АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 515.12

Жиемуратов Рзамурат Есбергенович

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ σ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2010

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, академик АН РУз **Аюпов Шавкат Абдуллаевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент **Рахимов Абдугафур Абдумажидович**

кандидат физико-математических наук **Жураев Турсунбай Файзиевич**

Ведущая организация : Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Защита состоится «____ » _______________ 2010 г. в « ____ » часов в ауд. 4-16 на заседании Специализированного Совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий по адресу: 100125, Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертаций можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз

Автореферат разослан «____» __________________ 2010г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета,
кандитат физико-математических наук А.А.Заитов

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Ковариантные функториальные конструкции возникли в общей топологии практически с самого начала ее зарождения. Например, метрика Хаусдорфа на множестве непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства, топология Вьеториса на множестве непустых замкнутых подмножеств топологического пространства, топологическое произведение топологических пространств и другие.

Начало исследований нормальных ковариантных функторов в категории компактов и их непрерывных отображений и в различных других категориях восходит к фундаментальной работе Е.В.Щепина, где он выделил ряд элементарных свойств ковариантных функторов в категории компактов и ввел понятие нормального функтора.

В 1998 году Т.Н.Радул начал исследовать функтор O слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов в категории компактов и их непрерывных отображений. Т.Н.Радулом было показано, что функтор $O : Comp \to Comp$ не является нормальным и, следовательно, исследование этого функтора намного сложнее, чем исследование нормальных функторов. Появление функтора $O : Comp \to Comp$ связано с тем, что в последнее время развивается теория нелинейных функционалов. Кроме того, функторы P – вероятностных мер, $\exp$ – экспоненты и λ – суперрасширения являются подфункторами функтора O. Функтор O можно продолжить на категорию $Tych$ – тихоновских пространств и их непрерывных отображений аналогично конструкции А.Ч.Чигогидзе или, методом предложенным В.В.Федорчуком. Следуя конструкции А.Ч.Чигогидзе в работах Р.Б.Бешимова рассмотрено продолжение $O_\beta : Tych \to Tych$ функтора O на категорию $Tych$, которое называется функтором слабо аддитивных функционалов с компактными носителями. Другое продолжение $O \circ \beta : Tych \to Comp$ функтора O рассмотрено в работах А.А.Заитова. Функтор $O_\beta : Tych \to Tych$, обладает многими свойствами, которыми обладает функтор O. Но множество таких функционалов слишком узко, например, оно не содержит функционалов, носители которых не компактны. А множество $O(\beta X)$ слишком широкое. Отметим, что операция $O \circ \beta : Tych \to Comp$ перехода от заданного тихоновского пространства X к компакту $O(\beta X)$ является функтором. Функтор $O \circ \beta$ переводя тихоновские пространства в компакт, не сохраняет многих специфических свойств заданного тихоновского пространства. Поэтому естественно рассматривать пространства функционалов, заключенные между пространствами $O_\beta(X)$ и $O(\beta X)$. Далее, в работах

Ш.А.Аюпова и А.А.Заитова были введены функторы: O_R – функтор радоновых слабо аддитивных функционалов и O_τ – функтор τ-гладких слабо аддитивных функционалов. Однако для заданного вещественно полного тихоновского пространства X пространства $O_R(X)$ и $O_\tau(X)$ не обязаны быть вещественно полными. В связи с этим Ш.А.Аюповым поставлена задача: выделить такую часть компакта $O(\beta X)$, которая является вещественно полной.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию топологических и категорных свойств функтора O_σ – σ-гладких слабо аддитивных функционалов в категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений.

Степень изученности проблемы. Изучение функтора O было начато в работах Т.Н.Радула. Им было доказано, что этот функтор является мономорфным, эпиморфным, сохраняет вес и пересечения, но не сохраняет прообразы. Категорные свойства функтора O_β – слабо аддитивных функционалов с компактными носителями, а также топологические свойства пространства $O_\beta(X)$ были изучены в работах Р.Б.Бешимова. Р.Б.Бешимовым также были изучены кардинальные инварианты пространства $O_\beta(X)$. В работах Т.Н.Банаха, А.Ч.Чигогидзе, В.В.Федорчука были исследованы пространства $P_R(X)$ – радоновых вероятностных мер, $P_\tau(X)$ – τ-гладких вероятностных мер и $P_\sigma(X)$ – σ-гладких вероятностных мер. В работах А.А.Заитова были рассмотрены топологические и категорные свойства функтора $O \circ \beta$. В работах Ш.А.Аюпова и А.А.Заитова были рассмотрены некоторые категорные и топологические свойства функторов O_R и O_τ. В то же время топологические и категорные свойства функтора O_σ оставались малоизученными.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследования проводились по проекту Ф.1.1.3 программы фундаментальных исследований IФ «Математика, механика, информатика».

Цель и задачи исследования.

1) Установить критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющий порядок функционалов;

2) Дать описание вещественного пополнения тихоновского пространства с помощью пространств σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов;

3) Установить категорные свойства функтора σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов

4) Установить топологические свойства пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов.

Объекты исследования: σ-гладкие слабо аддитивные, сохраняющие порядок, нормированные функционалы, пространство и функтор этих функционалов.

Предмет исследования: общая топология, теория ковариантных функторов.

Методы исследования. В диссертации применены методы общей топологии, теории ковариантных функторов и функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

- критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов;
- монадичность функтора σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов;
- вещественная полнота пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов;
- описание вещественного пополнения тихоновского пространства с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов;
- условие совпадения пространств τ-гладких слабо аддитивных и σ-гладких слабо аддитивных функционалов;
- оценка для веса пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов;

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

– дан критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов. Показано, что функтор O_σ переводит z-вложения во вложения.

– установлено, что функтор O_σ, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является монадичным.

– доказано, что для всякого тихоновского пространства X пространство $O_\sigma(X)$ является вещественно полным. Дано описание вещественного пополнения тихоновских пространств с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов.

– приведено достаточное условие совпадения пространств τ-гладких слабо аддитивных и σ-гладких слабо аддитивных функционалов.

– показано, что вес пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов находится между весом его вещественного пополнения и z-весом заданного тихоновского пространства X.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

В работе изучены некоторые топологические и категорные свойства пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследованиях в общей топологии, функциональном анализе и теории ковариантных функторов, а также в специальных курсах для магистров в высших учебных заведениях.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» (Институт математики и информационных технологий АН РУз, руководитель: академик Ш.А.Аюпов, 2007-2010 гг.), на семинаре «Современные проблемы теории управления и теории слоений» (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: проф. А.Я.Нарманов, 2008-2010 гг.), на городском семинаре по функциональному анализу (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: проф. В.И.Чилин, 2010 г.), на семинаре при Специализированном Совете Д.015.17.01 (Институт математики и информационных технологии АН РУз, руководитель: академик Ш.А.Аюпов, 2010 г.). А также результаты докладывались на республиканской научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий», посвященной к 90-летию НУУз (Ташкент, 2008 г.) и «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Нукус, 2009 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[7], список которых приведен в конце автореферата. В работе [1] метод изложения, а в работе [3] идеи доказательств теорем 1 и 2 принадлежат А.А.Заитову, остальные результаты в этих работах принадлежат диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 49 наименований. Полный объем диссертации – 72 страницы.

2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации приводятся необходимые определения и обозначения. В первом параграфе первой главы приводятся сведения из теории ковариантных функторов, действующих в категории $Comp$ – компактных пространств и их непрерывных отображений.

Во втором параграфе приводятся сведения, относящиеся к σ-гладким слабо аддитивным, сохраняющим порядок, нормированным функционалам, которые являются основными объектами исследования.

Пусть X – компакт, $C(X)$– банахово пространство непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbf{R}$ с обычными алгебраическими операциями и $\sup$-нормой. Для каждого $c \in \mathbf{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$ для всех $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$.

Будем говорить, что $\varphi \le \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \to \mathbf{R}$ называется:

1) слабо аддитивным, если $\mu(\varphi + c_X) = \mu(\varphi) + c$ для любых $\varphi \in C(X)$ и $c \in \mathbf{R}$;

2) сохраняющим порядок, если для любой пары функций $\varphi, \psi \in C(X)$ неравенство $\varphi \le \psi$ влечет $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$;

3) нормированным, если $\mu(1_X) = 1$.

Для компакта X через $O(X)$ обозначается множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов $\mu : C(X) \to \mathbf{R}$. Множество функционалов, удовлетворяющих первым двум условиям этого определения, обозначим через $W(X)$. Множество $W(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\mu \in O(X)$ относительно этой топологии образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \left\{ \nu \in O(X) : \ |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon \right\}$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, k$ и $\varepsilon > 0$.

Пусть X – тихоновское пространство, $C_b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbf{R}$ с поточечными алгебраическими операциями. Для функции $\varphi \in C_b(X)$ положим $\|\varphi\| = \sup\left\{ |\varphi(x)| : x \in X \right\}$. Пространство $C_b(X)$ с введенной нормой является банаховым пространством.

Напомним, что функционал $\mu \in O(X)$ сосредоточен на замкнутом подмножестве A нормального пространства X, если $\mu \in O(A)$. Наименьшее по включению замкнутое множество $A \subset X$, для которого $\mu \in O(A)$, называется носителем функционала $\mu \in O(X)$ и обозначается через $\operatorname{supp}\mu$.

Рассмотрим некоторую сеть $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$. Если для каждой точки $x \in X$ имеем $\varphi_\alpha(x) \ge \varphi_\beta(x)$ при $\alpha \prec \beta$, и $\lim \varphi_\alpha(x) = 0$, то говорят, что сеть $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$ – монотонно убывающая направленность, поточечно сходящейся к нулю на X.

Определение 1.2.1. Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется *сильно* τ-*гладким*, если $\mu(\pm \varphi_\alpha) \to 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Определение 1.2.2. Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется *сильно радоновым*, если $\mu(\pm\varphi_\alpha) \to 0$ для любой направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$ равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Обозначим через $O_\beta(X)$ (соответственно, через $O_R(X)$ и $O_\tau(X)$) пространства всех слабо аддитивных функционалов с компактными носителями (соответственно, радоновых слабо аддитивных и τ-гладких слабо аддитивных функционалов).

Говорят, что последовательность $\{\varphi_n\} \subset C(\beta X)$ есть монотонно убывающая последовательность, поточечно сходящейся к нулю на X, если для каждой точки $x \in X$ имеем $\varphi_n(x) \geq \varphi_m(x)$ при $n \leq m$, и $\lim \varphi_n(x) = 0$.

Определение 1.2.3. Функционал $\mu \in W(\beta X)$ назовем *сильно σ-гладким*, если $\mu(\pm\varphi_n) \to 0$ для любой монотонно убывающей последовательности $\{\varphi_n\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Для тихоновского пространства X через $W_\sigma(X)$ обозначим множество всех сильно σ-гладких функционалов $\mu \in W(\beta X)$. Положим

$$O_\sigma(X) = \{\mu \in W_\sigma(X) \ : \ \mu(1_X) = 1\}.$$

Наделим множества $W_\sigma(X)$ и $O_\sigma(X)$ топологией поточечной сходимости.

Для краткости сильно σ-гладкие назовем σ-гладкими функционалами.

Очевидно, что имеют место следующие включения

$$O_\beta(X) \subset O_R(X) \subset O_\tau(X) \subset O_\sigma(X) \subset O(\beta X)$$

для любого тихоновского пространства X, и равенства

$$O_\beta(X) = O_R(X) = O_\tau(X) = O_\sigma(X) = O(\beta X)$$

для произвольного компакта X.

В первом параграфе второй главы дается критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов и изучаются некоторые категорные свойства функтора O_σ.

Пусть $X, Y \in Comp$ и $f \ : \ X \to Y$ – непрерывное отображение. Отображение $O(f) \ : \ O(X) \to O(Y)$ определяется по формуле

$$(O(f)(\mu))(\varphi)=\mu(\varphi\circ f),\ \ \mu\in O(X),\ \ \varphi\in C_b(Y). \qquad (1)$$

Для тихоновских пространств X,Y и непрерывного отображения $f\ :\ X\to Y$, отображение $O_\sigma(f)\ :\ O_\sigma(X)\to O_\sigma(Y)$ определим по формуле

$$O_\sigma(f)=O(\beta f)\big|_{O_\sigma(X)},$$

где $\beta f\ :\ \beta X\to\beta Y$ – (единственное) продолжение f на βX, и отображение $O(\beta f)\ :\ O(\beta X)\to O(\beta Y)$ определено по формуле (1).

Здесь имеет место следующая

Теорема 2.1.2. Конструкция O_σ является ковариантным функтором, действующим на категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений, продолжающим функтор $O\ :\ Comp\to Comp$.

Пусть K – замкнутое подмножество компакта X. Положим

$$\mu(\lambda\chi_K)=\inf\{\mu(\varphi)\ :\ \varphi\in C(X),\ \lambda\chi_K\le\varphi\le\lambda_X\},\text{ если } \lambda>0,$$

$$\mu(\lambda\chi_K)=\sup\{\mu(\varphi)\ :\ \varphi\in C(X),\ \lambda_X\le\varphi\le\lambda\chi_K\},\text{ если } \lambda<0,$$

где χ_K – характеристическая функция множества K, и $\lambda\in\mathbf{R}$.

Следующее утверждение является основным результатом первого параграфа второй главы, и дает критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов.

Теорема 2.1.6. Функционал $\mu\in W(\beta X)$ является σ-гладким тогда и только тогда, когда $\mu(\lambda\chi_K)=0$ для всякого замкнутого в βX G_δ-множества $K\subset\beta X\setminus X$ и для произвольного $\lambda\in\mathbf{R}$.

Таким образом, согласно этой теореме, множество всех σ-гладких функционалов можем написать в виде

$$O_\sigma(X)=\{\mu\in O(\beta X)\ :\ \mu(\lambda\chi_K)=0 \text{ для всякого замкнутого в } \beta X \ G_\delta\text{-множества } K\subset\beta X\setminus X \text{ и для произвольного } \lambda\in\mathbf{R}\}.$$

Во втором параграфе второй главы устанавливается одно из важных свойств ковариантных функторов – монадичность функтора σ-гладких слабо аддитивных функционалов.

Понятие монады введено С. Эйленбергом и Дж. Муром в связи с теорией сопряженных функторов.

Определение 2.2.5. Монадой (или тройкой) на категории C называется тройка $\mathbf{T}=\langle F,\psi,\eta\rangle$, состоящая из ковариантного функтора

$F : C \to C$ и естественных преобразований $\eta : Id \to F$ (единица) и $\psi : F^2 \to F$ (умножение). При этом для каждого объекта X выполнены равенства:

$$\psi_X \circ F(\eta_X) = Id_{F(X)} \qquad \text{(правая единица)},$$
$$\psi_X \circ \eta_{F(X)} = Id_{F(X)} \qquad \text{(левая единица)},$$
$$\psi_X \circ F(\psi_X) = \psi_X \circ \psi_{F(X)} \qquad \text{(ассоциативность умножения)}.$$

Функтор F называется монадичным, если он вкладывается в некоторую монаду.

Следующая теорема является основным результатом второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.6. Функтор $O_\sigma : Tych \to Tych$ является монадичным в категории $Tych$.

В третьей главе диссертации изучены топологические свойства пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. В первом параграфе доказано, что пространство $O_\sigma(X)$ является вещественно полным для любого тихоновского пространства X. Кроме того, предложен метод построения вещественного пополнения тихоновского пространства с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов.

Для компакта X через $P(X)$ обозначается пространство вероятностных мер на X, которое является подпространством $O(X)$. Далее, для тихоновского пространства X через $P_\varepsilon(X)$ обозначается: пространство вероятностных мер с компактными носителями на X, когда $\varepsilon = \beta$; пространство вероятностных радоновых мер на X, когда $\varepsilon = R$; пространство вероятностных τ-гладких мер на X, когда $\varepsilon = \tau$; и пространство вероятностных σ-гладких мер на X, когда $\varepsilon = \sigma$.

Ключевым результатом при доказательстве основного результата этого параграфа является следующее

Предложение 3.1.2. Пусть X – тихоновское пространство. Тогда пространство $P_\varepsilon(X)$ замкнуто в $O_\varepsilon(X)$, где $\varepsilon = \beta, R, \tau, \sigma$.

Напомним, что топологическое пространство X называется вещественно полным (или $\mathbf{R}$-полным, или полным по Хьюитту), если оно является тихоновским пространством и не существует тихоновского пространства $\widetilde{X}$, которое удовлетворяло бы следующим двум условиям:

1. существует гомеоморфное вложение $g : X \to \widetilde{X}$, такое, что $g(X) \neq \overline{g(X)} = \widetilde{X}$;

2. для каждой непрерывной вещественной функции $f : X \to \mathbf{R}$ найдется непрерывная функция $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbf{R}$, такая, что $\tilde{f}g = f$.

Подпространство X пространства Y называется C-вложенным (в Y), если каждая непрерывная функция $\varphi : X \to \mathbf{R}$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : Y \to \mathbf{R}$.

Для всякого тихоновского пространства X существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) вещественно полное пространство vX, содержащее X в качестве всюду плотного C-вложенного подпространства, которое можно отождествлять с подпространством

$$vX = \{ x \in \beta X \ : \ K \cap X \neq \varnothing \text{ для всякого замкнутого } G_\delta\text{-множества } K \subset \beta X \text{, содержащего } x \} \subset \beta X$$

Пространство vX называется вещественным (или хьюиттовым) пополнением пространства X.

В работах Т.Н.Банаха, А.Ч.Чигогидзе, В.В.Федорчука было показано, что пространства $P_R(X)$ и $P_\tau(X)$ в общем случае не обязаны быть вещественно полными даже тогда, когда рассматриваемое пространство X вещественно полно. Кроме того, известно, что каждое замкнутое подпространство вещественно полного пространства вещественно полно. Откуда в силу предложения 3.1.2 вытекает, что пространства $O_R(X)$ радоновых слабо аддитивных функционалов и $O_\tau(X)$ τ-гладких слабо аддитивных функционалов в общем случае не обязаны быть вещественно полными. Естественно возникает вопрос о том, что какая часть компакта $O(\beta X)$ является вещественно полным для всякого тихоновского пространства X.

Следующий результат дает ответ на этот вопрос.

Теорема 3.1.3. Для всякого тихоновского пространства X пространство $O_\sigma(X)$ является вещественно полным.

Основным результатом первого параграфа третьей главы является следующая теорема, которая дает описание вещественного пополнения тихоновского пространства с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных функционалов.

Теорема 3.1.4. Замыкание $\overline{X} \cong O_1(\beta X) \cap O_\sigma(X)$ тихоновского пространства X в $O_\sigma(X)$ является вещественным пополнением пространства X, где $O_1(\beta X) = \{ \mu \in O(\beta X) \ : \ |\operatorname{supp} \mu| = 1 \}$.

Во втором параграфе дано достаточное условие совпадения пространств σ-гладких слабо аддитивных и τ-гладких слабо аддитивных функционалов. Кроме того, изучено поведение весов тихоновских пространств при воздействии на них функтором O_σ.

Для вещественно полного пространства X через $h(X)$ обозначают наименьший из кардиналов k таких, что всякий компакт $K \subset \beta X \setminus X$ может быть покрыт семейством замкнутых G_δ-множеств компакта βX, не пересекающихся с X, и имеющих мощность $< k$. Через m обозначим наименьший кардинал k, для которого аксиома $MA(k)$ не верна.

Теорема 3.2.2. Пусть X – вещественно полное пространство такое, что $h(X) \le m$. Тогда $O_\sigma(X) = O_\tau(X)$.

Подпространство X пространства Y называется z-вложенным, если каждое функционально открытое подмножество из X представимо в виде $G = X \cap V$, где V – функционально открытое множество в Y.

Определение 3.2.4. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств X и Y называется z-вложением, если f – вложение X в Y и подпространство $f(X)$ z-вложено в Y.

Теорема 3.2.5. Если отображение $f : X \to Y$ является z-вложением тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y, то отображение $O_\sigma(f) : O_\sigma(X) \to O_\sigma(Y)$ является вложением.

z-весом тихоновского пространства X называется наименьшее из весов компактов, содержащих X в качестве z-вложенного подпространства. z-вес тихоновского пространства X обозначается через $z - w(X)$.

Теорема 3.2.11. Для любого бесконечного тихоновского пространства X имеем

$$w(vX) \le w(O_\sigma(X)) \le z - w(X).$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию топологических и категорных свойств пространства σ-гладких слабо аддитивных функционалов. В первой главе диссертации приведены необходимые понятия и факты из теории ковариантных нормальных функторов, действующих в категории $Comp$ – компактов и их непрерывных отображений.

Во второй главе диссертации исследованы категорные свойства функтора σ-гладких слабо аддитивных функционалов. Доказано, что конструкция O_σ является ковариантным функтором, действующим в категории $Tych$ – тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Дан критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов. Установлено, что функтор O_σ, действующий на категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, является монадичным.

В третьей главе изучены топологические свойства пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Доказано, что для всякого тихоновского пространства X пространство $O_\sigma(X)$ является вещественно полным. Дано описание вещественного пополнения тихоновских пространств с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Приведено достаточное условие совпадения пространств τ-гладких слабо аддитивных и σ-гладких слабо аддитивных функционалов. Показано, что функтор O_σ переводит z-вложения во вложения. Показано, что вес пространства $O_\sigma(X)$ σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов находится между весом его вещественного пополнения и z-весом заданного тихоновского пространства X.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, академику АН РУз, профессору Шавкату Абдуллаевичу Аюпову за ценные советы и внимание к работе.

4. СПИСОК ОПУБЛИКОВАНЫХ РАБОТ:

1. Жиемуратов Р.Е., Заитов А.А. О вещественной полноте пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов // Владикавказский Математический Журнал, Владикавказ 2009, Том 11, выпуск 1, С. 22-28.
2. Жиемуратов Р.Е. О монадичности функтора O_σ слабо аддитивных функционалов // Узбекский Математический Журнал, Ташкент 2009, №2, с. 62-69.
3. Заитов А.А., Жиемуратов Р.Е. О весе пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов // Узбекский Математический Журнал, Ташкент 2009, №4, с. 61-69.
4. Заитов А.А., Жиемуратов Р.Е. Совершенные отображения и функторы // Материалы республиканский научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» посвященной к 90-летию НУУз, Ташкент 2008, С. 98-100.

5. Заитов А.А., Жиемуратов Р.Е. О вещественной полноте пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений» посвященная 70-летию академика В.А.Садовничего. МГУ, 2008, С.26.
6. Жиемуратов Р.Е. Функтор σ-гладких слабо аддитивных функционалов и совершенные отображения // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Нукус 2009, С. 82-83.
7. Jiemuratov R.E. Perfectly $\varkappa$-normal spaces and functor O_σ // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, June 30 – July 4, 2009. Almaty, Vol.1. P. 63.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Р.Е.Жиемуратовнинг 01.01.04 − геометрия ва топология ихтисослиги бўйича «Чизиқли бўлмаган σ-силлиқ суст аддитив функционаллар фазосининг топологик ва категорик хоссалари» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Калит сўзлар: σ-силлиқ суст аддитив функционал, категория, ковариант функтор.

Тадқиқот объекти: σ-силлиқ суст аддитив, тартиб сақловчи, нормаланган функционаллар, бу функционаллар фазоси ва функтори.

Ишнинг мақсади: σ-силлиқ суст аддитив функционаллар фазосининг топологик ва категорик хоссаларини ўрганиш.

Тадқиқот усули: умумий топология, ковариант функторлар назарияси ва функционал анализнинг усулларидан фойдаланилди.

Олинган илмий натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат: O_σ конструкцияси Тихонов фазолари ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категориясида ковариант функтор бўлиши исботланди. Суст аддитив, тартиб сақловчи функционалларнинг σ-силлиқ бўлиш критерияси келтирилди. O_σ функтори монада ҳосил қилиши кўрсатилди. Ихтиёрий X Тихонов фазоси учун σ-силлиқ суст аддитив функционалларнинг $O_\sigma(X)$ фазоси ҳақиқий тўла бўлиши исботланди. σ-силлиқ суст аддитив функционаллар фазоси ёрдамида Тихонов фазоларининг ҳақиқий тўлдирмалари тавсифи берилди. τ-силлиқ суст аддитив ва σ-силлиқ суст аддитив функционаллар фазоларининг устма-уст тушиш етарли шарти келтирилди. O_σ функтори z-жойлаштиришни жойлаштиришга ўтказиши кўрсатилди. Ихтиёрий X Тихонов фазоси учун σ-силлиқ суст аддитив, тартиб сақловчи, нормаланган функционалларнинг $O_\sigma(X)$ фазосининг салмоғи унинг ҳақиқий тўлдирмаси салмоғи ва берилган Тихонов фазосининг z-салмоғи орасида бўлиши исботланди.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий аҳамиятга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: ишда келтирилган натижалар ва методлар умумий топология, функционал анализ ва ковариант функторлар назарияларидан махсус курслар ўқишда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертация натижалари умумий топологияда, ковариант функторлар назариясида ва функционал анализда қўлланилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Жиемуратова Р.Е. на тему «Топологические и категорные свойства пространства нелинейных σ-гладких функционалов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Ключевые слова: σ-гладкий слабо аддитивный функционал, категория, ковариантный функтор.

Объекты исследования: σ-гладкие слабо аддитивные, сохраняющие порядок, нормированные функционалы и их пространство и функтор.

Цель работы: исследование топологических и категорных свойств пространства σ-гладких слабо аддитивных функционалов.

Методы исследования: применены методы общей топологии, теории ковариантных функторов и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна: полученные в диссертации результаты являются новыми и они состоят следующем. Показано, что конструкция O_σ является ковариантным функтором, действующим в категории $Tych$ – тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Дан критерий σ-гладкости слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов. Установлено, что функтор O_σ является монадичным. Доказано, что для всякого тихоновского пространства X пространство $O_\sigma(X)$ является вещественно полным. Дано описание вещественного пополнения тихоновских пространств с помощью пространства σ-гладких слабо аддитивных функционалов. Приведено достаточное условие совпадения пространств τ-гладких слабо аддитивных и σ-гладких слабо аддитивных функционалов. Доказано, что функтор O_σ переводит z-вложения во вложения. Показано, что вес пространства $O_\sigma(X)$ σ-гладких слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов находится между весом его вещественного пополнения и z-весом заданного тихоновского пространства X.

Практическая значимость: результаты диссертации имеют теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы, представленные в работе могут быть использованы при чтении специальных курсов по общей топологии, функциональном анализе и теории ковариантных функторов.

Область применения: общая топология, функциональный анализ и теории ковариантных функторов.

RESUME

Thesis of **Jiemuratov Rzamurat Esbergenovich** on the scientific degree competition of the doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.04 – geometry and topology

subject:
«Topological and categorical properties of the spaces of nonlinear σ-smooth functionals ».

Keywords: σ-smooth order- preserving functional, category, functor.

Subject of the inquiry: σ-smooth weakly additive, order- preserving, normed functionals and their space and functor.

Aim of the inquiry: to investage topological and categorical properties of the spaces of σ-smooth order- preserving functionals.

Methods of inquiry: methods of general topology, covariant functors theory and functional analysis have been used.

The results achieved and their novelty: results obtained in the thesis are new and consist of the following: It is proven that the construction O_σ is a covariant functor, acting in the category of Tychonoff spaces and their continuous maps. A criteria is given for σ-smoothness of weakly additive, order- preserving functionals. It is shown that if $f : X \to Y$ is a z-embedding between Tychonoff spaces, then the map $O_\sigma(f) : O_\sigma(X) \to O_\sigma(X)$ is an embedding. It is shown that the functor O_σ forms a monada. It is proven that the space $O_\sigma(X)$ is Hewitt complete for every Tychonoff space X.

A description is given for the Hewitt completions of Tychonoff spaces in terms of the spaces of σ-smooth order-preserving functionals. We give a condition for coincidence of the spaces of τ-smooth weakly additive and σ-smooth weakly additive functionals. It is shown that weight of the space $O_\sigma(X)$ of σ-smooth weakly additive functionals is between the weight of Hewitt completions and z-weight of the given Tychonoff space X.

The practical value: the results of the thesis have a theoretical character.

Degree of application and economic effectivity: Results and methods introduced in the work can be used in special courses on general topology, functional analysis and theory of covariant functors.

Sphere of usage: the results of the thesis may be used in general topology, covariant functors theory and functional analysis.