1; \end{cases} \\
\text{в)} \begin{cases} 2x - y = 2\pi, \\ 2 \sin x = -\sin y; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 12(x+y) = -5\pi, \\ 3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \sqrt{3}; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ 4 \sin x \cos y = -1; \end{cases} \\
\text{е)} \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x = -3 \operatorname{tg} y; \end{cases} \quad \text{ж)} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{12}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}; \end{cases} \\
\text{и)} \begin{cases} \sin x \cos y = b, \\ x - y = \beta; \end{cases} \quad \text{к)} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos^2 x - 3 \cos^2 y = \frac{-1}{2}. \end{cases}
\end{array}$$

9-§. Параметрли тенглама ва тенгсизликлар

1. Параметрли тенглама. Агар бир номаълумли тенглама

$$f(x, a, b, \dots, c) = 0 \quad (a, b, \dots, c \in \mathbf{R})$$

шаклда берилса, у параметрли тенглама дейилиб, унинг аниқланиш соҳаси, илдизлари сони a, b, \dots, c параметрларга боғлиқ равишда ўзгариб туради. Параметрли рационал тенгламага мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$ax^2 - (a-b)x - b = 0. \quad (1)$$

Ечилиши. Агар $a=0$ бўлса, бу тенглама чизиқлидир:

$$(1) \Leftrightarrow bx - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \Rightarrow x = 1, \\ b = 0 \Rightarrow x = c. \end{cases}$$

с — ихтиёрий чекли сон, аксинча, $a \neq 0$ бўлса, (1) тенглама квадратикдир:

$$(1) \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{2a} = \frac{a-b \pm |a+b|}{2a}.$$

6-mavzu. Arkfunksiyalar tushunchasi (2 soat)

Reja

1. $y = \arcsin x$ funksiya va xossalari.
2. $y = \arccos x$ funksiya va xossalari.
3. $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyalar va xossalari

7-§. Тригонометрик айниятлар ва тенгламалар

1. Тригонометрик айният. Агар $A(x) = B(x)$ каби ифоданинг чап ва ўнг томони тригонометрик функцияларга нисбатан алгебраик ифода бўлса ва бу тенглик шу функциялар аргументининг бирор D соҳадаги ҳар бир x қиймати учун bajarилса, у D соҳадаги **тригонометрик айният** деб аталади. Масалан, ушбу айният $x \in \mathbf{R}$ да ўринлидир:

1-мисол. Айниятни исботланг:

$$\cos^2 x - \cos^4 x + \sin^4 x = \sin^2 x.$$

Исботи. $\cos^2 x - \cos^4 x + \sin^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + \sin^4 x =$
 $= \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x.$

Ушбу айният эса \mathbf{R} нинг $x \neq \pi n$, $x \neq \frac{\pi}{2} k$ ($n, k \in \mathbf{Z}$) шартларни қаноатлантирувчи нуқталари тўпламида ўринлидир,

2-мисол. Айниятни исботланг:

$$\frac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^6 x.$$

Исботи. $\frac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 x / \sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^2 x / \cos^2 x} =$
 $= \frac{\cos^2 x \cdot \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^4 x (1 - \sin^2 x)}{-\sin^4 x (1 - \cos^2 x)} = \operatorname{ctg}^6 x.$

Одатда, айниятни исботлашнинг уч усули қўлланилади:

1) $A(x) \Rightarrow B(x)$, 2) $B(x) \Rightarrow A(x)$, 3) $A(x) \Rightarrow C(x)$, $B(x) \Rightarrow C(x)$. масалан, юқорида кўрсатилган айниятларнинг ўнг тарафи чап тарафидан $A \Rightarrow B$ каби айний алмаштириш билан келтириб чиқарилди. Ушбу мисолда $B \Rightarrow A$ усули қўлланилади.

$$3\text{- м и с о л. Айниятни исботланг: } \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Исботи. Бу ифодаларнинг $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$, $1 \neq 3 \operatorname{tg}^2 \alpha$, $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) шартлар асосида аниқланган D соҳада ўзаро тенглиги кўрсатилади:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} (2\alpha + \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha)} = \\ &= \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \left(1 - \operatorname{tg} \alpha \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\right)} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = A. \end{aligned}$$

Энди учинчи усул ($A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$) га мисол келтирамиз.

4- м и с о л. Айниятни исботланг:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{1 - 4 \sin 4\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Исботи. $1 \neq 4 \sin 4\alpha$, $1 \neq \operatorname{tg} 2\alpha$, $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) шартлар асосида айниятнинг тўғрилиги кўрсатилади:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{1 - 4 \sin 4\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2 \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = C; \quad B = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = C, \end{aligned}$$

яъни $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$ бажарилди, демак $A = B$.

Баъзида тригонометрик ифодаларни соддалаштиришда ёки уларнинг қийматларини ҳисоблашда $A \Rightarrow B$ қонидадан фойдаланиш мумкин.

5- м и с о л. Соддалаштиринг:

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha \right).$$

Ечилиши. $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ бўлгани учун, берилган шу ифодани A деб белгиласак,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos 4\alpha + 1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 4\alpha \right) + 1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 4\alpha \right) \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\alpha + \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} + 4\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 4\alpha \right) \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\alpha + \cos \frac{4\pi}{3} \cos 4\alpha = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

6-мисол. Жадвалдан фойдаланмай ҳисобланг:

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ҳисобланиши. } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} \left(2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - \right. \\ &\left. - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} \left(\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} \left(\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Хато излашнинг баъзи усуллари

Юқорида айтилган тарзда мантиқий фикрлаб, мисолларни ечишда қўлланилаётган зарур формулалардан ўринли ва тўғри фойдаланила олинганини доим текшириб кўриш мумкин. Масалан, бир абитуриент ушбу

$$A = A(\alpha, \beta) = \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \beta.$$

ифодани соддалаштиришда $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4$ схемада мантиқий фикрлаб

$$A_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha + \beta)) + \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha - \beta)) - (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \beta,$$

$$A_2(\alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) - \cos \alpha \cos \beta - \cos^2 \beta,$$

$$A_3(\alpha, \beta) = 1 - \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta - \cos^2 \beta,$$

$$A_4(\alpha, \beta) = \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta$$

ларни ҳосил қилиб, A ва A_4 ни айнан тенг деб ҳисоблаган. Аммо $\alpha = 0$, $\beta = 0$ қийматларда $A(0; 0) = 0$, $A_4(0, 0) = 2$ эканлигини аниқлаб ўз хатосини топиши мумкин эди. Бунда хато $A_1(\alpha, \beta)$ ни ҳосил қилишдаёқ йўл қўйилган, у

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

„формула“дан фойдаланиш натижасида вужудга келган.

Масалан, бошқа бир абитуриент

$$A = A(\alpha, \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^4 \alpha - \cos^4 \beta$$

ифодани соддалаштириб, ундан

$$A_1 = A_1(\alpha, \beta) = \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \sin^2 \beta$$

ни ҳосил қилган. Бу ерда берилган ифоданинг $A(\alpha, \beta) = A(\beta, \alpha)$

каби симметриклик хоссаси натижадаги $A_1(\alpha, \beta)$ ифодада бажарилмаяпти:

$$A_1(\alpha, \beta) = -A_1(\beta, \alpha).$$

Демак, абитуриент A дан A_1 чиқаришда қаердадир хатоликка йўл қўйган.

23-топшириқ. Айниятларни исботланг:

1. а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha$;

в) $\frac{\sin^2 2\beta - 4 \sin^2 \beta}{\sin^2 2\beta - 4 + 4 \sin^4 \beta} = 2 \operatorname{ctg} 4\beta$; г) $2 \sin^2 \beta + \cos 2\beta = 1$;

д) $\frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin 4\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$; е) $\frac{\cos 2\alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos 3\alpha} = 1$;

ж) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta} = \operatorname{tg} \alpha$; з) $\frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha}{2 \sin \frac{3}{2} \alpha \cos \frac{3}{2} \alpha} = 1$.

2. а) $\sin \alpha (\sin \alpha + \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

б) $\sin \alpha (\sin \alpha - \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \beta) = 2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$; в) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$; г) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

24-топшириқ. Соддалаштиринг:

1. а) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; б) $\frac{2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}$; в) $\frac{\sin 4\alpha}{2 \sin^2 2\alpha}$;

г) $2 \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$; д) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$; е) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha$;

ж) $\frac{4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin \alpha}$; з) $\frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$; и) $\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

2. а) $\frac{2}{\sin 4\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha$; б) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$; в) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$;

г) $\frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg} (\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin (\pi - \alpha)}$; д) $\frac{\operatorname{tg}^2 (45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2 (45^\circ + \alpha) + 1}$;

$$e) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}; \quad \text{ж) } \cos 4\alpha +$$

$$+ 4\cos 2\alpha + 3; \quad \text{з) } \frac{\sqrt{2} - \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad \text{и) } \frac{\sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4};$$

$$\text{к) } \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{4\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(75^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}; \quad \text{л) } \frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

$$3. \quad \text{а) } \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}; \quad \text{б) } \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha};$$

$$\text{в) } \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta.$$

25-топшириқ. Тўғрилигини текширинг:

$$\text{а) } \operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ; \quad \text{б) } \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$\text{в) } \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}; \quad \text{г) } \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}; \quad \text{д) } \cos \frac{\pi}{5} +$$

$$+ \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}; \quad \text{е) } 8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ; \quad \text{ж) } \operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{з) } \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ = \cos^2 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ; \quad \text{и) } \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}};$$

$$\text{к) } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}; \quad \text{л) } \sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}.$$

26-топшириқ. Айниятларни исботланг:

$$1. \quad \text{а) } \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha} = 1; \quad \text{б) } \frac{\sin \alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);$$

$$\text{в) } \frac{1 - \cos 4\alpha}{\frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{\frac{1}{\sin^2 2\alpha} - 1} = 2; \quad \text{г) } \frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^6 \alpha;$$

$$\text{д) } \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right); \quad \text{е) } \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 10 \operatorname{tg} \alpha + 3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3 + 5 \sin 2\alpha.$$

$$2. \quad \text{а) } \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} = 0; \quad \text{б) } 3(\cos^4 \alpha +$$

$$+ \sin^4 \alpha) - 2(\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha) = 1; \quad \text{в) } \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad \text{г) } \cos \alpha +$$

$$+ \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0; \quad \text{д) } \frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2 \alpha} = 8 \cos 2\alpha;$$

$$e) 4 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin^2 \alpha - 3; \quad \text{ж) } \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = \\ = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$3. \text{ а) } \sin^6 \alpha + \cos^3 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha; \quad \text{б) } 1 - \sin 8\alpha = 2 \cos^2 (45^\circ + 4\alpha);$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = 1;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{3\pi}{4} \right) (1 + \sin 2\alpha) = \cos 2\alpha; \quad \text{д) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha - 4\operatorname{tg} 4\alpha = 8\operatorname{ctg} 8\alpha;$$

$$\text{е) } \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha = 8 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha; \quad \text{ж) } \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha -$$

$$- \operatorname{ctg} \beta; \quad \text{з) } 2 \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \operatorname{ctg} 2\alpha \right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \text{и) } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\text{к) } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad \text{л) } \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\text{м) } \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha.$$

2. **Тригонометрик тенглама** деб, номаълумнинг тригонометрик функцияларига нисбатан алгебраик бўлган тенгламаларга айтилади.

Ҳар қандай тригонометрик тенглама соддалаштирилиб, ушбу тўрт ҳолдан бирига келтирилиб ечилади:

$$\sin x = a \quad (|a| \leq 1) \iff x_n = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$\cos x = b \quad (|b| \leq 1) \iff x_k = \pm \arccos b + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = c \quad (c \in \mathbf{R}) \iff x_l = \operatorname{arctg} c + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z} \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = d \quad (d \in \mathbf{R}) \iff x_m = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} d + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

Шуни таъкидлаймизки, (1) ÷ (4) формулалар умумий бўлиб, қуйидаги хусусий тенгламаларнинг ечими бундай ифодалангани маъқул ($n \in \mathbf{Z}$):

$$\sin x = 1 \iff x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 1 \iff x_n = 2\pi n;$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \iff \operatorname{ctg} x = 1 \iff$$

$$\iff x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$\cos x = 0 \iff \operatorname{ctg} x = 0 \iff$$

$$\iff x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \iff \operatorname{ctg} x = -1 \iff$$

$$\iff x_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$\sin x = -1 \iff x_n = -\frac{\pi}{2} +$$

$$+ 2\pi n;$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Leftrightarrow x_n = \pi n; \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x_n = \pi + 2\pi n. \end{cases} \quad (5)$$

Баъзи абитуриентлар (5) даги бирор формула билан аниқлаб топиладиган ечимларни ҳам (1) ÷ (4) даги умумий формулалар орқали ифодалаб, камчиликка йўл қўядилар. Агар a, b, c, d лар 0 ёки ± 1 га тенг бўлса, албатта (5) даги формулалардан фойдаланиш зарур. Баъзида қуйидаги муносабатларни қўллаш керак бўлади.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a; \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a; \quad (6)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a; \operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a. \quad (7)$$

Натижалар: $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ бўлганда

$$1) \sin x = \sin a \Leftrightarrow x_n = (-1)^n a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (1 \text{ a})$$

$$2) \cos x = \cos b \Leftrightarrow x_k = \pm b + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (2 \text{ a})$$

$$3) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c \Leftrightarrow x_l = c + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z}; \quad (3 \text{ a})$$

$$4) \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} d \Leftrightarrow x_m = d + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (4 \text{ a})$$

Тригонометрик тенгламаларнинг ечимларини қуйидаги уч ҳолдаги ишлар бажарилганда текшириб олиш керак:

а) агар баъзи тригонометрик алмаштиришлар (махраждан қутулиш, касрларни қисқартириш, ўхшаш ҳадларини ихчамлаш) натижасида тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайган бўлса;

б) агар тенгламанинг ҳар икки томонини жуфт даражага ошириб ечилса;

г) ўнг ва чап томони турлича аниқланиш соҳасига эга бўлган тригонометрик айниятлар ёрдамида алмаштиришлардан фойдаланиб ечилган бўлса. Масалан, $\alpha \neq \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) бўлганда

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha; \quad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha; \quad \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Шунингдек, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} n$, $\beta \neq \pi n$, $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$, $\gamma \neq \frac{\pi}{2} (2n + 1) \neq \delta$ бажарилганда $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$; $\frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$; $\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta}$ ва бошқ.

Шу айниятлардан фойдаланишда тенгламанинг аниқланиш соҳаси кенгайиши (чет илдиз пайдо бўлиши) ёки торайиши (илдизларининг йўқолиши) рўй бериши мумкин.

7-mavzu. Trigonometrik funksiyalardan arkfunksiyalarga o'tish.

Reja

1. Trigonometrik funksiyalardan arkfunksiyalarga o'tish.
2. Arkfunksiyalardan trigonometrik funksiyalarga o'tish

1-мисол. Тенгламаларни ечинг:

$$а) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\operatorname{ctg}x - 1, \quad (8a)$$

$$б) (1 + \operatorname{tg}x)(1 - \sin 2x) = 1 - \operatorname{tg}x. \quad (8б)$$

Ечилиши. а) Агар $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x}$, $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$ десак,

$$\begin{aligned} (8a) \implies \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} = \frac{2}{\operatorname{tg}x} - 1 &\iff \begin{cases} y = \operatorname{tg}x, \\ \frac{1+y}{1-y} = \frac{2-y}{y} \end{cases} \iff \operatorname{tg}x = \frac{1}{2} \iff \\ &\iff x_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Топилган бу ечимлар (8a) тенгламани қапоатлантиради. Лекин бу тенгламанинг яна $x = \frac{\pi}{2} + \pi k (k \in \mathbf{Z})$ ечимлари борки, улар бу ечиш усулида „йўқолиб“ қолди. Чунки кўрсатилган айний алмаштиришлар натижасида тенгламанинг аниқланиш соҳаси торайиб, шу илдизлар ҳосил бўлган тенгламанинг аниқланиш соҳасига кирмай қолган эди.

б) Берилган (8б) тенгламани $1 - \operatorname{tg}x$ га бўлиб, $\frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ дан фойдалансак,

$$\begin{aligned} (8б) \implies \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)(1 - \sin 2x) = 1 &\iff \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 \iff \\ \iff 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 &\iff \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1 \iff \\ x_n = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Бу ерда ҳам $x_n = \pi n (n \in \mathbf{Z})$ лар (8б) нинг ечими бўлиб, ундан ташқари $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k (k \in \mathbf{Z})$ лар ҳам унинг ечимидир, чунки у тенгламанинг ҳар икки томонини $1 - \operatorname{tg}x$ га бўлиб юборганда йўқотилган.

Аксинча, қуйидаги

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha);$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ва бошқа синус ва косинуслар учун чиқарилган иккиланган бурчак, ярим бурчак, йиғиндини кўпайтмага келтириш ёки кўпайт-

мани йиғиндига алмаштириш каби формулалар борки, у формулаларни қўллаш тенгламани доимо ўзига тенг кучли тенгламага алмаштиради.

Тригонометрик тенгламаларни ечишда асосан уч усул қўлланилади.

1) *Кўпайтувчиларга ажратиш усули.* $f(x) = 0$ тенглама учун

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \text{ бўлса, } f(x) = 0 \implies \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ нинг барча илдизларида $f(x)$ аниқланган бўлса,

$$f(x) = 0 \iff \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (9a)$$

(9) ва (9a) даги тасдиқларни $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$ тенгламани ечиб тунтирмоқчи бўлсак, бу тенгламанинг чап томони $\cos 2x = 0$ тенгламанинг илдизларининг барчасида маънога эга эмас:

$$\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0 \iff \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} (1 + 2n), n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} (4k - 1), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = \frac{\pi}{4} (1 + 2n), \\ n \neq 2k - 1, k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

яъни бу тенгламанинг жавоби $\left\{ x_k = \frac{\pi}{4} (4k + 1), k \in \mathbb{Z} \right\}$ дан иборат.

2) *Ёрдамчи номаълум киритиш усули.* Бу вақтда $f(x) = 0$ тенгламада бирор тригонометрик функция ёрдамчи номаълум билан белгиланиб, қолган функциялар у орқали ифодаланadi. Лекин ёрдамчи номаълум билан қайси функцияни белгилаш муҳим аҳамиятга эга. Бир хилида тенглама рационал тенгламага, иккинчи хилида иррационал тенгламага келтирилиб ечилади. Биз учун рационал тенгламага келтириб ечиш қулай. Масалан, $\sin^2 x + \sin x \cos^2 x = 1$ тенгламада $y = \sin x$ деб белгиланса, унда $y^2 + y(1 - y^2) = 1$ каби рационал тенглама ҳосил бўлади, аксинча, $y = \cos x$ деб олинса, у ушбу икки иррационал тенгламалар бирлашмасига эквивалент:

$$a) 1 - y^2 + y^2 \sqrt{1 - y^2} = 1; \quad б) 1 - y^2 - y^2 \sqrt{1 - y^2} = 1.$$

3) *Сунъий усул танлаб ечиладиган тенгламалар.* Тригонометрик тенгламаларни ечишда уларнинг типларини тўғри

аниқлай олиш, шу кўрсатилган усулларни тўғри танлаш имконини беради. Уларни асосан қуйидаги типларга бўлиш мумкин:

I. Бир хил аргументли битта тригонометрик функция қатнашган тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 7 = 0; & \text{в) } \cos^2 3x = 2\cos 3x - \frac{1}{\cos 3x}; \\ \text{б) } \operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4; & \text{г) } \operatorname{ctg}^3 x = \frac{1}{1 + 5\operatorname{ctg} x}. \end{array}$$

II. Бир хил аргументли бир тригонометрик функцияга айниқ тригонометрик алмаштириш билан келтирилиши мумкин бўлган тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 5 \cos x + 4\sin^2 x = 4; & \text{в) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos x; \\ \text{б) } (3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)^2 = 2 - \operatorname{ctg}^2 x; & \text{г) } 4 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x. \end{array}$$

III. $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a \cos x + b \sin x = 0; & \text{б) } a \cos x + b \sin x = c; \\ \text{в) } a \cdot \cos^3 x + b \cdot \cos x \sin x + & \text{г) } a \cos^2 x + b \cos x \sin x + \\ & + c \sin^2 x = 0; & + c \sin^2 x = d; \\ \text{д) } a \cdot \cos^3 x + b \cos^2 x \sin x + c \cdot \cos x \sin^2 x + & d \sin^3 x = 0 \dots \text{ ва ҳ.к.} \end{array}$$

Бу ерда $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}$.

IV. Ўнг томони ноль, чап томони кўпайтувчиларга ажраладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3 \sin 2x - \sin 4x = 0; & \text{в) } 2 \cos^2 3x - \cos 3x = 0; \\ \text{б) } \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x + 2 - \cos x = 0; & \text{г) } \operatorname{tg} 3x + \sin 3x \cos 3x = 0. \end{array}$$

V. Ҳар хил аргументли тригонометрик функцияларни бир хил аргументлига келтириш мумкин бўлган тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 2\sin^2(\pi - x) + 3\cos(\pi + x) = 0; & \text{в) } \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 8\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0; \\ \text{б) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + \sin 2x & \text{г) } \cos 3x + 4\cos x \sin^2 x = \sin x. \end{array}$$

VI. Кўпайтма шаклда берилган тригонометрик тенгламани йиғиндига келтириб ечиш мумкин бўлган тенгламалар, масалан:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sin 4x \cos 6x = \cos 3x \sin 7x; & \text{в) } \sin^2 2x \cos^2 3x - \sin^2 5x = 0; \\ \text{б) } \sin 2x \sin 8x + \cos 6x \cos 4x = 0; & \text{д) } \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = \sin 5x. \end{array}$$

VII. Йиғинди шаклидан кўпайтма шаклига ўтказиш йўли билан ечиладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$а) \sin 3x + \cos 6x = \sin 9x;$$

$$в) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$$

$$б) 1 + \cos 2x = \sin 3x - \sin 2x;$$

$$г) \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

VIII. Жуфт даражасини пасайтириш усули билан ечиладиган тригонометрик тенгламалар, масалан:

$$а) \sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x; \quad в) \sin^4 2x + \cos^4 2x = \frac{1 + \sin 8x}{2};$$

$$б) \sin^4 2x + \cos^4 2x = 1;$$

$$г) \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

IX. Юқоридаги 8 хил тригонометрик тенгламаларнинг бирига бирор алмаштириш билан келтириш мумкин бўлган тенгламалар.

Энди юқоридаги I — IX тип тенгламаларидан мисоллар ечиб кўрсатамиз. Уларнинг барчаси ўзига хос бирор йўл танлангандан сўнг юқорида айтилган уч асосий усуллардан бири билан ечилади.

2-мисол. (I тип.) Тенгламани ечинг:

$$2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0. \quad (10)$$

Ечилиши. $u = \operatorname{tg} x$ деб белгиласак,

$$(10) \implies 2u^3 - 2u^2 + 3u - 3 = 0 \iff 2u^2(u-1) + 3(u-1) = 0 \iff \\ \iff (u-1)(2u^2 + 3) = 0 \iff u_1 = 1.$$

$$\text{Демак, } \operatorname{tg} x = u_1 \iff \operatorname{tg} x = 1 \iff x_k = \frac{\pi}{4} (4k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Жавоб. } \left\{ \frac{\pi}{4} (4k-1), \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3-мисол. (II тип.) Тенгламани ечинг:

$$2 \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2. \quad (11)$$

Ечилиши. Агар $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$ ва $u = \sin^2 x$ десак, $0 \leq u < 1$ эканлигини назарда тутиб, (11) дан

$$(11) \implies 2u + \frac{u}{1-u} = 2 \iff 2u^2 - 5u + 2 = 0 \iff u_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

$$\text{Шундай қилиб, } u_1 \neq 2, \quad u_2 = \frac{1}{2} \implies \sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$а) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x_k = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$б) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Жавоб. } \left\{ \frac{\pi}{4} (2n+1), \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$4\cos^2x + 4\sin x \cos x - 7\sin^2x - 2 = 0. \quad (12)$$

Ечилиши. (12) тенглама $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан 2- даражали бир жинсли тенглама, чунки $f(t \cos x, t \sin x) = t^2 f(\cos x, \sin x)$ шарт тенгламанинг чап томонида $2 = 2(\cos^2x + \sin^2x)$ деб ҳисоблаганда бажариляпти. У ҳолда тенгламанинг икки томонида $\cos^2x (\neq 0)$ га (ёки $\sin^2x (\neq 0)$ га) бўлиб юбориш мумкин:

$$\begin{aligned} (12) &\iff 7 + 4\operatorname{tg}x - 7\operatorname{tg}^2x - 2(1 + \operatorname{tg}^2x) = 0 \iff \\ &\iff 9\operatorname{tg}^2x - 4\operatorname{tg}x - 5 = 0 \iff \operatorname{tg}x = 1, \operatorname{tg}x = -\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Бу ердан $x_k = \frac{\pi}{4} (4k + 1)$, $x_n = -\operatorname{arctg} \frac{5}{9} + \pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{4} (4k + 1), \pi n - \operatorname{arctg} \frac{5}{9} \right\}$.

5-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$4\sin^3x - \cos^2x \sin x = 0. \quad (13)$$

Ечилиши. Бу $n=3$ даражали бир жинсли тенглама бўлгани учун уни $\cos^3x (\neq 0)$ га бўлиб (13) $\iff 4\operatorname{tg}^3x - \operatorname{tg}x = 0 \iff \operatorname{tg}x \left(\operatorname{tg}^2x - \frac{1}{4} \right) = 0 \iff \operatorname{tg}x = 0, \operatorname{tg}x = \pm \frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан жавобни умумлаштириб бирагўла ёзамиз:

Жавоб. $\left\{ \pi n, \pi k \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2}; n, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонида \sin^3x га бўлганда эса,

$$(13) \implies 4 - \operatorname{ctg}^2x = 0 \iff \operatorname{ctg}x = \pm 2$$

ҳосил бўлиб, у берилганга тенг кучли эмас, яъни бу усулда ечилганда $\sin x = 0$ нинг ечимлари йўқоляпти. (Берилган (13) тенглама $\sin x = 0$ нинг ечимларида қаноатлангани учун унга бўлиб ечиш мумкин эмас.) Абитурентларнинг баъзилари мана шунга ўхшаш тенгламани ечишда шу каби хатога йўл қўядилар.

Ушбу теоремалар III тип тенгламаларни ечишни умумлаштиради.

1-теорема. *n-тартибли бир жинсли ушбу*

$$\begin{aligned} a\sin^n x + b\sin^{n-1}x\cos x + c\sin^{n-2}x\cos^2x + \dots + \\ + d\cos^n x = 0, \quad a \neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

тенглама $u = \operatorname{tg}x$ алмаштириш билан

$$au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2} + \dots + d = 0 \quad (15)$$

шаклга эквивалент алмашади.

Ҳақиқатан ҳам, $a \neq 0$ бўлгани учун $\cos x = 0$ шартни бажарувчи x лар (14) нинг илдизи эмас, шунинг учун (14) нинг ҳар икки томонида $\cos^n x (\neq 0)$ га бўлиб юборсак, (15) келиб чиқади. ►

2-теорема. $2n$ -тартибли бир жинсли ушбу тенглама ($a \neq 0, a \neq d$)

$$a \sin^{2n} x + b \sin^{2n-1} x \cos x + \dots + c \cos^{2n} x = d \quad (16)$$

ҳам $u = \operatorname{tg} x$ алмаштириш билан $2n$ -тартибли бирор

$$Au^{2n} + Bu^{2n-1} + \dots + Cu + D = 0 \quad (17)$$

бутун рационал тенгламага келади: (16) \Leftrightarrow (17).

Ҳақиқатан ҳам, $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)^n$ деб (16) тенгламанинг ҳар икки томонини $\cos^{2n} x (\neq 0)$ га бўлиш кифоя. \blacktriangleright

1-натижа. $a \cos x + b \sin x = c$ тенглама $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ ва $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ орқали

$$-a \sin^2 \frac{x}{2} + 2b \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + a \cos^2 \frac{x}{2} = c \quad (18)$$

шаклга келгани учун $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ билан (17) кўринишдаги 2-даражали бутун рационал тенгламага келади. ($a + c \neq 0$).

2-натижа. $a \cos x + b \sin x = c$ тенглама $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ каби ёрдамчи бурчак) га келтириб ечилиши мумкин

Ҳақиқатан ҳам, берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$ га бўлиб юборсак, шундай φ бурчак топиладики, $\cos \varphi = \frac{a}{\rho}, \sin \varphi = \frac{b}{\rho}$ бажарилишидан

$$\frac{a}{\rho} \cos x + \frac{b}{\rho} \sin x = \frac{c}{\rho} \Leftrightarrow \cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{\rho}$$

келиб чиқиб, натижа тасдиғи исботланади. \blacktriangleright

Тенглама фақат $c^2 \leq a^2 + b^2$ бўлганда ечимга эгаллигини текширинг.

3-натижа. $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ($a \neq 0, a \neq d$) тенглама

$$(a - d) \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c - d = 0 \quad (19)$$

каби квадрат тенгламага келтириб ечилади.

6-мисол. (III тип.) Тенгламани ечинг:

$$7 \sin x - 5 \cos x = 5. \quad (20)$$

1-ечилиши. 1-натижадан фойдаланиб тенгламани (18) кўринишга олиб келиб, сўнг $u = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ($x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$) алмаштириш бажарсак,

$$\begin{aligned}
 (20) \iff 5 \sin^2 \frac{x}{2} + 14 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} &= 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \iff \\
 \iff 10 \cos^2 \frac{x}{2} - 14 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \iff 10 \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 14 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0 \iff \\
 \iff 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \left(5 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 7 \right) = 0 \iff &\begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{7}{5}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Текшириб, шуни аниқлаш мумкинки, $x_n = 2\pi n$ (20) нинг ечими эмас.

Жавоб. $\{ \pi(2n+1); \pi k + \operatorname{arccctg} \frac{7}{5}; n, k \in \mathbb{Z} \}$.

2-ечилиши. (20) тенгламани $\rho = \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$ га бўлсак,

$$(20) \iff \frac{7}{\sqrt{74}} \sin x - \frac{5}{\sqrt{74}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{74}}. \quad (21)$$

Лекин $\left(\frac{7}{\sqrt{74}} \right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{74}} \right)^2 = 1$ бўлгани учун шундай φ бурчак мавжудки,

$\frac{7}{\sqrt{74}} = \sin \varphi$, $\frac{5}{\sqrt{74}} = \cos \varphi$ бажарилади ($\varphi = \operatorname{arcsin} \frac{7}{\sqrt{74}}$ каби ёрдамчи бурчак). У ҳолда

$$(21) \iff \sin \varphi \sin x - \cos \varphi \cos x = \frac{5}{\sqrt{74}} \iff \cos(x + \varphi) = -\frac{5}{\sqrt{74}}, \text{ бу}$$

ердан $x = -\varphi \pm \pi \mp \operatorname{arccos} \frac{5}{\sqrt{74}} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ деб ечимнинг иккинчи хил шакли ҳосил қилинади.

Жавоб. $\left\{ \operatorname{arcsin} \frac{7}{\sqrt{74}} \mp \operatorname{arccos} \frac{5}{\sqrt{74}} + \pi(2n \pm 1), n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Шу мисолнинг 3-ечилиши 359-бетда берилган.

7-мисол. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} x - \sin^2 2x \operatorname{ctg} x = \sin^2 2x \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg}^2 2x \quad (22)$$

Ечилиши. Тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш учун

$$(\operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} x - \sin^2 2x \operatorname{tg} x) + (\operatorname{tg}^2 2x \operatorname{ctg} x - \sin^2 2x \operatorname{ctg} x) = 0$$

каби группаласак,

$$\begin{aligned}
 (22) \iff (\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x) \operatorname{tg} x + (\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x) \operatorname{ctg} x &= 0 \iff \\
 \iff (\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x) (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0 \iff &\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} 2x - \sin 2x) \times \\
 \times (\operatorname{tg} 2x + \sin 2x) = 0 \iff \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sin 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} \cdot \sin 2x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} &= \\
 = 0 \iff \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} \cdot (1 - \cos^2 2x) = 0 \iff \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x} &= 0.
 \end{aligned}$$

8-mavzu. Arkfunksiyalar grafiklari (4 soat)

Reja

1. $y = \arcsin x$ funksiya grafiklari va xossalari.
2. $y = \arccos x$ funksiya grafiklari va xossalari.
3. $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyalar grafiklari va xossalari

Бу охириги тенгламада $\frac{1}{\operatorname{tg} x} \neq 0$, $\operatorname{tg} x \neq 0 \implies \sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ бажа-
рилади. Тенглама ечимга эга эмас.

Ж а в о б. Ечими йўқ.

Бу (22) тенглама (9) ва (10) даги қоидага амал қилиб ечилди.
8-мисол. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\sin 2x - 1 = \sin 2x \cos 2x - \cos 2x \quad (23)$$

Ечилиши. (23) $\iff \sin 2x - \sin 2x \cos 2x - (1 - \cos 2x) = 0 \iff$
 $\iff \sin 2x (1 - \cos 2x) - (1 - \cos 2x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} 1 - \cos 2x = 0, \\ \sin 2x - 1 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_k = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 2x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{4} (4n+1); k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

9-мисол. (V тип.) Тенгламани ечинг:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}. \quad (24)$$

1-ечилиши.

$$(24) \iff \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 \iff \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x_k = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x_n = \frac{\pi}{2} (4n+1), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{ 2\pi k; \frac{\pi}{2} (4n+1); k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2-ечилиши. Бу тенгламани III тип тенгламасига келтириб ҳам ечи-
мумкин ($k, n \in \mathbb{Z}$):

$$(24) \iff \frac{\sin x}{1 + \cos x} + 1 = \frac{1}{1 + \cos x} \iff \cos x + \sin x = 1 \iff \cos^2 \frac{x}{2} -$$

$$- \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \iff 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} =$$

$$= 0 \iff \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x_k = 2\pi k, \\ x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n. \end{cases}$$

10-мисол. (VI тип.) Тенгламани ечинг.

$$\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x. \quad (25)$$

Ечилиши. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ формула бўйича

$$\begin{aligned} (25) \iff \cos 3x + \cos 9x &= \cos 3x + \cos 11x \iff \cos 9x - \cos 11x = 0 \iff \\ \iff 2 \sin 10x \cdot \sin x &= 0 \iff \begin{cases} \sin 10x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_k = \frac{\pi}{10} k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \iff \\ \iff x_k = \frac{\pi}{10} k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{10} k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Бу ерда $k = 10n (n \in \mathbb{Z})$ бўлганда x_k илди x_n кўринишини олгани учун жавоб фақат x_k илди x_n лардан ташкил топди.

11-мисол. (IV тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos \frac{7}{2} x \cos \frac{3}{2} x + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5}{2} x + \sin 2x \cos 7x = 0. \quad (26)$$

Ечилиши. Агар $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ ни қўлласак, у ҳолда

$$\begin{aligned} (26) \iff \sin 5x + \sin 2x + \sin 3x - \sin 2x + \sin 9x - \sin 5x &= 0 \iff \sin 3x + \\ + \sin 9x &= 0 \iff 2 \sin 6x \cos 3x = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \sin 6x = 0, \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 3x_k = \frac{\pi}{2} (2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff x_n = \frac{\pi}{6} n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{6} n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Бу ерда x_n илди $n = 2k + 1$ бўлганда x_k илди шаклини олгани учун биринчи тенгламанинг ечими умумий ечим бўла олади.

12-мисол. (VII тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos 9x + \cos 8x + \cos 7x = \cos 3x + \cos 2x + \cos x. \quad (27)$$

Ечилиши. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ дан фойдалансак,

$$\begin{aligned} (27) \iff \cos 9x - \cos x + \cos 8x - \cos 2x + \cos 7x - \cos 3x &= 0 \iff \\ \iff -2 \sin 5x \sin 4x - 2 \sin 5x \sin 3x - 2 \sin 5x \sin 2x &= 0 \iff \\ \iff -2 \sin 5x (\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x) &= 0 \iff \end{aligned}$$

Энди бу ерда $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ дан фойдалансак,

$$\iff 2 \sin 5x (2 \sin 3x \cos x + \sin 3x) = 0 \iff 2 \sin 5x \sin 3x (2 \cos x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 3x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = \frac{\pi}{5} k, k \in \mathbf{Z}; \\ x_n = \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbf{Z}; \\ x_m = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Бу ерда $n = 2(3m \pm 2)$ дейилса, x_n дан x_m илдиз ҳосил бўлади.

Ж а в о б. $\left\{ \frac{\pi}{3} n, \frac{\pi}{5} k; n, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

13 м и с о л. (VIII тип.) Тенгламани ечинг:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0. \quad (28)$$

Ечилиши. $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ ларни қўллаб, тенгламадаги функциялар даражаси пасайтирилади:

$$\begin{aligned} (28) & \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos^2 2x - 2 \cos^2 3x - 2 \cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x - 1 - \cos 6x - 1 - \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\cos 2x - \cos 8x) + (\cos 4x - \cos 6x) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2 \sin 5x \sin 3x + 2 \sin 5x \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2 \sin 5x (\sin 3x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow 4 \sin 5x \sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbf{Z}; \\ x_k = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbf{Z}; \\ x_m = \frac{\pi}{2} (2m + 1), m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Бу ерда $k = 2m + 1$ бўлса, x_k илдиз x_m илдиз кўринишига келади.

Ж а в о б. $\left\{ \frac{\pi}{5} n, \frac{\pi}{2} k; n, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Изоҳ. 12 ва 13 мисолларда йиғиндини кўпайтмага алмаштириш билан $a \cdot b \cdot c = 0$ шаклга келтирилиб, уларнинг ҳар бири нолга тенглаб ечилди. Баъзида (1а), (2а), (3а), (4а) формулалар яна ҳам қулайроқ ҳисобланади. Масалан:

$$\sin 3x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin(-3x) \Leftrightarrow x = (-1)^k (-3x) + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2n (n \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x = -3x + 2\pi n, \\ k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x = 3x + \pi(2n + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n, \\ x = \frac{\pi}{2} - \pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Бу топилган ечимлар аввалги усулда топилган ечимлар билан бир хилдир. Яна бир мисол:

$$\cos 3x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{2} = \pm 3x + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2\pi k, \\ 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

14-мисол. (IX тип.) Тенгламани ечинг:

$$2\cos 2x = (1 + \sqrt{3})(\cos x + \sin x). \quad (29)$$

Ечилиши. $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ каби айниятдан фойдалан-
ак,

$$\begin{aligned} (29) &\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) \left(\cos x - \sin x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1) \left(\cos x - \cos \frac{\pi}{3} - \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1) \left(-2\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \left(\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1; \\ \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 0; \\ \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} (4n - 1), n \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{3} (6k - 1), k \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{6} (12m - 1), m \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Бу тенглама икки қавсга ажралиб, биринчиси 1-даражали бир жинсли тенглама сингари, иккинчиси эса, йиғиндини кўпайтмага келтириш тенгламаси сифатида ечилди.

Универсал алмаштириш усули. Ҳар қандай $R(\cos x, \sin x) = 0$ кўринишдаги, $\cos x$ ва $\sin x$ функцияларга нисбатан рационал бўлган тригонометрик тенглама $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш билан

$$R \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2} \right) = 0 \quad (30)$$

каби u га нисбатан рационал тенгламага келади. Бунда $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ва $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ формула $x \neq \pi + 2\pi k, (k \in \mathbf{Z})$ шарт билан қўлланилади.

Шунинг учун $R(\cos x, \sin x) = 0$ тенгламани $x = \pi + 2\pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$) да ҳам текшириб кўриш керак, у баъзида ечим ҳам бўлиб қолиши мумкин. Юқоридаги 6-мисолни шу усулда ечайлик:

3- ечилиши. (30) га асосан

$$7 \sin x - 5 \cos x = 5 \implies 7 \cdot \frac{2u}{1+u^2} - 5 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5 \iff 14u = 10 \iff$$

$$\iff u_1 = \frac{5}{7} \implies \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{5}{7} \iff x_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{7} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}).$$

Энди $x = \pi + 2\pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$) ни (20) га қўйсак, унинг ҳам ечим экани аниқланади.

Ж а в о б. $\left\{ \pi(1 + 2k), 2\pi n + 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{7}; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Энди **бошқа ёрдамчи номаълумлар киритишга** мисоллар берамиз.

15- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sin 4x + 5 \sin 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0. \quad (31)$$

Ечилиши. $u = \sin 2x + \cos 2x \implies u^2 = 1 + \sin 4x$. У ҳолда

$$(31) \implies u^2 + 5u = 0 \iff u_1 = 0, u_2 = -5.$$

а) $\sin x + \cos x = 0 \iff \operatorname{tg} x = -1 \iff x_k = \frac{\pi}{4} (4k - 1), k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x + \cos x = -5$. Бу ечимга эга эмас, чунки $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ бўлгани учун $\sin x + \cos x$ йиғинди -5 га тенг бўла олмайди.

16- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{1 + \sin 4x} = \sqrt{2} \cos 4x. \quad (32)$$

Ечилиши. $1 + \sin 4x \geq 0$ бўлгани учун тенглама \mathbb{R} да аниқланган, лекин унинг чап томони номанфийлиги учун $\cos 4x \geq 0$ бажариладиган ечимлар изланиши керак:

$$(32) \iff \begin{cases} \cos 4x \geq 0, \\ 1 + \sin 4x = 2 \cos^2 4x \end{cases} \iff \begin{cases} u = \sin 4x, \\ \cos 4x \geq 0, \\ 1 + u = 2(1 - u^2) \end{cases} \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{(A)} \begin{cases} \sin 4x = -1, \\ \cos 4x \geq 0; \end{cases} \\ \text{(B)} \begin{cases} \sin 4x = \frac{1}{2}, \\ \cos 4x \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

а) (А) системанинг ечимини топиш учун $\sin 4x = -1$ нинг $x_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k (k \in \mathbb{Z})$ илдизларининг $\cos 4x \geq 0$ шартни қаноатлантириши текширилади:

$$\cos 4x_k = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 \implies x_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k (k \in \mathbb{Z})$$

илдизлар кўрсатилган шартни қаноатлантиргани учун ечим бўлади:

б) (В) системани ечамиз: $\sin 4x = \frac{1}{2} \iff x_n = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n \ (n \in \mathbb{Z})$.

$$\cos 4x_n = \cos\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & n \text{ жуфт б\у\лса;} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n \text{ тоқ б\у\лса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $n = 2m \ (m \in \mathbb{Z})$ б\у\лганда x_n ечим б\у\ла олади.

Ж а в о б. $\left\{ \frac{\pi}{8} (4k - 1), \frac{\pi}{24} (12m + 1); k, m \in \mathbb{Z} \right\}$.

17- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1. \quad (33)$$

Ечилиши. $y = \sin x$, $t = \cos x$ десак, y ҳолда тенглама ушбу симметрик алгебраик система ёрдамида ечилади ($u = y + t$, $v = yt$):

$$(33) \implies \begin{cases} y^3 + t^3 = 1, \\ y^2 + t^2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} (y + t)(y^2 - yt + t^2) = 1, \\ y^2 + t^2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} u(1 - v) = 1, \\ u^2 - 2uv = 1. \end{cases} \quad (34)$$

(34) системадан $u^2 - 2u + 1 = 0 \iff u_1 = 1$ топилиб, $v_1 = 0$ ҳам аниқланди. Бундан

$$(A) \begin{cases} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin x \cdot \cos x = 0. \end{cases}$$

(A) системадан $\left\{ 2\pi k, \frac{\pi}{2} (4n + 1); k, n \in \mathbb{Z} \right\}$ ечим топилади.

Ж а в о б. $\left\{ 2\pi k, \frac{\pi}{2} (4n + 1); k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

18- м и с о л. Тенгламани ечинг:

$$\cos 2x \sin 8x + \cos 2x \sin 9x = \cos 5x \sin 8x + \cos 5x \sin 9x. \quad (34)$$

Ечилиши. Бу ерда к\у\пайтмани йиғиндига келтириш формулалари к\у\л келмайди, чунки ҳар бир к\у\пайтмадаги аргументлар йиғиндиси ва айирмасининг ярми ҳеч қайси к\у\пайтмада бир хил эмас, яъни бу (VI) типга мансуб эмас. (34) ни к\у\пайтувчиларга бундай ажратамиз:

$$(34) \iff \cos 2x(\sin 8x + \sin 9x) = \cos 5x(\sin 8x + \sin 9x) \iff \begin{cases} \cos 2x = \cos 5x, \\ \sin 8x = -\sin 9x \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = \pm 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 9x = (-1)^{k+1} 8x + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = \frac{2\pi n}{7}, x_m = \frac{2\pi m}{3}, x_k = \frac{2\pi k}{17}, x_l = \pi(2l + 1); n, m, k, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ж а в о б. $\left\{ \frac{2\pi}{7} n, \frac{2\pi}{3} m, \frac{2\pi}{17} k, \pi(2l + 1); n, m, k, l \in \mathbb{Z} \right\}$

19-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2 \cos 5x + 3 \cos x = 5 \quad (35)$$

Ечилиши. Тригонометрик функция хоссаларига кўра ечиладиган бу тенглама фақат $\cos x = 1$ ва $\cos 5x = 1$ шартларини баравар бажарувчи x лар учун илдизга эга, чунки $|\cos x| \leq 1$, $|\cos 5x| \leq 1$. Шундай қилиб ($m, n \in \mathbb{Z}$):

$$(35) \iff \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi m, \\ 5x = 2\pi n \end{cases} \iff x_n = \frac{2\pi n}{5}.$$

Ж а в о б. $\left\{ \frac{2\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

20-мисол. Тенгламани ечинг.

$$\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x. \quad (36)$$

1-ечилиши. (36) $\iff \cos^2 x - 2(1 - \sin x) \cos x - 4 \sin x = 0$. Бу $\cos x$ га нисбатан квадрат тенглама деб қаралса,

$$(\cos x)_{1,2} = 1 - \sin x \pm \sqrt{(1 - \sin x)^2 + 4 \sin x} = 1 - \sin x \pm (1 + \sin x).$$

а) $\cos x = 1 - \sin x + (1 + \sin x) \iff \cos x = 2$, бу ечимга эга эмас;

б) $\cos x = 1 - \sin x - (1 + \sin x) \iff \cos x = -2 \sin x \iff$

$$\iff x_n = \pi n - \arctg \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ж а в о б. $\left\{ \pi n - \arctg \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2-ечилиши. $u = \tg \frac{x}{2}$ ($x \neq x_n = \pi(2n + 1); n \in \mathbb{Z}$) алмаштириш бажарилса,

$$(36) \implies (u^2 - 4u - 1)(3u^2 + 1) = 0 \iff u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Агар $\tg \frac{x}{2} = u_1$ ва $\tg \frac{x}{2} = u_2$ ни ечсак, $x_k = 2 \arctg(2 \pm \sqrt{5}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ каби ечимларнинг иккинчи хил шакли ҳосил этилади. (x_n лар эса илдиз эмас.)

21-мисол. Тенгламани ечинг:

$$81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30. \quad (37)$$

Ечилиши. $81^{\sin^2 x} = y \implies 81^{\cos^2 x} = 81^{1 - \sin^2 x} = \frac{81}{y}$. У ҳолда

(37) $\implies y^2 - 30y + 81 = 0 \iff y_1 = 3, y_2 = 27$. Энди $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ лар учун

а) $81^{\sin^2 x} = 3 \iff 4 \sin^2 x = 1 \iff \sin x = \pm \frac{1}{2} \iff x_n = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$,

б) $81^{\sin^2 x} = 27 \iff 4 \sin^2 x = 3 \iff \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x_k = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ж а в о б. $\left\{ \frac{\pi}{60} (30n + 15 \pm 5), n \in \mathbb{Z} \right\}$.

22- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x = 0. \quad (38)$$

1- ечилиши. Икки номанфий функциялар йиғиндиси нолга тенг. Демак,

$$(38) \iff \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ x_n = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2- ечилиши. Бу тенглама даражасини пасайтириш типига мансуб деб қаралганда ҳам, фақат маънақан ечиш билан охирига етади:

$$(38) \iff 1 + \cos x + 1 - \cos 2x = 0 \iff \cos x - \cos 2x = -2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_n = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x_k = \pi(1+2k), k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff x_k = \pi(1+2k), k \in \mathbb{Z}.$$

Машқ. Ушбу тенгламанинг ечими йўқлигини исботланг:

$$\sin^2 x + \cos^2 5x = 0$$

27- топшириқ. Тенгламаларни типига эътибор бериб ечинг:

1. а) $\sqrt{2} \cos 7x - \cos 7x = 0$; б) $\sin^2 3x - 5 \sin 3x + 4 = 0$; в) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 3$; г) $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$; д) $\sin x + \sin^3 x = 0$; е) $\operatorname{tg}^6 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$.

2. а) $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x = 3$; б) $2 \cos^2 x + \sin x = 2$; в) $\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$; г) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$; д) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$; е) $2 \cos^2 x + 4 \cos x = 3 \sin^2 x$; ж) $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$; з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$; и) $5 \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} = 29$; к) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1,5$.

3. а) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3})$; б) $\cos^4 x = 1 - \sin^4 x$; в) $3 \sin x = 2 \cos x$; г) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 3$; д) $3 \sin^2 x + 38 \sin x \cos x = 6 \cos^2 x$; е) $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$; ж) $\sin^2 x + 3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x$; з) $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^3 x \times \cos^3 x + \sin x \cos^5 x$; и) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; к) $\sin^2 x \cos^2 x = 10 \sin x \cos^3 x - 21 \cos^4 x$; л) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

4. а) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$; б) $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$; в) $(1 + \cos x) \left(\frac{1}{\sin x} - 1 \right) = 0$; г) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos x = 0$; д) $\cos^3 x + 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x = 0$; е) $\sin^3 x + 2 \sin \cdot \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$; ж) $\sin^2 x \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \sin \frac{x}{2} = 0$; з) $2 \operatorname{tg} 2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \sin x + \operatorname{tg} 2x = 0$; и) $4 \sin x + \sin 2x = 0$; к) $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$; л) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0$.

5. а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 2$; в) $\cos \frac{x}{4} - 4 \sin \frac{x}{2} = 2 \cos^3 \frac{x}{4}$; г) $(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 = 5 + \cos \left(\frac{13\pi}{6} - 2x \right)$; д) $1 + \cos 6x = 32 \cos^6 x$;

е) $\operatorname{tg}(x + 30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(x - 60^\circ) = 1$; ж) $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x}$;

з) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$;

и) $4 \sin x \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 4 \sin(\pi + x) \cos x + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \cos(\pi + x) = 1$;

к) $2 \sin x \cos \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{2} + x \right) \cos x = 3 \sin(5\pi - x) \cos(2\pi + x)$;

л) $\sin \frac{3x - 7\pi}{2} + \cos \frac{\pi - 3x}{2} = -\frac{1}{\cos \frac{3}{2}x}$; м) $\sin(5\pi - x) + \operatorname{tg}(11\pi + x) = \frac{\sin x}{2 \cos x}$.

6. а) $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x = \sin 2x \sin 3x$; б) $\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \times \times \sin 8x = 0$; в) $\sqrt{2} \sin 3x \cos 8x + \cos 2x \cos 6x = \sin 2x \sin 6x$; г) $\sin 2x \sin 6x = -\cos x \cos 3x$; д) $\sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x = 0$; е) $\cos z \cos 2z \sin 3z = 0,25 \sin 2z$.

7. а) $\sin x + \sin \frac{1}{\pi} = \sin \left(x + \frac{1}{\pi} \right)$; б) $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$; в) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$; г) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$; д) $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos \left(7x + \frac{3\pi}{2} \right)$; е) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x = \cos x$.

8. а) $\sin^2 2z + \sin^2 3z + \sin^2 4z + \sin^2 5z = 2$; б) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$; в) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$; г) $\sin^4 3z + \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + 3z \right) = \frac{1}{4}$; д) $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$; е) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} = \sin^2 2x + \sin^2 4x$.

9. а) $2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$; б) $\sin^2 z + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 z = 1$; в) $\sin 7x + \sin 9x = 2 \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)$; г) $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x)$; д) $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0$; е) $\frac{\sin z}{1 + \cos z} = 2 - \operatorname{ctg} z$.

10. а) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$; б) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + \frac{\cos \left(\frac{7\pi}{2} + x \right)}{1 + \cos x} = 2$; в) $4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x$; г) $\sin^8 x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$; д) $\operatorname{ctg} 2\pi t^2 + \operatorname{ctg} 4\pi t^2 = 0$; е) $\frac{1 - \operatorname{tg} x + \dots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \dots}{1 + \operatorname{tg} x + \dots + \operatorname{tg}^n x + \dots} = 1 + \sin 2x$.

Тригонометрик тенгсизлик, тенгламалар системаси

1. **Тригонометрик тенгсизлик.** Ушбу тасдиқлар $k \in \mathbb{Z}$ учун ўринлидир:

$$\sin x > a, |a| < 1 \iff 2\pi k + \arcsin a < x < 2\pi k + \pi - \arcsin a, \quad (1)$$

$$\sin x < a, |a| < 1 \iff 2\pi k - \pi - \arcsin a < x < 2\pi k + \arcsin a, \quad (2)$$

$$\cos x > a, |a| < 1 \iff 2\pi k - \arccos a < x < 2\pi k + \arccos a, \quad (3)$$

$$\cos x < a, |a| < 1 \iff 2\pi k + \arccos a < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos a, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x > a \iff \pi k + \operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} x < a \iff -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k + \operatorname{arctg} a, \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg} x > a \iff \pi k < x < \operatorname{arccotg} a + \pi k, \quad (7)$$

$$\operatorname{csg} x < a \iff \pi k + \operatorname{arccotg} a < x < \pi + \pi k. \quad (8)$$

Юқорида энг содда тригонометрик тенгсизликлар ва уларнинг ечими кўрсатилди. Кўпинча тригонометрик тенгсизликлар юқоридаги тасдиқлардан бирига келтириб ечилади.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 \geq 0. \quad (9)$$

Ечилиши. $t = \cos x$ десак,

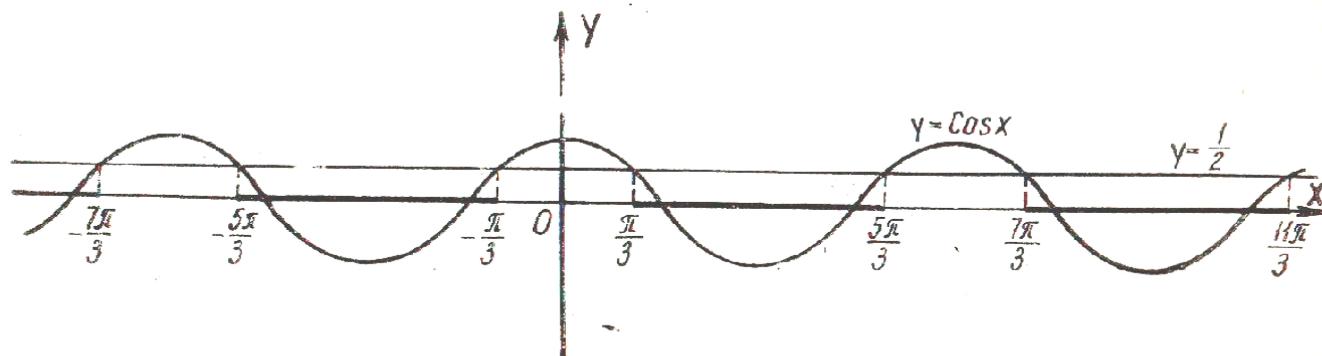
$$(9) \implies 4t^2 - 8t + 3 \geq 0 \iff \begin{cases} t \leq \frac{1}{2}, \\ t \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

У ҳолда: а) $\cos x \leq \frac{1}{2} \iff 2\pi k + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

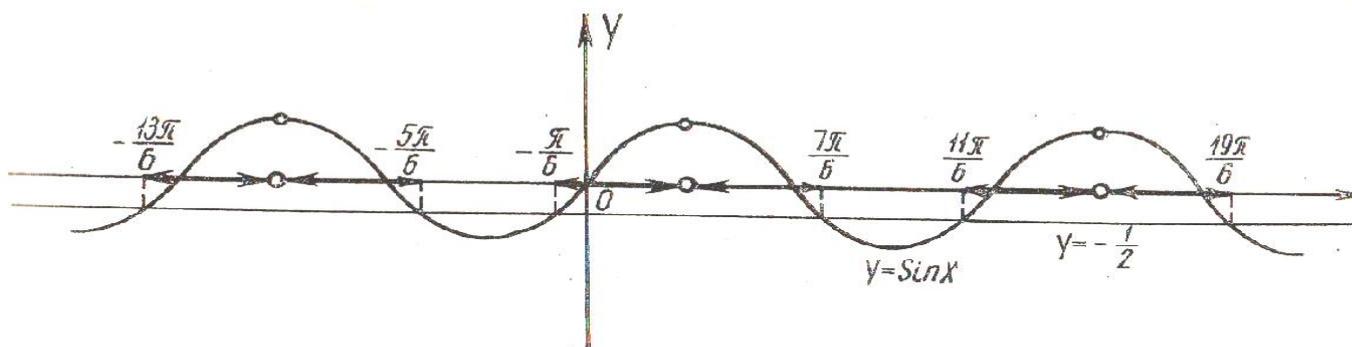
Бу ечим 221-шаклда график равишда тасвирланган.

б) $\cos x \geq \frac{3}{2}$ — бу ечимга эга эмас.

Жавоб. $\left\{ \left[\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{\pi}{3}(6k+5) \right], k \in \mathbb{Z} \right\}$.



221-шакл.



222- шакл.

2- мисол. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 < 0. \quad (10)$$

Ечилиши. (10) $\Leftrightarrow (\sin x - 1) \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\pi k - \frac{\pi}{6} < x < 2\pi k + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Бу ечим 222- шаклда график равишда тасвирланган.

Жавоб. $\left\{ \left[2\pi k - \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right] \cup \left[2\pi k + \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \frac{7\pi}{6} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3- мисол. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \leq 0. \quad (11)$$

Ечилиши. (11) $\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1, \\ \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ \pi k - \frac{\pi}{3} \leq x < \pi k + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi k - \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Бу ечим 223- шаклда график равишда тасвирланган.

Жавоб. $\left\{ \left[\pi k - \frac{\pi}{3}; \pi k + \frac{\pi}{4} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4- мисол. Тенгсизлиكنи ечинг:

$$\sin x + \cos 2x > 1. \quad (12)$$

Ечилиши. (12) $\Leftrightarrow \sin x + 1 - 2 \sin^2 x > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 - 2 \sin x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2}.$$

