

O‘zbekiston Respublikasi oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

Andijon mashinasozlik instituti

«Oliy matematika » kafedrası

**«*Ehtimollar nazariyasi va matematik
statistika*» fanidan**
amaliy mashg‘ulotlar uchun uslubiy

QO‘LLANMA

Andijon – 2012

Tuzuvchi:

A. G. Abdullayev --- f.m.f.n., «Oliy matematika» kafedrası
dotsenti

Taqrizchilar:

1. F. Aliyev — f.m.f.n. «Oliy matematika» kafedrası
dotsenti
2. R. Azimov — f.m.f.n., AndDU «Matematika» kafedrası dotsenti

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» —A.: AndMI, 2012 y.

Qisqacha mazmuni

Oliy ta'lim bakalavriyatining «Moliya», «Buxgalteriya hisobi va audit» «Gaznachilik ishi», «Iqtisodiyot», «Biznesni boshqarish» yo'nalishlari talabalari uchun «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani o'quv rejasiga ko'ra III semestrda o'qitilib, jami 76 soat. Jumladan: 38 soat ma'ruza, 38 soat amaliy mashg'ulotlaridan tashkil topadi.

Ushbu uslubiy qo'llanmadan «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha yuqorida ko'rsatilgan yo'nalish talabalariga 38 soatlik amaliy mashg'ulotlarni o'tkazish uchun foydalanish mumkin. Qo'llanma «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha amaldagi namunaviy dastur va «Matematika va informatika» kafedrasida tasdiqlangan ishchi dastur asosida yozilgan. Uslubiy qo'llanmadagi dastlabki 8 ta mavzu 24 soatga mo'lljanlanib, u ehtimollar nazariyasining asosiy tushuncha va formulalarini: ehtimollik hisoblashning klassik, statistic va geometric usullari, ehtimollikni qo'shish va ko'paytirish formulalari, shartli ehtimollik, to'la ehtimollik formulasi, Bayes formulalari, Bernulli formulasi, Laplasning lokal va integral asimtotik formulalari, Puasson formulasi, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar ularning taqsimot qonunlari, sonli ko'rsatkichlari kabi mavzularni o'z ichiga olgan bo'lsa, keyingi 4 ta mavzu esa, 14 soatga mo'lljanlangan va u matematik statistikaning asosiy masalalarini: tanlanma to'planing berilish usullari, uning asosiy ko'rsatkichlari, bosh toplam parametrlarini tanlanma taqsimotiga ko'ra baholashlar, o'rtacha va dispersiya uchun oraliqli baholar, statistic kriteriyalar, Pirson kriteriysi, tanlanma korrelyasiya ko'rsatkichi, tanlanma chiziqli regressiya tenglamasi kabi mavzularni o'z ichiga olgan. Har bir mavzuda ushbu mavzuga oid

nazariy ma'lumotlar, amaliy mashqlarni yechishga doir uslubiy ko'rsatmalar hamda darsxonada, darsxonadan tashqari mustaqil yechish uchun yetarli mashqlar to'plami keltirilgan.

Mavzular so'nggida «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» tadbirlarida ko'p ishlatiladigan jadvalar va adabiyotlar ro'yxati berilgan.

Uslubiy qo'llanmadan maskur fandan amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchilar, magistrlar va talabalar foydalanishlari mumkin.

MUNDARIJA

№	Mavzuning nomi	Ajratilgan soat	Bet
1	Ehtimollikning klassik va statistik ta'riflari. Geometrik ehtimollik.	4	5
2	Hodisalar algebrasi. Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. Shartli ehtimollik. To'la ehtimollik formulasi. Bayes formulalari.	6	9
3	Bog'liqmas sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplas va Puasson teoremlari.	4	12
4	Diskret tasodifiy miqdorlar. Ba'zi taqsimot qonunlari.	2	15
5	Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Ayrim taqsimot qonunlari.	2	21
6	Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi va dispersiyasi.	2	28
7	Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti. Tasodifiy argument funksiyasi.	2	33

8	Ikki o'ldirli bog'liq tasodifiy miqdorlar. Korrelyasiya momenti va korrelyasiya koeffitsienti.	2	40
9	Variatsion qator uchun poligon va gistogramma. Tanlanmaning asosiy sonli xarakteristikalar.	2	47
10	Matematik kutilish va dispersiya uchun ishonchli oraliqlar.	4	55
11	Gipotezalarni Pirsonning muvofiqlik kriteriysi bo'yicha tekshirish.	4	58
12	Tanlanma korrelyasiya ko'rsatkichi. Chiziqli regressiya tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli.	4	63
13	Ilovalar		73
14	Adabiyotlar		78

1-§. Ehtimollikning klassik va statistik ta'riflari. Geometrik ehtimollik.

1.1. Ehtimolliklar nazariyasida *hodisa* deb, sinov natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday holatga aytiladi.

Sinov natijasida albatta ro'y beradigan hodisa *muqarrar (U) hodisa* deyiladi.

Sinov natijasida hech qachon ro'y bermaydigan hodisa *mumkin bo'lmagan (V) hodisa* deyiladi.

Sinov natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi.

Sinovning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi.

Agar bitta sinovning o'zida A va B tasodifiy hodisalar bir vaqtda ro'y bermasalar, ular *birgalikdamas (birgalikda bo'lmagan) hodisalar* deyiladi. Agar sinov natijasida bir nechta hodisalardan faqat bittasi ro'y bersa, ular *hodisalarning to'la guruhini* tashkil etadi deyiladi.

Agar A va B hodisalarning hech birini ikkinchisiga nisbatan ro'y berishi ishonchliroq deyishga asos bo'lmasa, bu hodisalar o'zarj *teng imkoniyatli* deyiladi.

A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan A hodisa A hodisaga *qarama-qarshi hodisa* deyiladi.

Agar A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berish yoki ro'y bermasligiga ta'sir etmasa, bu hodisalar *o'zaro erkli (bog'liq bo'lmagan) hodisalar* deyiladi.

1.2. Sinash natijasida teng imkoniyatli n ta elementar hodisalar ro'y berishi mumkin bo'lsin. Biror A hodisaning ro'y berishi uchun elementar hodisalardan m tasi qulaylik tug'dirsin. U holda A hodisaning klassik ehtimolligi

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

formula bilan aniqlanadi.

Ehtimollikning xossalari:

1. Muqarrar hodisaning ehtimolligi 1 ga teng, ya'ni

$$P(U) = 1$$

2. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimolligi 0 ga teng, ya'ni

$$P(V) = 0$$

3. Tasodifiy A hodisaning ehtimolligi uchun

$$0 < P(A) < 1$$

o'rinli.

1.3. Ehtimolliklarni bevosita hisoblashda ko'pincha kombinatorika formulalaridan foydalaniladi.

O'rin almashtirishlar deb n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalariga aytiladi. n ta turli elementlarning o'rin almashtirishlari soni $P_n = n!$ ga teng ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

O'rinlashtirishlar n ta turli elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalar bo'lib, ular bir-biridan yo elementlarning tarkibi, yo ularning tartibi bilan farq qiladi. Ularning soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ yoki } A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

formulalar bilan topiladi.

Gruppalashlar — bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalardir. Ularning soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ ga teng.}$$

1.4. Hodisaning *nisbiy chastotasi* deb hodisa ro'y bergan sinovlar sonining o'tkazilgan barcha sinovlar soniga nisbatiga aytiladi:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

bu yerda m – hodisaning ro'y berishlari soni, n – sinovlarning umumiy soni.

Sinovlar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning *statistik ehtimolligi* sifatida nisbiy chastotani olish mumkin:

$$W(A) \approx P(A) = \frac{m}{n}$$

1.5. *G e o m e t r i k e h t i m o l l i k.* D_1 soha D sohaning qismi (bo'lagi) bo'lsin. Agar sohaning o'lchamini (uzunligi, yuzi, hajmi) mes orqali belgilasak, tavakkaliga tashlangan nuqtaning D sohaga tushish ehtimolligi

$$P(A) = \frac{\text{mes} D_1}{\text{mes} D} \text{ ga teng.}$$

1 – m i s o l. Qutida 3 ta oq, 7 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq shar bo'lishi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. A olingan shar oq ekanligi hodisasi bo'lsin. Mazkur sinov 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 3 tasi A hodisaga qulaylik tug'diruvchidir. Demak,

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$$

2 – m i s o l. Guruhda 12 talaba bo'lib, ularning 8 nafari a'lochilardir. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 talaba tanlab olindi. Tanlab olinganlar ichida 5 talaba a'lochi talaba bo'lishi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. Sinovning barcha mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hodisalari soni C_{12}^9 ga teng. Bularning ichidan $C_8^5 \cdot C_4^4$ tasi tanlab olingan talabalar ichidan 5 tasi a'lochi talabalar hodisasi (A) uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

3 – m i s o l. Qirqma alifboning 10 ta harfidan “matematika” so'zi tuzilgan. Bu harflar tasodifan sochilib ketgan va qaytadan ixtiyoriy tartibda yig'ilgan. Yana “matematika” so'zi hosil bo'lishi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. A — “Matematika” so'zi hosil bo'ldi hodisasi. Teng imkoniyatli mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n = 10!$ bo'lib, A hodisaga qulaylik yaratuvchilari $m = 2! \cdot 3! \cdot 2!$ bo'ladi. Bu yerda matematika so'zida “m” 2 marta, “a” 3 marta, “t” 2 marta takrorlanishi hisobga olinadi.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200}$$

4 – m i s o l. Telefonda nomer terayotgan abonent oxirgi ikki raqamni sedan chiqarib qo'ydi va faqat bu raqamlar har xil ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. A — ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. Hammasi bo'lib, o'nta raqamdan ikkitadan nechta o'rinlashtirishlar tuzish mumkin bo'lsa shuncha, ya'ni $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ ta turli raqamlarni terish mumkin. Shuning uchun klassik ehtimollikka ko'ra

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$$

5 – m i s o l. Fransuz tabiatshunosi Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlagan va bunda 2048 marta gerbli tomon tushgan. Bu sinovlar majmuasida gerbli tomon tushishi chastotasini toping.

Ye ch i sh.

$$W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,50693$$

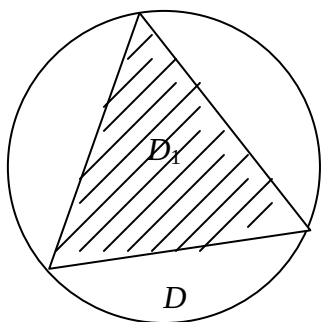
6 – m i s o l. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. $S(D_1)$ — uchburchakning yuzi, $S(D)$ — doiraning yuzi bo'lsin (1-shakl).

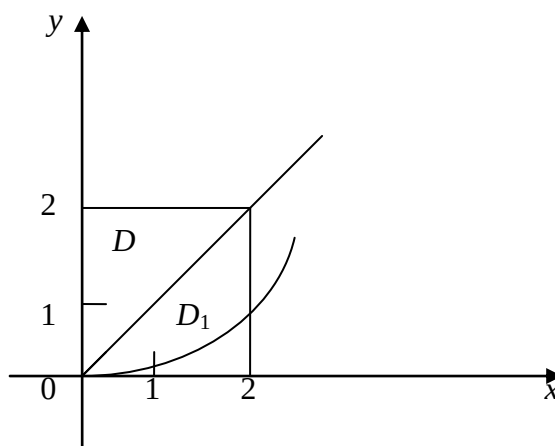
A — nuqtaning uchburchakka tushishi hodisasi. U holda

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4137$$

$$P(A) \approx 0,4137$$



1-shakl



2-shakl

7 – m i s o l. $[0, 2]$ kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar

$x^2 \leq 4y \leq 4x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

Ye ch i sh. (x, u) nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bu — (x, y) nuqta tomoni 2 ga teng kvadrat nuqtalari to'plamidan tavakkaliga tanlanishini bildiradi.

Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tanlanadigan (x, y) nuqta shtrixlangan figuraga tegishli bo'lgan holda va faqat shu holda ro'y beradi (2-shakl). Bu figura koordinatalari $x^2 \leq 4y \leq 4x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalarning to'plami

sifatida hosil qilingan. Demak, izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan figura yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya'ni

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx}{4} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2}{4} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{8}{12}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

Demak, $P(A) = \frac{1}{3}$.

1 – mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. Tavakkaliga 20 dan katta bo'lmagan natural son tanlanganda, uning 5 ga karrali bo'lish ehtimolligini toping.

J: 0,2.

2. Kartochkalarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga to'rtta kartochka olinib, ularni qator qilib terilganda juft son hosil bo'lishi ehtimolligini toping.

J: $\frac{4}{9}$.

3. Qutida 12 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Tavakkaliga

a) bitta shar olinganda uning oq bo'lishi ehtimolligini toping;

b) bitta shar olinganda uning qizil bo'lishi ehtimolligini toping;

v) 2 ta shar olinganda ularning turli rangda bo'lishi ehtimolligini toping;

g) 8 ta shar olinganda ularning 3 tasi qizil rangli bo'lishi ehtimolligini toping;

d) 8 ta shar olinganda qizil rangli sharlar 3 tadan ko'p bo'lmasligi ehtimolligini toping;

J: a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; v) $\frac{48}{95}$; g) $\approx 0,35$; d) $\approx 0,6117$

4. Ikkita o'yin soqqasi baravar tashlanganda quyidagi hodisalarning ro'y berish ehtimolliklarini toping:

A — tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng.

B — tushgan ochkolar ko'paytmasi 8 ga teng.

C — tushgan ochkolar yig'indisi ularning ko'paytmasidan katta.

J: $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(B) = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{11}{36}$

5. Tanga 2 marta tashlanganda aqalli bir marta gerbli tomon tushishi ehtimolligini toping.

J: $P(A) = \frac{3}{4}$

6. Qutichada 6 ta bir xil (nomerlangan) kubik bor. Tavakkaliga bitta-bittadan barcha kubiklar olinganda kubiklarning nomerlari o'sib borish tartibida chiqishi ehtimolligini toping.

J: $P(A) = \frac{1}{720}$

7. Qutida 5 ta bir xil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olinganda ular orasida:

a) bitta bo'yalgani bo'lishi;

b) ikkita bo'algani bo'lishi;

v) hech bo'lmaganda bitta bo'algani bo'lishi ehtimolligini toping.

J: a) 0,6; b) 0,3; v) 0,9.

8. Uchlari (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) nuqtalarda bo'lgan kvadratga (x, y) nuqta tashlanadi. Bu nuqtaning koordinatalari $y < 2x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

J: $P(A) = 0,75$

9. Tavakkaliga har biri birdan katta bo'lmagan ikkita musbat son olinganda, ularning yig'indisi $x + y$ birdan katta bo'lmasligi, ko'paytmasi xy esa 0,09 dan kichik bo'lmasligi ehtimolligini toping.

J: $P(A) \approx 0,2$

10. Aylanaga tavakkaliga ichki uchburchak chiziladi. Bu uchburchak o'tkir burchakli bo'lishi ehtimolligini toping.

J: $\frac{1}{4}$

11. Texnik nazorat bo'limi tavakkaliga olingan 100 ta kitobdan 5 tasi yaroqsiz ekanini aniqladi. Yaroqsiz kitoblarning nisbiy chastotasini aniqlang.

J: $W(A) = \frac{5}{100} = 0,05$

2-§. Hodisalar algebrasi.

Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.

Shartli ehtimollik. To'la ehtimollik formulasi. Bayes formulalari.

2.1. Ikkita A va B hodisaning yig'indisi deb A hodisaning, yoki B hodisaning, yoki bu ikkala hodisaning ro'y berishidan iborat $C = A + B$ hodisaga aytiladi.

Birgalikda bo'lmagan ikkita A va B hodisa yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Bir nechta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

To'la grupp tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ehtimolliklarining yig'indisi 1 ga teng, ya'ni

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Qarama-qarshi hodisalar ehtimolliklarining yig'indisi 1 ga teng, ya'ni

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

2.2. Ikkita A va B hodisaning ko'paytmasi deb, bu hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat $C = A \cdot B$ hodisaga aytiladi.

Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro'y berishi ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

B hodisaning A hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimolligi *shartli ehtimollik* deyiladi. Shartli ehtimollik quyidagicha belgilanadi:

$$P_A(B) \text{ yoki } P(B/A)$$

Ikkita bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berishi ehtimolligi uchun quyidagi formulalar o'rinli:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ yoki } P(AB) = P_B \cdot P_B(A)$$

Bir nechta bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolligi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

2.3. A va B tasodifiy hodisalar yig'indisining ehtimolligi uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

2.4. *T o' l a e h t i m o l l i k f o r m u l a s i.* $B_1, B_2, \dots, B_n$ lar hodisalarning to'la guruhini tashkil etib, A hodisa ularning biri bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin. U holda

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)$$

2.5. *B e y e s f o r m u l a s i.* Agar A hodisa ro'y bergani ma'lum bo'lsa, u holda $P(B_k)$, $k=1, n$ ehtimolliklarni qayta baholash mumkin, ya'ni $P_A(B_k)$ shartli ehtimolliklarni ushbu Bayes formulasi yordamida topish mumkin:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}$$

1- m i s o l. Sexda bir nechta stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanokni sozlashni talab etish ehtimolligi 0,2 ga teng, ikkita stanokni sozlashni talab etish ehtimolligi 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlashni talab etish ehtimolligi esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni sozlashni talab etilishi ehtimolligini toping.

Y e c h i s h. Quyidagi hodisalarni qaraymiz: A — smena davomida bitta stanok sozlashni talab etadi hodisasi;

B — smena davomida ikkita stanok sozlashni talab etadi hodisasi;

C — smena davomida ikkitadan ortiq stanok sozlashni talab etadi hodisasi;

A, B, C hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni quyidagi hodisa qiziqtiradi: $(A+B+C)$ — smena davomida sozlash zarur bo'ladigan stanoklar:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4$$

2- m i s o l. Ikkita ovchi bir paytda bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda quyonga qarata o'q uzishdi. Ovchilardan hech bo'lmaganda biri o'qni nishonga tekkazsa, quyon otib olingan bo'ladi. Birinchi ovchining nishonga urish ehtimolligi 0,8 ga, ikkinchisining 0,75 ga teng bo'lsa, quyonni otib olish ehtimolligini toping.

Y e c h i s h. Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

A — birinchi ovchi nishonga tekkazishi;

B — ikkinchi ovchi nishonga tekkazishi.

A va B erkli hodisalar. Bizni $(A+B)$ hodisa qiziqtiradi.

$(A+B)$ — hech bo‘lmaganda bitta ovchining nishonga tekkazishi. U holda
 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 + 0,75 - 0,8 \cdot 0,75 = 0,95$,
 $P(A+B) = 0,95$

3- m i s o l. Komandada 12 sportchi bo‘lib, ularning 5 tasi sport ustasi. Sportchilar ichidan qur’a tashlash orqali uch sportchi tanlanadi. Tanlangan sportchilarning hammasi sport ustasi bo‘lishi ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. A_1 — birinchi sportchi — sport ustasi;
 A_2 — ikkinchi sportchi — sport ustasi;
 A_3 — uchinchi sportchi — sport ustasi;

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ — uchala sportchi — sport ustasi.

$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, hodisalar — bog‘liq hodisalar. Demak,

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

4- m i s o l. Talaba o‘ziga kerakli formulani 3 ta ma’lumotnomalardan qidiradi. Formula birinchi, ikkinchi, uchinchi ma’lumotnomada bo‘lishi ehtimolligi mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula:

- a) faqat bitta ma’lumotnomada bo‘lishi;
- b) faqat ikkita ma’lumotnomada bo‘lishi;
- v) uchala ma’lumotnomada bo‘lishi;
- g) hech bo‘lmaganda bitta ma’lumotnomada bo‘lishi ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

A_1 — formula birinchi ma’lumotnomada bor,
 A_2 — formula ikkinchi ma’lumotnomada bor,
 A_3 — formula uchinchi ma’lumotnomada bor.

a) $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ — formula faqat bitta ma’lumotnomada bor.

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ hodisalar birgalikda emas va $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3; \bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ hodisalar bog‘liq emas. Demak,

$$P(A) = P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) = \\ = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

b) $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ — formula faqat ikkita ma’lumotnomada bor. Demak,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452$$

v) $A = A_1 A_2 A_3$ — formula uchala ma’lumotnomada bor.

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$$

g) $A = A_1 + A_2 + A_3$ — formula hech bo‘lmaganda bitta ma’lumotnomada bor.

Mazkur holda A hadisaga qarama-qarshi hodisani qarash qulay.

$\bar{A}$ — formula hech bir ma’lumotnomada yo‘q.

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \text{ u holda } P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = \\ = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976$$

Shunday qilib, a) $P(A) = 0,188$; b) $P(A) = 0,452$; v) $P(A) = 0,336$; g) $P(A) = 0,976$

5- m i s o l. Birinchi qutida 2 ta oq, 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) Olingan shar oq bo‘lishi ehtimolligi qanday?

b) Ikkinchi qutidan olingan shar oq bo‘lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq bo‘lishi ehtimolligi qanday?

Y e c h i s h. a) Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A — ikkinchi qutidan olingan shar oq,

B_1 — birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan,

B_2 — birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi shar solingan,

B_3 — birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.

B_1, B_2, B_3 — hodisalar to‘la guruh tashkil etadi. U holda to‘la ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + P(B_3) P_{B_3}(A)$$

$B_k, k = \overline{1,3}$ gipotezalarning ehtimolliklarini va $P_{B_k}(A)$ shartli ehtimolliklarni klassik sxema bo‘yicha hisoblaymiz:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}; \quad P(B_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$$

$$P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{5}{8}; \quad P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$$

Topilgan natijalarni to‘la ehtimollik formulasiga qo‘yamiz:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

a) $P_A(B_1)$ ehtimollikni Bayes formulasi bo‘yicha topamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}$$

2 – mavzu bo‘yicha topshiriqlar

1. Kursant otish bo‘yicha “sinov” topshirishi uchun 4 dan past bo‘lmagan baho olishi kerak. Agar kursant otganiga “5” bahoni 0,3, “4” bahoni 0,6 ehtimollik bilan olishi ma’lum bo‘lsa, kursantning “sinov” topshira olish ehtimolligini toping. J: $p = 0,9$

2. Ikkita mergan nishonga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkazish ehtimolligi 0,6 ga, ikkinchisi uchun 0,7 ga tengligi ma’lum bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a) merganlarning faqat birining nishonga tekkazishi;

b) merganlarning hech bo‘lmaganda biri nishonga tekkazishi;

v) ikkala mergan nishonga tekkazishi;

g) hech bir merganning nishonga tekkaza olmasligi;

d) merganlarning hech bo'lmaganda biri nishonga tekkaza olmagan.

J: a) 0,46; b) 0,6; v) 0,42; g) 0,12; d) 0,58.

3. Yig'uvchiga zarur detal birinchi, ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi yashikda ekanligi ehtimolligi mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 ga teng. Zarur detal:

a) ko'pi bilan 3 ta yashikda bo'lishi;

b) kami bilan 2 ta yashikda bo'lishi ehtimolligini toping.

J: a) 0,6976; b) 0,9572

4. Guruhda 10 talaba bo'lib, ularning 7 nafari a'lochilar. To'rt talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a'lochi bo'lishi ehtimolligini toping.

J: $\frac{1}{6}$.

5. Uchta zavod soat ishlab chiqaradi va magazinga jo'natadi. Birinchi zavod butun mahsulotning 40% ini, ikkinchi zavod 45% ini, uchinchi zavod esa 15% ini tayyorlaydi. Birinchi zavod chiqargan soatlarning 80% i, ikkinchi zavod soatlarining 90 % i ilgarilab ketadi. Sotib olingan soatning ilgarilab ketishi ehtimolligini toping. J: 0,77.

6. Samolyotga qarata uchta o'q uzilgan. Birinchi otishda nishonga tegish ehtimolligi 0,5 ga, ikkinchisida 0,6 ga, uchinchisida 0,8 ga teng. Bitta o'q tekkanda samolyotning urib tushirilishi ehtimolligi 0,3 ga, ikkita o'q tekkanda 0,6 ga teng. Uchta o'q tegsa, samolyot urib tushiriladi. Samolyotning urib tushirilish ehtimolligini toping. J: 0,594.

7. Spartakiadada birinchi guruhdan 4 talaba, ikkinchi guruhdan 6, uchinchi guruhdan 5 talaba qatnashadi. Institut terma jamoasiga birinchi guruhdagi talaba 0,9 ehtimollik bilan, ikkinchi guruh talabasi 0,7 va uchinchi guruh talabasi 0,8 ehtimollik bilan qabul qilinishi mumkin. Tavakkaliga tanlangan talaba terma jamoaga qabul qilindi. Bu talabaning qaysi guruhda o'qishi ehtimolligi kattaroq? J: Talabaning ikkinchi guruhda o'qishi ehtimolligi kattaroq.

8. Sexda tayyorlanadigan detallar ikkita nazoratchi tomonidan tekshiriladi. Detalning nazorat uchun birinchi nazoratchiga tushishi ehtimolligi 0,6 ga, ikkinchi nazoratchiga tushishi 0,4 ga teng. Yaroqli detalning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilishi ehtimolligi 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa 0,02 ga teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqliligi chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tekshirganligi ehtimolligini toping: J: $\frac{9}{11}$.

3-§. Bog'liqmas sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi.

Muavr – Laplas va Puasson teoremlari.

3.1. Agar sinovlar natijalarining har qanday kombinatsiyasi bog'liqmas hodisalar to'plamidan iborat bo'lsa, bu sinovlar *bog'liqmas* deyiladi.

Chekli sondagi n ta ketma-ket bog'liqmas sinovlar o'tkazilgan bo'lsin. Bu sinovlarning har biri natijasida ma'lum bir hodisa ro'y berishi mumkin bo'lsa, sinovlarning bunday ketma-ketligi *Bernulli sxemasi* deyiladi.

B e r n u l l i f o r m u l a s i . Har birida hodisaning ro'y berishi ehtimolligi p ga teng n ta bog'liqmas sinovlarda bu hodisaning rosa m marta ro'y berishi ehtimolligi

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \text{ bu yerda } q = 1 - p,$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

ga teng.

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ – n ta bog'liqmas sinovlarda A hodisaning kamida m_1 va ko'pi bilan m_2 martagacha ro'y berish ehtimolligi bo'lsin. U holda quyidagi formula o'rinlidir:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

n ta sinovda hodisaning kamida bir marta ro'y berishining ehtimolligi

$$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p$$

ga teng.

Agar hodisaning sinovlar natijasida m_0 marta ro'y berishi ehtimolligi qolgan sinovlarning mumkin bo'lgan natijalari ehtimolligidan katta bo'lsa, m_0 son eng ehtimolli deyiladi. U quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$np - q \leq m_0 \leq np + q:$$

- a) agar $np - q$ — kasr son bo'lsa, bitta eng ehtimolli m_0 son mavjud;
- b) agar $np - q$ — butun son bo'lsa, ikkita eng ehtimolli m_0 va $m_0 + 1$ mavjud;
- v) agar $np - q$ — butun son bo'lsa, eng ehtimolli $m_0 = np$ bo'ladi.

3.2. L a p l a s n i n g l o k a l t e o r e m a s i (katta n larda). Har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga teng bo'lgan n ta bog'liqmas sinovlarda hodisa rosa m marta ro'y berish ehtimolligi taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

bu yerda

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali ilovada keltirilgan, bunda $\varphi(x)$ — juft funksiya ekaniga e'tibor bering.

3.3. L a p l a s n i n g i n t e g r a l t e o r e m a s i (katta n larda). Har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi p gat eng bo'lgan n ta bog'liqmas sinovlarda hodisaning kamida m_1 marta va ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimolligi taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

bu yerda

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$\Phi(x)$ — Laplas funksiyasi.

$\Phi(x)$ funksiyaning $x \in [0; 5]$ uchun qiymatlari jadvali ilovada berilgan. $x > 5$ uchun $\Phi(x) = 0,5$ va $\Phi(x)$ — toq funksiya ekani e'tiborga olinadi.

E s l a t m a. Laplasning taqribiy formulalaridan $npq > 10$ bo'lgan holda foydalaniladi. Agar $npq < 10$ bo'lsa, bu formulalar katta xatoliklarga olib keladi.

3.4. P u a s s o n t e o r e m a s i. Katta n lar va kichik p larda quyidagi taqribiy formula o'rinli:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ bu yerda } \lambda = np.$$

1- m i s o l. Biror mergan uchun o'q uzishda nishonga tegishi ehtimolligi 0,8 ga teng va o'q uzish tartibiga (nomeriga) bog'liq emas. 5 marta o'q uzilganda nishonga rosa 2 marta tegish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. $n = 5$, $p = 0,8$, $m = 2$, $q = 0,2$. Bernulli formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512$$

2- m i s o l. Tanga 10 marta tashlanganda gerbil tomon:

a) 4 tadan 6 martagacha tushish ehtimolligini;

b) hech bo'lmaganda bir marta tushish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. $n = 10$, $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $p = q = 0,5$.

$$a) P_{10}(4 \leq m \leq 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = C_{10}^4 \cdot (0,5)^4 \cdot (0,5)^6 +$$

$$+ C_{10}^5 (0,5)^5 \cdot (0,5)^5 + C_{10}^6 (0,5)^6 (0,5)^4 = (0,5)^{10} (C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6) = \frac{21}{32}. \quad J: \frac{21}{32}$$

$$b) P_{10}(1 \leq m \leq 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

3- m i s o l. A hodisaning 900 ta bog'liqmas sinovning har birida ro'y berish ehtimolligi

$p = 0,8$ ga teng. A hodisa:

a) 750 marta, b) 710 dan 740 martagacha ro'y berish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. $npq = 900 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 144 > 10$ bo'lgani uchun a) bandida Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz, b) bandda esa Laplasning integral teoremasidan foydalanamiz.

$$a) x = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5, \quad \varphi(2,5) \approx 0,0175$$

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,00146$$

$$b) x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83, \quad x_2 = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67$$

$$\Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) \approx -0,2967$$

$$\Phi(1,67) \approx 0,4527.$$

$$P_{900}(710 \leq m \leq 740) \approx 0,4525 + 0,2967 = 0,7492$$

$$J: a) 0,00146, \quad b) 0,0236, \quad v) 0,7492$$

4- m i s o l. Telefon stansiyai 400 abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo'ng'iroq qilish ehtimolligi 0,01 ga teng bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a) bir soat davomida 5 abonent stansiyaga qo'ng'iroq qiladi;

b) bir soat davomida 4 tadan ko'p bo'lmagan abonent stansiyaga qiladi;

v) bir soat davomida 3 abonent stansiyaga qo'ng'iroq qiladi.

Y e ch i sh. $p = 0,01$ juda kichik, $n = 400$ esa katta bo'lgani uchun $\lambda = 400 \cdot 0,01 = 4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz.

$$a) P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,156293$$

$$b) P_{400}(0 \leq m \leq 4) \approx 0,018316 + 0,073263 + 0,146525 + 0,195367 + 0,195367 = 0,628838;$$

$$v) P_{400}(3 \leq m \leq 400) = 1 - P_{400}(0 \leq m \leq 2) = 1 - 0,018316 - 0,073263 - 0,146525 = 0,761896$$

$$J: a) 0,156293; \quad b) 0,628838; \quad v) 0,761896$$

5- m i s o l. Birorta qurilmaning 15 ta elementining har biri sinab ko'riladi. Elementlarning sinovga bardosh berish ehtimolligi 0,9 ga teng. Qurilma elementlarining sinovga bardosh bera oladigan ehg katta ehtimolligi sonini toping.

Y e ch i sh. $n = 15$, $p = 0,9$, $q = 0,1$

Eng ehtimolli m_0 sonni ushbu

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

qo'sh tengsizlikdan topamiz. Berilganlarni qo'yib,

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq m_0 \leq 15 \cdot 0,9 + 0,9$$

yoki

$$13,4 \leq m_0 \leq 14,4 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

m_0 — butun son bo'lgani uchun izlanayotgan eng ehtimolli son $m_0 = 14$ bo'ladi.

$$J: 14$$

3- mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta:

a) Teng kuchli raqib bilan o'ynab, to'rtta partiyadan uchtasini yutib olishmi yoki sakkiz partiyadan beshtasini yutib olishmi?

b) To'rtta partiyaning kamida uchtasini yutib olishmi yoki cakkizta partiyaning kamida beshtasini yutib olishmi?

J: a) $\frac{1}{4}$ va $\frac{7}{32}$ — 4 ta partiyadan 3 tasini yutish ehtimolligi katta;

b) $\frac{5}{16}$ va $\frac{93}{256}$ — 8 ta partiyadan kamida 5 tasini yutib olish ehtimolligi katta.

2. O'yin soqqasi 800 marta tashlanganda uchga karrali ochko 267 marta tushishi ehtimolligini toping.

J: $P_{500}(267) \approx 0,03$

3. 100 ta stanok bir-biriga bog'liqsiz ishlaydi, shu bilan birga smena davomida ularning har birining to'xtovsiz ishlash ehtimolligi 0,8 ga teng. Smena davomida 75 dan 85 tagacha stanok beto'xtov ishlashi ehtimolligini toping. J: 0,7887.

4. Zavod omborga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo'lda shikastlanish ehtimolligi 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo'lda:

a) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolligini;

b) 3 tadan ko'p bo'lmagani shikastlanishi ehtimolligini;

v) 3 tadan ko'pi shikastlanishi ehtimolligini toping.

J: a) 0,06313; b) 0,981; v) 0,019

5. Texnika nazorat bo'limi 10 ta detaldan iborat partiyanı tekshiradi. Detalning standart bo'lishi ehtimolligi 0,75 ga teng. Standart deb topiladigan detallarning eng ehtimolli sonini toping. J: $m_0 = 8$

6. Uzunligi 15 sm bo'lgan AB kesma C nuqta bilan 2: 1 nisbatda bo'lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlanadi. Ulardan ikkitasi C nuqtadan chaproqqa, ikkitasi o'ngroqqa tushishi ehtimolligini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesma uzunligiga proporsional va uning joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi. J: $\frac{8}{27}$

4-§. Diskret tasodifiy miqdorlar.

Ba'zi taqsimot qonunlari.

4.1. Sinov natijasida oldindan ma'lum bo'lgan qiymatlardan birini qabul qiladigan miqdor, *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdor deb mumkin bo'lgan qiymatlar chekli yoki cheksiz sonli ketma-ketliklardan iborat miqdorga aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlar bilan ularning ehtimolliklari orasidagi bog'lanish tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* deyiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) birinchi satri mumkin bo'lgan x_k qiymatlardan, ikkinchi satri p_k ehtimolliklardan iborat jadval yordamida:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}, \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1;$$

$$p \mid p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n$$

b) grafik usulda — buning uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_k, p_k) nuqtalar yasaladi, so‘ngra ularni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, *taqsimot ko‘pburchagi* deb ataluvchi figurani hosil qilinadi;

v) analitik usulda (formula ko‘rinishida):

$$P(X = x_k) = \varphi(x_k)$$

yoki *integral funksiyalar* (taqsimot funksiyalari) deb ataluvchi funksiyalar yordamida.

4.2. Har bir $x \in (-\infty; +\infty)$ uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolligini aniqlovchi $F(x) = P(X < x)$ funksiya *taqsimot funksiyasi* deyiladi.

Taqsimot funksiyasining asosiy xossalari:

1. Taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0; 1]$ kesmaga tegishlidir:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya’ni agar $x_2 > x_1$ bo‘lsa, $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. X tasodifiy miqdorning $[a, b]$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyasining bu oraliqdagi orttirmasiga teng, ya’ni

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

4. Agar X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari (a, b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$x \leq a \text{ da } F(x) = 0,$$

$$x \geq b \text{ da } F(x) = 1,$$

Diskret tasodifiy miqdorlar taqsimotining ba’zi qonunlarini qarab chiqamiz.

4.3. X diskret tasodifiy miqdor — hodisaning n ta bog‘liqmas sinovlarda ro‘y berishlari soni, p — hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimolligi, $x_1 = 0, \dots, x_{n+1} = n - X$ diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘lsin. Bu qiymatlarga mos ehtimolliklar ushbu Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblanadi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$

Bernulli formulasi yordamida aniqlanadigan ehtimolliklar taqsimoti *binomial taqsimot* deyiladi.

Binomial qonunni jadval ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

x	0	1	2	...	n
p	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

4.4. Agar sinovlar soni juda katta bo‘lib, hodisaning har qaysi sinovda ro‘y berish ehtimolligi p juda kichik bo‘lsa, u holda diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimolliklarini Bernulli formulasi bo‘yicha emas, balki ushbu Puasson formulasidan foydalanib topish qulay:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Puasson formulasi ifodalaydigan ehtimolliklar taqsimoti *Puasson taqsimoti* deyiladi.

Puasson taqsimotini jadval ko'rinishida ifodalash mumkin:

x	0	1	2	...	m	...
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

1 – m i s o l. Qutida 7 ta shar bo'lib, 4 tasi oq, qolganlari esa qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi.

X diskret tasodifiy miqdor — olingan oq sharlar soni bo'lsa,

a) X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping;

b) $X \geq 2$ hodisaning ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar: 0, 1, 2, 3.

a) Mos ehtimolliklarni klassik usul bilan topamiz:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

Demak, X – diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

ekan.

$$(T e k s h i r i s h: \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1)$$

$$b) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$$

2- m i s o l. Nishonga qarata 4 ta o'q uziladi (bog'liqsiz holda), bunda har qaysi o'q uzishda nishonga tegish ehtimolligi $p = 0,8$ ga teng. Quyidagilarni toping:

a) nishonga tegishlar soniga teng bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \leq X \leq 3$ va $X > 3$ hodisalarning ehtimolligini;

v) taqsimot ko'pburchagini chizing;

g) X – diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini chizing;

d) taqsimot funksiyasidan foydalanib $X < 3$, $1 \leq X \leq 4$ hodisalarning ehtimolligini hisoblang.

Y e ch i sh. a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4. Moc ehtimolliklarni Bernulli formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$P(X = 0) = C_4^0 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016,$$

$$P(X = 1) = C_4^1 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256,$$

$$P(X = 2) = C_4^2 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536,$$

$$P(X = 3) = C_4^3 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096,$$

$$P(X = 4) = C_4^4 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096$$

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni — binomial:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

(Tekshirish: $0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1$)

b) $P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 = 0,5888$

$$P(X > 3) = P(X = 4) = 0,4096$$

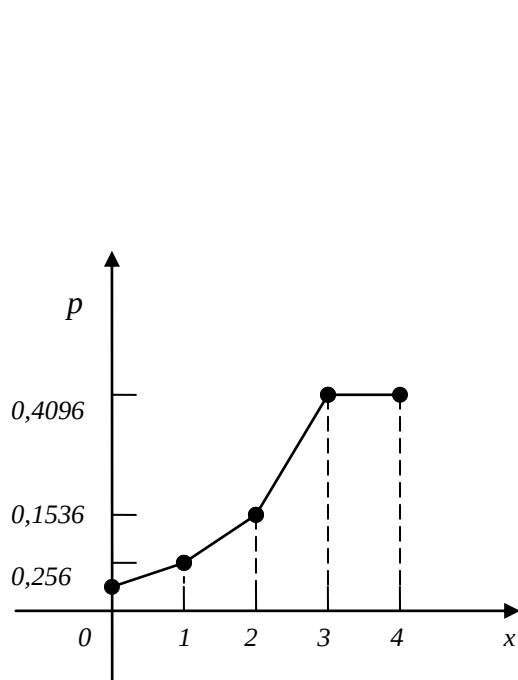
v) taqsimot ko'pburchagini yasaymiz (3-shakl).

g) $F(x)$ ning taqsimot qonunidan foydalanib, taqsimot funksiyasini tuzamiz.

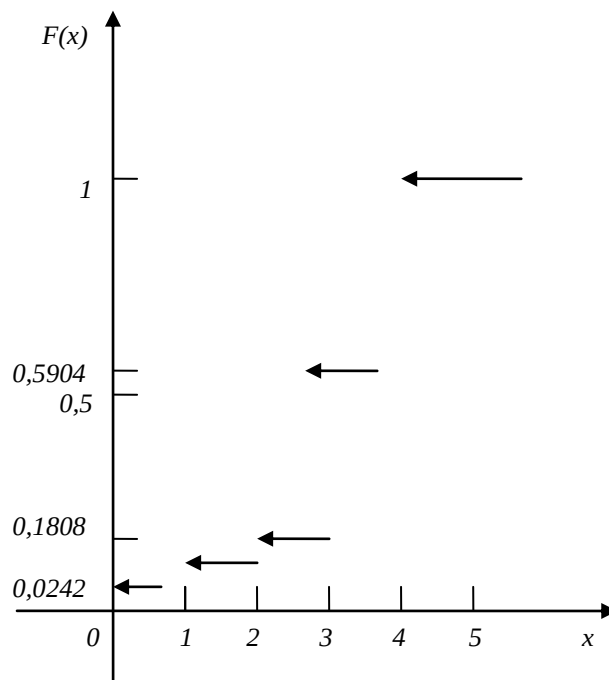
$x \leq 0$ uchun $F(x) = P(X < x) = 0$,

$0 < x \leq 1$ uchun $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0,0016$,

$1 < x \leq 2$ uchun $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0016 + 0,0256 = 0,0272$,



3 - shakl.



4 -

shakl.

$$2 < x \leq 3 \text{ uchun } F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 = 0,1808,$$

$$3 < x \leq 4 \text{ uchun } F(x) = P(X < x) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 = 0,5904,$$

$$X > 4 \text{ uchun } F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \\ + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 0,0016, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 0,0272, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \\ 0,1808, & \text{agar } 2 < x \leq 3, \\ 0,5904, & \text{agar } 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{agar } x > 4 \end{cases}$$

Taqsimot funksiyasi grafigini chizamiz (4-shakl).

d) $F(x) = P(X < x)$ bo'lgani uchun:

$$P(X < 3) = F(3) = 0,1808$$

4.2 dagi 3-xossaga ko'ra:

$$P(1 \leq X < 4) = F(4) - F(1) = 0,5904 - 0,0016 = 0,5888$$

4- mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. 6 ta detaldan iborat partiyada 4 ta standart detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olinadi. Olingan detallar ichiagi standart detallar sonidan iborat bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

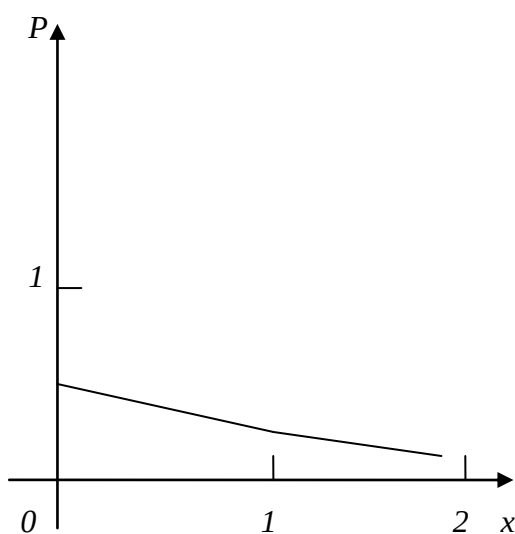
	x	0	1	2	3
J:	p	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Ikkita o'yin soqqasi birgalikda ikki marta tashlanadi:

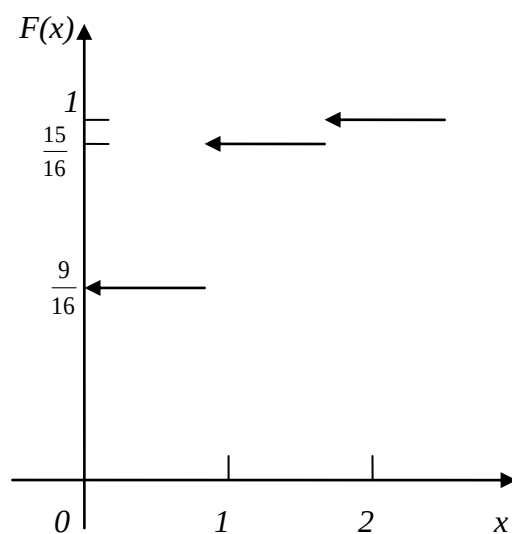
- ikkala o'yin soqqasida juft ochkolar tushishi sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping;
- taqsimot ko'pburchagini yasang;
- taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini chizing;
- $X < 2$, $1 \leq X \leq 2$ hodisalarning ehtimollikkarini toping.

a)

	X	0	1	2
J:	P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$



5 – shakl



6 - shakl

b) 5-shakl

v) 6-shakl

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \frac{9}{16}, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ \frac{15}{16}, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{agar } x > 2 \end{cases} \quad (6 - \text{shakl});$$

g) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{15}{16},$

$$P(1 \leq x \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{16}$$

3. Avtomat telefon stansiya 1000 ta telefon abonentiga xizmat ko'rsatadi. 5 minut davomida ATS ga abonentdan chaqiriq kelish ehtimolligi 0,005 ga teng. 5 minut davomida ATS ga kelgan chaqiriqlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping:

a) 5 minut davomida ATS ga hech bo'lmaganda bitta chaqiriq kelish ehtimolligi qanday?

b) 5 minut davomida ATS ga 4 tadan ko'p chaqiriq kelish ehtimolligi-chi?

	X	0	1	2	...	1000
J:	P	$\frac{1}{e^5}$	$\frac{5}{e^5}$	$\frac{5^2}{2e^5}$	...	$\frac{5^{1000}}{1000!e^5}$

a) 0,993;

b) 0,561,

4. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 1, \\ 0,25, & \text{agar } 1 < x \leq 3, \\ 0,4, & \text{agar } 3 < x \leq 4, \\ 0,8, & \text{agar } 4 < x \leq 5, \\ 1, & \text{agar } x > 5. \end{cases}$$

a) $X = 2$; $2 < X \leq 4$ hodisalarining ehtimolligini toping;

b) Berilgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

J: a) $P(X = 2) = 0$, $P(2 < X \leq 4) = 0,15$

b)

X	1	3	4	5
-----	---	---	---	---

$$| P | 0,25 | 0,15 | 0,4 | 0,2$$

5-§. Uzlusiz tasodifiy miqdorlar. Ayrin taqsimot qonunlari

5.1. Birorta chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor *uzlusiz tasodifiy miqdor* deyiladi.

Uzlusiz tasodifiy miqdor:

- 1) integral funksiya (taqsimot funksiya)si orqali,
- 2) ehtimolliklarning taqsimot zichligi (differensial funksiya) orqali berilishi mumkin.

Taqsimot funksiyasining ta'rif va xossalari 4-§ da keltirilgan.

X uzlusiz tasodifiy miqdor ehtimolliklarining *taqsimot zichligi* deb, taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning birinchi tartibli hosilasi bo'lgan $f(x)$ funksiyaga aytiladi.

X uzlusiz tasodifiy miqdorning (a, b) oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilishi ehtimolligi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Zichlik funksiyasi $f(x)$ ni bilgan holda ushbu formula bo'yicha taqsimot funksiyasini topish mumkin:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

5.2. Zichlik funksiyasining xossalari:

1. Zichlik funksiyasi manfiy emas, ya'ni $f(x) \geq 0$.
2. Zichlik funksiyasidan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha oraliqda olingan xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Xususan, agar tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda:

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

Uzlusiz tasodifiy miqdorning ba'zi taqsimot qonunlarini ko'rib chiqamiz.

5.3. Agar X uzlusiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari tegishli bo'lgan barcha qiymatlari tegishli bo'lgan oraliqda ehtimolliklarning taqsimot zichligi o'zgarmas, ya'ni (a, b) da $f(x) = C$ bo'lsa va bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ (C — o'zgarmas) bo'lsa, X tasodifiy miqdor taqsimoti *tekis* deyiladi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{agar } a < x \leq b, \\ 0, & \text{agar } x > b \end{cases}$$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ formula asosida taqsimot funksiyasini topish mumkin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a < x \leq b, \\ 1, & \text{agar } x > b \end{cases}$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning (a, b) oraliqqa tegishli (α, β) oraliqda tushish ehtimolligi

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

ga teng.

5.4. Agar zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(bu yerda a, σ — erkli parametrlar) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti *normal* deyiladi.

Normal taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimolligi ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \text{ bu yerda}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ — Laplas funksiyasi.}$$

Chetlanishning absolyut qiymati δ musbat son dan kichik bo‘lishi ehtimolligi

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

ga teng.

5.5. Agar zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0 \end{cases}$$

(bu yerda λ — erkli parametr) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti *ko‘rsatkichli* deyiladi:

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ formula asosida taqsimot funksiyasini topish mumkin:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

X uzluksiz tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimotga ega bo‘lsa, berilgan (α, β) oraliqqa tushish ehtimolligi uchun ushbu formula o‘rinli:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

Agar T — biror elementning to'xtovsiz ishlash davomiyligi, λ esa to'xtab qolishlar intensivligi (tezligi)ni ifodalovchi uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda bu elementning to'xtovsiz ishlash vaqti t ni taqsimot funksiyasi $F(t)=P(T < t)=1-e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$ bo'lgan (u t vaqt davomida elementning to'xtab qolish ehtimolligini aniqlaydi) ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblash mumkin.

Ishonchlilik funksiyasi $R(t)$ elementning t vaqt ichida to'xtovsiz ishlash ehtimolligini aniqlaydi:

$$R(t)=e^{-\lambda t}$$

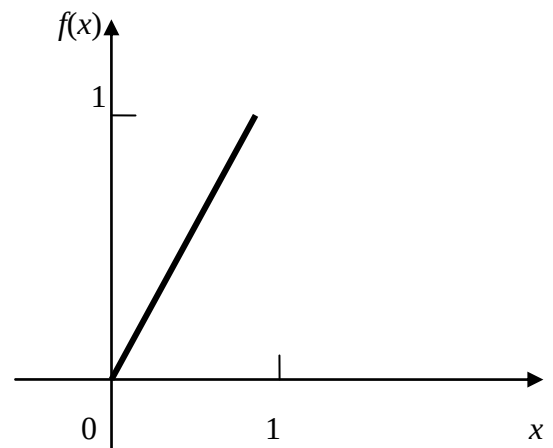
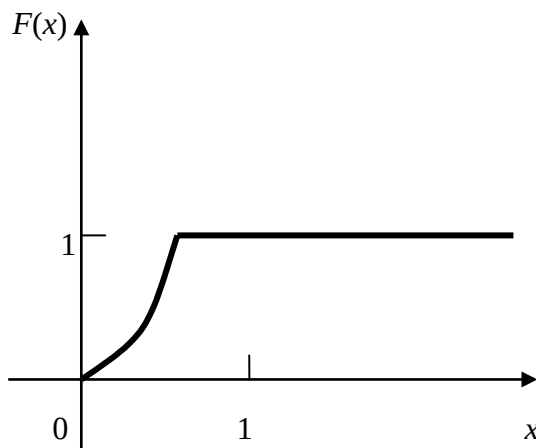
1- m i s o l. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasi orqali berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ x^2, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } x > 1 \end{cases}$$

a) 4 ta bog'liqmas sinov natijasida X uzluksiz tasodifiy miqdor rosa 3 marta (0,25; 0,75) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolligini toping;

b) zichlik funksiyasi $f(x)$ ni toping;

v) $F(x)$ va $f(x)$ larning grafiklarini chizing.



9-shakl

Y e ch i sh. a) Dastlab bitta sinov natijasida X uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimolligini topamiz:

$$P(0,25 < X < 0,75) = F(0,75) - F(0,25) = 0,75^2 - 0,25^2 = 0,5625 - 0,0625 = 0,5$$

Endi 4 ta bog'liqmas sinov natijasida X uzluksiz tasodifiy miqdor rosa 3 marta berilgan oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolligini topamiz. Buning uchun Bernulli formulasidan foydalanamiz:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5 = 4 \cdot 0,0625 = 0,25$$

Shunday qilib, $P_4(3) = 0,25$

b) $f(x) = F'(x)$, demak,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 2x, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{agar } x > 1 \end{cases}$$

b) 9-shakl.

2- m i s o l. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & \text{agar } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

berilgan. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping.

Y e ch i sh. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

Agar $x \leq \frac{\pi}{6}$ bo'lsa, $f(x) = 0$ bo'ladi, demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

Agar $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 \cdot dx + \int_{\pi/6}^x 3 \sin 3x dx = 0 - \cos 3x \Big|_{\pi/6}^x = -\left(\cos 3x - \cos \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 3x$$

Agar $x > \frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 \cdot dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \sin 3x dx + \int_{\pi/3}^x 0 \cdot dx = 0 - \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + 0 = \left(-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Shunday qilib,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \text{agar } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{agar } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

3 - m i s o l. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi Ox o'qida

$$f(x) = \frac{2C}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. O'zgarma C parametrni toping.

Y e ch i sh. Zichlik funksiyasi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ shartni qanoatlantirishi kerak.

Shuning uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2C}{e^x + e^{-x}} dx = 2C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 1,$$

bu yerdan $C = \frac{1}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}}$. Quyidagi aniqmas integralni qaraymiz:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \arctg e^x$$

Xosmas integralni hisoblashga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg e^x \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg e^a) + \\ &+ \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg e^b - \arctg 1) = \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$ Demak, $C = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$

J: $C = \frac{1}{\pi}$

4 – m i s o l. Bir soat ($0 \leq t \leq 1$, t birligi soatlarda hisoblangan vaqt) ichida bekatga faqat bitta avtobus kelib to'xtaydi. Vaqtning $t = 0$ paytida bekatga kelgan yo'lovchining avtobusni 10 minutdan ortiq kutmaslik ehtimolligi qanday?

Ye ch i sh. Bekatga $t = 0$ paytda kelgan yo'lovchining avtobusni kutish vaqtini $[0; 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin. Bu tekis taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{agar } x > 1 \end{cases}$$

$b - a = 1 - 0 = 1$ — tasodifiy miqdor X ning qiymatlari joylashgan $[0; 1]$ oraliqning uzunligi.

$\beta - \alpha = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ — qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar joylashgan $\left[0; \frac{1}{6}\right]$

oraliqning uzunligi. Shuning uchun

$$P\left(0 < X < \frac{1}{6}\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

J: $\frac{1}{6}$

5 – m i s o l. X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 2e^{-2x}, & \text{agar } x \geq 0 \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning $(0,3; 1)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. $P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41$

J: 0,41

6 – m i s o l. Elementning to‘xtovsiz ishlash ehtimolligi $f(t) = 0,02e^{-0,02t}$ ($t > 0$) ko‘rsatkichli qonun bo‘yicha taqsimlangan. Elementning to‘xtovsiz 50 soat ishlashi ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Ishonchlilik funksiyasi $R(t) = e^{-\lambda t}$ dan foydalansak,

$$R(50) = e^{-0,02 \cdot 50} = e^{-1} \approx 0,3679$$

bo‘ladi.

7 – m i s o l. X tasodifiy miqdor ehtimolliklar taqsimotining $a = 0$, $\sigma = 2$ parametrlari normal qonuniga bo‘ysunsin. X tasodifiy miqdorning $(-2; 3)$ oralig‘iga tushishi ehtimolligini aniqlang.

Y e ch i sh. Ushbu

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalansak:

$$P(-2 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) = \Phi(1,5) - \Phi(-1) = \Phi(1,5) + \Phi(1)$$

$\Phi(x)$ funksiya jadvalidan:

$$\Phi(1,5) = 0,43319, \Phi(1) = 0,34134$$

Demak,

$$P(-2 < X < 3) = 0,43319 + 0,34134 = 0,77453$$

J: 0,77453

8 – m i s o l. X tasodifiy miqdor normal qonun bo‘yicha taqsimlangan, taqsimotining a va σ parametrlari mos holda 20 va 10 ga teng. Absolyut qiymat bo‘yicha chetlanish uchdan kichik bo‘lish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ formuladan foydalanamiz. Shartga ko‘ra $\delta = 3$,

$a = 20$, $\sigma = 10$. Demak, $P(|X - 20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3)$. Jadvaldan $\Phi(0,3) = 0,1179$. Demak, izlanayotgan ehtimollik:

$$P(|X - 20| < 3) = 0,2358$$

5- mavzu bo‘yicha topshiriqlar

1. X tasodifiy miqdor $[0; \pi]$ kesmada $f(x) = A \sin x$, bu kesmadan tashqarida $f(x) = 0$ ehtimolliklar zichligiga ega.

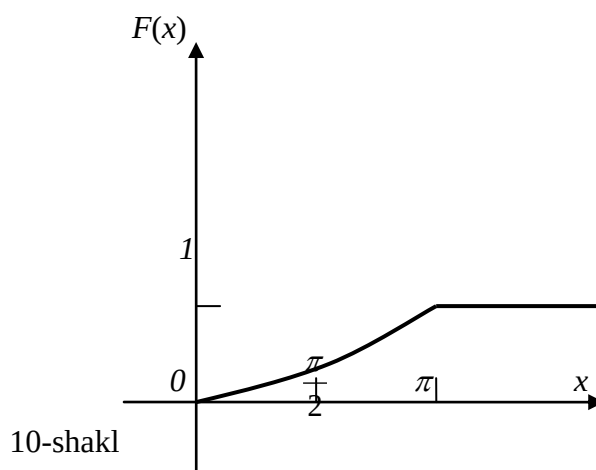
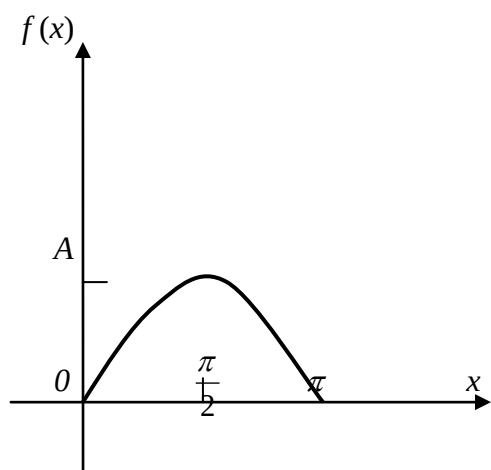
a) A ni aniqlang;

b) taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping;

v) $P\left(-\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ ehtimolliklarni toping;

g) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafigini chizing.

$$J: \quad a) A = \frac{1}{2}; \quad b) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \sin^2 \frac{x}{2}, & \text{agar } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{agar } x > \pi \end{cases} \quad v) \frac{3}{4}$$



10-shakl

g) 10-shakl.

2. Avtobuslar 5 minut oraliq bilan qatnaydilar. Bekatda avtobus kutish vaqti X tekis taqsimlangan deb,

a) $F(x)$ taqsimot funksiyasini;

b) ehtimolliklar zichligi $f(x)$ ni;

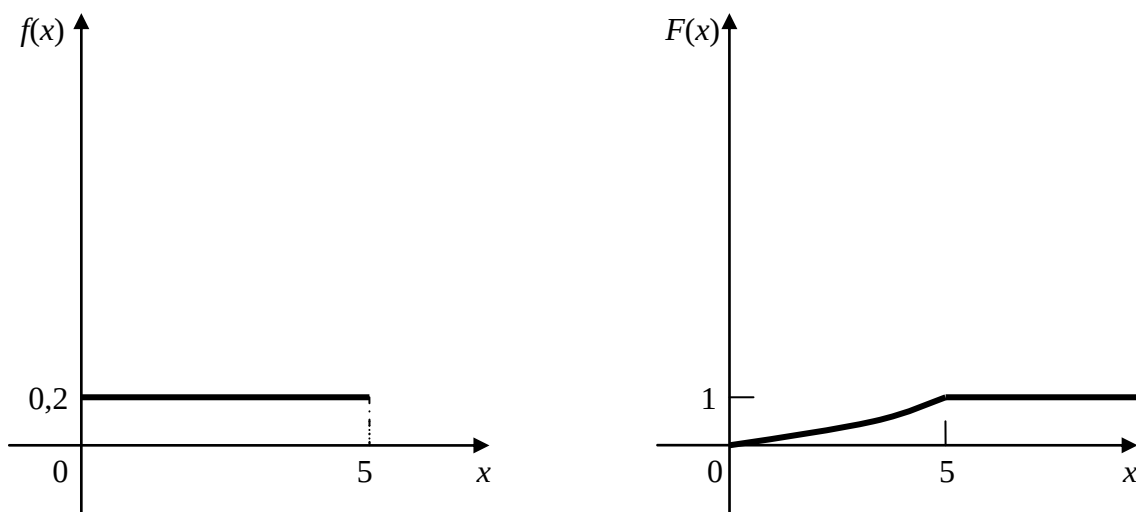
v) kutish vaqtining 2 minutdan oshmaslik ehtimolligini toping;

g) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizing.

$$J: \quad a) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 0,2x, & \text{agar } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{agar } x > 5 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 0,2, & \text{agar } 0 < x \leq 5, \\ 0, & \text{agar } x > 5 \end{cases}$$

v) $P(X \leq 2) = 0,4$

g) 11-shakl.



3. X tasodifiy miqdor ehtimolliklar taqsimotining parametrlari $a = 20$, $\sigma = 5$ bo'lgan normal qonuniga bo'ysunsin. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (15; 25) oraliqda joylashgan qiymat qabul qilish ehtimolligini toping. J: $P(15 < X < 25) = 0,6826$

4. Biror modda sistematik xatolarsiz tortiladi. Tortishdagi tasodifiy xatoliklar o'rta kvadratik chetlanishi $\sigma = 20$ g bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi. Tortish absolyut qiymat bo'yicha 10 g dan oshmaydigan xatolik bilan bajarilishi ehtimolligini toping.

J: $P(|X| < 10) = 2\Phi(0,5) = 0,383$

5. Televizorning buzilmay ishlashi ehtimolligi ushbu ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan:

$$f(x) = 0,002e^{-0,002t} (t > 0)$$

Televizorning 1000 soat buzilmay ishlashi ehtimolligini toping.

J: $R(1000) = e^{-2} \approx 0,1359$

6-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi va dispersiyasi.

6.1. X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(X)$ deb uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini ularning ehtimolliklariga ko'paytmalari yig'indisiga teng songa aytiladi.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Agar ixtiyoriy x va y sonlar hamda X va Y tasodifiy miqdorlar uchun

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, X va Y tasodifiy miqdorlar *bog'liqmas tasodifiy miqdorlar* deyiladi.

Matematik kutilishning xossalarini keltiramiz:

1. O'zgaras miqdorning matematik kutilishi o'zgarasning o'ziga teng:

$$M(C) = C$$

2. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi qo'shiluvchilar matematik kutilishlarining yig'indisiga teng:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

3. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi ko'paytuvchilar matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

4. O'zgaras ko'paytuvchi matematik kutilish belgisi oldiga chiqariladi:

$$M(CX) = CM(X),$$

C – o'zgaras son.

6.2. X tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi.

Agar $[X - M(X)]$ tasodifiy miqdorning chetlanishi bo'lsa, u holda

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Amalda boshqa formuladan foydalanish qulay:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dispersiyaning xossalarini keltiramiz:

1. O'zgarasning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0$$

2. O'zgaras ko'paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad C - \text{o'zgaras son}$$

3. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayirmasi) ning dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

6.3. 1. Diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimoti uchun

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q$$

2. Puasson taqsimoti uchun:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda$$

6.4. Uzluksiz tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarini butun son o'qida qabul qilsin, $f(x)$ uning zichlik funksiyasi bo'lsin.

Agar $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ integral mavjud bo'lsa, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ integral X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deyiladi, ya'ni

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Agar mumkin bo'lgan barcha qiymatlar (a, b) oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

I z o h. Matematik kutilishning diskret tasodifiy miqdorlar uchun xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli.

6.5. X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qida yotsa, uning dispersiyasi quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

yoki

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari (a, b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

yoki

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

I z o h. Dispersiyaning diskret tasodifiy miqdorlar uchun xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli.

6.6. Tasodifiy miqdorning *o‘rta kvadratik chetlanishi* deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

6.7. Matematik kutilish va dispersiya:

1) tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdor uchun:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

2) ko‘rsatkichli taqsimot uchun:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2};$$

3) normal taqsimot uchun:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2$$

1- m i s o l. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

Y e ch i sh. Tasodifiy miqdor diskret bo‘lgani uchun 6.1 va 6.2 dagi formulalarga ko‘ra:

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,02 = 1,32$$

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,08 + 16 \cdot 0,02 = 2,64$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2,64 - (1,32)^2 = 2,64 - 1,7424 = 1,8976$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 1,3775$$

2- m i s o l. Ikkita bog‘liqmas sinovda A hodisaning ro‘y berishlar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping, bunda hodisaning bu sinovlarda ro‘y berish ehtimolliklari teng va $M(X) = 0,9$ ekani ma’lum.

Y e ch i sh. X diskret tasodifiy miqdor binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan, shuning uchun $M(X) = n \cdot p$. Shartga ko‘ra $M(X) = 0,9$, $n = 2$. Demak, $2p = 0,9$, $p = 0,45$,
 $q = 1 - 0,45 = 0,55$.

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495$$

$$\text{Shunday qilib, } D(X) = 0,495$$

3 – m i s o l. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & \text{agar } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikallari – $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

Y e ch i sh.

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cdot 3 \sin 3x dx =$$

$$= 3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cdot \sin 3x dx = 3 \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos 3x dx \right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} u = x \\ dv = \sin 3x dx \end{matrix} \Big|_{\sigma = -\frac{1}{3} \cos 3x}^{du = dx} \right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\pi}{3} \cos \pi - \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} \right) + 3 \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= - \left(-\frac{\pi}{3} - 0 \right) + \frac{1}{3} \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi - 1}{3} \approx 0,7133$$

$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = 3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx - \left(\frac{\pi - 1}{3} \right)^2$$

Keyingi integralni hisoblab olamiz:

$$3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right) =$$

$$= 3 \left[-x^2 \cdot \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{2}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cos 3x dx \right] = -x^2 \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} +$$

$$+ 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cos 3x dx = - \left(\frac{\pi^2}{9} \cos \pi - \frac{\pi^2}{36} \cos \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} x \sin 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 3x dx \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 3x dx \Big|_{v = \frac{1}{3} \sin 3x} \end{array} \right) = \frac{\pi^2}{9} + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} \sin \pi - \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9} (-1) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9} (-1) = \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9};$$

$$D(X) = \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9} - \left(\frac{\pi - 1}{3} \right)^2 = \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9} - \frac{\pi^2 - 2\pi + 1}{9} =$$

$$= \frac{\pi^2 - \pi - 2 - \pi^2 + 2\pi - 1}{9} = \frac{\pi - 3}{9} \approx 0,0155$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,0155} \approx 0,0155$$

4 - m i s o l. Tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a-l, \\ \frac{1}{2l}, & \text{agar } a-l < x \leq a+l, \\ 0, & \text{agar } x > a+l \end{cases}$$

$M(X)$ va $D(X)$ ni toping.

Y e ch i sh. 6.8 dagi formulalardan foydalanamiz:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{demak,} \quad M(X) = \frac{a-l+a+l}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \text{demak,}$$

$$D(X) = \frac{(a+l-a-l)^2}{12} = \frac{(2l)^2}{12} = \frac{4l^2}{12} = \frac{l^2}{3}$$

Shunday qilib, $M(X) = a$; $D(X) = \frac{l^2}{3}$

5 – m i s o l. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, matematik kutilishi $a=10$ ga teng. X tasodifiy miqdorning $(10; 20)$ oraliqqa tushish ehtimolligi $0,3$ ga teng bo‘lsa, uning $(0; 10)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Normal egri chiziq (Gauss egri chizig‘i) $x = a = 10$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun yuqoridan normal egri chiziq bilan, pastdan esa $(0; 10)$ hamda $(10; 20)$ oraliqlar bilan chegaralangan yuzlar bir-biriga teng. Bu yuzlar son jihatdan X tasodifiy miqdorning tegishli oraliqlarga tushish ehtimolliklariga teng. Shuning uchun:

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3$$

6 – m i s o l. Zichlik funksiyasi $f(x)=10e^{-10x} (x \geq 0)$ bilan berilgan ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi, o‘rta kvadratik chetlanishini toping.

Y e ch i sh. $\lambda = 10$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda} = 0,1$$

7 – m i s o l. Taqsimot funksiyasi $F(x)=1-e^{-0,1x} (x > 0)$ bilan berilgan ko‘rsatkichli taqsimotning $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larini toping.

Y e ch i sh. $\lambda=0,1$,

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10,$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,01} = 100, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = 10$$

6 - mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. X tasodifiy miqdor — o‘yin soqqasini bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

J: $M(X) = 3,5$; $D(X) = 2,92$; $\sigma(X) = 1,71$

2. Nishonga qarata har bir otishda tegish ehtimolligi $p = 0,8$ bo‘lgan 4 ta o‘q uziladi (bog‘liqmas holda). Nishonga tegishlar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

J: $M(X) = 3,2$; $D(X) = 0,64$; $\sigma(X) = 0,8$

3. X uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0,5 \cos x, & \text{agar } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

J: $M(X) = 0$; $D(X) \approx 0,4649$, $\sigma(X) \approx 0,68$

4. X uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2, \\ 0,5 \cos x, & \text{agar } 2 < x \leq 4, \\ 0, & \text{agar } x > 4 \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

J: $M(X) = 3$; $D(X) = \frac{1}{3}$; $\sigma(X) = 0,68$

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{agar } x \geq 0 \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larni toping.

J: $M(X) = 0,2$; $D(X) = 0,04$; $\sigma(X) = 0,2$

6. Agar $M(X) = 3$, $D(X) = 16$ ekanligi ma'lum bo'lsa, normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

$$J: f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$$

7-§. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti. Tasodifiy argument funksiyasi.

7.1. Agar X tasodifiy miqdorning har bir mumkin bo'lgan qiymatiga Y tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda Y ni tasodifiy argument X ning funksiyasi deyiladi va $Y = \varphi(X)$ ko'rinishda yoziladi.

1. X — diskret tasodifiy miqdor, x_k — uning mumkin bo'lgan qiymatlari bo'lsin, u holda:

a) agar $Y = \varphi(X)$ — monoton funksiya bo'lsa, u holda Y tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $y_k = \varphi(x_k)$ tenglikdan topilib, X va Y larning mos qiymatlari ehtimolliklari teng bo'ladi, ya'ni

$$P(Y = y_k) = P(X = x_k)$$

b) agar $Y = \varphi(X)$ — monoton bo'lmagan funksiya bo'lsa, X ning turli qiymatlariga Y ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin. Bu holda Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topish uchun X ning Y bir xil qiymatlar qabul qiladigan mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini qo'shish kerak.

2. X — uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lsin, u holda:

a) agar $y = \varphi(x)$ — monoton, differensiallanuvchi funksiya bo'lib, teskari funksiyasi

$x = \psi(y)$ bo'lsa, Y tasodifiy miqdorning $g(y)$ zichlik funksiyasi quyidagi tenglikdan topiladi:

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$$

b) agar $y = \varphi(x)$ — tasodifiy miqdor X ning mumkin bo'lgan qiymatlari oralig'ida monoton bo'lmagan funksiya bo'lsa, u holda bu oraliqni $\varphi(x)$ funksiya monoton bo'ladigan oraliqlarga bo'lish va har bir monotonlik oralig'I uchun zichlik funksiyasini topish, so'ngra $g(y)$ ni yig'indi shaklida tasvirlash kerak, ya'ni

$$g(y) = \sum g_k(y)$$

7.2. Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan har bir juftiga Z tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan bitta qiymati mos kelsa, Z miqdor ikkita X va Y tasodifiy argumentlarning funksiyasi deyiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$Z = \varphi(X, Y)$$

1. X va Y — diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsin.

$Z = X + Y$ funksiyaning taqsimotini topish uchun Z ning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini topish kerak, buning uchun X ning har bir mumkin bo'lgan qiymatini Y ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlariga qo'shib chiqish kifoya. Z ning topilgan mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

2. X va Y — uzluksiz bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsin va hech bo'lmaganda ulardan birining zichlik funksiyasi $(-\infty, +\infty)$ oralig'ida bitta formula bilan berilgan bo'lsin. U holda $Z = X + Y$ yig'indining zichlik funksiyasi quyidagi formula orqali topiladi:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x) dx$$

yoki

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y) dy$$

bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(y)$ — X va Y ning zichlik funksiyalari.

I z o h. Agar argumentlarning mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmasa, yuqoridagi formulalar quyidagicha yoziladi:

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$$

yoki

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y) \cdot f_2(y) dy$$

1 – m i s o l. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

a) $Y = 2X + 1$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping;

b) taqsimot funksiyasi $G(y)$ ni toping.

Y e ch i sh. a) $Y = 2X + 1$ tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz:

$$y_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \quad y_2 = 2 \cdot 6 + 1 = 13, \quad y_3 = 2 \cdot 10 + 1 = 21$$

$Y = \varphi(x) = 2x + 1$ funksiya monoton o'suvchi, shuning uchun x ning turli mumkin bo'lgan qiymatlariga Y ning turli qiymatlari mos keladi. Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz:

$$P(Y = 7) = P(X = 3) = 0,2$$

$$P(Y = 13) = P(X = 6) = 0,1$$

$$P(Y = 21) = P(X = 10) = 0,7$$

Y ning taqsimot qonunini yozaniz:

X	7	13	21
P	0,2	0,1	0,7

c) taqsimot funksiyasi $G(y)$ ni topamiz.

$$G(7) = P(Y < 7) = 0$$

$$G(13) = P(Y < 13) = P(Y = 7) = 0,2$$

$$G(21) = P(Y < 21) = P(Y = 7) + P(Y = 13) = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

$$y > 21, \quad G(y) = P(Y \leq 21) = P(Y = 7) + P(Y = 13) + P(Y = 21) = 0,2 + 0,1 + 0,7 = 1$$

Shunday qilib,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } y \leq 7, \\ 0,2, & \text{agar } 7 < y \leq 13, \\ 0,3, & \text{agar } 13 < y \leq 21 \\ 1, & \text{agar } y > 21 \end{cases}$$

2- m i s o l. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga ega:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

a) $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} X\right) + 1$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

b) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ larni hisoblang.

Y e ch i sh. Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz:

$$y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + 1 = 1, \quad y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + 1 = 2,$$

$$y_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + 1 = 1, \quad y_4 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) + 1 = 0$$

Ko'rinib turibdiki, X ning turli qiymatlariga Y ning bir xil qiymatlari mos kelyapti.

0, 1, 2 — Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari. Bu qiymatlarga mos ehtimolliklarni topamiz:

$$P(Y = 0) = P(X = 3) = 0,2$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0) + P(X = 2) = 0,1 + 0,4 = 0,5,$$

$$P(Y = 2) = P(X = 1) = 0,3$$

Y ning izlanayotgan taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

X	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

$$b) M(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = 1,7$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 - 1,7^2 = 0,81$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,81} = 0,9,$$

$$M(Y) = 0 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = 1,1,$$

$$D(Y) = 0 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3 - 1,1^2 = 0,49,$$

$$\sigma(Y) = 0,7$$

3- m i s o l. X tasodifiy miqdor $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda tekis taqsimlangan. $Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $g(y)$ ni toping.

Y e ch i sh. X tasodifiy miqdor $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda tekis taqsimlangan, shuning uchun X tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi $f(x)$ (zichlik funksiyasi) bu oraliqda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

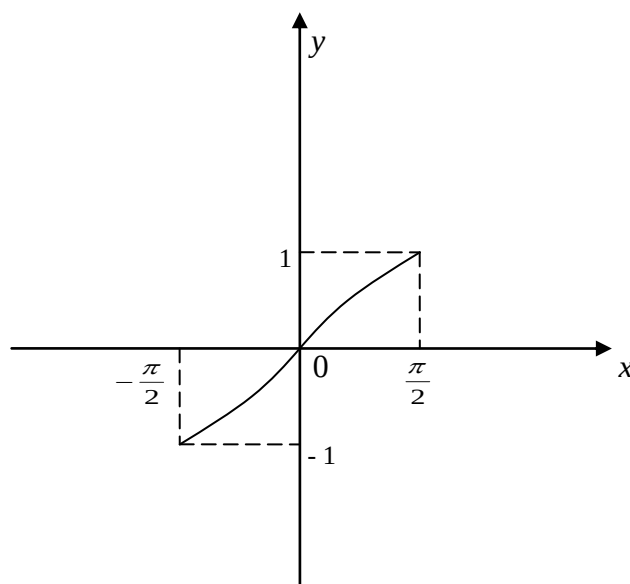
$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi}$$

bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ bo'ladi. $Y = \sin X$ funksiya $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda monoton, demak, teskari funksiyaga ega, ya'ni:

$$x = \psi(y) = \arcsin y$$

$\psi(y)$ hosilani topamiz:

$$\psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (12\text{-shakl})$$



12 - shakl

$g(y)$ zichlik funksiyani $g(y) = f[\psi(y)] \times |\psi'(y)|$ formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}$$

$y = \sin x$ va $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lgani uchun: $-1 < y < 1$. Shunday qilib $(-1, 1)$ oraliqda

$$g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}$$

bu oraliqdan tashqarida $g(y) = 0$.

4 – m i s o l. X tasodifiy miqdorning integral funksiyasi (taqsimot funksiyasi) $F(x)$ berilgan. $Y = -\frac{2}{3}X + 2$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $G(y)$ ni toping.

Y e ch i sh. Taqsimot funksiyasining ta'rifiga ko'ra: $G(y) = P(Y < y)$. Biroq, $y = -\frac{2}{3}x + 2$ — kamayuvchi funksiya, shuning uchun $Y < y$ tengsizlik $X > x$ tengsizlik bajarilgandagina o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x)$$

$X < x$ va $X > x$ qarama-qarshi hodisalar, shuning uchun

$$P(X < x) + P(X > x) = 1 \text{ va } P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$$

Shunday qilib, $G(y) = 1 - F(x)$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ tenglamadan x ni topamiz:

$$x = \frac{3}{2}(2 - y)$$

Uzil – kesil quyidagiga ega bo'lamiz.

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{3}{2}(2 - y)\right]$$

5 – m i s o l. X tasodifiy miqdor $(0; \pi)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu oraliqdan tashqarida $f(x) = 0$. $Y = X^2$ ning zichlik funksiyasi $g(y)$ ni va $M(Y)$ matematik kutilishni toping.

Y e c h i s h. $y = x^2 = \varphi(x)$ funksiya $(0, \pi)$ oraliqda qat'iy o'suvchi bo'lgani uchun:

$$g(y) = f[\varphi(y)] \cdot |\varphi'(y)|$$

$$\varphi(y) = \sqrt{y} \quad y = x^2 \text{ funksiyaga teskari funksiya,}$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad |\varphi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$g(y) = \frac{1}{2} \sin \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sin \sqrt{y}}{4\sqrt{y}}$$

$y = x^2$ va $0 < x < \pi$ bo'lgani uchun $0 < y < \pi^2$, demak, Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari $(0; \pi^2)$ oraliqda joylashgan.

$$M(Y) = \int_0^{\pi^2} y \cdot g(y) dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi^2} y \cdot \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$\left. \begin{matrix} y=t^2 \\ dy=2t dt \end{matrix} \right|_{y=0, t=0}^{y=\pi^2, t=\pi}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} t^2 \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt = \frac{1}{2} (\pi^2 - 4)$$

6 – m i s o l. X va Y bog'liqmas diskret tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimot qonunlari orqali berilgan:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Y e c h i s h. Z ning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz:

$$z_1 = 1 + 2 = 3; z_2 = 1 + 4 = 5; z_3 = 3 + 2 = 5; z_4 = 3 + 4 = 7$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimolliklarini topamiz.

X va Y argumentlar bog'liqmas (erkli) bo'lgani uchun $X = 1$ va $Y = 2$ hodisalar ham bog'liqmas. Shuning uchun $P(Z = 3) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$. Xuddi shunday:

$$P(Z = 5) = P(X = 1) \cdot (Y = 4) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12,$$

$$P(Z = 5) = P(X = 3) \cdot (Y = 2) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42,$$

$$P(Z = 7) = P(X = 3) \cdot (Y = 4) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

$Z = z_2 = 5$ va $Z = z_3 = 5$ birgalikda bo'lmagan hodisalar, ularning ehtimolliklari qo'shiladi, ya'ni

$$0,12 + 0,42 = 0,54$$

Shunday qilib, izlanayotgan taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

7 – m i s o l. X va Y bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar zichlik funksiyalari bilan berilgan:

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2} \quad (0 \leq y < \infty)$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Y e ch u sh. Argumentlarning mumkin bo‘lgan qiymatlari manfiy emas. Quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_1(x) \cdot f_2(z-x) dx = \\ &= \int_0^z e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{-(z-x)/2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-x} \cdot e^{\frac{z-x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \cdot 2 \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} d\left(-\frac{x}{2}\right) = \\ &= -e^{z/2} \cdot e^{-x/2} \Big|_0^z = -e^{-z/2} (e^{-z/2} - 1) = e^{-z/2} (1 - e^{-z/2}) \end{aligned}$$

Demak, $(0; \infty)$ oraliqda

$$g(z) = e^{-z/2} [1 - e^{-z/2}]$$

bu oraliqdan tashqarida $g(z) = 0$

7 - mavzu bo‘yicha topshiriqlar

1. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Y tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping:

a) $Y = X^2 + 1;$

b) $Y = 2^X$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ larni hisoblang.

J: $M(X) = 0,1$; $D(X) = 1,29$; $\sigma(X) \approx 1,136$

a)

Y	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

b)

Y	0,25	0,5	1	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

a) $M(Y) = 2,3$; $D(Y) = 2,01$; $\sigma(Y) \approx 1,42$;

b) $M(Y) = 1,425$; $D(Y) \approx 1,13$; $\sigma(Y) \approx 1,06$.

2. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,5	0,2

$Y = |X|$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $G(y)$ ni toping.

J:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } y \leq 0, \\ 0,2, & \text{agar } 0 < y \leq 1 \\ 0,8, & \text{agar } 1 < y \leq 2, \\ 1, & \text{agar } y > 2 \end{cases}$$

3. X tasodifiy miqdor $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda tekis taqsimlangan. $Y = \cos X$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $g(y)$ ni toping.

J: $(0; 1)$ oraliqda: $g(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}$; bu oraliqdan tashqarida $g(y) = 0$.

4. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ berilgan. $Y = -5X + 1$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $G(y)$ ni toping.

J: $C(y) = 1 - F\left[\frac{1}{5}(1-y)\right]$

5. X tasodifiy miqdor $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda $f(x) = \cos x$, bu oraliqdan tashqarida $f(x) = 0$ bo'lgan zichlik funksiyasi bilan berilgan. $Y = X^2$ funksiyaning matematik kutilishini toping.

J: $M(Y) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$

6. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlari bilan berilgan:

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

J:

Z	11	12	13	14	17	18
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

7. X va Y bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar o‘zlarining zichlik funksiyalari bilan berilgan:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3} (0 \leq x < \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5} (0 \leq y < \infty)$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$J: g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2z/5}(1 - e^{-2z/5}), & \text{agar } z \geq 0 \\ 0, & \text{agar } z < 0 \end{cases}$$

8. X va Y bog‘liqmas tasodifiy miqdorlarning har biri $[0; 2\pi]$ kesmada tekis taqsimlangan. $Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$J: g(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z \leq 0, \\ 0,25z, & \text{agar } 0 < z < 2, \\ 1 - 0,25z, & \text{agar } 2 < z \leq 4, \\ 0, & \text{agar } z > 4 \end{cases}$$

8-§. Ikki o‘lchovli bog‘liq tasodifiy miqdorlar.

Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti.

8.1. Mumkin bo‘lgan qiymatlari (x, y) sonlar jufti bilan aniqlanuvchi (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi *ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tashkil etuvchilari X va Y diskret bo‘lgan ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor *uzluksiz* deyiladi.

Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimolliklari orasidagi moslik ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* deyiladi.

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullarning biri orqali berilishi mumkin:

a) mumkin bo‘lgan qiymatlar va ularning mos ehtimolliklari yozilgan jadval ko‘rinishida

X Y	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
y_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

$$P_{ij} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \quad \text{va} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$$

b) analitik usulda (integral funksiya ko‘rinishida).

8.2. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimotining *integral funksiyasi* deb

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

funksiyaga aytiladi.

Integral funksiyaning asosiy xossalari.

$$1. 0 \leq F(x, y) \leq 1$$

2. Integral funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamaymaydigan funksiyadir:

$$\text{agar } x_2 > x_1 \text{ bo‘lsa, } F(x_2, y) \geq F(x_1, y),$$

$$\text{agar } y_2 > y_1 \text{ bo‘lsa, } F(x, y_2) \geq F(x, y_1),$$

$$3. F(-\infty, y) = 0, \quad F(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$F(x, -\infty) = 0, \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4. $y = +\infty$ da $F(x, y)$ integral funksiya X tashkil etuvchining integral funksiyasiga aylanadi:

$$F(x, +\infty) = F_1(x)$$

$x = +\infty$ da $F(x, y)$ integral funksiya Y tashkil etuvchining integral funksiyasiga aylanadi:

$$F(+\infty, y) = F_2(y)$$

Quyidagi formula o‘rinli

$$F(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

8.3. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning *zichlik funksiyasi* deb integral funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilaga aytiladi:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Zichlik funksiyaning bilgan holda ushbu formula bo‘yicha integral funksiyaning topish mumkin:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

$f(x, y)$ zichlik funksiyaga ega tasodifiy nuqta (X, Y) ning D sohaga tushish ehtimolligi ushbu tenglik orqali aniqlanadi:

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$1. f(x, y) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Agar (X, Y) ning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari chekli D sohaga tegishli bo‘lsa, 2- xossa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = 1$$

8.4. Ikki o'lovli diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari: 1. Sistemani tashkil etuvchi X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i p_{ij}$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlaridan $M(X)$ va $M(Y)$ ni quyidagi formulalar orqali topish mumkin:

$$M(X) = \sum_{k=1}^m x_k p_k$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^m y_i p_i$$

2. X va Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari ushbu formulalaridan topiladi:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (x_i - M(X))^2,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (y_i - M(Y))^2$$

Dispersiyalarni hisoblashda quyidagi formulalardan ham foydalanish mumkin:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2$$

3. X, Y diskret tasodifiy miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

8.5. Ikki o'lovli uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari: 1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi ushbu formula bo'yicha hisoblanadi:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dx dy,$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dx dy$$

bu yerda $f(x, y)$ – zichlik funksiya.

2. Sistemaga kiruvchi X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2, \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(Y)]^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2 \end{aligned}$$

bu yerda $f(x, y)$ – zichlik funksiya.

4. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishlari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

8.6. Tasodifiy miqdorlar sistemalari nazariyasida *korrelyatsiya momenti* (kovariatsiya)

K_{xy} muhim rol o'ynaydi. Diskret tasodifiy miqdorlar uchun:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_j - M(X))(y_i - M(Y)) p_{ij}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dx dy$$

Korrelyatsiya momentini yana quyidagicha yozish mumkin:

$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X)M(Y)$, bu yerda

$$M(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_j y_i p_{ij}$$

uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun esa

$$M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$$

Korrelyatsiya momentining asosiy xossasi: agar X va Y — bog'liqmas (erkli) bo'lsa,

$K_{xy} = 0$.

8.7. X va Y tasodifiy miqdorning *korrelyatsiya koeffitsienti* deb

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

songa aytiladi.

Korrelyatsiya koeffitsiyentining xossalari:

1. Agar X va Y — bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $r_{xy} = 0$.
2. r_{xy} — o'lchamsiz kattalik (miqdor), shu bilan birga $|r_{xy}| \leq 1$.

3. Agar $Y=AX+B$, bu yerda A va B — o'zgarmas sonlar bo'lsa, $|r_{xy}| = 1$.

8.8. $f(x, y)$ zichlik funksiyaga ega bo'lgan (X, Y) sistema uchun X va Y bog'liq bo'lmasa

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

bo'ladi, bu yerda mos holda $f_1(x)$ — X ning, $f_2(y)$ — Y ning zichlik funksiyasi.

8.9. Ikkita bog'liq X va Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi uchun quyidagi formula o'rinli:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}$$

Xususiyl holda, agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

1 – m i s o l. Diskret ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Tashkil etuvchi X va Y miqdorlarning taqsimot qonunlarini toping.

Y e c h i sh. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz.

Buning uchun ehtimolliklarni «ustun bo'yicha» qo'shib chiqamiz:

$$P(X = 3) = 0,17 + 0,10 = 0,27,$$

$$P(X = 10) = 0,13 + 0,30 = 0,43,$$

$$P(X = 12) = 0,25 + 0,05 = 0,30$$

Demak,

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,30

— tashkil etuvchi X ning taqsimot qonuni.

$$\text{T e k sh i r i sh. } 0,27 + 0,43 + 0,30 = 1$$

Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz, buning uchun ehtimolliklarni «satr bo'yicha» qo'shib chiqamiz:

$$P(Y = 4) = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55,$$

$$P(Y = 5) = 0,10 + 0,30 + 0,05 = 0,45$$

Tashkil etuvchi Y ning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

Y	4	5
P	0,55	0,45

$$\text{T e k sh i r i sh. } 0,55 + 0,45 = 1$$

2 – m i s o l. Tasodifiy miqdorlar sistemasi (X, Y) ning taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

$M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy} larni toping.

Y e c h i s h.

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3},$$

$$M(Y) = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$

X va Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyasini hisoblash uchun (X, Y) miqdorlar sistemasidan (X, Y) miqdorlar sistemasiga o'tamiz, bu yerda

$$\dot{X} = X - M(X), \quad \dot{Y} = Y - M(Y),$$

$$\dot{X} = X - \frac{7}{3}, \quad \dot{Y} = Y - \frac{11}{6}$$

Jadval tuzamiz:

$X \backslash Y$	-5/6	1/6	7/6
-4/3	1/18	1/12	1/36
-1/3	1/9	1/6	1/18
2/3	1/6	1/4	1/12

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \\ + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9}$$

$$D(Y) = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \\ + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6}$$

(X, Y) sistema taqsimoti jadvalidan foydalanib, K_{xy} ni topamiz.

$$K_{xy} = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \\ + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108} + \frac{1}{72} + \frac{7}{216}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{54} + \right. \\ \left. + \frac{1}{36} + \frac{7}{108}\right) \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{24} + \frac{7}{12}\right) = \frac{4}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

$K_{xy} = 0$ bo'lgani uchun korrelyatsiya koeffitsiyenti ham nolga teng bo'ladi:
 $r_{xy} = 0$.

3 – m i s o l. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x+y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quyidagilarni toping: a) a koeffitsientni; b) $M(X)$, $M(Y)$ ni; v) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ ni; g) r_{xy} ni.

Y e ch i sh. a) a koeffitsiyentni

$$a \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx = 1$$

tenglamadan topamiz.

$$\begin{aligned}
 a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx &= -a \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx = \\
 &= a \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = a (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = 2a, \quad a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

D sohada $f(x,y) = \frac{1}{2} \sin(x+y)$

$$M(X) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dy dx = \frac{1}{12} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy =$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x \right] x dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x (\sin x + \cos x) dx = \frac{1}{2} x (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dy dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x + \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
 \text{v)} &= \frac{1}{2} x^2 (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x (\sin x - \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} + x (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \\
 &- \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 \\
 \sigma^2(Y) &= \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g) \quad K_{xy} &= M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dy dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} y \sin(x+y) dy - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[y \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy \right] x dx - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin x \right] dx - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(-\frac{\pi}{2} \sin x - \cos x + \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\pi}{2} \sin x + \cos x - \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} x \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \cos x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} - \\
&\quad - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16} \\
r_{xy} &= \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -\frac{0,73688}{3,00232} \approx -0,2454
\end{aligned}$$

8 - mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. Diskret ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimot qonuni orqali berilgan:

$X \backslash Y$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Tashkil etuvchi X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini toping.

J:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

2. Ikkita tasodifiy miqdorlar sistemasi (X, Y) ning taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	20	40	60
------------------	----	----	----

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$			
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Quyidagilarni toping:

a) λ koefitsiyentini; b) $M(X)$, $M(Y)$ ni; v) $D(X)$, $D(Y)$ ni; g) r_{xy} ni.

J: a) $\lambda = 1/20$; b) $M(X) = 22$; $M(Y) = 41$; v) $\sigma^2(X) = 56$; $\sigma^2(Y) = 259$; g) $r_{xy} = 0,56$

3. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi zichlik funksiya orqali berilgan:

$$f(x, y) = \begin{cases} axy, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

D soha $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak.

Quyidagilarni toping: a) a koefitsiyentini; b) $M(X)$, $M(Y)$; v) $D(X)$, $D(Y)$; g) r_{xy}

J: a) $a = 24$; b) $M(X) = M(Y) = \frac{2}{5}$; v) $D(X) = D(Y) = \frac{1}{25}$; g) $r_{xy} = -\frac{2}{3}$

4. Ikki o'ldirli $(X; Y)$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2 (1 + y^2))}$$

Quyidagilarni toping: a) $P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$ ni;

b) taqsimot funksiyasi $F(x, y)$ ni;

v) har bir X va Y tasodifiy miqdorning zichlik funksiyalarini.

J: a) $P = \frac{1}{16}$; b) $F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctg y + \frac{\pi}{2} \right)$;

v) $f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $f_1(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

9-§. Variasion qator uchun poligon va gistogramma. Tanlanmaning asosiy sonli xarakteristiklari.

9.1. Tekshirilayotgan alomat bo'yicha o'rganiladigan barcha obektlar to'plami *bosh to'plam* deyiladi. *Tanlanma to'plam* yoki *tanlanma* deb tekshirish uchun olingan obektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam (tanlanma yoki bosh to'plam) *hajmi* deb bu to'plamdagi obektlar soniga aytiladi.

Biror X belgini (diskret yoki uzluksiz) miqdor (son) jihatidan o'rganish uchun bosh to'plamdan n hajmli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlanma ajratilgan bo'lsin.

X belgining kuzatiladigan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari *variantalar* deyiladi.

Variantalarning o'sib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi *variatsion qator* deyiladi.

Tanlanmaning *statistik taqsimoti* deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan iborat jadvalga aytiladi:

X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k	yoki	X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k		W_i	n_1/n	n_2/n	$\dots$	n_k/n

Barcha chastotalar yig'indisi tanlanma hajmiga teng, ya'ni $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, bu yerda $n_1, n_2, \dots, n_k$ - chastotalar.

Barcha nisbiy chastotalar yig'indisi birga teng, ya'ni $\varpi_1 + \varpi_2 + \dots + \varpi_k = 1$, bu yerda $\varpi_1 = n_1/n$, $\varpi_2 = n_2/n$, ..., $\varpi_k = n_k/n$ — nisbiy chastotalar.

Belgi uzluksiz bo'lsa, uning barcha kuzatiladigan qiymatlari joylashgan oraliq h uzunlikdagi qismaniy oraliqlarga bo'linadi va i – oraliqqa tushgan chastotalar yig'indisi (yoki nisbiy chastotalar yig'indisi) topiladi.

9.2. Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, \varpi_1), (x_2, \varpi_2), \dots, (x_k, \varpi_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, ϖ_i – ularga mos nisbiy chastotalar.

Belgining uzluksiz taqsimlanishini yaqqol ko'rsatish uchun *gistogrammalar* deb ataluvchi diagrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa n_i/h (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

$S_i = h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ — qismaniy i – to'g'ri to'rtburchakning yuzi.

$S = \sum_{i=1}^k n_i = n$ — chastotalar gistogrammasi yuzi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa

ϖ_i / h (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

$S_i = h \cdot \frac{\varpi_i}{h} = \varpi_i$ — qismaniy i – to'g'ri to'rtburchakning yuzi.

$S = \sum_{i=1}^k \varpi_i = 1$ — nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi.

9.3. X belgisi bosh to'plamning taqsimot funksiyasi $F(x, 0)$ bo'lib, 0 – noma'lum parametr bo'lsin. $X_1, \dots, X_n$ shu bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(X_1, \dots, X_n)$ *statistika* deyiladi.

Statistikaning kuzatilgan qiymati $L(x_1, \dots, x_n)$ ni θ parametrning taqribiy qiymati sifatida olinadi. Bu holda $L(x_1, \dots, x_n)$ statistika θ parametrning *bahosi* deyiladi.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ — tanlanmaning o'rta qiymati, } S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

tanlanmaning *dispersiyasi* deyiladi.

Agar $ML(X_1, \dots, X_n) = \theta$ shart bajarilsa, L baho θ parametr uchun *siljimagan baho* deyiladi.

Agar L baho har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|L - \theta| \leq \varepsilon) = 1$$

o'rinli bo'lsa, L baho θ parametr uchun *asosli baho* deyiladi.

Agar L baho uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(L) = 0$$

bo'lsa, L baho θ parametr uchun *asosli baho* deyiladi.

Agar L baho uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(L) = \theta$$

bo'lsa, L baho θ parametr uchun *asimptotik siljimagan baho* deyiladi.

Agar θ parametrning L_1 va L_2 bahoga nisbatan *samarali baho* deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyali baho *samarali baho* deyiladi.

$\bar{X}$ bosh to'plam o'rta qiymati uchun siljimagan, asosli va samarali baho bo'ladi.

S^2 bosh to'plam dispersiyasi uchun asimptotik siljimagan, asosli baho bo'ladi.

$\frac{n}{n-1} S^2$ bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan, asosli baho bo'ladi.

Tanlanmaning o'rta qiymati va dispersiyalarini hisoblashni soddalashtirish uchun ba'zan quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$u_i = \frac{X_i - c}{h}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \quad \bar{X} = \bar{u} \cdot h + c,$$

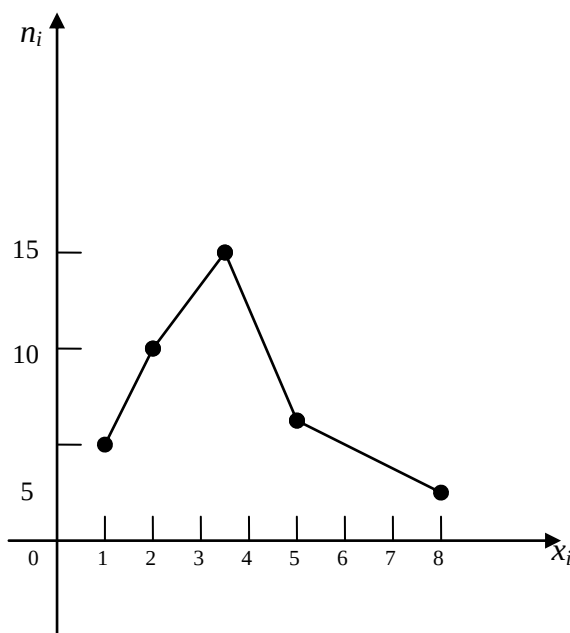
$$S_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2,$$

$$S_x^2 = h^2 \cdot S_u^2$$

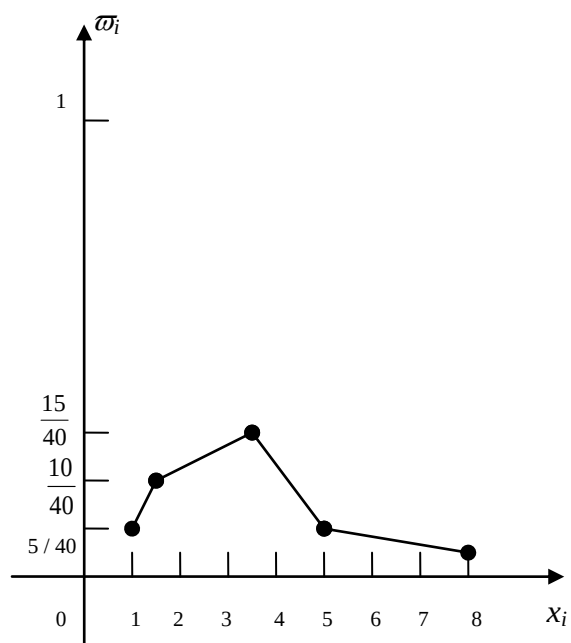
bu yerda c va h sonlari hisoblashni yengillashtiradigan qilib tanlanadi.

1 – m i s o l. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

X_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3



13-shakl



14-shakl

Y e ch i sh. $n = 5 + 10 + 15 + 7 + 3 = 40$ — tanlanma hajmi. Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad w_1 = \frac{5}{40}, \quad w_2 = \frac{10}{40}, \quad w_3 = \frac{15}{40}, \quad w_4 = \frac{7}{40}, \quad w_5 = \frac{3}{40}$$

X_i	1	2	4	5	8
w_i	5/40	10/40	15/40	7/40	3/40

13-shaklda chastotalar poligoni va 14-shaklda nisbiy chastotalar poligoni tasvirlangan.

2 – m i s o l. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

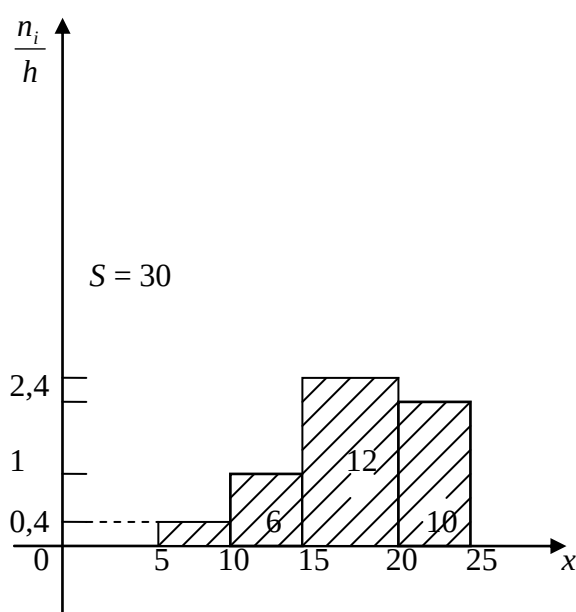
$X_i - X_{i+1}$	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	2	6	12	10
w_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

Y e ch i sh. $n = 2 + 6 + 12 + 10 = 30$ — tanlanma hajmi.

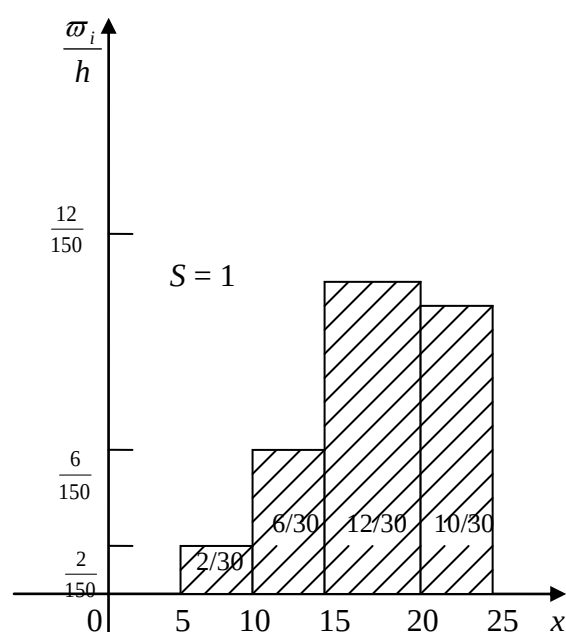
$$h=5, \quad \frac{n_1}{h} = \frac{2}{5} = 0,4; \quad \frac{n_2}{h} = \frac{6}{5} = 1,2;$$

$$\frac{n_3}{h} = \frac{12}{5} = 2,4; \quad \frac{n_4}{h} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{\varpi_1}{h} = \frac{2}{150}; \quad \frac{\varpi_2}{h} = \frac{6}{150}; \quad \frac{\varpi_3}{h} = \frac{12}{150}; \quad \frac{\varpi_4}{h} = \frac{10}{150}$$



15-shakl



16-shakl

15-shaklda chastotalar poligoni va 16-shaklda nisbiy chastotalar gistogrammatalari tasvirlangan.

3 – m i s o l. Bosh to‘plamdan $n = 50$ hajmdagi tanlanma ajratilgan:

X_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to‘plam o‘rta qiymatining siljimagan bahosini toping.

Y e ch i sh. Bosh to‘plam o‘rta qiymatining siljimagan bahosi — tanlanmaning o‘rta qiymati. Shuning uchun

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76$$

4 – m i s o l. Bir asbob yordamida sterjenning uzunligi besh marta o‘lchanganda (sistematik xatolarsiz) quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

- a) sterjen uzunligining tanlanma o'rta qiymatini toping;
 b) asbob yo'l qo'ygan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Y e ch i sh. a) Tanlanma o'rta qiymati $\bar{X}$ ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar — katta sonlardir:

$$u_i = X_i - 92$$

$$\bar{X} = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100$$

b) Tanlanma dispersiyani topamiz:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2}{5} +$$

$$+ \frac{(105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34$$

5 – m i s o l. $n = 10$ hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rta qiymatini toping:

X_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Y e ch i sh. Dastlabki variantalar katta sonlar, shuning uchun $u_i = x_i - 1270$ shartli variantalarga o'tamiz:

u_i	-	0	10
	20		
n_i	2	5	3

$$\bar{X} = C + \bar{u} = 1270 + \frac{2 \cdot (-20) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269$$

6 – m i s o l. Ushbu $n = 10$ hajmli tanlanma taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

X_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Y e ch i sh. $u_i = X_i - 191$ shartli variantalarga o'tamiz:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2}{10} - \left[\frac{2 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{10} \right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04$$

7 – m i s o l. Ushbu $n = 10$ hajmli tanlanma taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rta qiymatini va tanlanma dispersiyani toping:

X_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Y e ch i sh. $u_i = 100 X_i$ ($h = 100$) shartli variantalarga o'tamiz, natijada quyidagi taqsimotni hosil qilamiz:

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{100} (1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2) = 0,33$$

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2}{10} - \left[\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{10} \right]^2 = 7,21$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n^2} \cdot S_u^2 = \frac{1}{100^2} \cdot 7,21 \approx 0,0007$$

9 - mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. Biror diskret tasodifiy miqdorni o'rganish chog'ida 40 ta bog'liqmas sinovlar natijasida quyidagi tanlanma hosil qilingan:

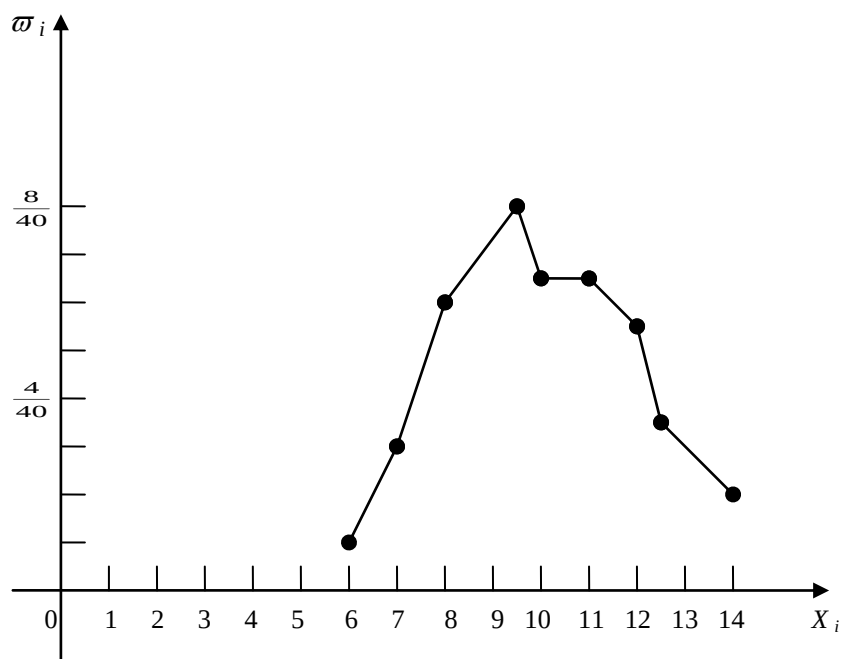
10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9,
 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7,
 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10,
 13, 3, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12

- a) variatsion qatorni tuzing;
 b) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing;
 v) nisbiy chastotalar poligonini chizing.
 J: a) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14;

b)

X_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ϖ_i	1/40	3/40	6/40	8/40	6/40	6/40	5/40	3/40	2/40

v) 17-shakl.

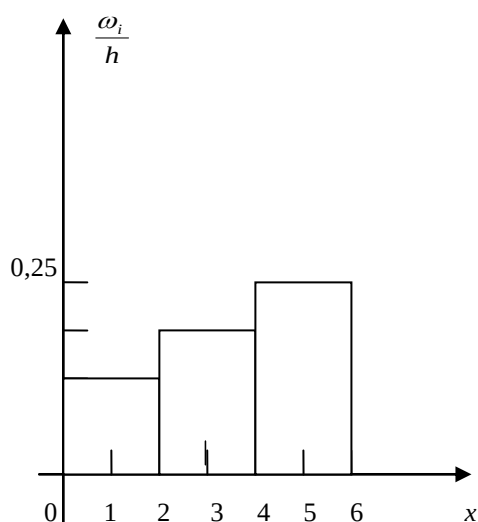


17 - shakl

2. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini chizing.

$X_i - X_{i+1}$	0-2	2-4	4-6
n_i	20	30	50

J: 18-shakl.



18-shakl

3. Bosh to'plamdan $n = 60$ hajmli tanlanma ajratilgan:

X_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh to'plam o'rta qiymatining siljimagan bahosini toping.

J: $\bar{X} = 4$

4. Tavakkaliga tanlab olingan 100 talaba bo'yini (sm.larda) o'lchash natijalari berilgan:

Bo'yi	154 - 158	158- 162	162- 166	166- 170	170- 174	174- 178	178- 182
Talabalar soni	10	14	26	28	12	8	2

Tekshirilgan talabalar bo'ylarning tanlanma o'rta qiymatini va tanlanma dispersiyasini toping.

K o' r s a t m a: Oraliqlarning o'rtalarini toping va ularni variantalar deb qabul qiling.

J: $\bar{X} = 166$, $S^2 = 33,44$

5. Guruhdagi 40 talabaning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan:

Baho - X_i	2	3	4	5
Chastota - n_i	3	8	25	4

$\bar{X}$, S^2 , S larni toping.

J: $\bar{X} = 3,75$; $S^2 = 0,5375$; $S = 0,74$

6. Ushbu $n = 100$ hajmli tanlanma taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping:

X_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

K o' r s a t m a: $u_i = X_i - 2844$ shartli variantalarga o'ting.

J: $S_x^2 = S_u^2 = 12603$

10-§. Matematik kutilish va dispersiya uchun ishonchli oraliqlar

10.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — belgili bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x, \theta)$ bo'lsin. θ parametr uchun $L(X_1, \dots, X_n)$ baho bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo'lsaki, uning uchun

$$P(|L - \theta| < \delta) = 1 - \alpha$$

bo'lsa, u holda $(L - \delta; L + \delta)$ oraliq θ parametrning $1 - \alpha$ ishonchlilik darajali *ishonchli oralig'i* deyiladi.

10.2. X belgisi normal taqsimlangan bosh to'plamni qaraymiz. Bu taqsimotning matematik kutilishi α uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

$$a) \bar{X} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bu yerda σ — o'rta kvadratik chetlanish, t_α — Laplas funksiyasi $\Phi(t)$ ning $\Phi(t_\alpha) = \alpha/2$ bo'ladigan qiymati.

b) σ — noma'lum bo'lib, tanlanma hajmi $n > 30$ bo'lganda:

$$\bar{X} - t_{n-1, \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ bu yerda}$$

S^2 — tanlanma dispersiya, $t_{n-1, \alpha}$ — Styudent taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo'yicha topiladi.

10.3. X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$$S^2(1-q)^2 < \sigma < S^2(1+q)^2, q < 1 \text{ bo'lganda,}$$

$$0 < \sigma^2 < S^2(1+q^2), q > 1 \text{ bo'lganda.}$$

1 - m i s o l. Tasodifiy miqdor $\sigma = 2$ parametr bilan normal qonun bo'yicha taqsimlangan. $n = 5$ hajmli tanlanma olingan. Bu taqsimotning noma'lum a parametric uchun $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

Y e ch i sh. $\Phi(t)=\frac{1}{2}\gamma=0,475$ tenglikdan, $\Phi(t)$ funksiya jadvalidan $t = 1,96$ sonni topamiz. U holda baho aniqligi quyidagicha bo'ladi:

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1,96 = 0,784,$$

ishonchli oraliq esa

$$\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ yoki } (\bar{X} - 0,784, \bar{X} + 0,784)$$

Masalan, agar olingan tanlanma uchun $\bar{X} = 2,3$ bo'lsa, u holda (1,5; 3,1) oraliq 95% ishonchlilik bilan noma'lum parametr a ni qoplaydi.

2 – m i s o l. Bosh to'planning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanmaning o'rta qiymati $\bar{X} = 14$ va tanlama hajmi $n = 25$ berilgan.

Y e ch i sh. $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ munosabatdan: $\Phi(t)=\frac{0,95}{2}=0,475$. Jadvaldan $t = 1,96$ ni topamiz.

Topilganlarni $\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ga qo'yamiz:

$$\left(14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; \quad 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \right)$$

yoki

$$(12,04; 15,96)$$

ishonchli oraliqni topamiz.

3 – m i s o l. Bosh to'planning X belgisi normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rta qiymat $\bar{X} = 20,2$ va tanlanma o'rta kvadratik chetlanish $S = 0,8$ topilgan. Noma'lum matematik kutilishni ishonchli oraliq yordamida $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

Y e ch i sh. $t_{n-1;\gamma}$ ni jadvaldan topamiz:

$$\gamma = 0,95; \quad n = 16; \quad t_{n-1;\gamma} = 2,13$$

Bularni

$$\bar{X} - t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak,

$$\left(20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}}, \quad 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} \right)$$

yoki

$$(19,774; 20,626)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum a parametr 0,95 ishonchlilik bilan

$$19,774 < a < 20,626$$

ishonchli oraliqda yotadi.

4 – m i s o l. Fizik kattalikni to‘qqizta bir xil, bog‘liqmas o‘lchash natijasida olingan natijalarning o‘rta arifmetigi $\bar{X}=42,319$ va tanlanma o‘rta kvadratik chetlanishi $S = 5, 0$ topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan aniqlash talab qilinadi.

Y e ch i sh. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati uning matematik kutilishiga teng. Shuning uchun masala σ noma'lum bo‘lganda

$$\bar{X} - t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ishonchlilik oralig‘i yordamida matematik kutilishni baholashga keltiriladi.

Jadvaldan $\gamma = 0,95$ va $n = 9$ bo‘yicha $t_{n-1;\gamma} = 2,31$ ni topamiz. U holda

$$42,319 - 2,31 \cdot \frac{5}{3} < a < 42,319 + 2,31 \cdot \frac{5}{3}$$

yoki

$$38,469 < a < 46,169$$

Shunday qilib, izlanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati 0,95 ishonchlilik bilan $38,469 < a < 46,169$ ishonchli oraliqda yotadi.

5 – m i s o l. Bosh to‘planning X belgisi normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rta kvadratik chetlanishi $S = 1$ topilgan. Bosh to‘plam o‘rta kvadratik chetlanish σ ni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Y e ch i sh. Berilganlar $\gamma = 0,95$ va $n = 9$ bo‘yicha jadvaldan $q=0,44<1$ ni topamiz. Topilganlarni $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ formulaga qo‘yamiz va

$$1 \cdot (1 - 0,44) < \sigma < 1(1 + 0,44)$$

yoki

$$0,56 < \sigma < 1,44$$

ni hosil qilamiz.

6 – m i s o l. Biror fizik kattalik bitta asbob yordamida 12 marta o‘lchangan, bunda o‘lchashlardagi tasodifiy xatoliklarning o‘rta kvadratik chetlanishi 0,6 ga teng bo‘lib chiqdi. Asbob aniqligini 0,99 ishonchlilik bilan toping.

Y e ch i sh. Asbobning aniqligi o‘lchashlardagi tasodifiy xatoliklarning o‘rta kvadratik chetlanish σ ni berilgan $\gamma = 0,99$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni topishga keltiriladi.

Jadvaldan $\gamma = 0,99$ va $n = 12$ bo‘yicha $q = 0,9$ ni topamiz. $S = 0,6$ va $q = 0,9$ larni formulaga qo‘yib, izlanayotgan oraliqni topamiz:

$$0,6(1-0,9) < \sigma < 0,6(1+0,9)$$

yoki

$$0,06 < \sigma < 1,14$$

10 - mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni 0,99 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping, bunda o'rta kvadratik chetlanish $\sigma = 4$, tanlanmaning o'rta qiymati $\bar{X} = 10,2$ va tanlama hajmi $n = 16$.

J: $7,63 < a < 12,77$

2. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining matematik kutilishini tanlanma o'rta qiymat bo'yicha bahosining 0,925 ishonchlilik bilan aniqligi 0,2 ga yeng bo'ladigan tanlamaning minimal hajmini toping. O'rta kvadratik chetlanishni $\sigma = 1,5$ ga teng deb oling.

J: $n = 179$

3. Bosh to'plamdan $n = 10$ hajmli tanlanma olingan:

X_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to'plamning normal taqsimlangan belgisi matematik kutilishini tanlanma o'rta qiymati bo'yicha 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

J: $0,3 < a < 3,7$

4. Biror fizik kattalikni bog'liqmas bir xil aniqlikdagi 9 ta o'lchash ma'lumotlari bo'yicha o'lchashlarning o'rta arifmetik qiymati $\bar{X} = 30,1$ va o'rta kvadratik chetlanishi $S = 6$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida $\gamma = 0,99$ ishonchlilik bilan baholang.

J: $23,38 < a < 36,82$

5. Bosh to'plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo'yicha tuzatilgan o'rta kvadratik chetlanish S topilgan.

a) o'rtacha kvadratik chetlanish σ ni;

b) dispersiyani 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping, bunda

$n = 10$; $S = 5,1$.

J: a) $0 < \sigma < 14,28$; b) $0 < \sigma^2 < 203,92$

6. Bitta asbob yordamida (sistematik xatolarsiz) biror fizik kattalik 10 marta o'lchangan, bunda o'lchashlardagi tasodifiy xatolarning o'rta kvadratik chetlanishi 0,8 ga teng bo'lgan. Asbob aniqligini 0,95 ishonchlilik bilan aniqlang.

J: $0,28 < \sigma < 1,32$

7. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n = 10$ hajmli tanlanma olingan va ushbu chastotalar jadvali tuzilgan:

X_i	-2	1	2	3	4	5
ϖ_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Matematik kutilish uchun $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

8. 10 ta bog'liqmas (erkli) o'lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma'lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O'lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilishi uchun $\gamma = 95\%$ bilan ishonchli oraliqni toping.

J: $23,8 < a < 25,4$.

9. Agar 10 ta bog'liqsiz o'lchashlar natijasida obektgacha bo'lgan masofa (m) uchun 25025, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo'lsa, obektgacha bo'lgan masofaning matematik kutilishi uchun $\gamma = 0,9$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda o'lchash xatoligi $\sigma = 100$ o'rta kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

J: $249 < a < 25052$

11-§. Gipotezalarni Pirsonning muvofiqlik kriteriysi bo'yicha tekshirish.

X belgili bosh to'plamdan olingan $X_1, X_1, \dots, X_n$ tanlanma berilgan bo'lib, uning asosida bosh to'plamning taqsimot funksiyasi haqidagi $H_0: F(x) = F_0(x)$ asosiy gipotezani $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ konkurent gipoteza bo'lganda tekshirish kerak bo'lsin.

X belgi qiymatlarini $(-\infty; a_1) = \Delta_1, \Delta_2 = [a_1; a_2), \dots, \Delta_{k-1} = [a_{k-2}; a_{k-1}), \Delta_k = [a_{k-1}; +\infty)$ oraliqlarga bo'lamiz, n_i tanlanma qiymatlarining Δ_i — oraliqlarga tushgan qiymatlarining soni bo'lsin va

$\varpi_i = \frac{n_i}{n}, p_i = P(X \in \Delta_i)$. U holda

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \dots + \varpi_k = 1$$

Quyidagi statistikani aniqlaymiz:

$$Y^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\varpi_i - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lib, $n p_i > 5$ bo'lsa, $Y^2 (k - 1)$ — ozodlik darajali xu — kvadrat taqsimot bo'yicha taqsimlangandir.

Agar $F_0(X)$ taqsimot funksiyada l ta noma'lum parametrlar bo'lib, ular tanlanma bo'yicha baholangan bo'lsa, ozodlik darajalari soni $(k - l - 1)$ gat eng bo'ladi.

Endi Pirsonning muvofiqlik kriteriysini aniqlaymiz. Buning uchun avval α aniqlilik darajasi va x_u — kvadrat taqsimot uchun jadvaldan x_{k-1} ; α ning $P(Y^2 > x_{k-1, \alpha}) = \alpha$ bo'ladigan kritik qiymati topiladi.

So'ngra tanlanma qiymatiga ko'ra Y^2 hisoblanadi, agar $Y^2 < x_{k-1, \alpha}$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi va bosh to'plam $F_0(x)$ taqsimot funksiyaga ega deb hisoblanadi, agar $Y^2 > x_{k-1, \alpha}$ bo'lsa, H_0 gipoteza rad etiladi.

Agar ozodlik daraja 30 dan katta bo'lsa, kritik qiymat normal taqsimotdan foydalanib topiladi.

1 – m i s o l. X belgisi bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistic taqsimoti berilgan:

Δi	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

X belgining taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi yordamida tekshiring.

Y e ch i sh.

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 70$$

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
ϖ	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

$$\varpi_1 = \frac{2}{70} = 0,029; \quad \varpi_2 = \frac{12}{70} = 0,171; \quad \varpi_3 = \frac{8}{70} = 0,114;$$

$$\varpi_4 = \frac{4}{70} = 0,057; \quad \varpi_5 = \frac{14}{70} = 0,2; \quad \varpi_6 = \frac{6}{70} = 0,086;$$

$$\varpi_7 = \frac{10}{70} = 0,143; \quad \varpi_8 = \frac{2}{70} = 0,029; \quad \varpi_9 = \frac{1}{70} = 0,014; \quad \varpi_{10} = \frac{11}{70} = 0,157$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} \varpi_i X_i = 2,5 \cdot 0,029 + 7,5 \cdot 0,171 + 12,5 \cdot 0,114 + 17,5 \cdot 0,057 + 22,5 \cdot 0,2 +$$

$$+ 27,5 \cdot 0,086 + 32,5 \cdot 0,143 + 37,5 \cdot 0,029 + 42,5 \cdot 0,014 + 47,5 \cdot 0,157 =$$

$$= 2,5(0,029 + 3 \cdot 0,171 + 5 \cdot 0,114 + 7 \cdot 0,057 + 9 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,086 + 13 \cdot 0,14 +$$

$$+ 15 \cdot 0,029 + 17 \cdot 0,014 + 19 \cdot 0,157) = 24,4285$$

$$\bar{X}^2 = 2,5^2 (0,029 + 9 \cdot 0,171 + 25 \cdot 0,114 + 49 \cdot 0,057 + 81 \cdot 0,2 +$$

$$+ 121 \cdot 0,086 + 169 \cdot 0,143 + 225 \cdot 0,029 + 289 \cdot 0,014 + 361 \cdot 0,157) = 782,67;$$

$$\bar{S}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = 782,67 - (24,4285)^2 = 782,67 - 596,75 = 185,92;$$

$$S = \sqrt{185,92} \approx 13,63$$

X belgi uchun

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{2}; \quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

bo'lganidan a va b ni aniqlash uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2}=24,43, \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}}=13,63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=48,86, \\ b-a=47,16 \end{cases} \Leftrightarrow (b=48,01; \quad a=0,85);$$

$$\frac{1}{b-a}=\frac{1}{47,16}=0,0212$$

Shunday qilib,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0,85, \\ 0,0212, & \text{agar } 0,85 \leq x \leq 48,01, \\ 0, & \text{agar } x > 48,01, \end{cases}$$

bu yerda $f(x)$ – X belgining zichlik funksiyasi.

Endi tekis taqsimot bo'yicha X belgining $[0; 5)$, $[5;10)$, ..., $[45; 50)$ oraliqlarga tushish ehtimolliklarini topamiz.

Δi	$[-5; 0)$	$[0; 5)$	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$
P_i	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106

Δi	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$	$[40; 45)$	$[45; 50)$	$[50; 55)$
P_i	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

$$p_1 = P(0 < X < 5) = p(0,85 < X < 5) = \int_{0,85}^5 0,0212 dx = 0,0212 \Big|_{0,85}^5 = 0,0212 \cdot 4,15 = 0,088$$

$$p_{10} = P(45 < X < 50) = P(45 < X < 48,01) = \int_{45}^{48,01} 0,0212 dx = 0,0212 x \Big|_{45}^{48,01} = 0,0212 \cdot 3,01 = 0,064$$

Y^2 ni hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

ϖ_i	P_i	$\varpi_i - P_i$	$(\varpi_i - P_i)^2$	$\frac{(\varpi_i - P_i)^2}{P_i}$
0,029	0,088	-0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	-0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	-0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	-0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	-0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	0,093	0,009	0,141
				0,515

Shunday qilib $Y^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(\varpi_i - P_i)^2}{P_i} = 70 \cdot 0,515 = 36,05$, ya'ni $Y^2 = 36,05$.

xu — kvadrat taqsimot jadvalidan ma'lumki

$$\chi_{10-2-1; 0,05} = \chi_{7; 0,05} = 14,1$$

$Y^2 > 14,1$ bo'lgani uchun bosh to'plamning taqsimot funksiyasi 0,05 aniqlik daraja bilan tekis taqsimotga mos kelmaydi degan xulosaga ega bo'lamiz.

2 – m i s o l. X belgili bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistic taqsimoti berilgan:

Δi	[0;3)	[3; 6)	[6; 9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

X belgining taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

Y e c h i s h. $n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 50$, $\varpi_i = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,10}$ deb olib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

X_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
ϖ_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

$X = 3T - 1,5$ almashtirishni bajarsak, T va T^2 uchun statistik taqsimot quyidagicha bo'ladi:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϖ	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02
T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
ϖ	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

$$\bar{T} = 0,2 + 0,12 + 0,24 + 0,48 + 1,1 + 1,2 + 0,98 + 0,8 + 0,36 + 0,2 = 5,5$$

$$T^2 = 0,02 + 0,24 + 0,72 + 1,92 + 5,5 + 7,2 + 6,86 + 6,4 + 3,24 + 2 = 34,1$$

$$\bar{X} = 3 \cdot \bar{T} - 1,5 = 3 \cdot 5,5 - 1,5 = 15$$

$$S^2 = 9 \left(\overline{T^2} - \bar{T}^2 \right) = 34,65$$

$$S = 5,9$$

Demak,

$$f(x) = \frac{1}{5,9 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-15)^2}{69,3}}$$

$$\frac{x-15}{5,9} = u \text{ bo'lsin, u holda}$$

$$f(x) = \frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \approx 0,17 \cdot \varphi(u),$$

bu yerda $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ bo'ladi.

Bu funksiyaning qiymatlaridan foydalanib yana bitta jadval tuzamiz ($h = 3$):

X	u	$\varphi(u)$	$f(x)$	$h f(x)$	X	u	$\varphi(u)$	$f(x)$	$h f(x)$
1,5	-2,29	0,029	0,005	0,02	16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
4,5	-1,78	0,082	0,014	0,04	19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
7,5	-1,27	0,178	0,030	0,09	22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	-0,76	0,299	0,051	0,15	25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
13,5	-0,25	0,387	0,066	0,20	28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

Endi quyidagi

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\gamma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\gamma}\right),$$

bu yerda a – matematik kutilish va

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

formula yordamida oraliqlarga tushish ehtimolliklarini hisoblaymiz:

$$P(0 < X < 3) = 0,0154 \approx 0,02,$$

$$P(3 < X < 6) = 0,425 \approx 0,04,$$

$$P(6 < X < 9) = 0,0905 \approx 0,09,$$

$$P(9 < X < 12) = 0,151 \approx 0,15,$$

$$P(12 < X < 15) = 0,1946 \approx 0,19,$$

$$P(15 < X < 18) = 0,1946 \approx 0,19,$$

$$P(18 < X < 21) = 0,151 \approx 0,15,$$

$$P(21 < X < 24) = 0,0915 \approx 0,09,$$

$$P(24 < X < 27) = 0,0425 \approx 0,04,$$

$$P(27 < X < 30) = 0,0154 \approx 0,02.$$

Natijada quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

Δi	[0;3)	[3; 6)	[6; 9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
P_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Yuqoridagilardan foydalanib Y^2 ni hisoblash uchun jadval tuzamiz:

ϖ_i	P_i	$\varpi_i - P_i$	$(\varpi_i - P_i)^2$	$\frac{(\varpi_i - P_i)^2}{P_i}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	-0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	-0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,006
0,2	0,20	0,00	0,0000	0,02
0,14	0,15	-0,01	0,0001	0,00
0,1	0,09	0,01	0,0001	0,0007
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
				0,0387

$$Y^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(\varpi_i - P_i)^2}{P_i} = 50 \cdot 0,0387 = 1,935,$$

xu — kvadrat taqsimot jadvalidan ma'lumki

$$\chi_{10-2-1; 0,05} = \chi_{7; 0,05} = 14,1$$

$Y^2 > 14,1$ bo'lgani uchun bosh to'plamning taqsimot funksiyasi 0,05 aniqlik daraja bilan tekis taqsimotga mos kelmaydi degan xulosaga ega bo'lamiz.

11 - mavzu bo'yicha topshiriqlar

1. X belgisi bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimot berilgan:

Δi	[4,1;4,2)	[4,2; 4,3)	[4,3; 4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,7;4,8)	[4,8;4,9)	[4,9;5,0)
n_i	1	2	3	4	5	8	8	9	10

X belgining taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik daraja bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi yordamida aniqlang.

J: Normal taqsimotga mos keladi.

2. X belgisi bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan:

Δi	[0;10)	[10; 20)	[20; 30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
n_i	11	14	15	10	14	16

X belgining taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi yordamida aniqlang.

J: Tekis taqsimot bilan muvofiqlashadi.

12-§. Tanlanma korrelyasiya ko'rsatkichi. Chiziqli regressiya tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli.

X va Y belgili ikki o'lchovli bosh to'plamdan olingan n hajmli tanlanma berilgan bo'lsin. (x_i, y_k) kuzatilgan qiymatlarini mos chastotalari bilan ushbu korrelyatsion jadvalga joylashtiramiz:

$X \backslash Y$	$y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m$	$\sum_{j=1}^m n_{ij}$
x_1	$n_{11} \quad n_{12} \quad \dots \quad n_{1m}$	n_{x_1}
x_2	$n_{21} \quad n_{22} \quad \dots \quad n_{2m}$	n_{x_2}
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots$
x_l	$n_{l1} \quad n_{l2} \quad \dots \quad n_{lm}$	n_{x_l}
$\sum_{j=1}^l n_{ij}$	$n_{y_1} \quad n_{y_2} \quad \dots \quad n_{y_m}$	$n = \sum_{j=1}^l \sum_{j=1}^m n_{ij}$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i n_{x_i}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i n_{y_i}$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i y_i n_{ij}, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i^2 n_{x_i}$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i^2 n_{y_i}, \quad \sigma_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2, \quad r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$Y - \bar{Y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r (x - \bar{x})$ eng kichik kvadratlar usuli bilan topilgan Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasidir.

Ko'pincha bu tenglamani topishni soddalashtirish uchun

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad u_i = \frac{x_i - C_2}{h_2}$$

almashtirishlar kiritiladi.

C_1 va C_2 mos ravishda $x_1 \leq \dots \leq x_l$ va $y_1 \leq \dots \leq y_m$ variatsion qatorlarning o'rtalarida joylashgan variantalar, h_1 va h_2 lar esa variatsion qatorlar qo'shni variantalarining ayirmasi.

Yuqoridagi almashtirishlardan foydalanib, chiziqli regressiya tenglamasini topishda quyidagi formulalar ishlatiladi:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i n_{x_i}, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j n_{y_j} \\ \overline{u^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i^2 n_{x_i}, \quad \overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j^2 n_{y_j} \\ \sigma_u^2 &= \overline{u^2} - \bar{u}^2, \quad \sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2, \\ \sigma_x &= h_1 \cdot \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \quad \bar{X} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1 \\ Y &= \bar{v} \cdot h_2 + C_2, \quad r = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m u_i v_j n_{ij} - n \cdot \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v}\end{aligned}$$

Misol. Berilgan korrelyatsion jadval ma'lumotlariga ko'ra Y ning X ga chiziqli regressiya tenglamasini toping.

1-jadval.

$X \backslash Y$	2	7	12	17	22	27	n_y
100	1	5	-	-	-	-	6
110	-	5	3	-	-	-	8
120	-	-	3	40	12	-	55
130	-	-	2	10	5	-	17
140	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	100

Hisoblashlarni osonlashtirish maqsadida $C_1=17$ va $C_2=120$ deb olamiz. U holda $h_1=5$ bo'lgani uchun:

$$U_1 = \frac{2-17}{5} = -3, \quad U_2 = \frac{7-17}{5} = -2, \quad U_3 = \frac{12-17}{5} = -1$$

$$U_4 = 0, \quad U_5 = \frac{22-17}{5} = 1, \quad U_6 = \frac{27-17}{5} = 2$$

bo'ladi va $h_2=10$ bo'lgani uchun

$$V_1 = \frac{100-120}{10} = -2, \quad V_2 = \frac{110-120}{10} = -1, \quad V_3 = 0$$

$$V_4 = \frac{130-120}{10} = 1, \quad V_5 = \frac{140-120}{10} = 2$$

bo'ladi. Bu topilgan qiymatlarni 1-jadvaldagi X_i va Y_j lar o'rniga qo'yamiz:

2-jadval

$U \backslash V$	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	1	5	-	-	-	-	6
-1	-	5	3	-	-	-	8
0	-	-	3	40	12	-	55
1	-	-	2	10	5	-	17
2	-	-	-	3	4	7	14
n_u	1	10	8	53	21	7	100

2-jadvaldan foydalanib hisoblash ishlarini bajaramiz:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum u n_u = \frac{1}{100} (-3 \cdot 1 + (-2) \cdot 10 + (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 7) =$$

$$= \frac{1}{100} (-3 - 20 - 8 + 21 + 14) = 0,04$$

$$\overline{U^2} = \frac{1}{n} \sum u^2 n_u = \frac{1}{100} (9 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 21 + 4 \cdot 7) =$$

$$= \frac{1}{100} (9 + 40 + 8 + 21 + 28) = 1,06$$

Xuddi shunga o'xshash $\bar{v}$, $\overline{v^2}$, σ_v , σ_y va $\bar{y}$ larni topamiz.

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum v n_v = \frac{1}{100} (-2 \cdot 6 + (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 14) =$$

$$= \frac{1}{100} (-12 - 8 + 17 + 28) = 0,25$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum v^2 n_v = \frac{1}{100} (4 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 17 + 4 \cdot 14) =$$

$$= \frac{1}{100} (24 + 8 + 17 + 56) = 1,05$$

$$\sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = 1,05 - 0,25^2 = 1,05 - 0,0625 = 1,05 - 0,0625 = 0,9875$$

$$\sigma_v \approx 0,99$$

$$\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 10 \cdot 0,99 = 9,9$$

$$\bar{Y} = \bar{v} \cdot h_2 + C_2 = 0,25 \cdot 10 + 120 = 122,5$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti r ni hisoblash uchun avval $\overline{uv}$ ni topamiz:

$$\overline{uv} = \frac{1}{n} \sum \sum u_i v_j n_{ij} = \frac{1}{100} ((-2) + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) \cdot 5 +$$

$$+ (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 7) = \frac{1}{100} (6 + 20 + 10 + 3 - 2 + 5 + 8 + 28) = 0,78$$

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u} \bar{v}}{\sigma_u \cdot \sigma_v} \text{ ga ko'ra}$$

$$r = \frac{0,78 - 0,04 \cdot 0,25}{1,03 \cdot 0,99} = \frac{0,77}{1,0197} \approx 0,75$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti o'zgaruvchilarni chiziqli almashtirishga nisbatan invariant bo'lganligi uchun $r = r_{xy} = r_{uv} = 0,75$ bo'ladi.

Topilgan ko'rsatkichlarni chiziqli regressiya tenglamasiga qo'yib quyidagini topamiz:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r (x - \bar{x})$$

$$y - 122,5 = \frac{9,9}{5,15} (x - 17,2)$$

$$y - 122,5 = 1,92 x - 33,06$$

yoki

$$y = 1,92 x + 89,44$$

Bu esa Y o'zgaruvchini X o'zgaruvchiga chiziqli regressiya tenglamasi bo'ladi.

Javob: $y = 1,92 x + 89,44$

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = 1,06 - 0,04^2 = 1,06 - 0,0016 = 1,0584$$

$$\sigma_n \approx 1,03$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_n = 5 \cdot 1,03 = 5,15$$

$$\bar{X} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1 = 0,04 \cdot 5 + 17 = 17,2$$

12-mavzu bo'yicha topshiriqlar.

Korrelyatsion jadval ma'lumotlari bo'yicha Y ning X ga chiziqli regressiya tenglamasini toping.

Korrelyatsion jadval ma'lumotlari bo'yicha Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

1)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4	-	-	-	-	6
55	-	3	5	-	-	-	8
65	-	-	5	35	5	-	45
75	-	-	2	8	17	-	27
85	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	$n = 100$

2)

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4	-	-	-	-	6
50	-	3	7	-	-	-	10
60	-	-	5	30	10	-	45
70	-	-	7	10	8	-	25
80	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n = 100$

3)

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	-	-	-	-	5
25	-	6	4	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	9	7	-	17
55	-	-	-	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	$n = 100$

4)

$X \backslash Y$	2	7	12	27	22	27	n_y
100	1	5	-	-	-	-	6
110	-	5	3	-	-	-	8
120	-	-	3	40	12	-	55
130	-	-	2	10	5	-	17
140	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	$n = 100$

5)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	-	-	-	-	8
20	-	4	4	-	-	-	8
30	-	-	7	35	8	-	50
40	-	-	2	10	8	-	20
50	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

6)

$X \backslash Y$	12	14	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	4	-	45
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

7)

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	-	-	-	-	7
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	2	-	43
55	-	-	12	8	6	-	26
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	$n = 100$

8)

$X \backslash Y$	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n = 100$

9)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	$n = 100$

10)

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	1	-	-	-	-	6
30	-	6	2	-	-	-	8
40	-	-	40	5	5	-	50
50	-	-	2	8	7	-	17
60	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

11)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

12)

$X \backslash Y$	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	1	1	-	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

13)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

14)

$X \backslash Y$	13	18	23	28	33	n_y
25	3	2	-	-	-	5
35	-	6	4	-	-	10
45	-	1	9	5	-	15
55	-	1	2	4	8	15
65	-	-	1	-	4	5
n_x	3	10	16	9	12	$n = 50$

15)

$X \backslash Y$	30	35	40	45	50	n_y
46	2	6	-	-	-	8
56	2	8	10	-	-	20
66	-	-	32	3	9	44
76	-	-	4	11	6	21
86	-	-	-	2	5	7
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

16)

$X \backslash Y$	33	38	43	48	53	58	n_y
65	4	8	1	-	-	-	13
75	-	4	4	2	-	-	10
85	-	1	6	6	1	-	14
95	-	-	-	1	5	-	6
105	-	-	-	1	4	1	6
115	-	-	-	-	2	4	6
n_x	4	13	11	10	12	5	$n = 55$

17)

$X \backslash Y$	3	7	11	15	19	23	n_y
6	5	3	-	2	-	-	10
16	7	10	1	2	-	-	20
26	2	18	15	20	-	-	55
36	-	-	30	26	-	-	56
46	-	-	-	19	12	-	31
56	-	-	-	-	21	7	28
n_x	14	31	46	69	33	7	$n = 200$

18)

$X \backslash Y$	45	50	55	60	65	70	75	n_y
30	-	-	-	-	8	2	1	11
35	-	1	6	22	33	10	3	75
40	1	2	10	48	37	8	1	107
45	-	1	12	11	2	-	-	26
50	-	-	1	-	-	-	-	1
55	-	-	1	-	-	-	-	1
n_x	1	6	30	82	80	20	5	$n = 224$

19)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
6	3	5	10	2	-	20
9	-	-	7	12	-	19
12	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

20)

$X \backslash Y$	0	4	8	12	16	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
19	-	3	22	2	-	27
25	-	-	-	15	-	15
31	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

21)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5	-	-	-	25
20	7	15	3	1	-	26
30	-	3	17	4	-	24
40	-	-	8	13	7	28
50	-	-	-	5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n = 150$

22)

$X \backslash Y$	150	165	175	185	195	n_y
50	2	2	-	-	-	4
70	-	2	-	-	-	2
90	-	-	9	2	1	12
110	-	-	2	7	9	18
130	-	-	-	3	11	14
n_x	2	4	11	12	21	$n = 50$

23)

$X \backslash Y$	20	25	30	35	40	n_y
10	3	7	-	-	-	10
16	-	12	5	1	-	18
20	-	-	6	1	1	8
24	-	-	-	3	1	4
28	-	-	-	-	1	1
n_x	3	19	11	5	3	$n = 41$

24)

$X \backslash Y$	25	35	45	55	65	n_y
2	5	10	-	-	-	15
4	-	13	10	10	-	33
6	-	-	18	16	-	34
8	-	-	-	2	2	4
10	-	-	-	-	1	1
n_x	5	23	28	28	3	$n = 87$

25)

$X \backslash Y$	10	20	30	40	50	n_y
10	7	17	10	-	-	34
20	-	23	12	5	-	40
30	-	10	5	3	2	20
40	-	-	2	2	1	5
50	-	-	-	-	1	1
n_x	7	50	29	10	4	$n = 100$

26)

$X \backslash Y$	5	15	25	35	45	n_y
2	3	14	-	-	-	17
12	-	16	18	-	-	34
22	-	-	20	10	11	41
32	-	-	-	6	2	8
n_x	3	30	38	16	13	$n = 100$

27)

$X \backslash Y$	1	6	11	16	21	n_y
5	3	10	-	-	-	13
10	4	11	10	-	-	25
15	-	5	15	10	-	30
20	-	-	11	10	4	25
25	-	-	-	4	3	7
n_x	7	26	36	24	7	$n = 100$

28)

$X \backslash Y$	4	6	8	10	12	n_y
3	7	21	10	-	-	38
8	-	5	15	10	-	30
13	-	-	11	10	4	25
18	-	-	-	4	3	7
n_x	7	26	36	24	7	$n = 100$

29)

$X \backslash Y$	3	7	11	15	19	n_y
2	2	4	-	-	-	6
6	-	3	5	-	-	8
8	-	-	5	35	5	45
10	-	-	2	8	17	27
12	-	-	-	4	10	14
n_x	2	7	12	47	32	$n = 100$

30)

$X \backslash Y$	2	5	8	11	14	17	n_y
1	2	4	-	-	-	-	6
6	-	6	3	-	-	-	9
11	-	-	6	35	4	-	45
16	-	-	2	8	6	-	16
21	-	-	-	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

1 - i l o v a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{funksiyaning qiymatlari jadvali}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3379	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0,707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Izox: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ va $x \geq 4$ bo'lganda: $\varphi(x) = 0,0001$

2 – i l o v a

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{funksiyaning qiymatlari jadvali}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,1967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3869
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3883
0,24	0,948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

Izox: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ va $x \geq 5$ bo'lganda: $\Phi(x) = 0,5$

2 – i l o v a n i n g d a v o m i

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{funksiyaning qiymatlari jadvali}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,32	0,4066	1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948
1,33	0,4082	1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951
1,34	0,4099	1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,60	0,4953
1,35	0,4115	1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956
1,36	0,4131	1,68	0,4535	2,00	0,4772	2,64	0,4959
1,37	0,4147	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,38	0,4162	1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
1,39	0,4177	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,70	0,4965
1,40	0,4192	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
1,41	0,4207	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,74	0,4969
1,42	0,4222	1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971
1,43	0,4236	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
1,44	0,4251	1,76	0,4608	2,16	0,4836	2,80	0,4974
1,45	0,4265	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
1,46	0,4279	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,84	0,4977
1,47	0,4292	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
1,48	0,4306	1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,4980
1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,90	0,4981
1,50	0,4332	1,82	0,4556	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,51	0,4345	1,83	0,4664	2,30	0,4893	2,94	0,4984
1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,53	0,4370	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,00	0,49865
1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,20	0,49931
1,56	0,4406	1,88	0,4699	2,40	0,4918	3,40	0,49966
1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,60	0,499841
1,58	0,4429	1,90	0,4713	2,44	0,4927	3,80	0,499928
1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	4,00	0,499968
1,60	0,4452	1,92	0,4726	2,48	0,4934	4,25	0,499989
1,61	0,4463	1,93	0,4732	2,50	0,4938	4,50	0,499997
1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941	4,75	0,499999
1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945	5,00	0,500000

Izox: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ va $x \geq 5$ bo'lganda: $\Phi(x) = 0,5$

$$P(\lambda, m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Puasson funksiyasining qiymatlari jadvali

<i>m</i>	$\lambda=0,1$	$\lambda=0,2$	$\lambda=0,3$	$\lambda=0,4$	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,6$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004
<i>m</i>	$\lambda=0,7$	$\lambda=0,8$	$\lambda=0,9$	$\lambda=1,0$	$\lambda=2,0$	$\lambda=3,0$
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1879	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7		0,0001	0,0001	0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10					0,0001	0,0008
11						0,0002
12						0,0001
<i>m</i>	$\lambda=4,0$	$\lambda=5,0$	$\lambda=6,0$	$\lambda=7,0$	$\lambda=8,0$	$\lambda=9,0$
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1563	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1042	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0595	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0298	0,1044	0,1377	0,1490	0,139*6	0,1171
8	0,0132	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0053	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0019	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0006	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0002	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0001	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14		0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

ADABIYOTLAR.

1. Гмурман В.Е. “Теория вероятностей и математическая статистика”- М.:Высшая школа,1998.
2. Кремер Ш.А. “Теория вероятностей и математическая статистика”- М.:Высшая школа,2001.
3. Колемаев В.А., Калинина В.А. “Теория вероятностей и математическая статистика”- М.:Инфра-М,1997.
4. Колемаев В.А. и др. “Теория вероятностей и математическая статистика”- М.: 1991.
5. Соатов Ё.У., “Олий математика курси”. 2-кисм.- Т.: Укитувчи, 1994.
6. Соатов Ё.У., “Олий математика курси”. 3-кисм.- Т.: Укитувчи, 1994.
7. Гмурман В.Е., “Эхтимоллар назарияси ва математик статистика”. – Т.:Укитувчи 1977.
8. Abdullayev A.G. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan ma’ruzalar matni”. Andijon. AndMII. 2006.

QO‘SHIMCHA ADABIYOTLAR

1. А.И.Королев, З.М.Аксютин, Г.И.Савельев "Курс высшей математике для экономических вузов" 2 часть. Москва, Высшая школа 1982
2. А.Абдуллаев. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. 1-кисм. Андижон 1992.
3. Захаров В., Севостьянов А. Теория вероятностей. 1982. Москва.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва 1981.
5. В.Е.Гмурман "Эхтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир кулланма" Тошкент 1977й.

