ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ОПЕРАЦИОН ҲИСОБ

фани бўйича замонавий педагогик технология асосида
ёзилган маъруза матнлари

ГУЛИСТОН – 2008

Оператцион ҳисоб фани бўйича замонавий педагогик технология асосида ёзилган маъруза матнлар 98 бет, Гулистон 2008

Математика таълим йўналиши бўйича таҳсил олаётган талабалар учун мўлжалланган маъруза матнлари тўплами.

Гулистон давлат университети Илмий Кенгаш томонидан (15.03.2000 йил 12 – сонли баённома) нашрга тавсия этган.

Тузувчи: Умумий математика кафедраси доцент Қосимов С.

Тақризчилар: доцент Гаймназаров Г.

Мавзу: Операцион ҳисобнинг баъзи тушунчалари

Режа (асосий саволлар)

1. Операцион ҳисобнинг ривожланиш тарихи
2. Оргинал ва тасвир.

Таянч тушунчалари

Операцион ҳисоб, символик ҳисоб, оргинал функция тасвир функция, бирлик функция, экспоненциал функция, гамма функция, даражали функция, тасвири.

1 – асосий савол
Операцион ҳисобн инг ривожланиш тарихи

Ўқитувчининг мақсади.

1. Операцион ҳисобнинг вужудга келишини изоҳлаш
2. Операцион ҳисобнинг ривожланишини тахлил қилиш

Талабалар учун идентив ўқув мақсадлар

1. Операцион ҳисобнинг вужудга келиши сабабини биланди.
2. Операцион ҳисобнинг ривожланиш тарихини изохлайди.

1 – асосй савол баёни

Операцион (символик) ҳисоб (услуб) биринчи марта ангилия инженерия Оливер Хевисайд (1850 - 1925) қўлланилган. У электрик катталикларни ҳисоблашда операцион хисобдан кенг фойдаланилади. Хевисайд $p=\frac{d}{dt}$ (t - ўзгарувчи) символ киритди. Масалан, $x=x(t)$ функциянинг n - тартибли хосилансини $p^n=\frac{d^n}{dt^n}$ символ билан алмаштирди. Бу символни қўллаш натижасида

$$L[x]=a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

n - тартибли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама

$$L[p]=a_ip^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n=0$$

Алгебраик тенгламага келитирилади. Бу тенглама ечилиб, кейин $x(t)$ топилади.

Бунинг учун $\int_0^{\varphi}x(t)dt$ интеграл $\frac{1}{p}$ символни қўллаш билан топилади. $\frac{1}{p}\Rightarrow t, \frac{1}{\mathrm{p}^2}\rightarrow\frac{t^2}{\lambda!}$ ва $\frac{1}{\mathrm{p}^{\mathrm{n}}}\rightarrow\frac{t^n}{n!}$ деб олади.

Мисол $x'-x=1$ тенгламани $x(0)=0$ бошланғич шартда ечинг.

Ечиш.

$$px - x = 1,\ (\mathrm{p-1})\mathrm{x} = 1,\ \mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{p-1}} = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p^1} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\right)$$

Юқоридагиларни эътиборга олсак

$$x = \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots\right) = \int_0^t e^t dt = e^t - 1$$

Бу эса тенгламани ечими бўлади.

О.Хевисайд, операцион хисобни асослаш билан шуғулланмади. Буни эса америкалик инженер Д.Карсон ва англияли математик Бронвич (1875 -1930) асослаб берди. Б.Риман (немис математиги) ва француз математиги Лаплас операцион хисоб назариясини яратдилар.

Операцион хисоб дифференциал тенгламаларни, хусусий хосилали дифференциал тенгламаларни ечишда қўлланилади. Ундан ташқари электротехникада, радиотехникада, автоматлаштиришда кенг қўлланилади.

1 – боб. Лаплас алмаштиришлари.

Оргинал ва тасвир.

Тасвирнинг аниқлаш соҳаси

Теорема 2.1. Агар $f(t)$ оргинал s_0 ўсиш кўрсаткичли бўлса, у ҳолда $F(p)$ функция $\mathrm{Re}\, p > s_0$ ярим текисликда яқинлашади ва аналитик функция бўлади.

Назорат топшириқлар

1.1.1. Хисобнинг асосчиси ким?
1.1.2. Хисобнинг назарий жиҳатдан кимлар асослаб беришди?
1.1.3. Операцион хисоб қайси фан талаби асосида вужудга келади?
1.2.1 Операцион хисобнинг ривожланишига ўз хоссаларини қўшган қайси етук математикларни биласиз?
1.2.2 Биринчи бўлиб операцион хисоб ҳақида китоб чиқарган олим ким ва қайси йилларда ёзилган?
1.2.3 Операцион хисобда қайси символ ишлатилган?
1.2.4 Қолдирилган сўзлар билан тўлдиринг:
Операцион хисоб ёрдамида ____ кўринишдаги тенглама ______________________________________ тенгламага келтирилади.

2- асосий савол

Оргинал ва тасвир функциялар.

Ўқитувчининг мақсади:

1. Оргинал ва тасвир функциялар таърифлаш.
2. Баъзи оргинал ва тасвир функцияларнинг тасвир функциясини топиш. Талабалар учун индетив ўқув мақсадлар.

1. Оргинал ва тасвир функцияларнинг таърифларини билади.

2. Баъзи оргинал функцияларнинг тасвирларини топа олади.

2 – асосий савол баёни

Операциона хисобнинг баъзи тушунчалари ва хоссалари.

Оригинал-функция ва тасвир функция.

Таъриф 1.1. Хақиқий t аргументли комплекс функция $f(t)=u(t)+iv(t)$

Оригинал функция дейилади, агар у қуйидаги шартларни қаноатлантирса

1. $f(t)$ ва унинг n-тартибгача хосилалари узлуксиз ёки кесик (бўлакли) узлуксиз.

2. $f(t)=0, t<0$ бўлганда

3. Шундай M>0 ва S>0 сонлар мавжудки, хамма t>0 учун

$|f(t)|<M.e^{st}$ тенгсизлик бажарилади.

Таъриф. 1.2. Агар $s_0 \geq 0$ сони мавжуд бўлиб, 3) шарт $s=s_0+\varepsilon(\varepsilon>0)$ учун бажарилиб, $s=s_0-\varepsilon$ учун бажарилмаса, s_0 га $f(t)$ функциянинг ўсиш кўрсаткичи дейилади.

Демак, оргинал – функция $f(t)$, $t\to\infty$ да чегараланган ёки $e^{s\cdot t}$ га нисбатан секинроқ чексизга интилади.

Таъриф. 1.3. оргинал – функция $f(t)$ нинг тасвири ёки тасвир – функция деб комплекс $p=s+i\sigma$, аргументли $F(p)$ функцияга айтилади ва қуйдаги Лаплас интегралли ёрдамида хисобланади.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

Эслатма. Келажакда $f(t)$ оргинал функцияга $F(p)$ тасвир – функция мос келтирилган бўлса, $f(t)\to F(p)$ кўринишда, тасвир – функцияга оргинал функция мос келтирилса $F(p)\to f(t)$ кўринишда белгилаймиз.

Исбот. 1. Оргиналнинг учунчи шартига асосан (теорема 2.1 ни исботи)

$$|f(t)|<Me^{s_0 t},\ \mathrm{Re}p>\mathrm{s}_0$$

У ҳолда.

$$|F(p)|\leq\int_0^\infty\left|e^{-et}f(t)dt\right|<M\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{st}dt$$

Ёки

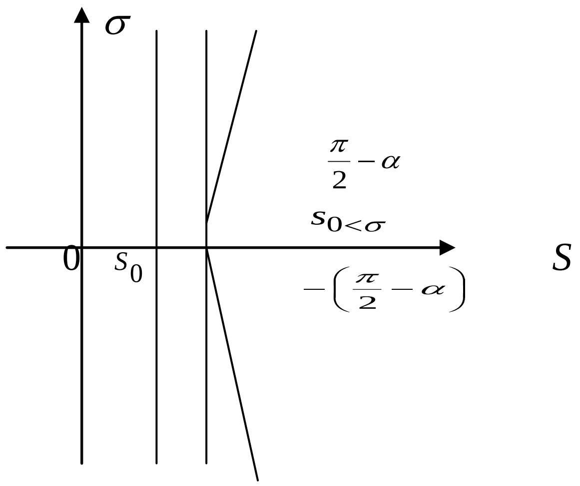
$$|F(p)|<\frac{M}{s-s_0},\ \mathrm{Re}p=\mathrm{s}>\mathrm{s}_0$$

Демак, функция $F(p)\,\mathrm{Re}p=\mathrm{s}>\mathrm{s}_0$ соҳада мавжуд

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p}=\frac{F(p+\Delta p)-F(p)}{\Delta p}=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}(e^{-\Delta pt}-1)\cdot dt=$$

2.

$$=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}\left[-\Delta pt+\frac{(\Delta pt)^2}{2!}-...\right]\Delta t$$



ёки

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = -\int_0^{\infty} e^{-pt} tf(t) + \varepsilon$$

Бу ерда

$$\varepsilon = \Delta p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} t^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta pt}{3!} + \frac{(\Delta pt)^2}{4!} - \dots \right) dt$$

$\Delta P \to 0$ да $\varepsilon \to 0$ ни кўрсатамиз.

$$|\varepsilon| \le |\Delta p| \int_0^{\infty} |f(t)| \left| e^{-pt} \right| t^2 \left| \frac{1}{2!} + \frac{|\Delta pt|}{3!} + \frac{|\Delta p|^2 t^2}{4!} + \dots \right| dt < |\Delta p| \int_0^{\infty} M e^{s_0 t} e^{-st} t^2 \left[1 + \frac{|\Delta p| t}{1!} + \frac{|\Delta p|^2}{2!} + \dots \right] dt =$$

$$= |\Delta p| M \int_0^{\infty} e^{-(s - s_0)^{t + |\Delta p| t}} t^2 \, \alpha t$$

Ёки

$$|\varepsilon| < |\Delta p| \cdot M \int_0^{\infty} e^{-(s \cdot s_0)t + |\Delta p| t} t^2 \alpha t$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаймиз, натижада

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(s - s_0 - |\Delta p|)^3} \cdot |\Delta p|$$

Демак, $|\Delta p| \to 0$ да $|\varepsilon| \to 0$ ди

Шундай қилиб, $F'(p) = -\int_0^{\infty} e^{-pt} tf(t) dt$

Теорема. 1.2. Агар $F(p)$ s_0 кўрсаткичли $f(t)$ оргиналнинг тасвири бўлса

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$$

Исбот. $\mathrm{Re}p > s_0$ текисликда

$$|F(p)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt\right| < \frac{M}{s - s_0}$$

$p \to \infty$ да $s \to \infty$ шунинг учун $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p \to \infty} F(p) = 0$ $\mathrm{Re}\, p > s_0$ ярим текисликда $F(p)$ аналитик бўлаганлиги учун (теорема 1.1)

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p \to \infty} F(p) = 0$$

Теорема. 1.3. Лаплас интеграли (1.1)

$$D: \left\{ \mathrm{Re}\, p > s_0, \left|\arg(p - s_0 - \sigma)\right| < \frac{\pi}{\alpha} - \sigma \right.$$

Сохада текислик яқинлашади, бунда $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ исталган кичик сонлар.

И с б о т. $p = s_0 + \sigma$ нуқтани оламиз, бу нуқтада функцияни қиймати

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-(s_0+\sigma)t} f(t)dt - \varphi(t) \qquad (2.1)$$

Кўринишда бўлади. Давоми 10 бетда

Бирлик функция.

Функция – оргинали

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

$$(\eta(0)) = \frac{1}{2}, \lim_{t \to 0+0} \eta(t) = 1$$

Бирлик функция дейилади.

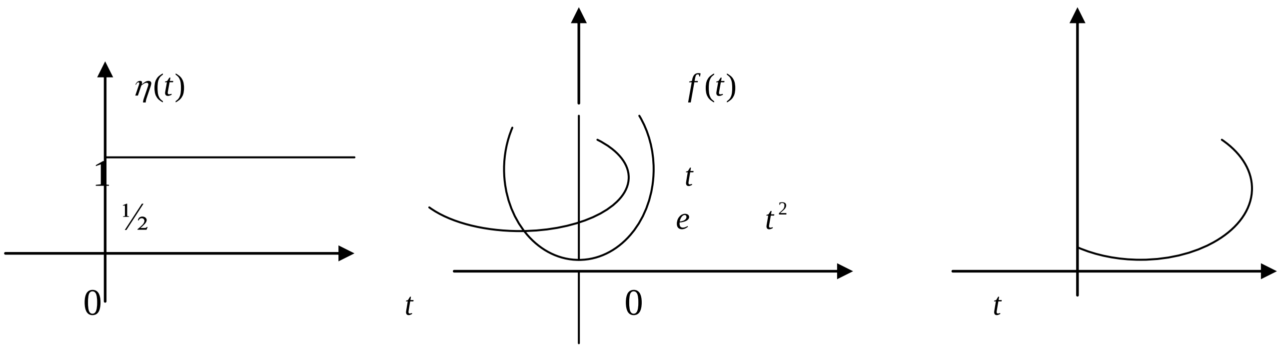
Агар $f(t)$ оргинал функциянинг 1) ва 3) шартлари каноатлантирса

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ f(t), t > 0 \end{cases}$$

Функция оргиналнинг хамма шартини қаноатлантиради. Масалан, $f(t) = t^2$ $(-\infty, \infty)$ оралиқда узлуксиз ва $t > 0$ чегараланган $(M - 1, s_0 = 1\ t^2 < e^t)$ лекин $t < 0$, $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t}^2 \neq 0$, шу сабабли $f(t) = t^2$ 1) ва 3) шартларинигина қаноатлантиради. У холда

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} t^2, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Оригинал бўлади.



Баъзи функцияларнинг тасвири.

1. $\eta(t)$ бирлик функциянинг тасвири.

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{a} e^{-pt}dt=\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}\int_0^{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)=\frac{1}{p},\ 1\to\frac{1}{\mathrm{p}},(4\cdot 1)$$

2. $e^{\sigma t}$ функциянинг тасвири

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{a} e^{-(p-a)t}dt=\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\int_0^{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha}\right)=\frac{1}{p-\alpha},\ \mathrm{e}^{\alpha t}\to\frac{1}{\mathrm{p}-\alpha},\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}\alpha$$

3.Гамма функция.

$$\Gamma(S)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

ни бўлаклаб интеграллаймиз.

$$u=t^{s},d\sigma=e^{-t}dt,du=st^{s-1}dt,\sigma=-e^{-t}$$

$$\Gamma(s+1)=-e^{-t}t^{s}\int_0^{\infty}+s\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt=s\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

Демак,

$$\Gamma(S+1)=S\Gamma(s) \qquad (4.4)$$

(4.4) формулани кетма – кет қуллаймиз.

$$\Gamma(s)=(s-1)\quad \Gamma(s-1),\ \Gamma(\mathrm{s}-2)=(\mathrm{s}-2)\Gamma(\mathrm{s}-2),...,$$

$$\Gamma(s+1-k)=(s-k)\Gamma(s-k)$$

Натижада,

$$\Gamma(s+1)=s(s-1)(s-2)....(s-k)\Gamma(s-k),\ \mathrm{k}<\mathrm{s}$$

(4.5)

Агар $s=n$ натурал сон бўлса

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)....2.1.\Gamma(1)=n1$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^{n}2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

(4.6)

Чунки, $\Gamma(1)\ \int_0^{\infty} e^{-t}dt=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-e}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^{\infty} e^{-\tau^{2}}d\tau=\sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^{n}}\sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}$$

(4.6^{1})

4. $t^{0},\alpha>-1$ функциянинг тасвири.

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}t^{\alpha}dt=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_{e} e^{-\tau}\tau^{x}d\tau$$