

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ВАЗИРЛИГИ**

Термиз Давлат Университети

К.Курбанов, Н.Хуррамов, Р Дусназарова

**Дифференциал тенгламалар учун
чегаравий масалалар.**

**Давлат университетлари ва олий техника ўқув
юртларининг талабалари учун илмий методик қўлланма**

Термиз-2013.

Илмий услубий қўлланма Термиз давлат университетининг илмий кенгашида ва Дифференциал тенгламалар ва геометрия кафедрасининг йиғилишида муҳокама қилинган ва чоп этишга тавсия этилган.

Ушбу илмий-услубий қўлланмада дифференциал тенгламалар назариясининг чегаравий масалалари баён қилинган. Геометрик, механик ва физик мазмундаги масалалар йиғилган ва мустақил ишлар учун топшириқлар берилган.

Масъул муҳаррир: Дифференциал тенгламалар ва геометрия кафедраси ўқитувчиси У. Бобомуродов.

Такризчилар: Физика-математика фанлари
номзоди, Х.Тўраев.
Физика-математика фанлари
номзоди, И.Хайруллаев.

Манзилимиз: 732011. Термиз шаҳри Ф.Хўжаев кўчаси 43-уй Термиз давлат университети «дифференциал тенгламалар ва геометрия» кафедраси.

Илмий услубий тўплами @ 2013.

1-§ Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

1.Чегаравий масалаларнинг умумий қўйилиши дифференциал тенгламалар курсида оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласининг қандай қўйилганлигини ва унинг геометрик ва механик маъноларини тўлиқ таҳлил қилдик. Энди оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва унинг геометрик ва механик маъноларини таҳлил қиламиз. Чегаравий масалалар иккинчи ва ундан юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун қўйилади. Чегаравий муносабатлар номаълум функция ва унинг ҳосилаларининг камида икки нуқтадаги қийматларини боғлайди.

Бизга n - тартибли дифференциал тенглама

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.1) \text{ кўринишида берилган бўлсин}$$

Агар (1.1) тенглама ва $g_i[x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0); x_1, y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1)] = 0$

$$x_0, x_1 \in I, x_0 \neq x_1, \quad I = \langle a; b \rangle, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

муносабат берилган бўлса (1.1) тенгламанинг (1.2) муносабатини қаноатлантирувчи ечимини излаш чегаравий масала дейилади.

2. Энг содда чегаравий масалалар.

$$\text{Энг содда чегаравий масалаларни } y'' = f(x, y, y') \quad (1.3)$$

Тенглама учун шакллантирамиз ва у чегаравий масалаларга геометрик мазмун берамиз .

а) (1.3) тенгламани қаноатлантирувчи $x = a$ ва

$x = b$ ($a < b$) бўлганда берилган $y(a) = A$, $y(b) = B$,

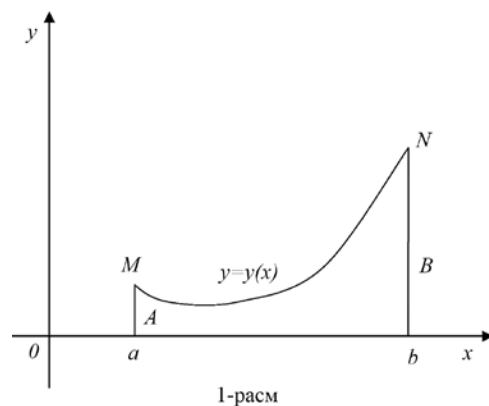
(1.4) қийматларни қабул қилувчи $y = y(x)$ функция

геометрик нуқтаи назардан бу чегаравий масала

(1.3) тенгламанинг $M(a; A)$ ва $N(b; B)$

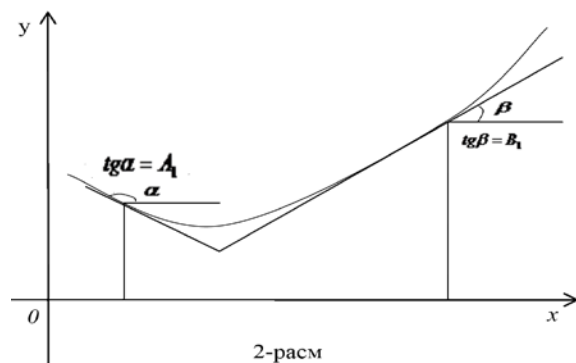
нуқталардан ўтувчи интеграл эгри чизиқни

топишдан иборат (1-расм)

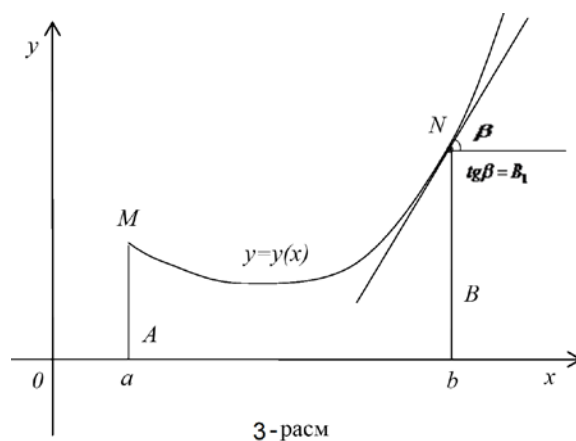


б) (1.3) тенгламанинг шундай $y = y(x)$ ечимини топиш керакки, бу ечим $y'(a) = A_1, y'(b) = B_1$, (1.5) Шартларни қаноатлантирсин. Геометрик нуқтаи назардан бу масала (1.3) тенгламанинг

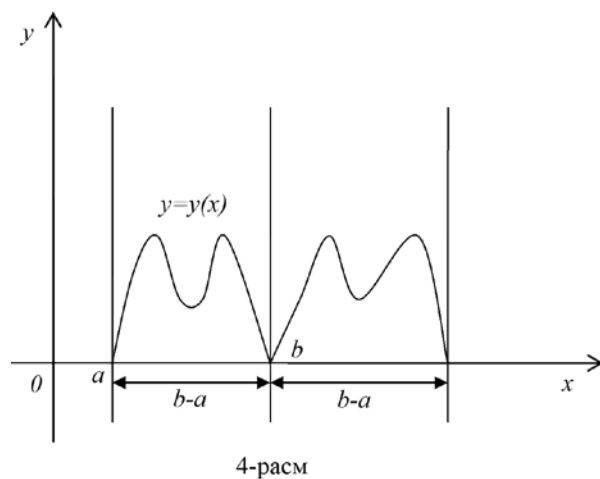
$x=a$ ва $x=b$ тўғри чизикларни $tg(\alpha) = A_1, tg(\beta) = B_1$ муносабатларини қаноатлантирувчи α ва β бурчаклар остида кесувчи $y = y(x)$ интеграл эгри чизикни топишдан иборат (2-расм)



в) (Аралаш чегаравий масала) (1.3) тенгламанинг шартларини қаноатлантирувчи $y=y(x)$ ечимини топиш. Геометрик нуқтаи назардан (1.3) тенгламанинг $M(a; A)$ нуқтадан ўтувчи ва $x=b$ тўғри чизикни $\beta (tg \beta = B_1)$ бурчак остида кесиб ўтувчи интеграл эгри чизикни топишдан иборатдир (3-расм)



г) Чизикли чегаравий шартлар дифференциал тенглама даврий ечимларининг шартларини ҳам ифодаладиган иккинчи тартибли дифференциал тенглама учун даврий ечимларга эга бўлиш шартлари қуйидагича бўлади (4-расм)



$$y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \quad (1.7)$$

(1.1)- (1.2) умумий чегаравий масала :

а) ягона ечимга эга бўлиши мумкин ;

б) бир қанча ёки чексиз кўп ечимларга эга бўлиши мумкин ;

в) ечимларга эга бўлмаслиги мумкин .

1-Мисол. $y'' + y' = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ чегаравий масала чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Тенглама ечимини $y = e^{\lambda x}$ кўринишда изласак, $\lambda^2 + 1 = 0$ бўлиб, $\lambda_{1,2} = \pm i$ бўлади .хусусий ечимлар $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ бўлиб, тенглама $y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ умумий ечимга эга бўлади. Кўйилган чегаравий

шартлардан:
$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \cdot 0 \\ 0 = -c_1 + c_2 \cdot 0 \end{cases}$$
 системани топамиз. Бундан $c_1 = 0$, $c_2 = c$ бўлишини

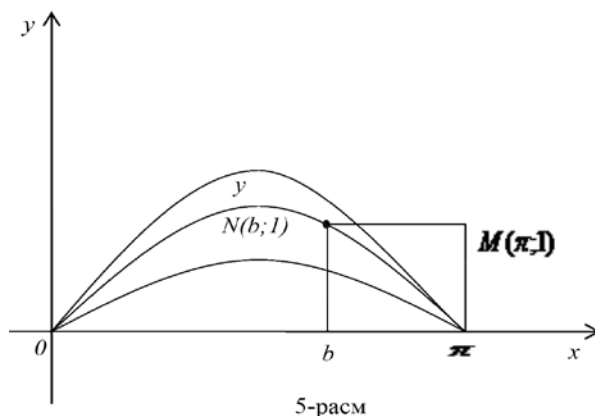
топамиз. Тенглама $y = c \sin x$ ($c \in \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$) кўринишдаги чексиз кўп ечимларга эга.

2-Мисол. $y'' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y(b) = 1$ чегаравий масала $0 < b < \pi$ шартда ягона ечимга эга бўлади. $y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ умумий ечимдан кўйилган чегаравий шартлардан c_1 ва c_2 ни топамиз.

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cos b + c_2 \sin b = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{\sin b}, y_b = \frac{\sin x}{\sin b}$$

3-Мисол. 2-масала $a = \pi$ бўлганда ечимга эга бўлмайди (5-расм)

Дифференциал тенгламалар



системаси учун чегаравий масалалар юқоридагига ўхшаш қўйилиши мумкин (1.2) кўринишдаги чегаравий шартлар барча чегаравий шартларни ўз таркибига ололмайди. Айрим ҳолларда x ; абциссининг айрим қийматларида изланаётган функциянинг ёки унинг x ; ҳосиласининг қиймати берилиши мумкин. Баъзан улардан баъзи бирлари номаълум бўлиб, улар масала шартларидан аниқлаб олиниши мумкин. Бундай масалалар механикада учрайди. Масалан горизонтал қия отилган жисмнинг ҳаракати ҳақидаги, баллистик снаряднинг белгиланган нишонга (жисмга) тегиш ҳақидаги ва ҳоказо масалаларни келтириш мумкин.

2-§ Чизиқли чегаравий масалалар.

Чизиқли чегаравий масалаларнинг баъзи бир хусусий ҳолларини юқорида қарадик. Чизиқли чегаравий масалаларнинг умумий қўйилишини келтирамиз бизда n - тартибли чизиқли

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (2.1)$$
 кўринишдаги бир жинсли бўлмаган оддий дифференциал тенглама берилган бўлсин. Агар (2.1) тенглама учун чегаравий шартлар

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_k^{(\nu)} y^{(\kappa)}(a) + \beta_k^{(\nu)} y^{(\kappa)}(b)] = \gamma_\nu, \quad (2.2)$$

Бунда $\alpha_k^{(\nu)}, \beta_k^{(\nu)}, \gamma_\nu$ - берилган доимий сонлар; $\nu = 1, 2, \dots, n$,

$\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha_k^{(\nu)}| + |\beta_k^{(\nu)}|) \neq 0$ кўринишда берилган бўлса, бундай чегаравий шартларга чизиқли чегаравий шартлар дейилади. Агар $a \leq x \leq b$ бўлганда $f(x) = 0$ ва $\lambda_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) бўлса, бундай ҳолда чизиқли чегаравий масалаларга бир жинсли чегаравий масала дейилади. Акс ҳолда яъни $f(x) \neq 0$ ($a \leq x \leq b$) ва $\lambda_\nu \neq 0$ $\partial \neq 0$ бўлса бундай чизиқли чегаравий масалага бир жинсли бўлмаган чегаравий масала дейилади. Демак, чизиқли чегаравий масалани қуйидагича шакллантириш мумкин: (1.2) тенгламанинг (2.2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ ечимини (функцияни) топишдан иборат.

А. Бир чизиқли чегаравий масала.

Бундай масалани иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама учун шакллантирамиз.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.3)$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (2.4)$$

Бу ерда $a_0(x) \neq 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, i = 1, 2$, $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ функцияларга $[a, b]$ узлуксиз деб қаралади. (2.3)-(2.4) чегаравий масала ҳамма вақт $y(x) \equiv 0$ ечимга эга. (2.3)-(2.4) бир жинсли чизиқли масаланинг нол бўлмаган ечимининг мавжудлик шартини ўрнатамиз.

Фараз қилайлик

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (*)$$

тенглама y_1 ва y_2 чизикли боғланмаган хусусий ечимларга эга бўлсин бундай ҳолда тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.5)$$

кўринишга эга бўлади. Бу ечим қўйилган чегаравий шартларни қаноатлантириши зарур.

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.5) \text{ дан фойдаланиб қуйидагини оламиз}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 [c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)] + \beta_1 [c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a)] = 0 \\ \alpha_2 [c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)] + \beta_2 [c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b)] = 0 \end{cases}$$

c_1 ва c_2 олдидаги коэффициентларни гуруҳлаймиз

$$c_1 [\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)] + c_2 [\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)] = 0,$$

$$c_1 [\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2 [\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = 0$$

қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$C_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a)$, $C_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b)$ Бу ердаги $u = u(x)$ - x нинг исталган функцияси бундай ҳолда

$$\begin{cases} c_1 C_a(y_1) + c_2 C_a(y_2) = 0 \\ c_1 C_b(y_1) + c_2 C_b(y_2) = 0 \end{cases}$$

Система c_1 ва c_2 га нисбатан нол бўлмаган ечимга эга бўлишлиги учун

$$D = \begin{vmatrix} C_a(y_1) & C_a(y_2) \\ C_b(y_1) & C_b(y_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.6) \quad \text{бўлиши зарур ва етарли шундай қилиб (2.3)-}$$

(2.4) чегаравий масала нол бўлмаган ечимга эга бўлишлиги учун фақат ва фақат (2.6) шарт бажарилиши керак экан .

1-Мисол. $y'' - 4y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий масалани қарайлик. Берилган тенгламани умумий ечими $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

кўринишига эга. Қўйилган чегаравий шартлардан фойдалансак, $c_1 \hat{=} c_2$ га нисбатан $c_1 + c_2 = 0$ $c_1 e^2 + c_1 e^{-2} = 0$ Системани оламыз.бу системанинг детерминанти нолдан фарқли, яъни

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{n}^2 & \hat{a}^{-2} \end{vmatrix} = \hat{a}^{-2} - \tilde{n}^2 = \frac{1 - \hat{a}^4}{\tilde{n}^2} \neq 0$$

Қўйилган чегаравий масала фақат $c_1 = c_2 = 0$ бўлганда $y \equiv 0$ ечимга эга.

2-Мисол. $y'' - 4y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, чегаравий масалани қарайлик Берилган тенглама $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ умумий ечимга эга. Бу ечим билан чегаравий шартлардан фойдалансак қуйидагини оламыз.

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c \in R \quad \text{Демак, } c_2 = 0 \quad \text{бўлиб,}$$

c_1 – исталган сон. Чегаравий масала $y = c \sin 2x$ ечимга эга.

2-Мисолни умумлаштирамиз агар $u(x)$ функция (2.3)-(2.4) чегаравий масалани нол бўлмаган хусусий ечимга $y = \sin(x)$ тенглик билан берилади. c – исталган доимий сон.

Б. Бир жинсли бўлмаган чизиқли чегаравий масала .

Бу ерда ҳам иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама билан чегараланамиз.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2.7)$$

тенгламанинг

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \lambda_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \lambda_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. (2.7) тенглама

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.9)$$

умумий ечимга эга. Бунда $y_0(x)$ - (2.7) тенгламанинг хусусий ечими $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ эса (2.7) га мос келувчи бир жинсли тенгламанинг чизиқли боғланмаган хусусий ечимлари.

(2.9) умумий ечимни (2.8) чегаравий шартларга қўйиб, c_i ($i=1,2$) га нисбатаан қуйидагича бир жинсли бўлмаган алгебраик тенгламалар системасини олаимиз.

$$\begin{cases} c_1[\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)] + c_2[\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)] = \gamma_1 - [\alpha_1 y_0(a) + \beta_1 y_0'(a)], \\ c_2[\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] + c_1[\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] = \gamma_2 - [\alpha_2 y_0(b) + \beta_2 y_0'(b)] \end{cases} \quad (2.10)$$

системанинг детерминантини тузамиз.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix}$$

Агар $D \neq 0$ бўлса, у ҳолда (2.10) системанинг c_i ($i=1,2$) ечимлари мавжуд бўлади.

1-Мисол $y'' - 4y = \sin x$ $y(0) = y(1) = 0$ бир жинсли бўлмаган чегаравий масала ечилсин

Ечиш: Берилган тенгламага мос келувчи $z'' - 4z = 0$, бир жинсли тенгламан чизиқли боғланмаган $z_1 = \cos x$ ва $z_2 = \sin x$ хусусий ечимларга эга. Бир жинсли тенглама $z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ умумий ечимига эга. $f(x) = e^{ix}$ и сони характеристик тенгламанинг ($r^2 + 1 = 0$) илдизи бўлади. Шунинг учун берилган тенгламанинг хусусий ечимини

$$y_0(x) = x(A \cos x + B \sin x)$$

қўринишда излаймиз бу ечимдан y_0' ва y_0'' ни топамиз

$$y_0' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y_0'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - x(A \cos x + B \sin x)$$

y_0, y_0' ва y_0'' нинг ифодаларини берилган тенгламага қўйиб олаимиз:

$-2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x) + x(A \cos x + B \sin x) = \sin x$ бу ердан A ва B ни топишга имкон берадиган тенгламалар системасини олиб, у системани ечиб A ва B ни топамиз

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Изланаётган хусусий эчим $y_0 = -\frac{1}{2}x \cos x$ бўлади. Берилган

тенгламанинг умумий ечимини тузамиз:

$$y(x) = z(x) + y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

Бу умумий ечим ва чегаравий шартлар бўйича c_1 ва c_2 ни топамиз

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0 \\ y(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 - \frac{1}{2} \cos 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 = \frac{1}{2} \cos 1 \end{cases}$$

Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли яъни

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{vmatrix} = \sin 1 \neq 0$$

Изланиётган ечим $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1$

Чегаравий масала ягона ечимга эга.

$$Y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

2-Мисол. $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = -1$ бир жинсли бўлмаган

чегаравий масала ечилсин.

Ечиш: Берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$y = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x.$$

Бу ечимни ва чегаравий шартларни эътиборга олиб c_1 ва c_2 доимий сонларни аниқлаймиз

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 1 \\ y(1) = c_1 \sin \pi + c_2 \cos \pi = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 1 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 (-1) = -1 \end{cases}$$

Бу системани ечиб топамиз $c_2 = 1$, c_1 доимий ихтиёрича танланади.

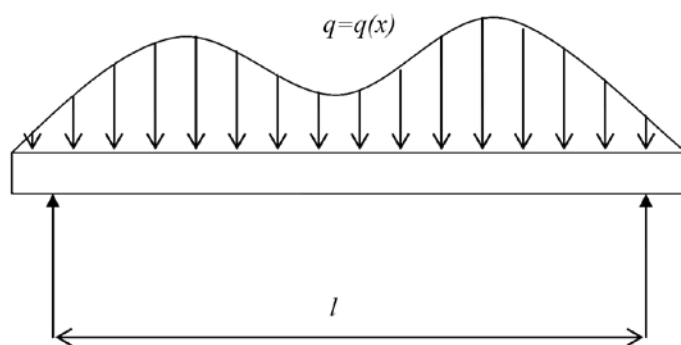
Чегаравий масаланинг изланиётган ечимини

$$y(x) = c_1 \sin \pi x + \cos \pi x$$

Кўринишда оламиз.

3-§. Балка ҳақидаги чегаравий масалалар.

ℓ узунликдаги балкага интенсивлиги $q = q(x)$ бўлган тақсимланган куч таъсир қилади. Балканинг $y = y(x)$ ечими топилсин. Бундай куч таъсиридаги балканинг $y = y(x)$ эгилиши (6-расм)



6-расм

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q$$

(3.1) Тенгламани интеграллаш билан топилади. Бундан ташқари эгилиш балка учларининг маҳкамланиш усулига ҳам боғлиқ бўлади. Қўйилган масалани ечимшда қуйидагича функцияларнинг ўзаро бир-бирига муносабатлари этиборга олинади.

$y = y(x)$ -балканинг эгилиши;

$$\frac{\lambda y}{\lambda x} = \eta - \text{áóðëëëø áóð÷ääè} :$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M - \text{эгиловчан момент}$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = Q - \text{кўндаланг куч}$$

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q - \text{интенсив таъсир қилаётган куч}$$

E -эластиклик модули:

$$J = \int_F y^2 dF - \text{балканинг нейтрал ўқига нисбатан кўндаланг кесимининг}$$

инерция моменти;

EJ -балканинг эгилиш вақтидаги қаттиқлиги (3.1)

тенглама тўртинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган оддий дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими 4 та ихтиёрий доимий

сонга боғлиқ булади. Бу ихтиёрий доимийлар $y(x)$ эгилиш ва унинг ҳосилалари қийматлари бўйича чегаравий шартлардан фойдаланиб топилади.

1. Агар l узунликдаги балканинг иккала учи таянчларга эркин тиралиб турадиган бўлса, у ҳолда балканинг охириги нуқталарида эгилиш ва эгувчи момент нолга тенг бўлади. Ихтиёрий доимийлар $\gamma(x)|_{x=0} = 0$, $\gamma(x)|_{x=l} = 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=l} = 0$ (3.2) Чегаравий шартлардан фойдаланиб топилади.

2. Агар балканинг учлари қаттиқ маҳкамланган бўлса, у ҳолда балканинг охириги нуқталарида эгилиш ва бурилиш бурчаги нолга тенг бўлади. $\gamma(x)|_{x=0} = 0$, $\gamma(x)|_{x=l} = 0$, $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$, $\frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0$ (3.3)

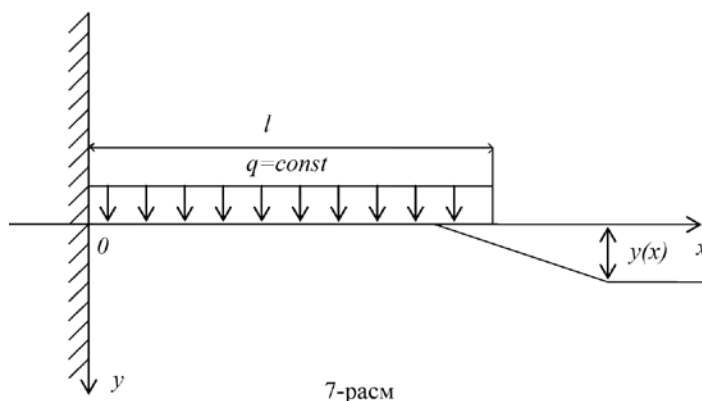
3. Консоль балка яъни бир учи ($x=0$) қаттиқ, маҳкамланган, иккинчи учи ($x=l$) эркин бўлса бундай ҳолда балканинг бир учида эгилиш ва бурилиш бурчаги, иккинчи учида эгувчи момент ва кўндаланг куч нолга тенг бўлади, яъни чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$\gamma(x)|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=l} = 0, \frac{d^3 y}{dx^3}|_{x=l} = 0 \quad (3.4)$$

1-масала. l узунликдаги консоль балкага интенсивлиги q га тенг бўлган текис тақсимланган куч таъсир қилади.

Консоль балканинг максимал эгилиши топилсин.

Ечиш: Балкага таъсир қилувчи куч текис тақсимланган, демак, $q = \text{const}$ (7-расм)



$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q$$

тенгламани $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$ айниятдан фойдаланиб кетма-кет

интеграллаш билан оламиз.

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = qx + c_1,$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} qx^2 + c_1 x + c_2,$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} qx^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3,$$

$$EJy = \frac{1}{24} qx^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4. \text{ Агар}$$

$$y(x)|_{x=0} = 0 \text{ ва } \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0 \text{ чегаравий шартлардан фойдалансак, } c_3 = c_4 = 0$$

бўлишлигини топамиз;

$$\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=l} = 0 \text{ ва } \frac{d^3 y}{dx^3}|_{x=l} = 0 \text{ чегаравий шартлардан фойдалансак } c_1 \text{ ва } c_2 \text{ ни}$$

топамиз: $c_1 = -ql$, $c_2 = \frac{1}{2} ql^2$. Натижада балканинг текис тақсимланган куч

таъсиридаги эчилишини топамиз $y = \frac{q}{24EJ} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2)$ максимал эгилиш

$x = l$ учидан бўлади.

$$y(l) = \frac{ql^4}{8EJ}$$

2-масала. Консоль балканинг $x = l$ учига P тўплама куч вертикаль равишда таъсир қилмоқда.

Балканинг ўз оғирлигини эътиборга олмасдан унинг максимал эгилишини топинг.

Ечиш: Балка эгилишининг дифференциал тенгламаси қаралаётган ҳол учун

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \text{ кўринишига эга. Бу тенгламани олдинги масалада}$$

фойдаланилган айниятга кўра кетма-кет интеграллаб топамиз.

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = c_1, EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = c_1 x + c_2, EJ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3,$$

$$EJy = \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

$$\gamma(x)|_{x=0} = 0 \text{ ва } \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0 \text{ чегаравий шартлардан фойдаланиб, } c_3 = c_4 = 0$$

бўлишлигини топамиз.

$x = l$ нуктада Q кўндаланг куч – P га, эгувчи момент эса $M = pl$ га тенг.

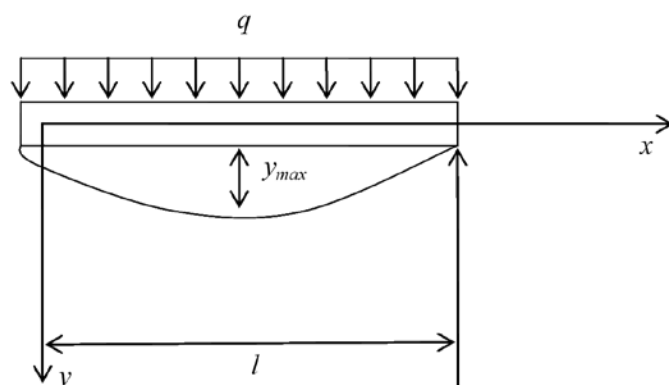
Шунинг учун $c_1 = -P$, $c_2 = Pl$ бўлади.

Демак, $EYy = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{2}plx^2$ максимал ўтиш $x = l$ нуктада бўлади.

$$y(l) = \frac{pl^3}{3EJ}$$

3- масала. l узунликдаги балка q интенсивликка эга бўлган текис тақсимланган юк таъсирида иккита таянчда турибди. Балканинг максимал эгилишини топинг.

Ечиш: Текис тақсимланган юк балканинг уз оғирлиги ҳам бўлиши мумкин. Балка эгилишининг дифференциал тенгламасини оламыз ва уни кетма-кет интеграллаймиз. (8 расм)



$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \rightarrow EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = qx + c_1 \rightarrow$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2}qx^2 + c_1x + c_2 \rightarrow EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \rightarrow$$

$$EJy = \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4$$

Эгувчи момент балканинг иккала учида ҳам нолга тенг

$$\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=0} = 0, \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=l} = 0.$$

Бу чегаравий шартларидан фойдаланиб c_1 ва c_2 ни топамиз:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2}ql. \text{ Балка охирларида унинг эгилиши ҳам нолга тенг}$$

бўлади: $\gamma(x)|_{x=0} = 0, \gamma(x)|_{x=l} = 0$ Бу шартларни эътиборга олсак

$$y(0) = c_4 = 0; c_4 = 0$$

$$y(l) = \frac{1}{24}ql^4 + c_3l - \frac{1}{2}ql^4 = 0 \rightarrow C_3 = \frac{1}{24}ql^3$$

Балканинг қўйилган юк таъсиридаги эгилиши қонуни қуйидагича бўлади:

$$EJy = \frac{9}{24}x(x-l)(x^2 - lx - l^2), \quad \text{симметрик хоссасини эътиборга олсак,}$$

$x = \frac{l}{2}$ бўлганда $\frac{dy}{dx} = 0$ бўлишини кўриш қийин эмас. Балканинг ўртасида эгилиши энг катта бўлади.

$$y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

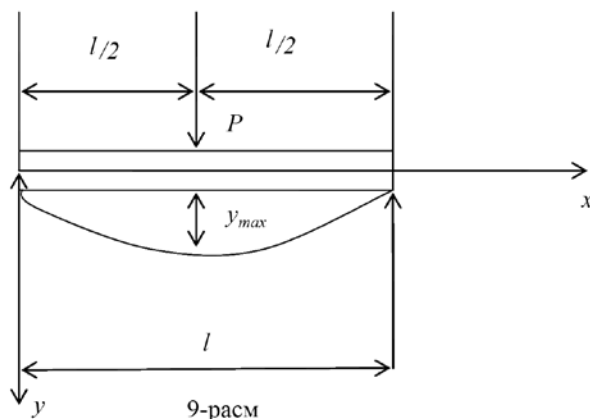
4-масалага. Иккита таянчга қўйилган l узунликдаги балканинг ўртасига P тўпланма куч таъсир қилади.

Балканинг максимал эгилиши топилсин.

Ечиш: Балканинг эгилиши дифференциал тенгламаси $q = 0$ бўлгани учун

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \text{кўринишга эга. (9- расм)}$$

Бу тенгламани кетма-кет интеграллаб топамиз.



$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = c_1 + [p]x > \frac{l}{2}, \quad EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = c_1 x + c_2 + [p(x - \frac{l}{2})]x > \frac{l}{2},$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + [\frac{1}{2} p(x - \frac{l}{2})^2]x > \frac{l}{2},$$

$$EJy = \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + [\frac{1}{6} p(x - \frac{l}{2})^3]x > \frac{l}{2}$$

Чегаравий шартлардан фойдаланиб, топамиз:

Агар $x = 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ бўлса, y ҳолда $c_4 - c_2 = 0$ бўлади;

Агар $x = l$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ бўлса, у ҳолда

$$\left. \begin{aligned} c_1 l + \frac{1}{2} p l &= 0 \\ \frac{1}{6} c_1 l^3 + c_3 x + \frac{1}{48} p l^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{бу системани ечиб топамиз:}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} p, \quad c_3 = \frac{1}{16} p l^2$$

Р тўплама куч таъсирида балканинг олган эгилиши:

$$EJy = \frac{px}{48} (3l^3 - 4x^2) + \left[\frac{p}{48} (2x - l)^3 \right] x > \frac{1}{2}.$$

Максимал эгилиш $x = \frac{\ell}{2}$ нуқтада бўлади.

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P\ell^3}{48EJ}$$

5-масала: Охирги нукталари шарнир маҳкамланган эластиклик модули k га тенг. Эластик асосга эга бўлган l узунликдаги балкага интенсивлиги q га тенг текис тақсимланган куч таъсир қилади. Балканинг ўртасидаги эгилишни топинг.

4-§ Хос қийматлар ҳақидаги масала. Штурм-Лиувилл масаласи.

$$\left. \begin{aligned} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y + \lambda y &= 0, a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Бир жинсли чегаравий масалани қараймиз. (4.1) Бир жинсли чегаравий масала ҳамма вақт $y(x) \equiv 0$ ечимга эга бўлади. Бундай ечим амалий нуктаи назардан унча аҳамиятга эга эмас. Кўпчилик ҳолларда (4.1) масаланинг нол бўлмаган ечимларини топиш масаласи назарий ва амалий жиҳатдан муҳим аҳамиятга эга. (4.1) чегаравий масалада қатнашаётган λ параметрни вариациялаб унинг баъзи бир қийматларида (4.1) чегаравий масаланинг нол бўлмаган ечимларини топиш мумкин.

Штурм-Лиувилл масаласи қуйидагича қўйилади: λ параметрнинг шундай қийматини топиш керакки, бир жинсли тенглама қўйилган чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ва $(a; b)$ ораликда аниқланган нол бўлмаган ечимга эга бўлсин. λ параметрнинг нол бўлмаган ечимларига мос келувчи $\lambda = \lambda_i$ қийматларига масаланинг хос сонлари, $y_i(x)$ нол бўлмаган ечимларига эса масаланинг хос функциялари дейилади.

$$1. \quad y'' + \lambda y = 0 \quad (4.2)$$

Штурм-Лиувилл масаласини қараймиз: (4.2) тенгламанинг $[0; \pi]$ ораликда аниқланган $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нол бўлмаган ечимларга мос келадиган λ параметрнинг қийматлари топилсин.

Ечиш: 1-ҳол. $\lambda = 0$ бўлсин. $y'' = 0$ тенглама $y = c_1 x + c_2$ умумий ечимга эга бўлади. қўйилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ягона ечим Ox ўқидан иборат тўғри чизикдан иборат бўлади, яъни бу ҳолда масала $y \equiv 0$ ечимга эга. Биз нол бўлмаган ечимни излаймиз λ ҳам нолдан фарқли бўлиши керак.

2-ҳол. $\lambda < 0$ бўлсин. Бундай ҳолда (4.2) тенглама $y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ умумий ечимга эга. Чегаравий шартлардан фойдаланиб, c_1 ва c_2 аниқлашга имкон берадиган системани топамиз

$$\left. \begin{aligned} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 &= 0, \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow c_1 = c_2 = 0 \text{ бўлади.}$$

$$\text{Чунки } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Яна биз $y \equiv 0$ нол ечимни олдик. Демак, λ - манфий сон бўлмаслиги керак экан.

3-ҳол. $\lambda > 0$ бўлсин. (4.2) тенгламанинг умумий ечимини курамиз $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$.

c_1 ва c_2 ни шундай танлашга танлашга уринамизки, қўйилган чегаравий шартлар бажарилсин

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \end{cases}$$

Биринчи тенгламадан $c_1 = 0$ бўлишлиги келиб чиқади. Иккинчи тенглама эса $c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ кўринишини олади. Бизни c_2 нинг нол бўлмаган қийматлари қизиқтиради. Акс ҳолда $y \equiv 0$ бўлади. λ сон шундай бўлиши керакки, $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ бўлиши керак, я'ни $\lambda = k^2 (k = 1, 2, \dots)$. λ нинг бундай қийматлари учун $c_1 = 0$ бўлганда умумий ечимдан нол бўлмаган $y = c_2 \sin kx (k = 1, 2, \dots)$ ечимни оламиз. c_2 - нолдан фарқли ихтиёрий доимий сон ва уни $c_2 = 1$ десак ҳам бўлади.

Шундай қилиб, λ нинг изланаётган қийматлари

$\lambda = \lambda_k = k^2 (k = 1, 2, \dots)$ бўлиб, берилган тенглама кўринишини олиб

$y'' + k^2 y = 0 (k > 0 - \text{бутунсон})$ нол бўлмаган ечимларга эга.
 $y = y_k = \sin kx (k = 1, 2, 3, \dots)$

$\lambda_k = k^2$ сонларга Штурм-Лиувилл масаласининг хос сонлари, бу хос сонларга мос келувчи $y_k = \sin kx$ нол бўлмаган ечимларга эса хос функциялар дейилади.

2 $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ чегаравий масала текширилсин. Хос сонлар ва хос функциялар топилсин.

Ечиш: Берилган тенгламанинг умумий ечимини курамиз

$$y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

Чегаравий шартлар бу ечимни қаноатлантириши керак

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0, \\ c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 \sin \lambda = 0$$

Чегаравий масала нол бўлмаган ечимга эга бўлиши учун $\sin \lambda = 0$ бўлиши керак. Бу тенглама $\lambda = \pm \pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \dots$ ечимларга эга бўлиши керак. λ параметрнинг бу қийматлари чегаравий масаланинг хос қийматлари бўлади.

Шунингдек

$$k^2 = x^2 \pi^2 (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

Сонлар ҳам чегаравий масаланинг хос сонлари бўлади, бу хос сонларга

$$y = c_2 \sin \lambda x \quad (\lambda = \pm 1; \pm 2; \pm 3, \dots)$$

Хос ечимлар (функциялар) мос келади.

5-§. Дифференциал тенгламаларни ўзига қўшма кўринишга келтириш ҳақида.

Агар иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламада y' олдидаги коэффициент y'' олдидаги коэффициентнинг ҳосиласига тенг бўлса, яъни

$$P(x)y'' + P'(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.1)$$

ёки

$$(P(x)y')' + q(x)y = 0$$

Кўринишидаги тенгламага иккинчи тартибли ўзига қўшма иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенглама дейилади. Бу ердаги $P(x)$ ва $q(x)$ - x нинг функцияси бўлиб, бирор (a, b) оралиқда узлуксиз ҳисобланади.

Хар қандай иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламани ўзига қўшма бўлган кўринишга келтириш мумкин.

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (5.2)$$

Тенгламани қарайлик. $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ коэффициентлар (a, b) да узлуксиз ва $P_0(x) \neq 0$ бўлсин.

(5.2) тенгламанинг иккала қисмини бирор $\mu = \mu(x)$ функцияга кўпайтирайлик:

$$P_0(x)\mu(x)y'' + P_1(x)\mu(x)y' + P_2(x)\mu(x)y = 0$$

$\mu(x)$ функцияни

$$P_1(x)\mu(x) = (P_0(x)\mu(x))'$$

тенглик бажариладиган қилиб танлаймиз. Бу тенгламани $\mu(x)$ га нисбатан ечамиз.

$$P_1(x)\mu(x) = P_0'(x)\mu(x) + P_0(x)\mu'(x),$$

$$P_0(x)\mu'(x) = (P_1(x) - P_0'(x))\mu(x),$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_1(x)}{P_0(x)} - \frac{P_0'(x)}{P_0(x)},$$

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx - \ln|P_0(x)|,$$

$$\ln|\mu(x) \cdot P_0(x)| = \int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx,$$

$$\mu(x)P_0(x) = e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx}$$

$\mu(x)$ нинг бу топилган ифодасини (5.2) тенгламага қўямиз ва оламиз.

$$e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y = 0 \quad (5.3)$$

Бу ўзига қўшма тенгламадир. қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} = P(x), \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} = q(x)$$

(5.3) тенглама қуйидаги кўринишни олади.

$$P(x)y'' + P'(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.1)$$

ёки

$$(P(x)y')' + q(x)y = 0.$$

Бу ердаги $P(x)$ ва $q(x)$ функциялар (a,b) да узлуксиз. Бундан ташқари $P(x)$ узлуксиз дифференциалланувчи ва мусбат.

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (5.4)$$

Тенглама ўзига қўшма тенгламадир. Ўзига қўшма бўлган (5.1) тенгламани ҳамма вақт (5.4) кўринишга келтириш мумкин.

Бунинг учун эркин ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз

$$t = \int \frac{dx}{P(x)} \rightarrow dt = \frac{dx}{P(x)} \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{P(x)} \rightarrow \frac{dx}{dt} = P(x).$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{P(x)} \right) \frac{1}{P(x)} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{P^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{P'(x)}{P^2(x)} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{P(x)} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{P^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{P'(x)}{P^2(x)}$$

$\frac{dy}{dx}$ va $\frac{d^2y}{dx^2}$ лар учун топилган ифодаларни (5.1)га қўямиз.

$$P(x) \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{P^2(x)} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{P'(x)}{P^2(x)} \cdot P(x) + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{P'(x)}{P(x)} + q(x)y = 0$$

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + q(x)y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + P(x)q(x)y = 0$$

олинган тенглама (5.4) кўринишдаги тенгламадир.

$$Q(x) = P(x)q(x)$$

Энди ўзига қўшма бўлган

$$(P(x)y')' + \lambda q(x)y = 0 \quad (5.5)$$

Тенгламани қараймиз. Бу тенглама

$$y(a) = 0, y(b) = 0 \quad (5.6)$$

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ва (a, b) да аниқланган нол бўлмаган ечимларга эга бўлсин. Юқорида Штурм-Лиувилл чегаравий масаласида λ параметрнинг хос қийматлари нол ва манфий сон бўлаолмаслигига ишонч ҳосил қилган эдик. Штурм-Лиувилл масаласига хос қийматлар фақат мусбат сонлар бўлишлигини чегаравий масалаларнинг умумий назарияси ҳам тасдиқлайди. Хос сонларнинг мавжудлигини улар дискрет чексиз тўплам бўлиб, ол ўқнинг мусбат қисмида жойлашган монотон ўсувчи кетма-кетлик ташкил қилишлигини кўрсатиш мумкин. Хос қийматлардан ташкил топган

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots (\lambda_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да ∞ га яқинлашади. Хар бир λ_n хос сонга y_n хос функция мос келади. Бу хос функциялар (a, b) ораликда бўлади.

Ўзгармас сонгача аниқликда аниқланган бўлиб, шу (a, b) ораликда роса $(n-1)$ марта нолга айланади. Ўзаро тенг бўлмаган хос сонларга мос келувчи

хос функцияларнинг $[a, b]$ да $q(x)$ кўпайтувчи билан ортогонал бўлишлигини кўрсатиш мумкин, яъни

$$\int_a^b q(x) y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

Исботлаш учун (5.5) тенгламанинг ўзига қўшмалик хусусиятидан фойдаланамиз. қуйидаги айниятларни э'тиборга оламиз:

$$\begin{aligned} (p(x)y_n')' + \lambda_n q(x)y_n &= 0 \\ (p(x)y_m')' + \lambda_m q(x)y_m &= 0 \end{aligned} \quad a < x < b$$

Бу тенгликлардан биринчисининг иккала қисмини y_m га, иккинчисининг иккала қисмини эса y_n га кўпайтириб, иккинчи тенгликдан биринчи тенгликни хадлаб айириб оламиз:

$$\int_a^b [y_m(p(x)y_n')' - y_n(p(x)y_m')'] dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q(x)y_n y_m dx$$

Бу тенгликнинг чап қисмини бўлаклаб интеграллаймиз:

$$y_m p(x)y_n' \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y_n' y_m' dx - y_n p(x)y_m' \Big|_a^b + \int_a^b p(x)y_m' y_n' dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q(x)y_n y_m dx$$

Бу ерда олинган тенгликнинг чап қисми (5.6) чегаравий шартларга кўра нолга тенг. $\lambda_n \neq \lambda_m$ бўлганлиги учун $n \neq m$ бўлганда

$$\int_a^b q(x)y_n y_m dx = 0$$

Бўлиши келиб чиқади.

6-§ Стерженнинг кўндаланг тебранишлари.

Асосий чегаравий масалалар

Тўғри чизикли стерженнинг кўндаланг тебранишлари хақидаги масалани қараймиз. Бундай стерженнинг кўндаланг тебранишлари

$$(6.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (c = \sqrt{\frac{E_p^M}{M}})$$

Кўринишдаги гиперболик типдаги тенглама билан тавсифланади.

1. Чегаравий ва бошланғич шартлар:

Энг содда ҳолларда стержен охирги учлари эркин бўлиши мумкин, ё қаттиқ маҳкамланган бўлиши мумкин, ёки шарнир – оперт маҳкамланган бўлиши мумкин. Стержен учун чегаравий шартлар қуйидагича бўлиши мумкин:

а) Стержен учлари эркин. Бундай учлар учун эгувчи момент ва кўндаланг куч

нолга тенг бўлади эгувчи момент $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ҳосилага, кўндаланг куч эса $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$

ҳосилага боғлиқ бўлади. Шунинг учун қаралаётган ҳолда чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=\ell} = 0 \quad (6.2)$$

б) Стержен учлари қаттиқ маҳкамланган. Бундай учларда эгилиш ва бурилиш бурчаги нолга тенг бўлади. Стерженнинг эгилиши $y = y(x)$ га, бурилиш

бурчаги $\frac{\partial y}{\partial x}$ ҳосилага боғлиқ бўлади. Шунинг учун қаралаётган ҳолда

чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$y(0) = y(\ell) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0 \quad (6.3)$$

в) Стержен учлари шарнир-оперт маҳкамланган бўлсин. Стерженнинг бундай бекинган учларида эгилиш ва эгувчи момент нолга тенг бўлади. Эгувчи

момент $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ҳосилага боғлиқ бўлади. Шунинг учун қаралаётган ҳолда

чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$y(0) = y(\ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=\ell} = 0 \quad (6.4)$$

Бундан ташқари стерженнинг бир учи эркин, иккинчи учи қаттиқ маҳкамланган бир учи шарнир-оперт маҳкамланган, иккинчи учи эркин, бир учи қаттиқ маҳкамланган бўлиши ҳам мумкин, иккинчи учи шарнир-оперт маҳкамланган бўлиши ҳам мумкин. Эркин кўчиш ва бурилишни чегараловчи шартларга геометрик шартлар дейилади. Бундай шартлар қуйидагича:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (6.5)$$

Эгувчи момент ва кўндаланг кучни чегараловчи шартларга динамик шартлар дейилади. Бундай шартлар қуйидагича бўлади.

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad (6.6)$$

2. Стержень ўз кўндаланг тебранишларининг шакллари

(6,1) стержен эркин тебранишлари негламасининг энг содда даврий ечимларини

$$y(x,t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha) \quad (6.7)$$

кўринишда излаймиз. Стержень кўндаланг эркин тебранишларини вақт ўтиши билан гармоник қонун бўйича ўзгарадиган тебранишлар деб қараямиз. $\varphi(x)$ функцияга эса стержень ўқи нуқталарининг мувозанат ҳолатдан максимал оғишларининг (максимал) тақсимот қонунини ўрнатувчи тебранишнинг бош шакли деб аталади. Тўғри стержень бош тебранишлари, яъни стерженнинг ўз тебранишлари чексиз тўплам ташкил қилади.

Ҳар бир ўз тебранишларга (хос тебранишларга) P частотанинг аниқ бир қиймати мос келади. P нинг бундай қийматларига хос частоталар дейилади. Хос частоталарни танлашни ва биз танланган частотага мос хос тебранишлар шаклини аниқланишни хос тебранишлар тенгламасини кўйилган чегаравий шартлар бўйича ечиш билан амалга оширилади.

Бир жинсли масала хос тебранишларини ифодаловчи тенгламани олиш мақсадида (6,7) ни (6,1) га қўямиз ва $\sin(pt + \alpha)$ га қисқартиргандан кейин

$$\varphi^{IV}(x) - \hat{e}^4 \varphi(x) = 0, \quad (6.8)$$

$$\text{бунда} \quad k^4 = \frac{cp^2}{EJ} \quad (6.9)$$

тенгламани оламиз. (6.8) тенглама 4 та чизиқли боғланмаган хусусий ечимларга эга:

$$\cos kx, \sin kx, chkx, Shkx.$$

(6.8) тенгламанинг умумий ечимини қурамыз

$$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx + C chkx + D shkx \quad (6.10).$$

Бу умумий ечим, яъни функция 4 та ихтиёрий A, B, C, D доимий сонларни ўзида сақлайди. Бу доимий сонлар $\varphi(x)$ функциянинг қўйилган чегаравий шартларни қаноатлантиришидан, яъни стержень учларининг маҳкамланиш усулларида фойдаланиб аниқланади. Қаралаётган ва қараладиган барча ҳолларда чегаравий шартлар сони ихтиёрий доимийлар сонига тенг бўлиб, ҳар бир учга иккитадан шарт тўғри келади.

Кўпчилик амалий масалаларни ечишда (6.8) тенгламанинг қуйидаги хусусий ечимларидан фойдаланиш қўлай бўлади.

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(ch kx + \cos kx), \\ T(x) &= \frac{1}{2}(sh kx + \sin kx), \\ U(x) &= \frac{1}{2}(ch kx - \cos kx), \\ V(x) &= \frac{1}{2}(sh kx - \sin kx) \end{aligned} \right\} \quad (6.11).$$

S, T, U, V функцияларга А.Н.Крилов функциялари дейилади. Бу функциялар ва уларнинг учинчи тартибли ҳосилаларига қадар қийматларини $x=0$ нуқтада топамиз.

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 1, & S'(0) &= 0, & S''(0) &= 0, & S'''(0) &= 0, \\ T(0) &= 0, & T'(0) &= 1, & T''(0) &= 0, & T'''(0) &= 0, \\ U(0) &= 0, & U'(0) &= 0, & U''(0) &= 1, & U'''(0) &= 0, \\ V(0) &= 0, & V'(0) &= 0, & V''(0) &= 0, & V'''(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Бу миқдорлардан тузилган детерменант 1 га тенг (6.11) функциялар (6.8) тенглама интегралларининг фундаментал системасини ташкил қилади.

Бу функциялар ва уларнинг 1-, 2-, 3- ва 4- тартибли ҳосилаларининг жадвалини тузамиз. Бу жадвалдан улар орасидаги боғланишларни кўриш мумкин.

А.Н.Крилов функциялари	Биринчи ҳосила	Иккинчи ҳосила	Учинчи ҳосила	Тўртинчи ҳосила
$S(x)$	$kV(x)$	$k^2U(x)$	$k^3T(x)$	$K^4S(x)$
$T(x)$	$kS(x)$	$k^2V(x)$	$k^3U(x)$	$k^4T(x)$
$U(x)$	$kT(x)$	$K^2S(x)$	$K^3V(x)$	$k^4U(x)$
$V(x)$	$kU(x)$	$K^2T(x)$	$K^3S(x)$	$K^4V(x)$

Крилов функцияларининг афзаллик томонлари шундан иборатки, бу функциялар ёрдамида $x=0$ учиди кўйилган шартларни қаноатлантирувчи ва бошқа $x=l$ учиди чегаравий шартлар билан аниқланадиган иккита ўзгармас сонни ўзида сақловчи (6.8) тенгламанинг умумий интеграл учун ифодани дарҳол ёзиш мумкин.

3. Асосий масалалар.

А. Учлари Шарнир-оперт маҳкамланган бир жинсли стерженнинг тебранишлари.

Бу ҳолда стерженнинг чап учиди $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи интеграл ўз таркибига $x=0$ бўлганда ўзининг иккинчи тартибли ҳосиласи билан нолга айланадиган функцияни олиши керак. (6.12)дан равшанки, бундай функциялар T ва V дан иборат бўлади. Умумий ечим.

$$\varphi(x) = BT(x) + DV(kx)$$

Кўринишидан иборат. B ва D доимийлар стерженнинг ўнг учига ($x \neq l$) кўйилган шартлардан аниқланади. Агар $x=l$ у Шарнир-оперт маҳкамланган бўлса, у ҳолда

$$\varphi(l) = BT(kl) + DV(kl) = 0,$$

$$\varphi''(l) = k^2 [BV(kl) + DT(kl)] = 0$$

$$\text{Бу ердан} \quad \begin{vmatrix} T(kl) & V(kl) \\ V(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow T^2(kl) - V^2(kl) = 0.$$

Элементар функцияларда $\sin kl = 0$ бўлади.

Бу тенглама қаралаётган ҳолда частоталар тенгламаси бўлади.

Бу тенгламадан топамиз

$$k_i l = i\pi \quad (i=1,2,3\dots)$$

Маълумки $k_i^4 = \frac{\mu P_i^2}{EJ}$ у ҳолда

$$P_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad (i=1,2,3\dots) \quad (6.13)$$

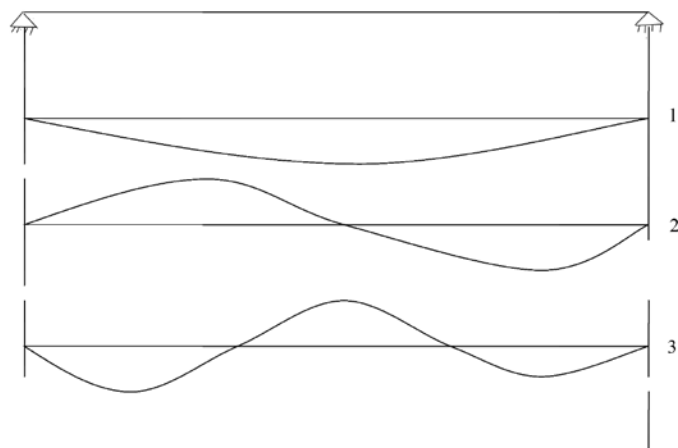
Системанинг хос частоталари топдик.

Хос тебранишлар шаклини эса (6.10)

дан оламиз.

$$\varphi_i(x) = B_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (i=1,2,3,\dots). \quad (6.14).$$

Биринчи учта хос тебранишларнинг шакли чизмада тасвирланган (10-расм)



10-расм

Умумий ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_i \cos p_i t + N_i \sin p_i t) \sin \frac{i\pi x}{l}$$

Бу ердаги M_i , N_i доимийлар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади.

Б. $x=0$ учи қаттиқ маҳкамланган ва учи $x=l$ эркин бўлган стерженнинг тебранишлари. қаралаётган ҳолда чегаравий шартлар

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi'(0) = 0, \\ \varphi''(l) &= \varphi'''(l) = 0. \end{aligned}$$

Кўринишга эга бўлади.

(6.8) тенгламанинг $x = 0$ учга қўйилган шартларни қаноатлантирувчи интегралли

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx) \quad (6.15)$$

кўринишга эга бўлади. $x = l$ учига қўйилган шартлар

$$\begin{cases} CS(kl) + DT(kl) = 0, \\ CV(kl) + DS(kl) = 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

Тенгламалар системаси билан ифодаланади.

$$\begin{vmatrix} S(kl) & T(kl) \\ CV(kl) + S(kl) \end{vmatrix} = 0,$$

(6.17) тенгламанинг биринчи тўртта илдизини топамиз (Бу илдизларни жадвал ёрдамида ҳам топиш мумкин)

$$kl = y_1 = 1,875; \quad y_2 = 4,694; \quad kl = y_3 = 7,855; \quad kl = y_4 = 10,996.$$

(6.9) формула бўйича биринчи 4 та асос частоталарни топамиз.

$$p_1 = \frac{V_1^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}, \quad p_2 = \frac{V_2^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}, \quad p_3 = \frac{V_3^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}, \quad p_4 = \frac{V_4^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}.$$

i -хос тебраниш тенгламасини қуйидагича тузамиз. (6.16) тенгламаларнинг биринчисидан ёки иккинчисидан ни га алмаштириб, коэффициентлар нисбатини топамиз

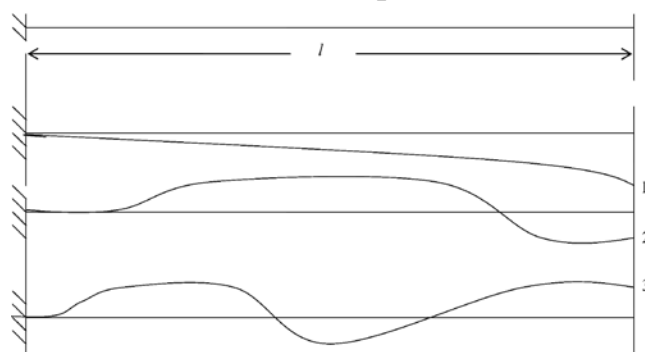
$$\frac{D}{C} = -\frac{S(k_i l)}{T(k_i l)} = -\frac{V(k_i l)}{S(k_i l)}$$

нисбатнинг бу қийматини (6.15) тенгламага қўйиб оламиз.

$$\varphi_i(x) = C \left[U(k_i x) - \frac{S(k_i l)}{T(k_i l)} V(k_i l) \right] = C \left[U(k_i l) - \frac{V(k_i l)}{S(k_i l)} V(k_i l) \right]$$

11-расмда хос тебранишларнинг дастлабки 3 та шакли тасвирланган

11-расм



11-расм

В. Учлари қаттиқ маҳкамланган стерженнинг тебранишлари учун

чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

$$\varphi(0) = \varphi'(l) = 0,$$

Бу дастлабки иккита шартни қаноатлантирувчи интеграл

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx) = 0$$

Кўринишга эга бўлади. $x=l$ учда эса

$$\begin{cases} CU(kl) + DV(kl) = 0, \\ CT(kl) + DU(kl) = 0, \end{cases} \text{ системани оламиз.}$$

Бу системадан қуйидагини оламиз.

$$\begin{vmatrix} U(kl) & V(kl) \\ T(kl) & U(kl) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow U^2 - TV = 0 \rightarrow chkl \cos kl - 1 = 0 \quad (6.18)$$

тенгламанинг нол бўлмаган иккита илдизини жадвал ёрдамида топамиз.

$$ke = V_1 = 4,73; \quad ke = V_2 = 7,85$$

Тебранишларнинг частоталари қуйидагича:

$$P_1 = \frac{V_1^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}, \quad P_2 = \frac{V_2^2}{e^2} \sqrt{\frac{EJ}{M}}.$$

Тебранишларнинг шакли эса

$$\varphi_i(x) = C \left[U(k_i x) - \frac{U(k_i l)}{V(k_i l)} V(k_i x) \right] = C \left[U(k_i x) - \frac{T(k_i l)}{U(k_i l)} V(k_i x) \right]$$

Тебранишларнинг дастлабки иккита шакли 12-расмда график равишда тасвирланган. 12-расм.

Учлари эркин бўлган
стерженнинг тебранишлари
қаралаётган ҳолда чегаравий
шартлар қуйидагича бўлади:

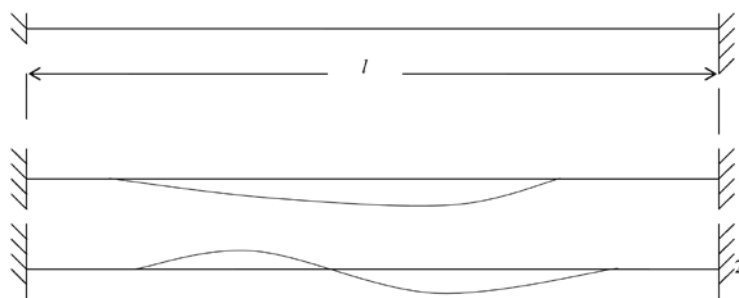
$$\varphi'''(0) = \varphi'''(l) = 0,$$

$$\varphi''(l) = \varphi''(0) = 0.$$

(6.19)

Стерженнинг $x=0$ учигаги шартларни қаноатлантирувчи интеграл

$$\varphi(x) = AS(kx) + BT(kx)$$



12-расм

Кўринишга эга бўлади. Учидаги чегаравий шартлардан эса

$$\begin{cases} AU(kl) + BV(kl) = 0 \\ AT(kl) + BU(kl) = 0 \end{cases}$$

Системани оламир. Бу системадан

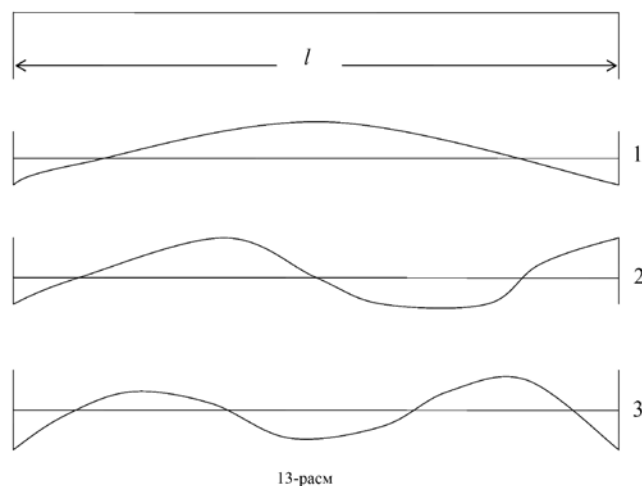
$$\begin{vmatrix} U(kl) & V(kl) \\ T(kl) & U(kl) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow U^2 - TV = 0 \rightarrow chkl \cos kl - 1 = 0$$

Частоталар тенгламасини топамиз. Бу частота тенгламаси стержень учлари

каттик махкамланган ҳолда олинган (6.18) частота тенгламасидан фарк қилмайди.

Қаралаётган ҳолда стержень тебранишлари шаклининг дастлабки 3 таси

(13-расмда) график равишда тасвирланган.



13-расм

Д. Стерженнинг $x=0$ учи каттик махкамланган ва $x=l$ учи эса Шарнир-оперт махкамланган. Масаланинг чегаравий шартлари қуйидагича:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(l) &= \varphi''(l) = 0. \end{aligned}$$

хк0 учидати чегаравий шартларни қаноатлантирувчи интеграл

$$\varphi(x) = C\ddot{E}(kx) + DV(kx)$$

кўринишга эга. Учида $x=l$

$$\begin{cases} CU(kl) + DV(kl) = 0 \\ CS(kl) + DT(kl) = 0 \end{cases}$$

системани оламир. Бу системадан частоталар тенгламасини оламир.

$$\begin{vmatrix} U(kl) & V(kl) \\ S(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow U(kl)T(kl) - S(kl)V(kl) = 0 \rightarrow chkl \sin kl - sh(kl) \cos(kl) = 0 \rightarrow tgkl = thkl$$

Жадвал ёрдамида бу тенгламанинг нол бўлмаган энг кичик илдизларини топамиз.

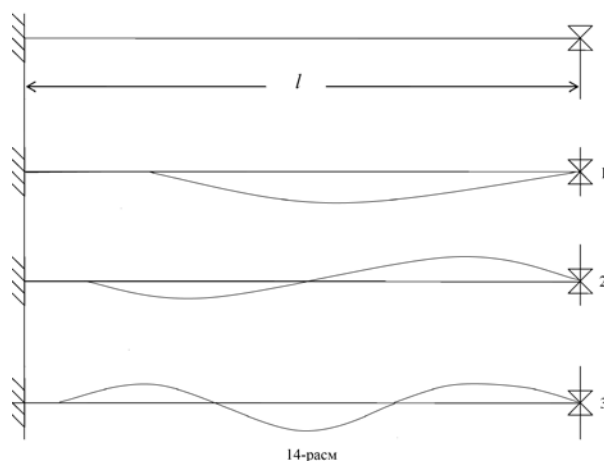
$$\nu_1 = kl = 3,93 \quad \nu_2 = kl = 7,07 \quad \nu_3 = kl = 10,21$$

Тебранишларнинг шаклини ифодаловчи тенглама

$$\varphi(x) = C \left[U(kx) - \frac{U(kl)}{V(kl)} V(kx) \right] = C \left[U(kx) - \frac{S(kl)}{T(kl)} V(kx) \right]$$

Кўринишга эга бўлади.

қаралаётган ҳолда стержень тебранишларининг дастлабки 3 та шакли график равишда 14-расмда тасвирланган.



7-§. Масалалар ечиш:

А.Ф.Филипповнинг «Дифференциал тенгламалар бўйича масалар тўплами» ўқув қўлланмасининг 14-§. Чегаравий масалалар. Мавзусидаги 751-785 масалалар оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга бағишланган.

1-масала (Ф760). $x^2 \phi'' - 6\phi = 0$; $\phi(0)$ – чегараланган, $\phi(1) = 2$ чегаравий масала ечилсин.

Ечиш: Берилган тенглама $\phi_1 = \frac{1}{6} \delta^3$ ечимга эга. $\phi'' + P(x)\phi' + q(x)\phi = 0$

тенгламанинг иккинчи $\phi_2(x)$ ечими $\phi_2 = \phi_1 \int \frac{e^{-sp(x)} dx}{\phi_1^2}$ формула бўйича топилади.

Бизда

$$p(x) = 0.$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{6} x^3 \int \frac{dx}{1/36x^6} = 6x^3 \int x^{-6} dx = 6x^3 \frac{x^{-6+1}}{-6+1} = -\frac{6}{5} x^3 \frac{1}{x^5} = -\frac{6}{5} \frac{1}{x^2}. \phi_2 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Берилган тенгламанинг умумий ечимини қурамыз

$$\phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = \frac{c_1}{6} x^3 - \frac{6}{5} c_2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Берилган чегаравий шартлардан фойдалансак, оламиз

$$\begin{cases} |\phi(0)| \leq c, y(1) = 2, \\ \phi = \frac{c_1}{6}x^3 - \frac{6}{5}c_2 \frac{1}{x^2} \rightarrow \end{cases} \begin{cases} 2 = \frac{c_1}{6} \cdot 1 - \frac{6}{5}c_2 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

Чегаравий масалаланинг изланаётган ечими $\phi = 2x^3$ бўлади.

2-Масала. (Ф763). Нинг қандай қийматларида чегаравий масала ечимларга эга бўлмайди?

Ечим. Берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Унинг умумий еим унга мос келувчи бир жинсли тенгламанинг умумий ечими билан ўзининг қандайдир хусусий ечими индексга тенг.

$\phi(x) = Z(x) + y_1(x)$. Бу ердаги $Z(x) - Z'' + AZ = 0$ тенгламанинг умумий ечими. Бу умумий ечим $Z = C_1 \cos \sqrt{a}x + x + c_2 \sin \sqrt{a}x$ кўринишга эга, $\phi_1(x)$ эса берилган тенгламанинг хусусий ечими. Бу хусусий $\phi_1(x) = \frac{1}{a}$ кўринишга эга.

Берилган тенгламанинг умумий ечими $\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{a}x + c_2 \sin \sqrt{a}x + \frac{1}{a}$ кўринишга эга. Берилган чегаравий шартлар ва умумий ечимдан фойдаланиб c_1 ва c_2 ни топамиз:

$$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0,$$

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{a}x + c_2 \sin \sqrt{a}x + \frac{1}{a} \rightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{1}{a} = 0, \\ c_1 \cos \sqrt{a} + c_2 \sin \sqrt{a} + \frac{1}{a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} \cos \sqrt{a} + c_2 \sin \sqrt{a} + \frac{1}{a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -1, \\ c_2 = \frac{\cos \sqrt{a} - 1}{a \sin \sqrt{a}} \end{cases}$$

Тенгламанинг изланаётган ечими

$$\phi(x) = -\frac{1}{a} \cos \sqrt{a}x + \frac{\cos \sqrt{a} - 1}{a \sin \sqrt{a}} \sin \sqrt{a}x + \frac{1}{a}$$

Кўринишга эга бўлиб, бу ечим $\sin \sqrt{a} = 0, \quad a \neq 0$ бўлганда маъносини йўқотади.

Демак, берилган чегаравий масала $a = (2\eta - 1)^2 \eta^2, \eta = 1, 2, 3, \dots$ бўлганда ечимга эга бўлмайди.

3-масала (Ф763) $x^2 \phi'' = x \phi; \phi(1) = 0 (a > 1)$ чегаравий масаланинг хос сонлари ва хос функцияларини топинг.

Ечиш: Берилган тенгламада $x = e^t$ десак, $\frac{d^2 \phi}{dx^2} = (\phi''_t - \phi'_t) e^{-t}$ бўлади.

Берилган тенглама $(\phi''_t - \phi'_t) + (-\lambda) \phi = 0$ кўринишини олади

Бу тенгламанинг ечимини $\phi = e^{\lambda t}$ кўринишда излаб, $\lambda^2 - \lambda + (-\lambda) = 0$ тенгламани топамиз.

Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm i \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}}$ кўринишга эга. Берилган

тенгламанинг умумий ечими $\phi(x) = \sqrt{x} (c_1 \cos \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln x$

Бу умумий ечим ва чегаравий шартлардан фойдаланиб

c_1 ва c_2 ўзгармас сонларни топамиз.

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 \cdot 1 + 1 \cdot c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \sqrt{a} \cos \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln a + c_2 \sqrt{a} \sin \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln a = 0. \end{cases}$$

$$C \sqrt{a} \sin \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln a = 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}} \ln a = k\pi \rightarrow -$$

$$-\lambda - \frac{1}{4} = \left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 \rightarrow \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi_k = \sqrt{x} \sin \frac{k\pi \ln x}{\ln a}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Мустақил ишлар учун топшириқлар.

1. Учлари каттиқ маҳкамланган l узунликдаги балкага интенсивлиги q га тенг бўлган текис тақсимланган куч таъсир қилади.

Балканинг максимал эгилишини топинг. Жавоб. $\phi\left(\frac{l}{z}\right) = \frac{Pl^3}{384EJ}$

2. Учлари қаттиқ маҳкамланган l узунликдаги балканинг ўртасига P тўплама куч вертикал равишда таъсир қилади. Балканинг максимал эгилишини топинг.

Жавоб. $\phi\left(\frac{l}{z}\right) = \frac{Pl^3}{192EJ}$

қуйидаги чегаравий масалалар учун хос сонлар ва хос функцияларни топинг.

3. $\phi'' + \lambda \phi = 0; \quad \phi'(0) = \phi(l) = 0.$

Жавоб. $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2}, \quad \phi_n = A_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right], (n = 0, 1, 2, \dots)$

4. $\phi'' + \lambda \phi = 0, \quad \phi'(0) \phi'(l) = 0.$

Жавоб. $\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad \phi_n = \cos \frac{n\pi x}{l} (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

5. $(x\phi') + \frac{\lambda \phi}{x} = 0; \quad \phi(1) = \phi(l\pi) = 0.$

Жавоб. $\lambda_n = n^2, \quad \phi_n = A_n \sin(n \ln x), n = 0, 1, 2, 3, \dots$

6. $\phi'' + \lambda^2 \phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \phi(1) = 0.$

Жавоб. $k^2 = \lambda^2 \pi^2 (\lambda = 1, 2, 3),$

$\phi = C_2 \sin \lambda \pi x (\lambda = \pm 1; \pm 2; \dots).$

7. $\phi'' + \lambda \phi; \quad \phi'(l) = 0.$

Жавоб. $\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} (k = 1, 2, 3, \dots)$

$\phi_k = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, k = 1, 2, 3, \dots$

8. $\phi'' + \lambda \phi; \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi'(l) = 0.$

$\lambda_k = \frac{-k^2 \pi^2}{l^2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\lambda_k = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тенгламаларнинг ечимларини топинг.

$$9. \quad x^2 \phi'' + 5x\phi' + 3\phi = 0; \quad \phi'(\delta) = 3, \delta \rightarrow +\infty \Rightarrow \quad \phi(\delta) = 0(\delta^{-2}).$$

$$10. \quad x^2 \phi'' - 2x\phi' + 2\phi = 0; \quad \delta \rightarrow 0 \Rightarrow \quad \phi(\delta) = \hat{1}(\delta), \quad \phi(1) = 3.$$

Жавоб $\phi(\delta) = 3\delta^2$.

Адабиётлар.

1. Б.П.Демирович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова Численные Методы анализа. Москва «Наука» 1967.
2. И.М.Бабаков. Теория колебания. Москва «Наука» 1968.
3. К.К. Пономарев. Специальный курс высшей математики. Москва «Высшая школа» 1974.
4. А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям Москва «Наука» 1979.