

O`zbekiston Respublikasi Xalq ta`limi vazirligi
Muqimiy nomli Qo`qon davlat pedagogika
instituti
boshlang`ich ta`lim metodikasi kafedrası

F. Rasulova

M A T E M A T I K A

BTM yo`nalishi talabalari
uchun o`quv uslubiy tavsiyalar
(II kurs talabalari uchun)

Qo`qon - 2006

Ushbu mashqlar to'plami Qo'qon davlat pedagogika instituti o'quv-uslubiy kengashining 2006-yil ____ - sonli yig'ilishida ko'rib chiqilgan va nashrga tavsiya qilingan

Taqrizchi:

**fiz-mat fanlari nomzodi Yu. Jo'rayev
fiz-mat fanlari nomzodi U. Akbarov
katta o'qituvchi O.Suvonov**

So`z boshi

Ushbu qo`llanmani tuzishda O`zbekiston Respublikasi hukumatining Oliy va o`rta maxsus o`quv yurtlari talabalarining bilim darajasini sifat jihatdan yanada yaxshilashga qaratilgan keyingi paytda qabul qilingan qarorlari e`tiborga olindi.

Ushbu o`quv qo`llanma boshlang`ich ta`lim va tarbiyaviy ish metodikasi yo`nalishi uchun matematika fani dasturiga moslab yozilgan bo`lib, u bo`lg`usi boshlang`ich sinflar o`qituvchisining matematik tayyorgarligini ta`minlash masalasini hal qilishni ko`zda tutadi. Bu tayyorgarlik o`qituvchiga o`quvcilarni savodli, ijodiy o`qitish va tarbiyalash uchun, matematik bilimlarni chuqurlashtirish hamda kengaytirishdagi bundan buyongi ishlar uchun zarur.

Qo`llanmaning tuzilishi quyidagicha: butun material uch bobga, boblar paragraflarga, paragraflar punktlarga bo`linadi. Har bir paragraf yoki punkt mashqlar bilan tugallanadi. Bu mashqlar ham nazariyani anchagina chuqur o`rganish uchun, bo`lg`usi o`qituvchida qator kasbiy malakalarni shakllantirish uchun mo`ljallangan.

Har bir paragrafga tegishli bir qator misol va masalalarning yechimlari bilan so`ngra, mustaqil yechishga mo`ljallangan qator misol va masalalar berilgan.

Mustaqil yechishga mo`ljallangan misol va masalalarni tanlashda mumkin qadar umumtalim maktablaridagi materiallarga yaqinlashtirishga harakat qilindi.

BTM talabalaridan tashqari qo`llanmadan uch yil lik maxsus sirtqi bo`lim, pedagogika instituti hamda pedagogika kolleji talabalari ham foydalanishi mumkin.

I BOB. Nomanfiy butun sonlar

Mavzu: Sanoq sistemalari

Reja:

1. Sanoq sistemalari haqida tushuncha.
2. Pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari.
3. O'nli sanoq sistemasida sonlarning yozilishi va o'qilishi.
4. O'nli sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash.
5. O'nli sanoq sistemasida nomanfiy butun sonlar ustida arifmetik amallar bajarish algoritmi.

Muammo: Sanoq sistemasi deganda nimani tushunasiz?

Sanoq sistema deb. sonlarni yozish, o'qish va ular ustida amal bajarish usuliga aytiladi.

1. Insoniyat paydo bo'lib, madaniyat darajasi ancha yuqori bo'lgan davrdan boshlab yozuv paydo bo'lgan. Bunda dastlab nima haqida gap yuritilayotgan bo'lsa, shu narsa yoki tushunchaning tasvirini beradigan rasmlardan foydalanilgan. Keyincha lik rasmlar o'rniga maxsus belgilar va nixoyat asta-sekin lik bilan harflar, so'ng raqamlar paydo bo'lgan. Avvaliga sonlar chiziqchalar yoki tugunchalar yordamida belgilangan. So'ng ko'p miqdordagi belgilarni guruhlash ehtiyoji tug'ilgan. Odamlar qo'llaridagi barmoqlari yordamida sanaganlari uchun belgilar 10 talab, ba'zan 20 talab (oyoq va qo'ldagi barmoqlarining soniga ko'ra) guruhlangan va bu guruhlar alohida belgi bilan belgilangan. Shu tariqa har bir xalqning sonlarni yozish uchun o'z sanoq sistemasi vujudga kelgan. Sanoq sistemasi deb sonlarni yozish, o'qish va ular ustida amal bajarish usuliga aytiladi.

Muammo: qanday sanoq sistemalarni bilasiz?

Sanoq sistemalari tuzilishiga ko'ra 2 turli.

2. Sanoq sistemalari tuzilishiga ko'ra odatda 2 turli bo'ladi: pozitsion va nopozitsion.

Berilgan sonning yozuvidagi belgilar o'rnashgan o'rniga qarab turli xil ma'noni anglatadi, bunday sanoq sistemasi pozitsion sanoq sistemasi deyiladi.

0, 1, 2..... 9 dan iborat raqamlar deb ataluvchi belgilar yordamida yozilgan sonlar o'n lik sanoq sistemasida yozilgan sonlar deyiladi va u pozitsion sanoq sistemasidir. Masalan, d) 1101 -bu erda birinchi o'rinda turgan 1 raqami 1ta bir likni bildirsa, 3-o'rinda turgan 1 raqami 1 ta yuz likni, 4-o'rinda turgan 1 raqami 1 ta ming likni anglatadi.

Odatdagi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yordamida sonlarni yozish hindiston liklar tomonidan joriy qilingan.

Shunday sanoq sistemalari borki, unda bir xil raqamlar sonning yozuvida qaysi o'rinda joylashishidan qat'iy nazar, doim bir xil ma'noni anglatadi. Bunday sanoq sistemalari pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalari deb yuritiladi. Rim sanoq sistemasi pozitsion bo'lmagan sanoq sistemasiga misol bo'ladi.

I, III, III, V, X, L, C, D, M kabi belgilar yordamida yozish rim liklar tomonidan kiritilgan bo'lib, sonlar I-bir, II -ikki, IV-to'rt, VI -olti, XI -o'n bir, XL -qirq, XS -to'qson va hokazolar ko'rinishda yozilgan.

Masalan, XXXIX - o'ttiz to'qqiz, bunda, X- belgi barcha o'rinlarda o'nni, I belgi esa birni anglatadi. Rim sanoq sistemasida kichik qiymat bildiruvchi belgi katta qiymatli belgidan oldin (chapda) yozilsa, sonning qiymati belgilar qiymatlarini ayirib topilgan, agar belgilar qiymatlari chapdan o'ngga kamayib borish tartibida yozilsa, son qiymati belgilarning qiymatlarini qo'shib topilgan. $XXIII = 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 23$.

Qadimgi Vavilon, Egipt, Gretsiya va Rusda ham nopozitsion sanoq sistemalari qo'llangan. Grek va slavyan qadimgi sanoq sistemalarida raqamlar alifbo xarflari bilan belgilangan, masalan 1 dan 9 gacha sonlar birinchi 9 ta xarf bilan, 10, 20., . . . , 90 sonlari esa undan keyingi 9 ta xarf bilan belgilangan, Son yozuvini so'zdan farqlash uchun tepasiga belgi- "titlo" qo'yilgan.

Nopozitsion sanoq sistemalari katga sonlarni yozish va ular ustida amal bajarish uchun

noqulay bo'lgan. Shuning uchun ham matematikada pozitsion sanoq sistemalari muxim o'rin tutadi. Chunki bu sistemada son yozuvida maxsus xona bir liklari tushunchasi bor bo'lib, istalgancha katta sonlar bir nechta belgi yoziladi.

Z. O'n lik sanoq sistemasida son yozuvi.

O'n lik sanoq sistemasida xona bir liklari o'n, yuz, ming, o'n ming, yuz ming va hokazolar bo'lib, ular 10 , 10^2 , 10^3 , 10^4 , ..., ko'rinishda ifodalanadi va unda har bir xonaning bitta birligi ikkinchi xonadan-boshlab o'zidan oldingi xonaning o'nta birligiga teng bo'ladi, ya'ni qo'shni xona bir liklari nisbati sanoq sistemasining asosi- 10 ga teng. Sonlar 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 dan iborat 10 ta belgi yordamida yoziladi va bu belgilar raqamlar deb ataladi. Son yozuvida har bir raqam ma'lum xona bir liklari sonini bildiradi.

Demak, a natural sonning o'n lik sanoq sistemasidagi yozuvi deb quyidagi yig'indiga aytiladi: $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ bu erda $a_n, \dots, a_1 - 0$ dan 9 gacha bo'lgan raqamlar. $a_n \neq 0$ deb kelisxiladi. Son yozuvini 0 lardan boshlash faqat ma'lum sondagi raqamlardan iborat nomerlashda qo'llanadi, masalan: lotoreya, pasport, avtomobil nomerlarida.

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ berilgan bo'lsa, uni $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ko'rinishda yozish mumkin. Son yozuvidagi chiziq uni xarfiy ko'paytmadan farqlash uchun chiziladi. Son yozuvdagi o'ngdan birinchi uchta xona birlar sinfini tashkil qiladi va unga birlar, o'nlar, yuzlar deb ataluvchi xona-bir liklari kiradi. Keyingi uch lik minglar sinfini tashkil qilib, xona bir liklari minglar, o'n minglar va yuz minglar deb ataladi. 6-, 7-, 8- raqamlar millionlar sinfini tashkil qilib, xona bir liklari millionlar, o'n millionlar va yuz millionlardan iborat bo'ladi. Keyingi uch xona milliardlar, undan keyin billionlar, milliardlar va hokazo sinflardan iborat bo'ladi. Sonni o'qishda chapdan o'ngga qarab har bir raqam yoniga xona birligi nomi qo'shib aytiladi, shuni aytish kerakki, o'zbek talida o'n liklarni atash uchun maxsus so'zlar: yigirma, o'ttiz, qirq, el lik, oltmish, yetmish, sakson va to'qson qo'llanadi. O'nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi, atash yoki o'qish uchun esa, masalan milliongacha bo'lgan sonlar uchun 20 ta termin kerak bo'ladi, bu raqamlar va o'n liklar nomlari, yuz, ming kabi atamalardir. Ko'p xonali sonlarni o'qishda million, milliard, billion kabi sinflar nomlari ishlatiladi. Bo'sh xona bir liklari aytilmaydi, yozuvda 0 lar bilan to'ldiriladi. Masalan: $412 = 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2$ (to'rt yuz o'n ikki).

4. O'nli sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash quyidagicha amalga oshiriladi.

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$$b = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0 \text{ sonlar berilgan bo'lsin.}$$

Quyidagi

$$1) n < k$$

$$2) n = k, a_n < b_n, n = k, a_n \neq b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, a_i < b_i (i < n) \text{ bo'ladi, shartlardan biri bajarilsa, } a < b \text{ bo'ladi.}$$

5. O'nli sanoq sistemasida sonlar qo'shish algoritmi.

Ma'lumki, har qanday ko'p xonali sonlarni xona bir liklari yigindisi shaklida ifodalash mumkin.

$$\text{Masalan, } 1) 527 = 5 \text{ ta yuz lik} + 2 \text{ ta o'n lik} + 7 \text{ ta bir lik yoki } 527 = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1 \text{ yoki}$$

$$2) 3728 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

$$3728 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$$

Har qanday natural sonni qaraydigan bo'lsak,

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$$

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ bo'ladi. Bunda $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ lar 0 dan 9 gacha-bo'lgan raqamlar bo'ladi. Faqat a_n - birinchi raqamgina 0 dan farqli bo'ladi.

Endi ko'p xonali sonlarni og'zaki qo'shish qoidasini ko'rib chiqaylik. Bu qo'shish qonunlariga asosan amalga oshiriladi.

Masalan, $8324 + 525 = 8$ ming lik + 3 yuz lik + 2 o'n lik + 4 bir lik) + (5 yuz lik + 2 o'n lik + 5 bir lik) gruppallash va o'rin almashtirish xossalari asosan:

$$8324 + 525 = 8 \text{ ming lik} + (3 \text{ yuz lik} + 5 \text{ yuz lik}) + (2 \text{ o'n lik} + 2 \text{ o'n lik}) + (4 \text{ bir lik} + 5 \text{ bir lik}) = 8 \text{ ming lik} + 8 \text{ yuz lik} + 4 \text{ o'n lik} + 9 \text{ bir lik} = 8849 \text{ bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ko'p xonali sonlarni qo'shish uchun ularning mos xona bir liklarini qo'shish kerak ekan.}$$

Demak, sonlarni yozma qo'shish uchun qo'sxiluvchilar bir - birining ostiga shunday joylashtiriladiki, bunda bir xil xona bir liklari raqamlarining biri ikkinchisining ostida bo'ladi, va o'ngdan boshlab mos xona bir liklari qo'sxilib, shu xona ostiga yozib boriladi.

Masalan,

$$\begin{array}{r} 8324 \\ +525 \\ \hline 8849 \end{array}$$

Agar bir xona bir liklarini qo'shganda ikki xonali son hosil bo'lsa, u holda o'n liklar ajratilib, uning raqami navbatdagi xonaga qo'shib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{array}{r} 1725 \\ + 2118 \\ \hline 3843 \end{array}$$

4.6. O'nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmi. Bir xonali sonlarni qo'shish jadvali va ayirish amalining ta'rifidan foydalangan holda, ayirish jadvalini tuzish mumkin.

1 ni ayirish jadvali.

$$2-1=1 \quad 6-1=5$$

$$3-1=2 \quad 7-1=6$$

$$4-1=3 \quad 8-1=7$$

$$5-1=4 \quad 9-1=8$$

5 ni ayirish jadvali

$$5-5=0 \quad 8-5=3$$

$$6-5=1 \quad 9-5=4$$

$$7-5=2 \text{ va hokazo}$$

Ko'p xonali sonlarni og'zaki ayirish yig'indi va ayirmaning xossalaridan foydalanib amalga oshiriladi.

$$862 - 241 = (8 \text{ yuz lik} + 6 \text{ o'n lik} + 2 \text{ bir lik}) - (2 \text{ yuz lik} + 4 \text{ o'n lik} + 1 \text{ bir lik}) = (8 \text{ yuz lik} - 2 \text{ yuz lik}) + (6 \text{ o'n lik} - 4 \text{ o'n lik}) + (2 \text{ bir lik} - 1 \text{ bir lik}) = 6 \text{ yuz lik} + 2 \text{ o'n lik} + 1 \text{ bir lik} = 621.$$

Yozma ayirishda kamayuvchi va ayriluvchi ustun tarzda mos xona bir liklari bir -biri tagiga yoziladi va tagiga chizilib, uning tagiga mos xonalar ayirmalari natijalari eng kichik xona bir liklaridan boshlab yoziladi:

$$\begin{array}{r} 862 \\ -241 \\ \hline 621 \end{array}$$

Ayirishning quyidagi xolini ko'raylik:

$$862 - 245 = (8 \text{ yuz lik} + 6 \text{ o'n lik} + 2 \text{ bir lik}) - (2 \text{ yuz lik} + 4 \text{ o'n lik} + 5 \text{ bir lik}) = (8 \text{ yuz lik} - 2 \text{ yuz lik}) + (6 \text{ o'n lik} - 4 \text{ o'n lik}) + (2 \text{ bir lik} - 5 \text{ bir lik}) = (8 \text{ yuz lik} - 2 \text{ yuz lik}) + (5 \text{ o'n lik} - 1 \text{ o'n lik} - 4 \text{ o'n lik}) + (2 \text{ bir lik} - 5 \text{ bir lik}) = (8 \text{ yuz lik} - 2 \text{ yuz lik}) + (5 \text{ o'n lik} - 4 \text{ o'n lik}) + (12 \text{ bir lik} - 5 \text{ bir lik}) = 6 \text{ yuz lik} + 1 \text{ o'n lik} + 7 \text{ bir lik} = 617.$$

Demak, agar biror xona birligida kamayuvchining raqami ayriluvchi raqamidan kichik bo'lsa, undan oldingi katta xona birligi raqamidan bir birligi olib, kamayuvchining raqamiga o'n bir lik qilib qo'sxiladi va ayirish bajariladi.

$$\begin{array}{r} \underline{862} \\ \underline{245} \\ \hline 617 \end{array}$$

O'nli sanoq sistemasida ko'paytmani hisoblash algoritmi. Ko'paytirish amalini bajarishda quyidagi qoidalar mavjud:

1. Bir xonali sonlarning ko'paytmasi 1 xonali sonlarni ko'paytirish jadvaliga asosan amalga oshiriladi.

2. Bir va nollar bilan tugagan sonlarga ko'paytirish uchun ko'paytuvchida qancha nol bo'lsa, shuncha nol ko'paytuvchining o'ng tomoniga yoziladi.

$$23 \cdot 100 = 2300$$

Masalan,

$$31 \cdot 1000 = 31000$$

3. Bittadan qiymatli raqamlari va undan o'ngda bir nechta nollar turgan sonlarni ko'paytirish uchun nollarga e'tibor bermasdan ko'paytiriladi va chiqqan natijaning o'ng tomoniga ko'payuvchi va ko'paytuvchidan nechta nol bo'lsa, shuncha nol yozib qo'yiladi.

Masalan:

$$a) 200 \cdot 30 = (2 \cdot 100) \cdot (3 \cdot 10) = (2 \cdot 3) \cdot (100 \cdot 10) = 6 \cdot 1000 = 6000$$

$$b) 400 \cdot 500 = 4 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 100 = 20 \cdot 10000 = 200000$$

4. Ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirish bir necha qo'sxiluvchilar yig'indisi berilgan. Songa ko'paytirish qoidasiga asosan bajariladi,

Masalan:

$$a) 223 \cdot 5 = (200 + 20 + 3) \cdot 5 = 200 \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 1000 + 100 + 15 = 1075$$

$$b) 453 \cdot 7 = (400 + 50 + 3) \cdot 7 = 400 \cdot 7 + 50 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 2800 + 350 + 21 = 3171$$

$$\begin{array}{r} 223 \\ \times 5 \\ \hline 1115 \end{array} \quad \text{yoki} \quad \begin{array}{r} 453 \\ \times 7 \\ \hline 3171 \end{array}$$

5. Ko'p xonali sonlarni ko'paytirish sonni bir necha sonning yig'indisiga ko'paytirish qoidasiga asosan amalga oshiriladi.

Masalan:

$$a) 2024 \cdot 328$$

$$328 = 300 + 20 + 8$$

$$2024 \cdot 328 = 2024 \cdot (300 + 20 + 8) = 2024 \cdot 300 + 2024 \cdot 20 + 2024 \cdot 8 = 663872$$

Demak,

$$\begin{array}{r} 2024 \\ \times 300 \\ \hline 607200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2024 \\ \times 20 \\ \hline 40480 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2024 \\ \times 8 \\ \hline 16192 \end{array}$$

Endi to'g'ridan - to'g'ri ko'paytirishni amalga oshirsak

$$\begin{array}{r} 2024 \\ \times 328 \\ \hline 16192 \\ + 40480 \\ \hline 607200 \\ \hline 663872 \end{array}$$

O'nli sanoq sistemasida bo'lishni bajarish algoritmi.

Bir xonali va ikki xonali sonlarni bo'lish ko'paytirish jadvaliga asoslangan holda amalga oshiriladi.

Ko'p xonali sonlarni bir xonali sonlarga bo'lish yig'indini songa bo'lish qoidasiga keltiriladi.

Masalan, $4792:4 = (4000 + 700 + 90 + 2) : 4$. Buning uchun 4 mingni 4 ga bo'lamiz, Bo'linmada 1 ta ming lik hosil bo'ladi va qoldiq 0 ga teng bo'ladi. 7 yuz likni 4 ga bo'lamiz. Bo'linmada 1 ta yuz lik va qoldiq 3 yuz hosil bo'ladi. 3 yuzni o'n liklarga maydalaymiz, 30 o'n lik hosil bo'ladi. Uni 9 o'n likka qo'shamiz. Natijada 39 o'n lik hosil bo'ladi. 39 o'n likni 4 ga bo'lsak, bo'linmada 9 o'n lik va qoldiq 3 o'n lik xrsil bo'ladi. 3 o'n likni bir liklarga maydalasak, 30 bir lik hosil bo'ladi, Unga 2 bir likni qo'shsak 32 bir lik hosil bo'ladi. 32 bir likni 4 ga bo'lsak, bo'linmada 8 bir lik va qoldiqda 0 hosil bo'ladi.

Shunday qilib bo'linma 1 ming lik, 1 yuz lik, 9 o'n lik va 8 bir likdan iborat bo'ladi, ya'ni 1198. Demak, $4792:4 = 1198$; yuqoridagi jarayon og'zaki bo'lish bo'lib, uni yozma bo'lish shakliga keltirsak, u

$$\begin{array}{r|l}
 4792 & 4 \\
 - 4 & 1198 \\
 \hline
 07 & \\
 - 4 & \\
 \hline
 39 & \\
 - 36 & \\
 \hline
 32 & \\
 - 32 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

ko'rinishda yoziladi,

Ko'p xonali sonlarni ko'p xonali sonlarga bo'lishda ham yig'indini songa bo'lish xossasidan foydalaniladi.

Masalan: $54314:13$ ni hisoblay lik. Yechish: $54314 = 50000 + 4000 + 300 + 10 + 4 = 5$ o'n ming + 4 ming + 3 yuz + 1 o'n + 4.

Avvalo yuqori xona birligini olib uni 13 ga bo'linish bo'linmasligini aniqlaymiz, 5 soni 13 ga bo'linmaydi. U holda 54 mingning 13 ga bo'linishini ko'ramiz, Bunda bo'linmada 4 ming va qoldiqda 2 ming hosil bo'ladi. 2 mingni yuzlarga maydalab, unga 3 yuzni qo'shsak 23 ta yuz lik hosil bo'ladi. Uni 13 ga bo'lsak, bo'linmada 1 yuz lik va qoldiqda esa 10 yuz lik qoladi, 10 yuz likni o'n liklarga maydalab, 1 ta o'n likni qo'shsak 111 ta o'n lik hosil bo'ladi. Uni 13 ga bo'lsak, bo'linmada 7 o'n lik va qoldiqda 10 o'n lik hosil bo'ladi. 10 o'n likni bir liklarga maydalab 4 bir likni qo'shsak, 14 bir lik hosil bo'ladi, uni 13 ga bo'lsak bo'linmada 8 bir lik va qoldiqda nol hosil bo'ladi. Demak, bo'linmada 4 ming lik, 1 yuz lik, 7 o'n lik va 8 bir lik hosil bo'ladi, ya'ni $54314:13 = 4178$.

Bu jarayonni yozma ravishda ifodalasak,

$$\begin{array}{r|l}
 54314 & 13 \\
 - 52 & 4178 \\
 \hline
 23 & \\
 - 13 & \\
 \hline
 101 & \\
 - 91 & \\
 \hline
 104 & \\
 - 104 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

bo'ladi.

Savollar:

- 1 Sanoq sistemalari haqida tushuncha bering.
- 2 Pozitsion va nopoziatsion sanoq sistemalariga misollar keltiring.
- 3 O'nli sanoq sistemasida sonlar qanday yoziladi va o'qiladi?
- 4 O'nli sanoq sistemasida sonlar qanday taqqoslanadi?
- 5 O'nli sanoq sistemasida nomanfiy butun sonlar ustida arifmetik amallar bajarish algoritmlarini ayting.

Misollar.

1 – misol. 123 sonni rim raqamlari yordamida yozing.

Yechish: $CXXIII = C + X + X + I + I + I$

100 10 10 1 1 1

2 – misol.

a) CCVII sonni o'qing va o'nli sanoq sistemasida yozing.

Yechish: $CCVII = C + C + V + I + I$ Demak 207.

100 100 5 1 1

b) LXCLIII – 60153.

3 – misol. Berilgan sonni xona bir liklarining yig'indisi ko'rinishida yozing.

$$13567 = 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$$

4 – misol. Ifodani taqqoslang:

$$1 - \text{usul. } 3785 + 635 < 3785 + 653$$

1 – qo'sxiluvxilar teng, 2 – qo'sxiluvxilarni taqqoslaymiz, $635 < 653$. Demak, o'ng tomon katta.

$$2 - \text{usul. } 3785 + 635 < 3785 + 653$$

$$4420 < 4438$$

5 – misol. Yig'indini hisoblang:

$$38562 + 7296 = 45858$$

$$\begin{array}{r} 38562 \\ + 7296 \\ \hline 45858 \end{array}$$

6 – misol. Ayirmani hisoblang:

$$6097342 - 589423 = 5507919$$

$$\begin{array}{r} 6097342 \\ - 589423 \\ \hline 5507919 \end{array}$$

7 – misol. Ifodaning qiymatini toping:

$$\begin{array}{r} 837 \\ \times 624 \\ \hline 3348 \\ 1674 \\ 5022 \\ \hline 5522288 \end{array} \quad \begin{array}{l} 837 \cdot 4 = 3348 \\ (837 \cdot 2) \cdot 10 = 16740 \\ (837 \cdot 6) \cdot 100 = 502200 \end{array}$$

8 – misol. Bo'linmani toping:

$$2798784 : 4859 = 576$$

$$\begin{array}{r|l} 2798784 & 4859 \\ - 24295 & 576 \\ \hline 36928 & \\ 34013 & \\ \hline 29154 & \\ 29154 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

0

Mustaqil yechish uchun misollar.

1) Quyidagi sonlarni rim raqamlari yordamida yozing:

13, 19, 21, 39, 41, 49, 50, 51, 89, 90, 91, 99, 100, 101, 499, 501, 999, 1000, 1001.

2) Quyidagi sonlarni o'qing va o'nli sanoq sistemasida yozing:

II, VI, VII, XIV, XXIV, CCLVI, CC, MDI, XC_mDLVII, MCCLXVII, MMDCLXXIX.

3) Berilgan sonlarni xona bir liklarining yig'indisi ko'rinishida yozing:

38562, 138562, 7296, 48562, 100038562, 72963.

4) Ifodalarni taqqoslang:

a) $3956 + 72354 \dots 3856 + 72354$; g) $5627 - 486 - 321 \dots 5627 - (486 + 321)$

- b) $43999+6135 \dots 6135+43998$; d) $3721 - (127 - 8) \dots 3721 - 127 - 8$
 v) $3856+72354 \dots 72354+3854$; e) $1640 - (567+326) \dots 1640 - 567+326$.
 5) Yig'indini hisoblang:
 a) $5378+2511$ d) $823759+175241$
 b) $17831+21259$ e) $1879894+3021006$
 v) $567489+3511$ j) $37281+62719$
 g) $4208+965712$ z) $49999+856666$
 i) $(2000050+19897726)+2489+(117356+36)$
 k) $36250+(7999525+411095)+63750$.
 6) Ayirmani hisoblang:
 a) $6097342 - 589423$ v) $6345002 - 4909335$
 b) $10078563 - 6346935$ g) $43040506 - 26305678$
 d) $(485321+765809) - (8347+65432)$
 e) $(57685 - 3794)+(1050010 - 5623)$
 j) $5610 - 847$ z) $73861 - 972$ i) $378631 - 325475$
 7) Ko'paytmani toping:
 a) $3781 \cdot 495$ e) $40007 \cdot 7015$
 b) $3781 \cdot 459$ j) $7608 \cdot 50002$
 v) $3781 \cdot 954$ z) $4785 \cdot 412$
 g) $3807 \cdot 5060$ i) $(678+422) \cdot 95 - 1378$
 d) $6070 \cdot 4009$ k) $(1000 - 372) \cdot 1005 - 52 \cdot 37$
 8) Bo'linmani toping:
 a) $970408 : 9608$ j) $309969 : 279$
 b) $40083042 : 5006$ z) $104742 : 506$
 v) $170940 : 385$ i) $279048 : 308$
 g) $1730600 : 3400$ k) $428640 : 608$
 e) $188366 : 4957$ yo) $27642280 : 9004$
 m) $4231020 : 7005$ n) $83640 : 205$

Mavzu: O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalari.

Reja:

1. O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida son yozuvi.
2. O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallar bajarish.
3. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o'tish.
4. Ikki lik sanoq sistemasi tatbiqi.

Muammo: O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida son yozuvi haqida nimani bilasiz?

Ta'rif. Ikkinchi xona birligidan bosh.

Amaliyotda 10 lik sanoq sistemasidan boshqa ham sanoq sistemalari uchraydi.

Masalan, a) 10 talab emas, 5 talab sanash yordamida 5 lik sanoq sistemasi hosil bo'ladi. Bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xona o'zidan oldingi xonaning 5 ta birligiga teng bo'ladi, ya'ni N sonini 5 lik sanoq sistemasida yozgan bo'lsak, $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0$ bo'ladi.

b) Agar 4 talab sanalgan bo'lsa, u holda 4 lik sanoq sistemasi hosil bo'ladi va bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xonaning bitta birligi o'zidan oldingi xonaning 4 ta birligiga teng bo'ladi. Agar $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ son 4 lik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, u $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 4 + a_0$ bo'ladi.

Ta'rif. Ikkinchi xona birligidan boshlab har bir xonasining bitta birligi o'zidan oldingi xonaning bitta birligidan q marta katta bo'lgan sonlar q lik sanoq sistemasida yozilgan sonlar deyiladi.

Agar $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ son q lik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(q)}}$

ko'rinishda belgilanadi. q -berilgan sanoq sistemaning asosi deb yuritiladi. Bunda $q \in N_0$ bo'lib, $1 < q$ bo'ladi. q lik sanoq sistemasida istalgan sonlar $0, 1, 2, 3, \dots, q-1$ raqamlari yordamida yoziladi. $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(q)}}$ sonning o'zi sistematik son deyiladi. Har qanday sistematik sonni asos darajalarining yig'indisi ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Masalan, $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(q)}}$ bo'lsa, $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(q)}} = a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^1 + a_0$ bo'ladi. Endi ayrim sanoq sistemalari haqida batafsilroq to'xtalib o'taylik.

q lik sanoq sistemasidagi sonlar $0, 1, 2, 3, \dots, q-1$ raqamlar yordamida yozilishidan 7 lik sanoq sistemasida har qanday sonni $0, 1, 2, \dots, 6$ raqamlari yordamida yozish mumkinligi kelib chiqadi. Masalan,

Bir –1	Olti -6	O'n bir-14
Ikki – 2	Etti – 10	O'n ikki – 15
Uch –3	Sakkiz – 11	O'n uch – 16
To'rt – 4	To'qqiz -12	O'n to'rt -20
Besh – 5	O'n – 13	O'n besh – 21

va h.k.z.

2.Barcha sanoq sistemasida ifodalangan sonlar ustida arifmetik amallar o'n lik sanoq sistemasidaga kabi bajariladi. Buning uchun dastlab berilgan sanoq sistemi uchun bir xonali sonlarni qo'shish va ko'paytirish jadvali tuziladi. Chunki har bir sanoq sistemi uchun maxsus qo'shish va ko'paytirish jadvali bo'ladi, 1) $q=5$ bo'lsin. 5 lik sanoq sistemasidagi sonlarni $0, 1, 2, 3, 4$ raqamlari yordamida yozish mumkin, Bu sanoq sistemi uchun qo'shish jadvalini tuzsak:

$$1+2=2 \quad 2+2=4 \quad 3+3=11 \quad 4+4=13$$

$$1+2=3 \quad 2+3=10 \quad 3+4=12$$

$$1+3=4 \quad 2+4=11$$

$$1+4=10$$

$$a) 3214_{(5)} + 2313_{(5)} = 11032_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 3214_{(5)} \\ + 2313_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

$$11032_{(5)}$$

$$b) 3011_{(5)} - 2124_{(5)} = 332_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 3011_{(5)} \\ - 2124_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

$$332_{(5)}$$

$$332_{(5)}$$

$$332_{(5)}$$

Endi 5 lik sanoq sistemi uchun ko'paytirish jadvalini tuzaylik.

$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 14$	$4 \cdot 4 = 31$
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 11$	$3 \cdot 4 = 22$	
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 4 = 13$		
$1 \cdot 4 = 4$			

$$\text{Masalan, } a) 2431_{(5)} \cdot 23_{(5)} = 123013_{(5)}$$

$$2431_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 2431_{(5)} \\ \cdot 23_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

$$13343$$

$$10412$$

$$123013_{(5)}$$

$$b) 123013_{(5)} : 23_{(5)} = 2431_{(5)}$$

$$\begin{array}{r|l} 123013 & 23 \\ - 101 & 2431 \\ \hline 220 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
- 202 \\
\hline
131 \\
- 124 \\
\hline
23 \\
- 23 \\
\hline
0
\end{array}$$

3. Aytaylik 10 lik sanoq sistemasida biror a son berilgan bo'lib, boshqa q lik sanoq sistemasiga o'tish talab qilingan bo'lsin. Buning uchun a soni q lik sanoq sistemasiga o'tkazildi, deb faraz qilib, uning bu sistemadagi yozuvini ko'rib chiqamiz. $a = a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^1 + a_0$ yozuvni shakl almashtiramiz: $a = (a_n \cdot q^{n-1} + a_{n-1} \cdot q^{n-2} + \dots + a_1)q + a_0$, $a_0 < q$ shart bajarilgani uchun bu yozuvni a ni q ga qoldikli bo'lish natijasi va a_0 ni qoldiq deb qarash mumkin. Qavs ichidagi yig'indini shakl almashtirsak, $a_n \cdot q^{n-1} + a_{n-1} \cdot q^{n-2} + \dots + a_1 = (a_n \cdot q^{n-2} + a_{n-1} \cdot q^{n-3} + \dots + a_2)q + a_1$ hosil bo'ladi. Buni esa, $a_1 < q$ shart bajarilgani uchun to'liqsiz bo'linmani q ga qoldikli- bo'lish natijasi deb qarash mumkin. Shu taxlit a sonining q lik sanoq sistemasidagi yozuvining oxirgi a_0 raqami a ni q ga bo'lgandagi qoldiqqa, 2 -raqam natijani q ga bo'lgandagi qoldiqqa va h.k.z teng ekanligini ko'rish mumkin. Qoldikli bo'lish to'liqsiz bo'linma 0 ga teng bo'lguncha davom etadi va qoldiqlar oxirgisidan boshlab sonning q lik sanoq sistemasidagi yozuvining raqamlar ketma - ketligini beradi. Buni misollar yordamida ko'rib chiqaylik.

Masalan, 1) $827_{(10)}$ ni olti lik sanoq sistemasida yozing. Eng avval 872 oddiy bir likdan olti lik sanoq sistemasining nechta 2- xona birligi borligini ayniqlaymiz. Buning uchun 872 ni 6 ga bo'lamiz.

$$\begin{array}{r|l}
872 & 6 \\
- 6 & 145 \\
\hline
27 & \\
- 24 & \\
\hline
32 & \\
- 30 & \\
\hline
2 &
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
2\text{-xona birligi} \\
\\
\\
1\text{-xona birligi}
\end{array}$$

Endi 145 ta 2 - xona birligida olti lik sanoq sistemasining nechta 3 -xona birligi borligini aniqlaymiz:

$$\begin{array}{r|l}
145 & 6 \\
- 12 & 24 \\
\hline
25 & \\
- 24 & \\
\hline
1 &
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
3\text{-xona birligi} \\
\\
2\text{-xona birligi}
\end{array}$$

Endi 24 ta 3-xona birliklarida qancha 6 lik sanoq sistemasining 4-xona birligi borligini aniqlaymiz.

$$\begin{array}{r|l}
24 & 6 \\
- 24 & 4 \\
\hline
0 &
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
4\text{-xona birligi} \\
3\text{-xona birligi}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4 & 6 \\
- 0 & 0 \\
\hline
4 &
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
5\text{-xona birligi} \\
4\text{-xona birligi}
\end{array}$$

4 ta 4 xona birliklarida 5-xona birligi yo'q.

Demak, jarayon tugadi. U holda $872_{(10)} = 4012_{(6)}$ bo'ladi. Bu jarayonni qulay bo'lishi uchun quyidagi sxemani tadbqiq etish mumkin.

2) $1024_{(10)} = x_{(5)}$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
 1024 & 5 & & & & & \\
 - 10 & 204 & 5 & & & & \\
 \hline
 24 & -20 & 40 & 5 & & & \\
 - 20 & 4 & -40 & 8 & 5 & & \\
 \hline
 4 & & 0 & -5 & 1 & 5 & \\
 & & & 3 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Demak, $1024_{(10)} = 13040_{(5)}$

3) $1495_{(10)} = x_{(7)}$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
 1495 & 7 & & & & & \\
 - 14 & 213 & 7 & & & & \\
 \hline
 9 & -21 & 30 & 7 & & & \\
 - 7 & 3 & -28 & 4 & 7 & & \\
 \hline
 25 & 0 & 2 & -0 & 0 & & \\
 -21 & 3 & & 4 & & & \\
 \hline
 4 & & & & & &
 \end{array}$$

Demak, $1495_{(10)} = 4234_{(7)}$

Endi berilgan sanoq sistemasidan o'n lik sanoq sistemasiga o'tish usuli bilan tanishib chiqaylik.

Buning uchun yuqorida ko'rsatilgan qoldiqli bo'lish amaliga teskari amalni bajaramiz, ya'ni berilgan sonning yuqori xona birligining asosiga ko'paytirib, chiqqan ko'paytmaga navbatdagi xona birligini qo'shamiz. So'ngra hosil – bo'lgan yig'indini asosiga ko'paytirib, chiqqan ko'paytmaga navbatdagi xona birligini qo'shamiz va oxirgi xona birligini qo'shgunga qadar davom ettiramiz. Hosil bo'lgan oxirgi yig'indi berilgan sonning o'n lik sanoq sistemasidaga yozuvi bo'ladi.

Masalan, $1\}425_{(7)} = x_{(10)}$ bo'lsin. 2) $72025_{(8)} = x_{(10)}$

$$4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 4 \cdot 49 + 2 \cdot 7 + 5 = 215_{(10)} \quad 7 \cdot 8^4 + 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 7 \cdot 4096 + 2 \cdot 512 + 2 \cdot 8 + 5 = 29715$$

Demak, $425_{(7)} = 215_{(10)}$ $72025_{(8)} = 29715_{(10)}$

Umuman berilgan sanoq sistemasidan boshqa bir sanoq sistemasiga o'tish uchun dastlab o'n lik sanoq sistemasiga o'tiladi. So'ngra 10 lik sanoq sistemasidan talab qilingan sanoq sistemasiga o'tiladi.

Masalan, $2421_{(5)} = x_{(4)}$

$$2 \cdot 5 + 4 = 14$$

$$14 \cdot 5 + 2 = 71$$

$$71 \cdot 5 + 1 = 356$$

Demak, $2421_{(5)} = 356_{(10)}$

Endi o'tamiz.

10 lik sanoq sistemasidan 4 lik sanoq sistemasiga

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
 356 & 4 & & & & & \\
 - 32 & 89 & 4 & & & & \\
 \hline
 36 & -8 & 22 & 4 & & & \\
 - 36 & 9 & -20 & 5 & 4 & & \\
 \hline
 0 & -8 & 2 & -4 & 1 & 4 & \\
 & 1 & & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Demak, $356_{(10)} = 11210_{(4)}$

Bundan $2421_{(5)} = 11210_{(4)}$ bo'ladi, 2 lik sanoq sistemasini .

Nazariy masalalarni hal qilishda ikki lik sanoq sistemasidan keng foydalaniladi. Bu sanoq sistemasida istalgan sonni yozish uchun faqat 0 va 1 raqamlaridan foydalaniladi. Agar $N =$

$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ son ikki lik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa $N_{(2)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(2)}$ ko'rinishda

belgilanadi va bu sistemadagi har qanday son $N_{(2)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(2)} = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$ ko'rinishda ega bo'ladi.

Ikki lik sanoq sistemasida $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ lar 0 yoki 1 qiymatga ega bo'ladi. Faqat $a_n \neq 0$, bo'ladi. Ba'zi sonlarning ikki lik sistemasidagi yozuvini ko'raylik.

Masalan, bir - 1 besh-101 to'qqiz-1001
 ikki-10 olti-110 o'n-1010
 uch - 11 etti-111 o'n bir-1011 va x.k.
 to'rt- 100 sakkiz- 1000

Savollar:

1. O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida sonlar qanday yoziladi?
2. O'nli bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallar qanday bajariladi?
3. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o'tish qoidalarini ayting va asoslang.
4. Ikki lik sanoq sistemasini haqida ma'lumot bering.

Misollar.

1 – misol. 5007_8 sonni olti lik sanoq sistemasiga o'tkazing.

Yechish: Berilgan sonni oldin 10 lik sanoq sistemasiga o'tkazamiz. Buning uchun berilgan sonni xona bir liklarining yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va natijani topamiz.

$$5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 = 5 \cdot 512 + 7 = 2560 + 7 = 2567.$$

Endi 10 lik sanoq sistemasidagi 2567 sonni 6 lik sanoq sistemasiga o'tkazamiz, buning uchun berilgan sonni 6 ga bo'lamiz, bo'lishni bo'linmada 6 dan kichik son hosil bo'lgunga qadar davom etamiz.

2567	6			
24	427	6		
16	42	71	6	
12	7	6	11	6
47	6	11	6	1
42	1	6	5	
5	5			

Demak, $5007_8 = 2567 = 15515_6$

2 – misol. 10010_2 va 11000_2 sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini toping.

Yechish: 2 lik sanoq sistemasida qo'shish va ko'paytirish jadvalini tuzamiz.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Jadvaldan foydalanib berilgan sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini topamiz.

10010_2

11000_2

101010_2

3 – misol. $23012_4 - 2323_4$ yig'indini va ayirmani hisoblang.

Yechish: 4 lik sanoq sistemasining alfaviti 0, 1, 2, 3 lardan iborat.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

4 – misol. $32012_4 \cdot 2312_4$

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

5 – misol. 573_8 va 413_8 sonlar ustida arifmetik amallarni bajaring.

Yechish: 8 lik sanoq sistemasining alfaviti 0,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sonlardan iborat.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

$$\begin{array}{r} + 573_8 \\ 413_8 \\ \hline 1206_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 573_8 \\ 413_8 \\ \hline 160_8 \end{array}$$

6 – misol. $M=2034_5$ va $N=1431_5$ sonlarni 3 lik sanoq sistemasiga o'tkazing va ikkala sanoq sistemada berilgan sonlarning ayirmasini toping.

Yechish: M va N sonlarni 10 lik sanoq sistemasiga o'tkazamiz:

$$M=2 \cdot 5^3+0 \cdot 5^2+3 \cdot 5+4=2 \cdot 125+15+4=250+19=269$$

$$N=1 \cdot 5^3+4 \cdot 5^2+3 \cdot 5+1=125+4 \cdot 25+15+1=125+100+16=241$$

M va N sonlarni 3 lik sanoq sistemasiga o'tkazamiz.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} 269 & 3 & & & & & \\ 24 & 89 & 3 & & & & \\ \hline 29 & 6 & 29 & 3 & & & \\ 27 & 29 & 27 & 9 & 3 & & \\ \hline 2 & 27 & & 9 & 3 & 3 & \\ & 2 & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

$$269 = 100222_3$$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} 241 & 3 & & & & & \\ 24 & 80 & 3 & & & & \\ \hline 1 & 6 & 26 & 3 & & & \\ & 20 & 24 & 8 & 3 & & \\ & 18 & 2 & 6 & 2 & & \\ & 2 & 2 & 2 & & & \end{array}$$

$$241 = 22221_3$$

$$\begin{array}{r} - 2034_5 \\ 1431_5 \\ \hline 103_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 100222_3 \\ 22221_3 \\ \hline 1001_3 \end{array}$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. 1110001₂ sonni sakkizlik sanoq sistemasida yozing.
2. 2304₅ va 7526₈ sonlarni o'nlik sanoq sistemasida yozing.
3. 87927 va 5275 sonlarni oltilik sanoq sistemasida yozing.
4. 100022₃ va 13572 sonlarni 12lik sanoq sistemasida yozing.
5. 1487, 7693 va 1009 sonlarni 8lik va 2lik sistemasida yozing.
6. Quyidagi sonlarni 10lik sanoq sistemasida yozing: 15402₈; 11000111₂; 526₇; 1324₅
7. Quyidagi sonlar yig'indisini toping: 442₅ va 134₅; 1031₅ va 134₅
8. Amallarni bajaring va tekshiring:
a) 222₃:2₃ v) 1221₃:11₃ d) 3275₈:15₈
b) 111111₂:11₂ g) 2222₃:12₃ e) 125246₇:11₇
9. M = 5401₆ va N = 3052₆ sonlar berilgan. Ularni ikkilik sanoq sistemasida yozib, ikkala sanoq sistemasida arifmetik amallarni bajaring.
10. 23456₁₀ = 125246_x, x ni toping.
11. Amalarni bajaring:
a) 3275₈+362₈ b) 5235₆-3421₆ v) 3412₅·21₅ g) 302102₄:121₄
d) 563₈+217₈·15₈+2365₈-625₈:17₈ e) 5501₆-3052₆+3455₆
j) 202112₃+210210₃-12020₃ z) 132₈·47₈+2451₈
12. M = 2154₆ va N = 3345₆ sonlarni 4lik sanoq sistemasiga o'tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
13. R = 3320₈ va Q = 1534₈ sonlarni 5lik sanoq sistemasiga o'tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
14. R = 1475₈ va Q = 1020₈ sonlarni 3lik sanoq sistemasiga o'tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
15. M = 5401₆ va N = 3052₆ sonlarni 2lik sanoq sistemasiga o'tkazing va arifmetik amallarni bajaring.

Mavzu: Nomanfiy butun sonlar to‘plamida sonlarning bo‘linishi.

Reja:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'linish munosabati ta'rifi.
2. Bo'linish munosabatining xossalari.
3. Nomanfiy butun sonlar to'plamida yig'indi, ayirma va ko'paytmaning bo'linishi haqida teoremlar.
4. Bo'linish alomatlari.

a) Bo'lish amalining ma'nosini qaysi turdagi sodda masalalar bilan tekshirasiz?

Mazmunga ko`ra bo`lish vat eng qismga bo`lish.

1-masala: O`qituvchi 6 ta olmani o`quvcxilarga 2 tadan bo`lib berdi. Nechta o`quvchi olma oldi?
(3 ta o`quvchi)

2-masala: Oyiga 6 ta daftarni 2 ta ukasiga teng bo'lib berdi. Ukalari nechtdan daftar oldi?
(3 tadan daftar oldi)

b) qachon yig'indi songa bo'linadi?

1-Teorema. Agar a va b sonlari c soniga bo'lsin.

1. Sonlarning bo'linish munosabati nomanfiy butun sonlar to'plamida qaraladi. Nomanfiy butun sonlar to'plami $M_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Bu to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallari har doim bajariladi. Ayirish va bo'lish amallari esa, har doim ham bajarilavermaydi. Masalan, N_0 to'plamda 5 va 9 sonlarning ayirmasi va bo'linmasi mavjud emas. $a - b$ ayirma mavjud bo'lishi uchun $a \geq b$ bo'lishi zarur va etarli. Lekin $a:b$ bo'linma mavjud bo'lishining bunday umumiy qoidasi yo'q,

shunga qaramay, $a:b$ bo'lishni bajarmay, a soni b ga bo'linadimi - yo'qmi aniqlash uchun ba'zi alomatlar topilgan,

Bo'linish munosabati ta'rifi;

Agar $a \in N_0$ va $b \in N$ sonlar uchun shunday $c \in N_0$ son topilib, $a=bc$ tenglik bajarilsa, a soni b soniga bo'linadi deyiladi va $a:b$ ko'rinishda yoziladi.

$(\forall a \in N_0 \forall b \in N) (\exists c \in N_0)(a:b \Leftrightarrow a = bc)$.

$a:b$ - a soni b ra bo'linadi, a soni b ga karrali yoki b soni a ning bo'linuvchisi deb o'qiladi.

Maslan: $18:3$ chunki $18 = 3 \cdot 6$, $18:5$, chunki $18=5 \cdot s$ shart bajariluvchi $s \in N_0$ son mavjud emas.

«Sonning bo'luvchisi» tushunchasi umuman «bo'luvchi» tushunchasidan farq qiladi. Sonning bo'luvchisi shu sondan katta bo'lmagani uchun bo'luvchilar to'plami cheklidir. Sonning karralilari to'plami cheksizdir. $\forall a \in N_0$ uchun na ko'rinishdagi barcha sonlar x ga karrali bo'ladi, bu erda $n \in N_0$.

5.2. Bo'linish munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. Bo'linish munosabati refleksiv, ya'ni istalgan natural son o'ziga bo'linadi, $(\forall a \in N) (a:a)$, chunki $\exists 1 \in N_0, a = a \cdot 1$ (ta'rifga ko'ra).

2°. Istalgan nomanfiy butun son 1 ga bo'linadi $a:1 \Leftrightarrow a = 1 \cdot a$.

3°. Agar $a:b$ va $a>0$ bo'lsa $a>b$ bo'ladi, ya'ni $(\forall a,b \in N)(a:b \wedge a > 0 \Rightarrow a > b)$.

Isbot: $a:b$ ekanligidan, ta'rifga ko'ra shunday nomanfiy butun s son topiladiki, $a=bc$ bo'ladi:

$$a=bc \Rightarrow a-b = bc-b = b(c-1) (*)$$

$$a = bc \wedge a > 0 \Rightarrow bc > 0 \Rightarrow b > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow c \geq 1 \Rightarrow c-1 \geq 0 \Rightarrow b(c-1) \geq 0 \Rightarrow a-b \geq 0 \Rightarrow a \geq b!$$

4°. Bo'linish munosabati antisimmetrik, ya'ni

$$(\forall a,b \in N)(a:b \wedge a:b \Rightarrow a=b)$$

$$\left. \begin{array}{l} a:b \Rightarrow a \leq b \\ a:b \Rightarrow a \geq b \end{array} \right\} \Rightarrow a=b$$

5°. Bo'linish munosabati tranzitiv, ya'ni $(\forall a,b,c \in N)a:b \wedge b:c \Rightarrow a:c$.

Isbot

$$\left. \begin{array}{l} a:b \Rightarrow a = dk \\ b:c \Rightarrow b = cp \end{array} \right| \Rightarrow a = dk = c(pk) \text{ bo'linish ta'rifiga ko'ra.}$$

6°. 0 soni istalgan natural songa bo'linadi, ya'ni $(\forall a \in N) 0:a \Rightarrow 0 = a \cdot 0$

7°. 0 dan farqli istalgan son 0 ga bo'linmaydi

$$(\forall a \in N_0 \wedge a \neq 0) a:0$$

Isbot: teskarisini faraz qilaylik $a:0 \Rightarrow a = 0 \cdot b = b = 0 \Rightarrow a = 0$ bu teorema shartiga zid. Demak, $a:0$

8°. $0:0$ amali aniqlanmagan. Chunki, $0:0 = a$ bo'lsin, $0 = 0 \cdot a$ bajariladigan a - istalgan natural son bo'lishi mumkin. Algebraik amal uning natijasi mavjud va yagona bo'lsagina aniqlangan bo'ladi. $0:0$ natijasi istalgan son bo'lgani uchun bu amal aniqlanmagan deyiladi.

Z.Bo'linish munosabati haqida quyidagi teoremlarni isbot qilish mumkin:

1- teorema. Agar a va b sonlari s soniga bo'linsa, ularning yigindisi ham s ga bo'linadi.

Ya'ni $(\forall a,b,c \in N_0)(a:b \wedge b:c \Rightarrow (a+b):c)$

$$\text{Isbot: } \left. \begin{array}{l} a:b \Rightarrow a = ck \\ b:b \Rightarrow b = cl \end{array} \right| \Rightarrow a+b = c(k+l) \wedge k+l \in N_0 \text{ bo'lgani uchun } (a+b):c \text{ (ta'rifga ko'ra).}$$

Berilgan teoreмага teskari teorema to'g'ri emas.

2 -teorema. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning har biri bo'linsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ yig'indi ham s ga bo'linadi.

Isboti 1 - teoreмага o'xshash.

3-teorema. Agar a va b sonlar s ga bo'linsa, va $a \geq b$ bo'lsa, $a-b$ ham s ga bo'linadi.

$$(\forall a, b, c \in N_0)(a:b, b:c \wedge a \geq b \Rightarrow (a-b):c).$$

Isboti 1-teorema kabi.

4 -teorema. Agar ko'paytuvchilardan biri biror ko'paytma ham s ga bo'linadi.

$$(\forall a, b, c \in N_0)(a:c \Rightarrow ab:c)$$

$$\text{Isbot: } a:c \Rightarrow a = cq = (cq)\overset{b}{b} = c(qb) \text{ (ta'rifga ko'ra).}$$

$$ab = c(qb) \wedge qb \in N_0 \Rightarrow ab:c$$

5-teorema. Agar ko'paytuvchilardan biri m ga, ikkinchisi n ga bo'linsa, ko'paytma mn ga bo'linadi.

$$(\forall a, b, m, n \in N_0)(a:m \wedge b:n \Rightarrow ab:mn). \text{ Isboti 4 - teorema kabi.}$$

6-teorema. Agar yigindida 1 ta qo'sxiluvchidan tashqari hamma qo'sxiluvchilar s ga bo'linsa, yig'indi s ga bo'linmaydi.

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b, c \in N_0)(a_1:c, a_2:c, \dots, a_n:c, \overline{b:c} \Rightarrow ((a_1 + a_2 + \dots + a_n + b):\overline{c})).$$

Isbot: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + b$ bo'lsin. $S:c$ deb, faraz qilaylik, u holda $b = [S - (a_1 + a_2 + \dots + a_n):c \Rightarrow b:c$ (Tz ga ko'ra) bu shartga zid. Demak, $\overline{S:c}$.

4. Bo'linish alomati x sonining yozuvchiga qarab, x ni a ga bo'lishni bajarmay, x soni a ga bo'linadimi yoki yo'qmi, degan savolga javob beruvchi qoidadir. Yuqorida aytilganiday, matematikada bunday umumiy qoida yo'q. Lekin ba'zi sonlarga bo'linish alomatlari topilgan va biz ularni ko'rib chiqamiz.

Muammo: Bo'linish alomati deganda nimani tushunasiz?

(4 bo'linish alomat)

1) O'nli sanoq sistemasida 2 ga bo'linish alomatini keltirib chiqaramiz. Buning uchun x sonining 10 lik saroq sistemasidagi yozuvchini ko'rib chiqamiz:

$x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + x_1 \cdot 10 + x_0$ 10 soni 2 ga bo'lingani uchun $10, 10^2, \dots, 10^n$ ko'rinishidagi sonlarning hammasi 2 ga bo'linadi. Bo'linish haqidagi 2- va 4- teoremlarga ko'ra $u = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + x_1 \cdot 10$ yig'indi 2 ga bo'linadi. x soni 2 bo'linadigan u soni va x_0 yigindisidan iborat. Demak, x soni 2 ga faqat x_0 2 ga bo'linsagina bo'linadi. x_0 sonning oxirgi raqami va u 0, 2, 4, 6, 8 ga teng bo'lsagina 2 ga bo'linadi. Bu raqamlar juft raqamlar deyiladi.

2 ga bo'linish alomati: Son 2 ga uning o'n lik yozuvi juft raqam bilan tugasa va faqat shu holdagina bo'linadi.

5 ga 10 ga bo'linish alomatlari ham shu kabi –keltirib chiqariladi.

5 ga bo'linish alomati: Son 5 ga bo'linishi uchun uning yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va etarli.

10 ga bo'linish alomati: Sonning yozuvi 0 raqami bilan tugasa va faqat shu holdagina u 10 ga bo'linadi.

2) 4 ga va 25 ga bo'linish alomatlari bir-biriga o'xshash. Bu alomatlarni keltirib chiqarish uchun $100 = 4 \cdot 25$ ekanligini hisobga olish etarli. 100 soni 4 ga ham, 25 ga ham bo'linadi, Demak, $10^n (p \geq 2)$ ko'rinishidagi hamma sonlar 4 ga ham 25 ga ham bo'linadi. Demak $x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + x_1 \cdot 10$ son yozuvidagi $z = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10$ qo'sxiluvchi 4 ga va 25 ga bo'linadi. x soning 4 ga va 25 ga bo'linishi $x_1 \cdot 10 + x_0$ yig'indiga bogliq ekan.

4 ga bo'linish alomati: x sonning oxirgi 2 raqami hosil qilgan 2 xonali son 4 ga bo'linsa, va faqat shu holdagina x soni 4 ga bo'linadi.

25 ga bo'linish alomati: x soni 25 ga bo'linishi uchun uning o'n lik yozuvi 00, 25, 50 yoki 75 bilan tutashi zarur va etarli.

3) 3 va a ga bo'linish alomatlarini keltirib chiqarish uchun barcha $10^n - 1$ ko'rinishidagi sonlar 9 ga bo'linishini ko'rsatamiz.

$$10^n - 1 = 9 \cdot 10^{n-1} + \dots + 9 \cdot 10 = 9 \cdot (10^{n-1} + \dots + 10 + 1) = 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n-1}. \text{ Bu ko'paytma albatta 9 ga va}$$

bo'linishning tranzitivligiga asosan 9:3 bo'lgani uchun, 3 ga ham bo'linadi.

$$x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0$$

$$x = x_n \cdot (10^n - 1) + x_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + x_2 \cdot (10^2 - 1) + x_1 \cdot (10 - 1) + x_n + x_{n-1} + \dots + x_2 + x_0$$

sonni ko'rinishida yozish mumkin, $10^n - 1$ ko'rinishidagi barcha sonlar 9 ga va 3 ga bo'lingani uchun $x_n \cdot (10^n - 1) + \dots + x_1 \cdot (10 - 1)$ yig'indi ham 9 ga va 3 ga bo'linadi x soni 9 ga yoki 3 ga $x_n + \dots + x_1$ yig'indi 9 ga yoki 3 ga bo'lingan holda bo'linadi. Bu esa, sonning raqamlari yig'indisidir. 3 ga (9 ga) bo'linish alomati:

Son 3 ga (9 ga) bo'linishi uchun uning raqamlari yigindisi 3 t (9 ga) bo'linishi zarur va etarli.

Savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'linish munosabati ta'rifini ayting.
2. Bo'linish munosabati qanday xossalarga ega?
3. Nomanfiy butun sonlar to'plamida yig'indi, ayirma va ko'paytmaning bo'linishi haqida teoremlarni ayting va birortasini isbotlang.
4. Bo'linish alomati dyob nimaga aytiladi? Qanday sonlarga bo'linish alomatlarini bilasiz? Birortasini keltirib chiqaring.

Misollar.

Nomanfiy butun sonlar to'plamida sonlarni bo'linishi.

1 – misol. Agar a toq son bo'lsa, u holda $a^2 - 1$ ni 8 ga bo'linishini isbotlang.

Isboti: Har qanday toq sonni $2n - 1$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda $n \in N$ shartga ko'ra $(2n - 1)^2 - 1$ ni 8 ga bo'linishini isbotlashimiz kerak. Qavslarni ochib chiqaylik: $(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$. Ma'lumki 2 ta son ketma – ket kelgan sonlar ko'paytmasi 2 ga bo'linadi. Ko'paytmada 4 soni mavjud, demak $4n(n - 1)$ 8 ga bo'linadi.

Shunday qilib $(2n - 1)^2 - 1$ ni 8 ga bo'linishini isbotladik.

2 – misol. Matematik induksiya metodi yordamida $a^5 - a$ ni 5 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish: $a = 1$, $a^5 - a$ ni 5 ga bo'linishini ko'rsataylik: $15 - 1 = 0$, $0 : 5$. Demak chin. $a = k$ uchun chin deb faraz qilamiz, ya'ni $(k^5 - k) : 5$. Berilgan tasdiqni $a = k + 1$ uchun chinligini isbotlaymiz.

$$(k + 1)^5 - (k + 1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

Birinchi qavsda turgan ifoda farazimizga ko'ra 5 ga bo'linadi, ikkinchi qavsda esa 5 ko'paytuvchi bor. Yig'indi biror songa bo'linishi uchun har bir qo'shiluvchini shu songa bo'linishi kifoya. Demak $[(k + 1)^5 - (k - 1)] : 5$. Bundan berilgan tasdiq ixtiyoriy a uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

3 – misol. $[(2n - 1)^3 - (2n - 1)]$ ifodani ixtiyoriy n da 24 ga bo'linishini isbotlang.

Isboti: $n = 1$ berilgan ifoda 24 ga bo'linadi. $(2 \cdot 1 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) = 0 : 24$ (chin).

$n > 1$ bo'lsin, u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(2n - 1)^3 - (2n - 1) = (2n - 1)[(2n - 1)^2 - 1] = (2n - 1)[4n^2 - 4n + 1 - 1] = 4n(2n - 1)(n - 1) = 4n(n - 1)(2n - 1)$$

Bu ifoda 4 koeffisient mavjudligi uchun 4 ga bo'linadi, bundan tashqari 2 ta ketma – ket kelgan natural sonlar ko'paytmasi 2 ga bo'linadi $n(n - 1)$. Demak $4n(n - 1)(2n - 1)$ ko'paytma 8 ga bo'linadi. Bu ko'paytmani 3 ga bo'linishini isbotlasak $[(2n - 1)^3 - (2n - 1)]$ ifodani 24 ga bo'linishini isbotlagan bo'lamiz. Buning uchun quyidagi 3 holni ko'ramiz:

a) n 3 ga bo'linadi, ya'ni $n = 3k$.

b) n sonni 3 ga bo'lganda 1 qoldiq hosil bo'ladi, ya'ni $n = 3k + 1$.

v) n sonni 3 ga bo'lganda 2 qoldiq hosil bo'ladi, ya'ni $n = 3k + 2$.

Birinchi holda: $4n(n - 1)(2n - 1) = 4 \cdot 3k \cdot (3k - 1)(2 \cdot 3k - 1) = 4 \cdot 3k(3k + 1)(6k + 1)$

Ko'paytmada 3 koeffisient borligi uchun 3 ga bo'linadi.

Ikkinchi holda: $4n(n - 1)(2n - 1) = 4 \cdot (3k + 1)(3k + 1 - 1)[2(3k + 2) - 1] = 4 \cdot 3k(3k + 1)(6k + 1)$

Ko'paytmada 3 koeffisient bor, shuning uchun ko'paytma 3 ga bo'linadi.

Uchinchi holda: $4n(n-1)(2n-1) = 4 \cdot (3k+2)(3k+2-1)[2(3k+2)-1] = 4 \cdot (3k+2)(3k+1)(6k+3) =$
 $= 4 \cdot 3(3k+1)(3k+2)(2k+1)$

Ko'paytmada 3 ko'effitsient bor, shuning uchun ko'paytma 3 ga bo'linadi.

Shunday qilib berilgan ifoda $4n(n-1)(2n-1)$ 8 va 3 ga qoldiqsiz bo'linadi. 8 va 3 o'zaro tub son bo'lganligi uchun $[(2n-1)^3 - (2n-1)] : (8 \cdot 3)$, ya'ni 24 ga bo'linadi.

Demak berilgan ifoda $(2n-1)^3 - (2n-1)$ 24 ga bo'linadi. Shuni isbot qilish kerak edi.

4 – misol. a sonni 3 ga bo'lganda 1 qoldiq hosil bo'ladi. a^2, a^3 sonlarni 3 ga bo'lganday qanday qoldiq hosil bo'ladi.

Yechish: a soni 3 ga bo'linsa uni $a = 3k$ ko'rinishda yozish mumkin.

$$a = 3k + 1$$

a^2 sonni 3 ga bo'lganda qoldig'ini topaylik, ya'ni $a^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$.

Berilgan ifodani 3 ga bo'linishini ko'rsataylik. Bo'linish munosabatining xossasiga asosan, har bir qo'sxiluvchi 3 ga bo'linsa, yig'indi ham 3 ga bo'linadi. Birinchi 2 ta qo'sxiluvchi 3 ga bo'linadi, 1 esa 3 ga bo'linmaydi, demak 1 qoldiq. Shuning uchun a^2 ni 3 ga bo'lganda 1 qoldiq hosil bo'ladi.

a^3 ni 3 ga bo'lgandagi qoldiqni topaylik, ya'ni $a^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 3 \cdot 9k^2 + 3 \cdot 3k + 1$

Yuqoridagiga o'xshash a^3 ni 3 ga bo'lganda 1 qoldiq hosil bo'ladi.

5 – misol. 368312 sonni 7, 11 va 13 larga bo'linishini tekshiring.

Yechish: Ta'rifga ko'ra $M = 368$, $N = 312$. Demak, $M - N = 368 - 312 = 56$.

56 soni 7 ga bo'linadi, ammo 11 va 13 larga bo'linmaydi. Demak berilgan 368312 soni 7 ga bo'linadi, 11 va 13 larga esa bo'linmaydi.

6 – misol. Agarda 3 xonali son 37 ga bo'linsa, u holda shu raqamlardan ammo boshqa tartibda yozilgan 3 xonali son ham 37 ga bo'linadi. Shuni isbotlang.

Isboti: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$$\overline{abc} : 37 \Rightarrow 10^2 a + 10b + c = 37 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10b = 37 \cdot t - 100a - c \quad (1)$$

$\overline{abc}$ sonni boshqa tartibda yozaylik: $\overline{bca} = 100b + 10c + a$; $\overline{cba} = 100c + 10b + a$

(1)ni $10 \cdot 10b + 10c + a$ ga qo'yamiz. Natijada

$$10 \cdot (37t - 100a - c) + 10c + a = 10 \cdot 37t - 100 \cdot 10a - 10c + 10c + a = 10 \cdot 37t - 1000a + a = 10 \cdot 37t - 999a =$$

$$= 10 \cdot 37t - 37t \cdot 27a = 37(10t - 27a)$$

Bundan 37 ga bo'linishi kelib chiqadi. Shuni isbot qilish kerak edi.

Shunga o'xshash $100c + 10a + b$ ni 37 ga bo'linishini isbotlash mumkin.

7 – misol. x raqamning qanday eng kichik qiymatida $(471 + \overline{2 \times 3})$ soni 3 ga qoldiqsiz bo'linadi?

Yechish: 471 soni 3 ga bo'linadi, chunki $4 + 7 + 1 = 12$ $12 : 3$ $\overline{2 \times 3} = 2 + x + 3 = x + 5$

bo'linishi kerak. Demak $x = 1$. Javob $x = 1$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

1. x raqamning qanday eng katta qiymatida $(471 + \overline{3 \times 2})$ soni 3 ga qoldiqsiz bo'linadi.
2. $(2k+1)^2 - (2k-1)^2$ ifoda $k \in N$ da qanday sonlarga qoldiqsiz bo'linadi.
3. Bir xil raqamlar bilan yozilgan 3 xonali sonni 37 ga bo'linishini isbotlang.
4. $(100-1):37$ va $(100-1):27$ chinligidan, ixtiyoriy sonni $1000a+v$ ko'rinishga keltirib, 37 va 27 bo'linish alomatini keltirib chiqaring. Bu erda v – berilgan sonni oxiri 3 ta raqamini hosil qilgan son.
5. Amallarni bajarmasdan turib, quyidagi yig'indilarni bo'linishini ko'rsating.
 - a) $153 + 784$; $9 \nmid a$; $8 \nmid a$;
 - b) $648 + 1093 + 624$; $4 \nmid a$; $3 \nmid a$;
 - c) $1599 + 3707$; $11 \nmid a$; $25 \nmid a$; $4 \nmid a$;
6. Ikki xonali son bilan uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo'lgan son ayirmasi 9

ga bo'linadi. Shuni isbotlang.

7. Ikki xonali son bilan uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo'lgan son yig'indisi 11 ga bo'linadi. Shuni isbotlang.

8. Uch xonali son bilan, uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo'lgan son ayirmasi 198 ga teng. Isbotlang.

9. Ixtiyoriy butun son kubi bilan shu son orasidagi ayirma 6 ga bo'linishini isbotlang.

10. Agar a juft son bo'lsa, $a(a^2 + 20)$; $a(a^2 - 20)$; $a(a^2 + 4)$; $a(a^2 - 4)$ ni 8 ga bo'linishini isbotlang.

11. a ixtiyoriy butun son bo'lsa, $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ ni 24 ga bo'linishini isbotlang.

12. Quyidagi sonlarni 7, 11 va 13 bo'linishini aniqlang: 367488; 378456.

13. Agar ixtiyoriy a natural sonni 3 ga bo'lganda 1 qoldiq, $e \in N$ ni 3 ga bo'lganda 2 qoldiq hosil bo'lsa, u holda $a \cdot v$ ko'paytmani 3 ga bo'lganda 2 qoldiq hosil bo'ladi. Isbotlang.

14. 3 ta ketma – ket kelgan N sonlar kublarining yig'indisi 3 ga bo'linishini isbotlang.

15. Ixtiyoriy n da $n^2(n^2 - 1)$ sonni 4 ga va 12 ga bo'linishini isbotlang.

16. Ixtiyoriy n da $n^5 - n$ sonni 6 ga bo'linishini isbotlang.

17. Ixtiyoriy butun n uchun $2^n + 2^{n+1} + 1$ ni 6 ga bo'linishini isbotlang.

18. Quyidagilarni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

a) $n^7 - n$ 7 ga bo'linadi;

b) $n^5 - 5n^3 + 4n$ 120 ga bo'linadi;

c) $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ 43 ga bo'linadi;

d) $3^{2n+1} + 40n - 67$ 64 ga bo'linadi;

e) $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ 25 ga bo'linadi;

2.20. n ning barcha butun qiymatlarida $(n^2 - n)$ 3 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

2.21. $n^2 + 1$ sonining ixtiyoriy butun qiymatida 3 ga bo'linmasligini isbotlang.

2.22. n ning barcha natural qiymatlarida $(n^2 + 1)$ soni 7 ga bo'linishini isbotlang.

2.26. $4^n + 15n - 1$ soni n ning barcha natural qiymatlarida 3 ga bo'linishini isbotlang.

2.27. $n^3 + 5n$ soni ixtiyoriy natural n da 6 ga bo'linishini isbotlang.

2.28. $7^n + 3n - 1$ ning 9 ga bo'linishini isbotlang, bunda $n \in N$.

2.29. $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ ning 17 ga bo'linishini isbotlang.

Mavzu: Tub va murakkab sonlar.

Reja:

1. Tub va murakkab sonlar, ularning xossalari.
2. Eratosfen jalviri.
3. Tub sonlar to'plamining cheksizligi.
4. Arifmetikaning asosiy teoremasi.

a) Qanday sonlar tub sonlar deyiladi?

1 - Ta'rif. Faqat 2 ta bo'luvchisi bor natural son tub son deyiladi.

b) Qanday sonlar murakkab deyiladi?

2- Ta'rif: 2 tadan ortiq bo'luvchisi bo'lgan natural son murakkab son deyiladi.

1. Har qanday natural sonning kamida 2 ta bo'luvchisi bor: 1 soni va a sonining o'zi.

M: 3, 5, 17 sonlari tub son, chunki ularning 1 va o'zidan boshqa bo'luvchilari yo'q. –12. tub son emas, uning 1 va 12 dan boshqa bo'luvchilari ham bor, ular 2, 3, 4, 6 sonlari,

M: 6 -murakkab son, uning to'rtta bo'luvchisi bor. Ular: 1, 2, 3, 6, 0 sonining bo'luvchilari cheksiz ko'p, 1 ning faqat 1 ta bo'luvchisi bor, shuning uchun bu 0 va 1 ni tub sonlarga ham murakkab sonlarga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to'plami 4 ta sinfga ajraladi. $N_0 = \{0\} \cup \{1\} \cup \{\text{tub sonlar}\} \cup \{\text{murakkab sonlar}\}$

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar r tub soni 1 dan farqli birorta n soniga bo'linsa, $r=n$ bo'ladi.

Isbot: haqiqatdan ham $r \neq n$ bo'lsa, r sonining 3 ta turli bo'luvchisi bor bo'ladi: 1, r, n. Bu esa shartga zid, demak, r-tub son bo'la olmaydi.

2°. Agar r va q turli tub sonlar bo'lsa, r tub son q tub songa bo'linmaydi.

Isbot: r tub son bo'lgani uchun u faqat 1 ga va r ga bo'linadi. $q \neq r$ va $g \neq 1$ (q -tub son, 1 tub son emas) bo'lgani uchun $\overline{p:q}$

3° Agar a va b natural sonlar ko'paytmasi r tub songa bo'linsa, bu sonlardan biri r ga bo'linadi.

Isbot: Faraz qilaylik $a:b$, u holda r -tub son bo'lgani uchun ularning 1 dan boshqa umumiy bo'luvchisi yo'q $ab:r \Rightarrow b:r$.

4°, 1 dan katta istalgan natural sonning *hech* bo'lmaganda 1 ta tub bo'luvchisi bor.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, 1 dan katta, birorta ham tub bo'luvchisi yo'q natural sonlar mavjud bo'lsin. Bunday sonlar to'plamini A bilan belgilasak, unda eng kichik son mavjud bo'ladi, chunki natural sonlar to'plami quyidan chegaralangan. Eng kichik element a bo'lsin. $a>1$ bo'lgani uchun u yoki tub, yoki murakkab son bo'lishi kerak. a - tub son bo'la olmaydi, chunki $a \in A$ va farazga ko'ra a ning tub bo'luvchisi yo'q. a -murakkab son bo'lsa, u o'zidan va 1 dan farqli biror b natural bo'luvchiga ega bo'lar edi. $b \in A$, chunki $b < a$. Demak, b ning biror r tub bo'luvchisi bor, u holda tranzitivlik xossasiga ko'ra, $a:b \wedge b:p \Rightarrow a:p$ bu farazimizga zid. Demak 1 dan katta barcha natural sonlar *hech* bo'lmaganda 1 ta tub bo'luvchiga ega.

5°. a murakkab sonning eng kichik tub bo'luvchisi $-\sqrt{a}$ dan katta emas.

Isbot: a -murakkab son, r -uning eng kichik- tub bo'luvchisi bo'lsin. U holda $a = bp$ bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki $r \leq b$, aks holda b ning tub bo'luvchilari r dan kichik bo'lib, a soni r dan kichik tub bo'luvchiga ega bo'lib qolar edi. $r \leq b$, tengsizlikning ikkala qismini r ga ko'paytiramiz. $r^2 \leq b = a$ ni hosil qilamiz, Bundan $r^2 \geq a$ va $r \leq \sqrt{a}$ ga ega bo'lamiz.

Bu xossadan sonning tub yoki murakkabligini tekshirishda, sonni tub ko'paytuvchilarga ajratishda foydalaniladi. Masalan: 137 sonini olaylik $121 < 137 < 144$ ya'ni $11^2 < 137 < 12^2$ bundan $11 < \sqrt{137} < 12$. Demak, 137 soni 12 dan kichik tub sonlarga bo'linmasa, tub son bo'ladi. 137 soni 2, 3, 5, 7, 11 sonlarining birortasiga ham bo'linmaydi. Demak, 137 -tub son. 2, Eratosfen g'alviri.

Tub sonlar jadvalini tuzishning qulay usulini eramizdan avvalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi aniqlagani uchun uni Eratosfen g'alviri deb ataladi.

Bu usulga ko'ra 2 dan biror n natural songacha bo'lgan barcha natural sonlar yozib chiqiladi. So'ng 2 dan boshqa barcha 2 ga karrali sonlar o'chiriladi, bunda 2 dan boshqa barcha juft sonlar, ya'ni har ikkinchi son o'chiriladi. 2 dan keyin o'chirilmay qolgan 1 - son 3, endi 3 dan tashqari barcha 3 ga karrali sonlarni o'chiramiz, bunda 3 dan boshlab har 3 -son o'chiriladi, ba'zi sonlar 2 martadan o'chiriladi. 3 dan keyin o'chirilmay qolgan son 5 bo'lgani uchun 5 dan tashqari barcha 5 ga karrali, ya'ni Har 5 -sonni o'chiramiz. Shu taxlit 1 dan katta bo'lmagan o'chirilmay

qolgan songacha davom etgiriladi.

Natijada n gacha bo'lgan barcha tub sonlar qatoriga ega bo'lamiz. Masalan $n = 40$ bo'lsin. Quyidagi qatorga ega bo'lamiz.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

1 dan 40 gacha bo'lgan tub sonlar quyidagilardan iborat:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

3. Tub sonlar to'plamining cheksizligi.

Tub sonlar to'plamining cheksiz ekanligi eramizdan avvalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi Evklid tomonidan isbot qilingan.

Evklid teoremasi: Tub sonlar to'plami cheksizdir. Isbot: tub sonlar to'plami chekli deb faraz qilaylik. U holda $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ tub sonlar to'plamiga ega bo'lamiz. $a = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{n+1}$ sonni hosil qilaylik.

a soni tub emas, chunki u $a_1, a_2, \dots, a_n$ tub sonlarning hammasidan katta va barcha tub sonlar to'plami R ga kirmaydi. a soni murakkab ham bo'la olmaydi, chunki 4° ga ko'ra barcha murakkab sonlarning kamida 1 ta tub bo'luvchisi bo'lishi kerak, bu tub bo'luvchi $r_1, r_2, \dots, r_n$ tub sonlarning biri bo'lishi kerak, lekin a soni bu tub sonlarning birortasiga ham bo'linmaydi, (ularning har biriga bo'lganda 1 qoldiq chiqadi). Demak, R to'plamga kirmaydigan 1 ta bo'lsa ham tub son bor ekan. Bu qarama - qarsilik farazimiz noto'g'riligini ko'rsatadi. Demak, tub sonlar to'plami cheksiz ekan.

4. Arifmetikaning asosiy teoremasi.

Matematikada ko'pincha sonni ko'paytuvchilarga ajratish, yoki uning bo'luvchilarini topish masalasiga duch kelamiz. Shu o'rinda quyidagi teoremani bilib qo'yish foydalidir. Bu teoremani natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

Teorema. Har bir murakkab son yagona usul bilan tub sonlar ko'paytmasiga ajratiladi.

Isboti: Teoremada sonning tub sonlar ko'paytmasiga ajratishning mumkinligi va bunday ko'paytmaning yagonaligi haqida gapiriladi. Bu tasdiqlarni alohida isbot qilamiz. Tasdiqlarning birinchisini teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbot qilaylik:

Faraz qilamiz, tub sonlar ko'paytmasi shaklida yozib bo'lmaydigan murakkab sonlar mavjud. Ularning to'plamini A bilan, to'plamning eng kichik elementini a bilan belgilaymiz. a murakkab son va u tub ko'paytuvchilarga ajralmaydi. a murakkab son bo'lgani uchun uning o'zidan kichik murakkab bo'luvchilari bor: $a_1 a_2$ bo'lsin. $a_1 < a$, $a_2 < a$ bo'lgani uchun $a_1 \wedge a_2$ sonlari A to'plamga kirmaydi, demak ular yoki tub sonlar ko'paytmasiga ajraladi. $a_1 = p_1 \dots r_n \wedge a_2 = q_1 \dots q_n$ bo'lsin, u holda $a = p_1 \dots p_n q_1 \dots q_n$ shaklda tub ko'paytuvchilarga ajraladi va bu farazimizga zid. Demak, tub sonlar ko'paytmasiga ajralmaydigan murakkab son bo'lishi mumkin emas.

Ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz, ya'ni murakkab sonning tub sonlar ko'paytmasi ko'rinishida yagona usul bilan yozish mumkin. Faraz qilaylik, turlicha tub sonlar ko'paytmasiga ajraladigan murakkab sonlar mavjud, ularning to'plami A va eng kichik elementi a bo'lsin. Farazga ko'ra $a = r_1 \dots r_m$ va $a = q_1 \dots q_k$. Tengliklarning o'ng tomonlarini tenglaymiz: $p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_k$.

Bu tenglikning chap qismi p_i ga bo'linadi, demak o'ng qismi ham bo'linishi kerak, $q_1 \dots q_k$ tub sonlar bo'lgani uchun, ularning biri, masalan, $q_1 \dots p$ ga bo'linadi, tub sonlar xossasiga ko'ra $q_1 \dots p_1$ bo'ladi. Tenglikning ikkala qismini p_1 ga bo'lsak, $p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_k = c$ soniga ega bo'lamiz, $c = a : p_1 \wedge p_1 \geq 2$ bo'lgani uchun $s > a$ va u A to'plamga tegishli bo'lmaydi, demak u tub sonlar ko'paytmasi shaklida yagona usul bilan yoziladi. Demak, $p_2 \dots p_n \wedge q_2 \dots q_k$ yoyilmalar tarkibiga ko'ra bir xil va faqat ko'paytuvchilar tartibi bilangina farq qilishi mumkin. U holda $p_1 p_2 \dots p_n \wedge q_1 q_2 \dots q_k$

ham bir xil sonlardan iborat bo‘ladi. Bu esa, . farazimizga zid. Demak istalgan murakkab son faqat bir xil usul bilan tub sonlar ko‘paytmasiga ajratiladi va turli ko‘paytmalar mavjud bo‘lsa, ular faqat ko‘paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bunday ko‘paytmada odatda sonning tub bo‘luvchilari o‘sib borish tartibida, bir xil ko‘paytuvchilarni esa, daraja ko‘rinishida yoziladi. Ko‘paytmaning bu shaklini sonning kanonik yoyilmasi deyiladi. $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ shaklida bo‘ladi, bu erda $p_1 < p_2 < \dots < p_n$.

Masalan, $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ bo‘lsa, kanonik yoyilmasi $2 \times 3 \times 5^2$ ko‘rinishida, 2000 soni uchun esa, $2000 = 2^3 \times 5^4$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Savollar:

1. Tub va murakkab sonlar, ta’rifini ayting, ularning qanday xossalari bor? Birortasini isbotlab ko‘rsating.
2. Eratosfen g‘alviri nima?
3. Tub sonlar to‘plamining cheksizligini isbotlang.
4. Arifmetikaning asosiy teoremasini ayting va isbotlang.

Misollar.

1 – misol. 50 dan kichik tub sonlar nechta?

Yechish: Ta’rifga ko‘ra tub sonlar o‘ziga va 1 ga bo‘linadi.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,

Javob: 15 ta.

2 – misol. 1601 sonini tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma – ket 2, 3, 5, . . . va hokazo tub sonlarga bo‘lib boriladi. Qanday tub songa etganda bo‘lishni to‘xtatish mumkin?

Yechish: Agar n^2 dan kichik a natural son murakkab bo‘lsa, u holda uning tub ko‘paytuvchilaridan biri n dan kichik bo‘ladi: $1601 > 40^2 \cdot 37 < 41^2$, $41 > 40$.

Demak, 37 ga etganda to‘xtatish mumkin.

$$\begin{array}{r|l}
 1601 & 37 \\
 -148 & 43,27027 \\
 \hline
 121 & \\
 -111 & \\
 \hline
 100 & \\
 -74 & \\
 \hline
 260 & \\
 -259 & \\
 \hline
 100 &
 \end{array}$$

3 – misol. Qaysi juft lik o‘zaro tub sonlardan iborat:

(21, 14); (21, 10); (12, 15); (10, 15); (8, 14);

Yechish: Ikki son o‘zaro tub bo‘lishi uchun ularning 1 dan boshqa umumiy ko‘paytuvchisi bo‘lmashligi kerak. (21, 10) sonlar o‘zaro tub sonlar, chunki $21 = 3 \cdot 7$; $10 = 2 \cdot 5$

4 – misol. n raqamning qanday qiymatlarida $50 + n$ soni eng kam tub ko‘paytuvchilarga ajraladi.

Yechish: 53 va 59 lar tub sonlar va ular 1 va 53, 1 va 59 ga ajraladi. Javob: 3 va 9

5 – misol. 1728 va 1575 sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajrating.

1728	2	1728=2 ⁶ ·3 ³	1575	3	1575=3 ² ·5 ² ·7
864	2		525	3	
432	2		175	5	
216	2		35	5	
108	2		7	7	
54	2			1	
27	3				
9	3				
3	3				
1					

6 – misol. Tub sonlarni ko'rsating.

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21

Yechish: Bu qatorda 9 va 21 murakkab sonlar, chunki $9=3 \cdot 3$, $21=3 \cdot 7$, ya'ni o'zi va birdan boshqa bo'luvchilari mavjud, qolgan sonlar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sonlar tub.

7 – misol. 9225 sonini tub ko'paytuvchilarga ajrating va uning nechta bo'luvchilari bor?

Yechish:

9225=3 ² ·5 ² ·41	9225	3
	3075	3
	1025	5
	205	5
	41	41
	1	

Agar n murakkab son bo'lsa, u holda uning bo'luvchilari soni kanonik yoyilmadagi ya'ni

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_k} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ – *туб сонлар*.

$\delta = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ ko'paytma soniga teng, ya'ni $(2+1)(2+1)(1+1)=18$ (ta)

8 – misol. 1575 sonning barcha bo'luvchilari yig'indisini toping.

Yechish:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_k} \text{ bu erda } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ natural sonlar.}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ - tub ko'paytuvchilar.

Ta'rifga ko'ra sonning barcha bo'luvchilari soni quyidagi formuladan topiladi.

1575	3	$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \frac{p_3^{\alpha_3+1} - 1}{p_3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_k+1} - 1}{p_n - 1}$
525	3	
175	5	
35	5	
7	7	
1		

1575=3²·5²·7

$$S = \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{2+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = \frac{26}{2} \cdot \frac{124}{4} \cdot \frac{48}{6} = 13 \cdot 31 \cdot 8 = 3224$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

- 30 dan kichik tub sonlar nechta?
- 100 dan kichik tub sonlar nechta?

3. 3607 sonining tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma – ket 2, 3, 5 va hokazo tub sonlarga bo'lib boriladi. Qanday tub songa kelganda bo'lishni to'htatish mumkin?
4. Qaysi juft lik o'zaro tub sonlardan iborat.
(8; 14), (11; 22), (12; 35), (12; 34), (10; 26).
5. n raqamning qanday qiymatlarida $30+n$ soni eng kam tub bo'luvchilarga ajraydi?
6. Tub sonlarni ko'rsating.
a) 21, 23, 37, 29, 31, 33, 39,
b) 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59,
v) 61, 63, 67, 69, 71, 73, 77, 79,
g) 81, 83, 87, 89, 91, 93, 97, 99,
7. Berilgan sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrating.
144, 210, 800, 216, 343, 256, 1024, 750, 1078, 10227, 844, 21780, 45630, 1998.
8. Quyidagi sonlarni bo'luvchilari sonini toping.
144, 210, 800, 216, 343, 256, 1024, 750, 1078, 10227, 844, 21780, 45630, 1998.
9. 7 – misolda berilgan sonlarning barcha bo'luvchilari yig'indisini toping.

Mavzu: Sonlarning EKUBi va EKUKi.

Reja:

1. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi va eng katta umumiy bo'luvchisi.
2. Sonlarning EKUKi va EKUBini topish algoritmlari.
3. Sonlarning EKUKi va EKUBining xossalari.
4. Murakkab songa bo'linish alomati.

a) a va b sonlarning eng kichik umumiy karralisi deganda qanday sonni tushunasiz?

a soni b sonlarning umumiy karralilarining eng kichigi shu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va EKUK (a,b) ko'rinishida belgilanadi (qisqacha $K(a,b)$).

b) a va b sonlari eng katta umumiy bo'luvchisi deganda qanday sonni tushunasiz?

a va b sonlarni umumiy bo'luvchilarining eng kattasi shu sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi deyiladi va EKUB (a,b) yoki $B(a,b)$ ko'rinishida belgilanadi.

v) Arifmetik amallar bajariladigan EKUB va EKUK qaysi vazifani bajaradi?

EKUB – kasrlarni qisqartirishda.

EKUB –ratsional sonlar ustida qo'shish va ayirish amallarini bajarganda umumiy mahraj vazifasini bajaradi.

Sonlarning bo'linishi haqida nomanfiy butun sonlar to'plami N_0 da gapirilgan edi. Sonning karralisi va bo'luvchilari haqida natural sonlar to'plamida gapiramiz, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas va 0 istalgan sonning karralidir. Shuning uchun bundan keyin son deganda natural sonni tushunamiz.

1- ta'rif. Agar a soni b soniga bo'linsa, a soni b soniga karrali yoki b ning karralisi deyiladi. $\forall b$ ga karrali sonlar to'plami cheksiz va ularning umumiy ko'rinishi nb eng kichigi esa b bo'ladi.

2- ta'rif. t soni a va b sonlarning karralisi bo'lsa, t ularning umumiy karralisi deyiladi.

3 - ta'rif. a soni b sonlarning umumiy karralilarining eng kichigi shu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va EKUK (a,b) ko'rinishida belgilanadi (qisqacha $K(a,b)$).

Masalan, 6 sonining karralilari $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\} = A$, 8 sonining karralilari $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\} = B$ bo'lsin. Bu sonlarning umumiy karralilari $\{24, 48, 72, \dots\} = A \cap B$ ularning eng kichigi $24 = K(6, 8)$ bo'ladi.

1°. a soni b sonlarning istalgan umumiy karralisi eng kichik umumiy karralisiga bo'linadi.

Isbot: $m:a \wedge m:v \wedge K(a,v) = K$ bo'lsin. $m:k$ ekanligini isbot qilish uchun teskarisini faraz kilamiz.

m soni k ga qoldiqli bo'linsin, ya'ni $m = kq + r$ ($r < k$) bo'lsin $m : a^k : a \rightarrow r = (m - kq) : a$ (bo'linish haqidagi teoreмага ko'ra) shunga o'xshash $(m : a^k : a) \rightarrow r = (m - kq) : a; (r : a^k : a) \rightarrow r = \forall K(a, a)$. Umumiy karralilarning eng kichigi k

bo'lgani uchun $r \geq k$ a va v sonlarning umumiy karralisi $r \geq k$ bo'lishi kerak, lekin farazga ko'ra qoldiq g bo'luvchi k dan kichik bo'ladi. Bu ziddiyat $g=0$ ekanini bildiradi.

2°. Agar EKUK (a,b) bo'lsa, $\forall c \in N$ uchun EKUK $(ac,b \in)kc$ bo'ladi.

Isbot:

$$k : a \Rightarrow kc : ac$$

$$k : c \Rightarrow kc : ec \Rightarrow kc = YK(ac, ec)$$

kc ning EKUK (as, vs) ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik EKUK $(as, vs)=l$ va $l < kc$ bo'lsin. $1: as \wedge l: vs$ ekanligidan $l: c < kc: c=k$, ya'ni $l: c < k$ shu bilan birga $(l:s): a \wedge (l:s): v$ bu esa k ning a va v sonlarining eng kichik umumiy karralisi, degan fikrga zid, chunki $(l:s)=EKUK(a, v)$ bo'lib qolyapti. Demak farazimiz noto'g'ri.

4 -ta'rif. Agar a soni b soniga bo'linsa, b soni a sonining bo'luvchisi deyiladi.

5-ta'rif. Agar a va b sonlar s soniga bo'linsa, s soni a va b ning umumiy bo'luvchisi deyiladi.

6 -ta'rif. a va b sonlarni umumiy bo'luvchilarining eng kattasi shu sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi deyiladi va EKUB (a,b) yoki $B(a,b)$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan: 24 sonining bo'luvchilari to'plami $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, 36 sonining bo'luvchilari to'plami $V=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, bu sonlarning umumiy bo'luvchilari $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ va ularning eng kattasi 12 ga teng, ya'ni $12 = EKUB(24 \wedge 36)$.

Masalan:

$$a = 2^4 \cdot x3^3 \cdot x5^2 \cdot x7^2 \text{ va } c = 2^5 \cdot x3^4 \cdot x5^3 \cdot x11 \text{ bo'lsa, } B(a, c) = 2^4 \cdot x3^3 \cdot x5^2 \text{ va,}$$

$$K(a, c) = 2^5 \cdot x3^4 \cdot x5^3 \cdot x7^2 \cdot x11 \text{ bo'ladi.}$$

Sonlarning kanonik yoyilmasini topish ularni tub ko'paytuvchilarga ajratish bilan bog'liq edi. Ko'p xonali sonlarning tub ko'paytuvchilarini topish ba'zi hollarda qiyinlik qiladi. Masalan 8897 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishda avval 7 ga, so'ng 1271 sonini 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 sonlariga bo'lib ko'ribgina, 31 tub bo'luvchini topamiz, Shunday hollarda EKUB ni tezroq topish imkonini beruvchi boshqa usullardan foydalanish mumkin. Bu usul **Evklid algoritmi deyiladi** va u quyidagi mulohazalarga asoslanadi.

1. Agar a soni v ga bo'linsa, $B(a,v)=v$ bo'ladi, chunki v ning o'zidan katta bo'luvchisi yo'q.

2. Agar a soni v ga bo'linmasa, $a=sq+r$ va $UB(a,v)=UB(v,g)$ bo'ladi, ya'ni a soni v ga qoldikli bo'linadi, a va v ning umumiy bo'luvchilari to'plami v va a ni v ga bo'lishdagi qoldiq g ning umumiy bo'luvchilari to'plami bilan ustma-ust tushadi. d- $UB(a,v)$ bo'lsin. $(a:d \wedge v:d) \rightarrow (r=a-vq):d$ (ayirmaning bo'linishi haqidagi teorema ko'ra) $d=UB(v,r)$. Aksincha $d=UB(v,r)$ bo'lsin, u holda $a=vq+r$ ham d ga bo'linadi, (yigindini bo'linishi haqidagi teorema ko'ra), bundan $d=UB(a,v)$ degan xulosa kelib chiqadi.

3. $a = cq + r \wedge a \in N$ bo'lsa $B(a,v)=B(v,r)$ bo'ladi. 2-mulohazaga ko'ra a,v va v, g sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamlari bir xil, demak bu to'plamlarning eng katta elementlari ham bir xil bo'ladi.

Ana shu 3 ta mulohazaga tayanib a, v sonlarining EKUB ini topishni v, g sonlari EKUBini topish bilan almashtirish mumkin bo'ladi. Agar v g ga karrali bo'lsa, $B(c,r)=r, c=rq_1 + r_1$ bo'lsa $B(c,r)=B(r,r_1)$ va hokazo. Bu jarayon biror qoldiq o'zidan keyingi qoldiqqa qoldiqsiz bo'linguncha davom etadi va shu oxirgi 0 dan farqli qoldiq $B(a, v)$ bo'ladi.

Masalan: $B(4565, 960)$ ni topish kerak bo'lsin. Ketma -ket bo'lishni ixcham ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{array}{r}
 4565 \quad | \quad 960 \\
 \underline{3840} \quad | \quad 4 \\
 960 \quad | \quad 725 = r \\
 \underline{725} \quad | \quad 1 \\
 725 \quad | \quad 135 = r_1 \\
 \underline{675} \quad | \quad 5 \\
 135 \quad | \quad 50 = r_2 \\
 \underline{100} \quad | \quad 2 \\
 50 \quad | \quad 35 = r_3 \\
 \underline{35} \quad | \quad 1 \\
 35 \quad | \quad 15 = r_4 \\
 \underline{30} \quad | \quad 2 \\
 15 \quad | \quad 5 \quad B(a,v) \\
 \underline{15} \quad | \quad 3 \\
 0
 \end{array}$$

$$B(4565, 960) = 5$$

7 -ta'rif. Agar a va b sonlar uchun $EKUB(a,b) = 1$ bo'lsa, bu sonlar o'zaro tub sonlar deyiladi.

Masalan 12 va 35 sonlar yzaro tub, chunki $B(12,35) = 1$. Sonlarying EKUBi va EKUKining quyidagi xossalari bor.

$$1. \text{ Agar } \in YK(a,b) \text{ bo'lsa, } 1 = \frac{ab}{c} = YK(a,b)$$

$$\text{Isbot: } 1:a^1:b \text{ ekanligini ko'rsatamiz. } c = YB(a,b) \Rightarrow a:c \Rightarrow a = a_1c^1b:c \Rightarrow b = b_1c$$

$$1 = \frac{ab}{c} = \frac{a_1c \cdot b_1c}{c} = a_1b_1c$$

$$1 = a_1b_1c = b_1(a_1) = b_1a:a \Rightarrow 1:a$$

$$1 = a_1b_1c = a_1(b_1c) = a_1b:b \Rightarrow 1:b \Rightarrow 1 = YK(a,b) \text{ ekan.}$$

.

$$k = K(a_1b) \text{ bo'lsa, } d = \frac{ab}{k} = B(a_1b) \text{ bo'ladi.}$$

$$k = K(a_1b) \Rightarrow k:b \Rightarrow ak:ab$$

$$d = \frac{ab}{k} \Rightarrow ab = dk \Rightarrow ak:dk \Rightarrow a:d$$

Xuddi shu yo'l bilan $b:d$ ekanligini ko'rsatsa bo'ladi, demak, $d = UB(a,b)$ ekan. .Endi $1 = EKUB(a,b)$ ekanini ko'rsataylik.

Faraz qilaylik a va b sonlarning d dan katta S umumiy bo'luvchisi bo'lsin. U holda 1° ga ko'ra

$$1 = \frac{ab}{c} = YK(a,b) c > d \Rightarrow 1 = \frac{ab}{c} < \frac{ab}{d} = k \Rightarrow 1 < k \text{ Shunday qilib } a \text{ va } b \text{ sonlarning}$$

umumiy karralisi ularning eng knchik umumiy karralisidan kichik bo'lib qoldi. Bu qarama - qarshi lik farazimiz noto'g'riligini bildiradi. Demak, $d = EKUB(a,b)$. Yuqoridagilardan kelib chiqadigan xulosalar:

$$1) B = (a,b) \cdot k(a,b) = \frac{ab}{k} \cdot k = ab \text{ Ya'ni}$$

a va b sonlarning eng katta umumiy karralisining umumiy bo'luvchisi bilan eng kichik ko'paytmasi shu sonlar ko'paytmasiga teng.

2) Agar $B = (a,b) = 1$ bo'lsa, $K = (a,b) = ab$, Ya'ni, o'zaro tub sonlarning eng kichik umumiy karralisi ularning ko'paytmasiga teng.

3) a va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi ularning istalgan umumiy bo'luvchisiga

bo'linadi.

4) $(E(b, c) = 1 \wedge a : b \wedge a : c) \Rightarrow (a : bc)$ a son o'zaro tub bo'lgan b va c sonlarning har biriga bo'linsa, a soni ularning ko'paytmasi b ga ham bo'linadi.

Isbot: $a : b \wedge a : c \Rightarrow a = YK(b, c) \Rightarrow a : \exists KYB(bc), E = (b, c) = 1 \Rightarrow K(b, c) = bc$ Demak, $a : b$.

3 - va 4- xulosalardan murakkab songa bo'linish alomatlar kelib chiqdi. Bunda murakkab son kamida 2 ta o'zaro tub sonlar ko'paytmasidan iborat bo'lishi kerak, Bunday alomatlardan bir nechtasini keltiramiz.

1- alomat: X soni 6 ga bo'linishi uchun u 2 ga va 3 ra bo'linishi zarur va etarli.

2- alomat X soni 12 ga bo'linishi uchun u 3 ga va 4 ga bo'lishi zarur va etarli va hokazo. Bunda $B(2,3)=1, B(3,4)=1$ shartlar bajarilishi kerak.

Savollar:

1. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi va eng katta umumiy bo'luvchisi deb nimaga aytiladi ?
2. Sonlarning EKUKi va EKUBini topish algoritmlarini ayting.
3. Sonlarning EKUKi va EKUBining qanday xossalari bor?
4. Murakkab songa bo'linish alomatini ayting. Misollar keltiring.

Misollar.

1 – misol. 132 va 360 sonlarning EKUB i va EKUK ini toping.

Yechish: 132 va 360 sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$$\begin{array}{r}
 132 \begin{array}{l} 2 \\ 66 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 33 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 11 \end{array} \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \\
 360 \begin{array}{l} 2 \\ 180 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 90 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 45 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 15 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

Ta'rifga ko'ra EKUB berilgan sonlarning yoyilmalarining har birida qatnashgan tub ko'paytuvchilarni eng kichik darajalarida olinadi:

$$EKUB(132; 360) = 2^2 \cdot 3^1 = 12.$$

Ta'rifga ko'ra EKUK berilgan sonlarning yoyilmalarining birortasida bo'lsa ham qatnashgan tub ko'paytuvchilarning eng katta darajalarida olinadi:

$$EKUK(132; 360) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960.$$

2 – misol. 728 va 455 sonlarning EKUB ini Evklid algoritmi yordamida toping.

Yechish: EKUB (728; 455) ni topish uchun qoldikli bo'lishdan foydalaniladi.

$$\begin{array}{r}
 728 \begin{array}{l} 455 \\ 455 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 273 \end{array} \begin{array}{l} 273 \\ 182 \end{array} \begin{array}{l} 182 \\ 91 \end{array} \begin{array}{l} 91 \\ 2 \end{array} \\
 0
 \end{array}$$

Demak, $EKUB(728; 455) = 91$, ya'ni noldan farqli oxirgi qoldiq.

3 – misol. 728, 455 va 117 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.

EKUB (91; 117)=13

0

Demak, EKUB (728, 455, 117)=13

$$EKUK(728, 455) = \frac{728 \cdot 455}{EKUB(728 \cdot 455)} = \frac{728 \cdot 455}{91} = 3640$$

Ta'rifga ko`ra

$$a \cdot e = EKUB(a; e) \cdot EKUK(a; e) \quad (1)$$

Demak, EKUK (728; 455)=3640.

Endi 3640 va 117 sonlarning EKUKini topamiz. Yana (1) formuladan foydalanamiz:

$$EKUK(3640; 117) = \frac{3640 \cdot 117}{13} = 32760$$

Shunday qilib,

EKUB (728; 455; 117)=13

EKUK (728; 455; 117)=32760

4 – misol. 60, 252, 264 sonlarning EKUB va EKUKini tub ko'paytuvchilarga ajratish orqali toping.

Yechish: Berilgan sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratamiz.

60	2 60=2 ² ·3·5 252	2 252=2 ² ·3 ² ·7 264	2 264=2 ³ ·3·11
30	2 126	2 132	2
15	3 63	3 66	2
5	5 21	3 33	3
1	7	7 11	11
	1	1	

EKUB (60, 252, 264) = $2^2 \cdot 3^1 = 12$ ya'ni umumiy tub bo'luvchilarni eng kichik darajalari bilan bog'liq.
EKUK (60, 252, 264) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$, ya'ni barcha qatnashgan tub bo'luvchilarni eng katta darajalari bilan oldik.

5 – misol. 728 ta konfet, 182 ta olma va 819 ta yong`oq bor. Shulardan eng ko`pi bilan nechta bir xil sovg`a tayyorlash mumkin.

Yechish: Eng ko'pi bilan sovg'alarni tayyorlash uchun berilgan 728, 182 va 819 sonlarning EKUB ini topishimiz kerak.

728	2 728=2 ³ ·7·13 182	2 182=2·7·13 819	3 819=3 ² ·7·13
364	2 91	7 273	3
182	2 13	13 91	7
91	7 1 13	13	13
13		1	
1			

EKUB (728; 182; 819)=7·13=91, umumiy bo'luvchilarni eng kichik darajasi bilan oldik.

Demak, 91 ta bir xil sovg'a tayyorlash mumkin va har bir sovg'aga 8 ta konfet, 2 ta olma va 9 ta yong'oq solingan bo'ladi.

6 – misol. Quyidagi sonlardan qaysi biri 12 ga qoldiqsiz bo'linmaydi:

9216, 13626, 12024, 18312, 52308.

Yechish: Berilgan son 12 ga bo'linishi uchun bir vaqtda 3 ga va 4 ga bo'linishi kerak. 4 ga bo'linishi uchun uning oxirgi ikki raqamidan tuzilgan son 4 ga bo'linishi kerak. Demak, 26 ya'ni 13626 soni 4 ga bo'linmaydi.

Javob: 13626 soni 12 ga bo'linmaydi.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. $x=220350$; $y=3,21 \cdot 106$; va $z=1024145$ sonlardan qaysilari 15 ga qoldiqsiz bo'linadi?
2. $x=30118$; $y=3,3 \cdot 105$; va $z=102588$ sonlardan qaysilari 12 ga qoldiqsiz bo'linadi?
3. $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ n ixtiyoriy natural son bo'lsa, yig'indini 14 ga bo'linishini isbotlang.
4. 1320, 3600, 1485 sonlarni tub ko'raytuvchilarga ajratib, EKUB va EKUK ini toping.
5. Evklid algoritmi yordamida 108 va 45 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.
6. Evklid algoritmi yordamida 1001 va 6253 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.
7. 3 ta maktabga teng miqdorda daftarlar jo'natildi. 1 – maktabga har bir pachkada 150 tadan, 2 – maktabga har bir pachkada 10 tadan, 3 – maktabga har bir pachkada 200 tadan daftar bor edi. Har bir maktabga nechtdan daftar jo'natilgan.
8. Quyidagi sonlar uchun Evklid algoritmi yordamida EKUB va EKUK ni toping.
 - a) 1960 va 588
 - b) 15283 va 10013
 - v) 846 va 246
 - g) 391; 437 va 299
 - d) 899; 155 va 124
 - e) 132; 143; 156 va 289
9. 1224 ta konfet, 204 ta mandarin va 306 ta vafl bor. Shulardan nechta bir xil sovg'a tayyorlash mumkin.
10. Agar a) EKUB (a; v)=5 va EKUK (a; v)=105;
 - b) EKUK (a; v)=75 va $a \cdot v=105$;
 - v) EKUK (a; v)=224 va $a : v=7 : 8$;
 - d) EKUB (a; v)=7 va $a \cdot v=1470$;ma'lum bo'lsa, a va v sonlarni toping.
11. Turistlar 1 – kuni velosipedda 56 km, 2 – kuni 72 km yo'l bosishdi. Har kuni turistlar bir xil tez likda yo'l bosishdi va yo'lda vaqt va tez lik butun son bilan ifodalangan bo'lsa, masala shartini qanoatlantiruvchi eng katta tez likni toping.
12. Turistlar 1 – kuni 36 km, 2 – kuni 32 km, 3 – kuni 24 km yo'l yurishgan va yo'lda vaqt va tez lik butun son bilan ifodalangan. Agar tez lik o'zgarmas va mumkin bo'lgandan katta bo'lsa, turistlar yo'lda necha soat bo'lishgan.
13. Quyidagi kasrlarni qisqartiring:
$$\frac{21120}{30720} ; \frac{10013}{15283}$$
14. Kasrni umumiy mahrajga keltiring:
$$\frac{83}{2942} \text{ va } \frac{29}{1816}$$
15. 420 va 156 ning umumiy bo'luvchilari nechta?
16. 840 va 264 ning umumiy bo'luvchilari nechta?
17. 594 va 378 ning umumiy bo'luvchilari nechta?
18. 630 va 198 ning umumiy bo'luvchilari nechta?
19. 15 va 25 sonlari EKUK ining natural bo'luvchilari nechta?
20. 8 va 12 sonlari EKUK ining natural bo'luvchilari nechta?
21. 270 va 300 sonlari EKUK ining 4 va 6 sonlarining EKUK iga nisbatini toping.

22. 21 va 35 sonlarining EKUK i bialn EKUB ining yig`indisini toping?

23. n raqamining qanday qiymatlarida $10+n$ va n sonlarining EKUK isi 60 bo`ladi?

1.36. *Sonning eng katta umumiy bo'luvchisini toping.*

a) 8104 va 5602;

d) 187 va 180;

z) 795 va 2585;

b) 5555 va 11110;

e) 2165 va 3556;

k) 42628 va 33124;

v) 980 va 100;

yo) 5400 va 170;

l) 71004 va 154452;

g) 5345 va 4856;

j) 78999 va 80000;

m) 1000 va 999.

II BOB. Son tushunchasini kengaytirish

Mavzu: Manfiy va musbat sonlar

REJA:

1. Manfiy sonlar haqida tushuncha.
2. Sonning moduli. Qarama – qarshi sonlar. Sonlarni solishtirish.
3. Sonlarni ko`paytirish va bo`lish.

4. Qo'shish va ayirish.

Manfiy son deganda qanday sonlarni tushunasiz?

2 natural sonning yig'indisi yana natural son bo'ladi. Lekin ikki natural sonlarning ayirmasi natural son bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Masalan: $2-1=1$. $1 \in \mathbb{N}$, lekin $1-2$ ayirmaga teng bo'ladigan natural son mavjud emas. Demak yangi sonlarni kiritish kerak. Bunday sonlar 0 va manfiy sonlardir. Ulardan farqlash uchun natural sonlarni musbat sonlar deb ataymiz.

Quyidagi masalani ko'ray lik.

Do'konga kirganda 2 so'm pulimiz bo'lsin. Agar 1 so'mga qalam olsak, u holda $2-1=1$ so'm pulimiz qoladi. Agar yana bitta qalam olsak, pulimiz qolmaydi, buni esa 0 raqami bilan belgilaymiz: $1-1=0$. agar yana bitta qalam olsak, u holda sotuvchiga 1 so'm qarz bo'lamiz. 1 so'm pul va 1so'm qarz butunlay boshqa narsalar. Ularni bir-biridan farqlash uchun “-” minus ishorasidan foydalanamiz. U holda oxirgi qalamni olgach $0-1=-1$ so'm pulimiz qoladi. (1 so'm qarz): Agar yana bitta qalam olsak 2 so'm qarz bo'lamiz: $-1-1=-2$.

Agar do'konga kirib har bir metri 2 so'm 30 tiyin bo'lgan lentadan 1 m olsak, u holda 30 tiyin qarz bo'lamiz: $2-2,3=-0,3$.

Demak yonimizdagi pulni musbat sonlar desak, u holda qarzimiz manfiy sonlar bo'lar ekan.

Ikki natural sonni qo'shganda yig'indi har doim natural son bo'ladi. Lekin natural sonlar ayirmasi natural son bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkun. Masalan, $2-1=1$ natural son, lekin $1-2$ ayirmaga teng bo'lgan natural son mavjud emas. Demak, yangi sonlar kiritish kerak. Bunday sonlar 0 va manfiy sonlardir. Ulardan farqlash uchun shu paytgacha o'rgangan natural sonlarni va o'nli kasrlarni musbat sonlar deb ataymiz.

Quyidagi masalani ko'ray lik:

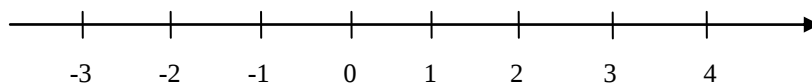
Do'konga kirganda 2 so'm pulimiz bo'lsin. Agar 1 so'mga qalam olsak, u holda $2-1=1$ so'm pulimiz qoladi. Agar yana bitta qalam olsak, pulimiz qolmaydi, buni esa 0 raqami bilan belgilaymiz (0-bu xech vaqo): $1-1=0$. Agar yana bitta qalam olsak, u holda sotuvchidan 1 so'm qarz bo'lamiz. 1 so'm pul va 1 so'm qarz butunlay boshqa – boshqa narsalar. Ularni bir – biridan farqlash uchun “-” minus ishorasidan foydalaniladi. U holda oxirgi qalamni olgach, $0-1=-1$ so'm pulimiz qoladi (1 so'm qarz). Agar yana bitta qalam olsak, 2 so'm qarz bo'lamiz: $-1-1=-2$.

Agar do'konga kirib (2 so'm bilan) qalam emas, har bir metri 2 so'm 30 tiyin (2,3 so'm) bo'lgan lentadan 1 m olsak, u holda 30 tiyin (0,3 so'm) qarz bo'lamiz:

$2-2,3=-0,3$.

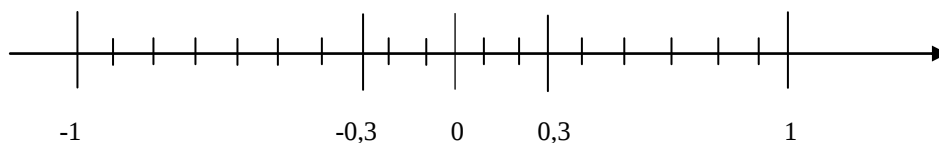
Xullas yonimizdagi pulni musbat sonlar desak, u holda qarzimiz manfiy sonlar bo'lar ekan.

Musbat va manfiy sonlarni son o'qida ifodalash qulay.



Son o'qida avval 0 ni belgilab olamiz. Undan bir bir lik o'ngda 1 ni, yana bir lik o'ngda 2 ni, 2 dan bir bir lik o'ngda 3 ni, so'ngra boshqa natural sonlarni belgilab chiqamiz. 0 dan chap tomonda esa manfiy sonlar joylashadi.

Son o'qiga o'nli kasrlarni ham joylashtirib chiqay lik. Masalan 0,3 ni son o'qida joylashtirish uchun 0 dan 1 gacha bo'lgan kesmani teng o'nta kesmachaga ajratamiz va uchinchi kesma oxiriga 0,3 ni joylaymiz. Shunga o'xshash, son o'qida $-0,3$ ni va boshqa sonlarni ham joylashtirishimiz mumkun.



Son o'qi yordamida sonlarni qo'shish va ayirish amallarini bajarib ko'ray lik: 1 ga 2 ni qo'shish uchun son o'qida 1 ni topamiz va 2 bir lik o'ngga siljiymiz. Natijada 3 ga kelamiz: $1+2=3$. 3 dan 2 ni ayirish uchun son o'qida 3 dan boshlab, 2 bir lik chapga siljib 1 ga kelamiz: $3-2=1$. 2

dan 3 ni ayirish uchun son o'qida 2 dan 3 bir lik chapga siljiymiz va -1 ga kelamiz: $2 - 3 = -1$.

Demak, biror songa musbat son qo'sxilganda o'ng tomonga, musbat son ayrilganda chap tomonga qarab siljiymiz. Bundan esa son o'qida o'ngroqda joylashgan son chaproqdagisidan katta bo'ladi degan hulosaga kelamiz.

Biror songa manfiy son qo'sxilganda yoki ayrilganda qaysi tomonga siljish kerakligini aniqlab olaylik. Bir o'rtog'idan 1 so'm, ikkinchisidan 2 so'm qarizi bo'lgan bolaning hammasi bo'lib 3 so'm qarzi bo'ladi: $-1 + (-2) = -3$ (matematikada ketma – ket 2 marta amal belgisini yozib bo'lmaydi, shuning uchun -2 ni qavsga olib yozdik).

Demak, -1 ga -2 ni qo'shishda son o'qida -1 dan boshlab ikki bir lik chapga siljib -3 ga kelamiz (xuddi -1 dan 2 ni ayirganimiz kabi).

Endi 3 so'm qarzimizni to'lasak, 1 so'm qarzimiz qoladi. $-3 - (-2) = -1$ Demak, -3 dan -2 ni ayirish uchun son o'qida -3 dan boshlab 2 bir lik o'ngga siljiymiz va -1 ga kelamiz (xuddi -3 ga 2 ni qo'shgan kabi).

Sonning moduli deb son o'qida u joylashgan nuqtadan koordinata boshi O gacha bo'lgan masofaga aytiladi. Demak, musbat son moduli uning o'ziga teng, manfiy sonning moduli uning ishorasini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan songa, 0 ning moduli 0 ga teng bo'ladi. Son moduli manfiy bo'la olmasligini eslatib o'tamiz.

a sonning moduli $|a|$ bilan belgilanadi. Yuqoridagi ta'rifni matematikada quyidagicha yoziladi:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \geq 0 \text{ bo'lsa} \quad (a - \text{musbat yoki } 0) \\ -a, & \text{agar } a < 0 \text{ bo'lsa} \quad (a - \text{manfiy son}) \end{cases}$$

Sonning moduliga misollar keltiramiz:

$$|-2| = 2; \quad |3| = 3; \quad |-4,8| = 4,8; \quad |5,871| = 5,871; \quad |0| = 0.$$

Koordinata boshi 0 dan barobar uzoq likda joylashgan sonlar **o'zaro qarama – qarshi** sonlar deyiladi. Masalan, 1 va -1 ; -3 va 3; $-5,7$ va $5,7$; $123,42$ va $-123,42$ juft liklar o'zaro qarama-qarshi sonlardir.

Berilgan songa qarama – qarshi son topish uchun uning faqat ishorasini teskarisiga almashtirish kifoya. Masalan: -1 ; 3; $2,7$; va $-3,421$ larga 1; -3 ; $-2,7$; va $3,421$ lar qarama – qarshi sonlardir. O'zaro qarama – qarshi sonlar yig'indisi 0 ga teng.

Ikkita sonni bir – biri bilan solishtirishda ularning son o'qida qanday joylashishidan foydalanamiz:

Har qanday musbat son har qanday manfiy sondan katta.

0 har qanday manfiy sondan katta va har qanday musbat sondan kichik.

Ikkita manfiy sondan moduli kattasi kichik.

Masalan, $-5 < 2$; $0 > -4$; $0 < 7$; $-7 < -5$.

Ikki son ko'paytmasini moduli ko'paytuvchlar modullari ko'paytmasiga teng bo'lib, ko'paytma ishorasi quyidagi qoida bo'yicha topiladi:

Agar ko'paytuvchilar bir xil ishorali bo'lsa, ko'paytma musbat va ko'paytuvchilar har xil ishorali bo'lsa, ko'paytma manfiy bo'ladi:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

Bo'lish amali ham bo'linma ishorasi yuqoridagi qoida boyicha topiladi.

$$\begin{aligned} \text{Masalan, } 2 \cdot 3 = 6; \quad 2 \cdot (-3) = -6; \quad -2 \cdot 3 = -6; \quad -2 \cdot (-3) = 6 \text{ va } 6 : 3 = 2; \\ 6 : (-3) = -2; \quad -6 : 3 = -2; \quad -6 : (-3) = 2. \end{aligned}$$

Manfiy va musbat sonlarni qo'shish va ayirish quyidagi sodda qoida asosida bajariladi.

Agar sonlar bir xil ishorali bo'lsa, ularning modullari qo'shiladi va ishorasi saqlanib qoladi.

Agar sonlar har xil ishorali bo'lsa, moduli kattasining modulidan moduli kichigining moduli ayriladi va moduli kattasining ishorasi qo'yiladi.

Masalan,

$$2 + 3 = 5; \quad -2 - 3 = -5; \quad -2 + 3 = |3| - |2| = 1; \quad 2 - 3 = -(|3| - |2|) = -1.$$

Agar yig'indida yoki ayirmada sonlardan biri qavs yordamida yozilgan bo'lsa, ko'payma ishorasini topish qoidasi yordamida avval uning ishorasi aniqlab olinadi.

Masalan.

$$-2 - (-3) = -2 + 3 = 1; \quad (-2) + (-3) = -2 - 3 = -5.$$

Mavzu: «Ratsional sonlar va ular ustida arifmetik amallar»

REJA:

1. Kasr tushunchasi. Ratsional sonlar.
2. Ratsional sonlarni qo'shish va uning xossalari.
3. Ratsional sonlarni ko'paytirish va uning xossalari.
4. Ratsional sonlarni ayirish va bo'lish.
5. Ratsional sonlarni bo'lishning xossalari.
6. Ba'zi xulosalar.

1. $[AB]$ va $[DE]$ kesmalar berilgan bo'lsin. $[DE]$ ni bir lik kesma deb qabul qilib, uning uzunligini e bilan belgilaymiz. Agar $[DE]$ kesma $[AV]$ ga k marta joylashsa, $|AB| = ke$ bo'ladi; aks holda $[DE]$ ni n ta . Teng – bo'laklarga bo'lamiz, $[DE]$ ning n - bo'lagi $[AV]$ ga m marta joylashsin, u holda $|AB| = \frac{m}{n}e$ bo'ladi. Birinchi holda $|AV|$ uzunlik natural son bilan, ikkinchi holda - kasr son bilan ifodalanadi.

Ta'rif. $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}_0, n \in \mathbb{N}$ ko'rinishda yozilgan sonlar kasrlar deyiladi. Istalgan butun $a \in \mathbb{Z}_0$ sonni ham kasr ko'rinishda yozish mumkin,

$$\text{Masalan: } 5 \text{ ni } \frac{15}{3}, 0 \text{ ni } \frac{0}{2} \dots$$

1. Ta'rif. Agar $mq = np$, bo'lsa, u holda $\frac{m}{n}$ kasr $\frac{p}{q}$ ga teng kuchli

$$\text{deyiladi, ya'ni } \left(\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \right) \left(mq = np \Rightarrow \frac{m}{n} \approx \frac{p}{q} \right).$$

Teng kuchli lik ($\sim$) munosabati ekvivalent lik munosabati bo'lganligi uchun, u barcha kasrlar to'plamini sinflarga ajratadi.

Ta'rif. Teng kuchli kasrlar sinfi nomanfiy ratsional son deyiladi va barcha nomanfiy ratsional sonlar to'plami Q_0 - bilan belgilanadi.

Ta'rif. Agar $mq < nr$ bo'lsa, $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ bo'ladi,

Demak, Q_0 da "kichik" munosabati o'rnatilgan, ya'ni Q_0 - tartiblangan .

2. Ta'rif. $r_1 = \frac{m}{n} \cdot r_2 = \frac{p}{q}$ ratsional sonlarning yig'indisi deb, shunday r - ratsional songa aytiladiki, u

$$r = \frac{mq + np}{nq} \text{ teng, ya'ni } r_1 + r_2 = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}.$$

Xossalari:

$$1^\circ, (\forall r_1 \cdot r_2 \in Q_0) (r_1 + r_2 = r_2 + r_1)$$

$$2^\circ. (\forall r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \in Q_0) [(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)]$$

3. Ta'rif. r_1 va r_2 ratsional sonlarning ko'paytmasi deb, shunday r - soniga aytiladiki,

$$r = r_1 \cdot r_2 = \frac{mp}{nq}$$

Xossalari:

$$1^0. (\forall r_1, r_2 \in Q_0) (r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1)$$

$$2^0. (\forall r_1, r_2, r_3 \in Q_0) [(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)]$$

$$3^0. (\forall r_1, r_2, r_3 \in Q_0) [r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3]$$

4. Ayirish va bo'lish amallari qo'shish va ko'paytirishga teskari amallar sifatida ta'riflanadi.

Ta'rif. r_1 va r_2 ratsional sonlarining ayirmasi $r_1 - r_2 = r$ deb, shunday ratsional r soniga aytiladiki, u $r + r_2 = r_1$ ni qanoatlantiradi.

Agar $r_1 \geq r_2$ bo'lsa, u holda $r_1 - r_2 = r$ ayirma har doim mavjud va bir qiymatlidir.

Ta'rif. r_1, r_2 larning bo'linmasi $r_1 : r_2 = r$ deb, shunday r ga aytiladiki, u $r_2 \cdot r = r_1$ ni qanoatlantiradi.

Bo'linma har doim mavjud va bir qiymatli agar $r_2 \neq 0$ bo'lmasa. 5. Nomanfiy ratsional sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega.

1°. Q_0 - cheksiz va sanoqli.

2°. Q_0 - tartiblangan.

3°. Q_0 - zich to'plam.

Savollar:

1. Kasr va ratsional son tushunchasini ta'riflang.
2. Ratsional sonlar ustida arifmetik amallar bajarish qoidalarini ayting.
3. Ratsional sonlar to'plami qanday xossalarga ega?

Misollar.

1-misol. Berilgan misollarni qulay usulda yeching va qanday qonunlardan foydalanganligingizni ayting.

$$a) 13\frac{17}{23} + 5\frac{13}{15} + 7\frac{6}{23}$$

$$b) 1\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot 2\frac{2}{3}$$

$$v) 2\frac{5}{8} \cdot (\frac{16}{23} + \frac{8}{21})$$

$$\text{Yechish: } a) 13\frac{17}{23} + 5\frac{13}{15} + 7\frac{6}{23} = 13\frac{17}{23} + 7\frac{6}{23} + 5\frac{13}{15} = (13\frac{17}{23} + 7\frac{6}{23}) + 5\frac{13}{15} = 21 + 5\frac{13}{15} = 26\frac{13}{15}$$

Berilgan yig'indini hisoblashda:

1) qo'shishning kommutativligidan ($5\frac{13}{15}$ va $7\frac{6}{23}$ qo'shiluvchilarning o'rnini almashtirildi).

2) qo'shishning assosiativligidan foydalandik ($13\frac{17}{23}$ va $7\frac{6}{23}$ qo'shiluvchilarni qavsga oldik).

$$b) 1\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = (\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}) \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}) = 1 \cdot 2 = 2$$

Berilgan ko'paytmanni hisoblashda:

1) ko'paytirishning kommutativligidan ($\frac{3}{4}$ va $\frac{5}{7}$ ko'paytuvchilarni o'rnini almashtirildi).

2) ko'paytirishning assosiativligidan foydalandik.

$$v) 2\frac{5}{8} \cdot (\frac{16}{23} + \frac{8}{21}) = \frac{21}{8} \cdot (\frac{16}{63} + \frac{8}{21}) = \frac{21}{8} \cdot \frac{16}{63} + \frac{21}{8} \cdot \frac{8}{21} = \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$$

Berilgan ifodaning qiymatini topishda ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligidan

foydalandik.

2 - misol. Kvadrati 3 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emasligini isbotlang.

Isboti: Teskarisidan isbotlash usulidan foydalanamiz. Faraz qilaylik, kvadrati 3 ga teng ratsional son mavjud bo'lsin. $\frac{m}{n}$ - qisqarmaydigan ratsional son bo'lsin. Farazga ko'ra $(\frac{m}{n})^2 = 3$. Bu tenglikdan $m^2 = 3n^2$ (1) ni hosil qilamiz. Agarda m^2 3 ga bo'linsa, m soni ham 3 ga bo'linadi. Shuning uchun m sonini $3p$ ko'rinishida, ya'ni $m=3r$ deb yozishimiz mumkin, bu erda $p \in N$. Berilgan (1) tenglikda m o'rniga $3r$ ni qo'yamiz, natijada $9p^2 = 3n^2$ yoki $3p^2 = n^2$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan n sonining 3 ga bo'linishi kelib chiqadi, ya'ni $n=3q$ $q \in N$. Demak, $\frac{m}{n}$ kasr qisqaruvchan ekan. Bu esa shartga zid.

Shunday qilib, kvadrati 3 ga teng ratsional son mavjud emasligini isbotladik.

3 - misol. Amallarning komponentlari orasidagi bog'lanishga asoslanib, tenglamani eching.

$$2\frac{1}{7} \cdot (4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3}) - 1\frac{2}{5} = 10\frac{79}{140}$$

Yechish: Kamayuvchini topish uchun ayirmaga ayriluvchini qo'shamiz.

$$2\frac{1}{7} \cdot (4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3}) = 10\frac{79}{140} + 1\frac{2}{5}$$

$$2\frac{1}{7} \cdot (4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3}) = 11\frac{79+56}{140}$$

$$2\frac{1}{7} \cdot (4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3}) = 11\frac{27}{28}$$

No'malum ko'paytuvchini topish uchun ko'paytmani ma'lum ko'paytuvchiga bo'lamiz:

$$4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3} = 11\frac{27}{28} : 2\frac{1}{7}$$

$$4\frac{5}{12} + (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{3} = 5\frac{7}{12}$$

No'malum qo'sxiluvchini topish uchun ko'paytmani ma'lum ko'paytuvchiga bo'lamiz.

$$2x - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3}$$

$$2x - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Kamayuvchini topish uchun ayirmaga ayriluvchini qo'shamiz

$$2x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$2x = 2$$

No'malum ko'paytuvchini topish uchun ko'paytmani ma'lum ko'paytuvchiga bo'lamiz.

$$x = 2 : 2$$

$$x = 1$$

Javob: $x = 1$

Mustaqil yechish uchun misollar

Butun sonlar ustida amallarni bajaring

- 2.1. $143 + (-42 + 85 - 52) \cdot 9 - 124$;
 2.2. $-56 \cdot ((-43 + 54) - 65 : 5 - 82)$;
 2.3. $-53 \cdot (44 + 86 - 200 \cdot 5 + 300 : (-6))$;
 2.4. $660 : (-88 + 44 + 92 : 2) + 840 : (-3)$;
 2.5. $48 \cdot (-86 \cdot 2 - 95) + (-842) \cdot 31$.

Hisoblang :

- 1.1. $78 \cdot 29 + 6573 : 313 - 408$. 1.2. $477 \cdot 85 - 7784 : 56 + 10809$.
 1.3. $927 : 103 + (247 - 82) : 5 - 1$. 1.4. $(395 \cdot 52 - 603) \cdot 25 - 960 \cdot 64$.
 1.5. $25 \cdot (28 \cdot 105 + 7236 : 18) : 6 \cdot 25$.
 1.6. $1092322 : 574 + 152 \cdot 93 - (96 \cdot 125 - 82215 : 9)$.
 1.7. $79348 - 64 \cdot 84 : 28 + 6539 : 13 - 11005$.
 1.8. $3121350 - (15125 : 25 + 302 \cdot 804 - (3044 + 2056) : 17) \cdot 9$.
 1.9. $(110292 : 14 : 101 + 4129 - 3127) \cdot (1237 - 23138 : 23)$.
 1.10. $4097 \cdot 7 - 7659 + 64 \cdot 105 - 6992 : 38 : 23$.

I. Quyidagi misollarni qulay usulda eching va ratsional sonlarni qo`shish va ko`paytirishning qanday xossalariidan foydalandingiz?

- 1) $\frac{2}{15} + 1\frac{5}{13} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{3}{26}$; 6) $\frac{5}{8} \cdot \frac{17}{18} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{17}$;
 2) $2\frac{4}{9} + 3\frac{1}{14} + 5 + 2\frac{6}{14} + 3\frac{5}{9}$; 7) $\left(4\frac{2}{5} + 3\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{11}$;
 3) $5\frac{15}{24} + 3\frac{23}{33} + 1\frac{32}{48} + 1\frac{7}{24} + \frac{10}{33}$; 8) $3\frac{11}{12} + 5\frac{3}{15} + 1\frac{2}{9}$;
 4) $\frac{3}{5} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$; 9) $\frac{7}{12} \left(5\frac{3}{21} + \frac{12}{7}\right)$;
 5) $\frac{4}{7} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}$; 10) $1\frac{1}{10} + 5\frac{4}{5} + 1\frac{9}{10}$;

II. Amallarning komponentlari orasidagi bog`lanishga asoslanib x ni toping.

- 11) $17\frac{3}{11} + \left(12\frac{3}{22} - x\right) = 23\frac{4}{5}$; 16) $21\frac{3}{4} - \left(x + 5\frac{1}{8}\right) = 6\frac{5}{8}$;
 12) $27\frac{1}{4} - \left(x + 2\frac{7}{20}\right) = 23\frac{4}{5}$; 17) $\left(43\frac{27}{100} - x\right) - 23\frac{3}{4} = 17\frac{1}{2}$;
 13) $13\frac{3}{7} + \left(33\frac{3}{14} - x\right) = 42\frac{1}{3}$; 18) $23\frac{3}{7} + \left(13\frac{3}{14} - x\right) = 43\frac{1}{3}$;
 14) $\left(16\frac{3}{14} - x\right) - 6\frac{3}{17} = 3\frac{14}{17}$; 19) $123\frac{2}{3} - \left(37\frac{7}{10} - x\right) = 113\frac{1}{3}$;
 15) $\left(2x - 17\frac{2}{3}\right) - 3\frac{4}{15} = 12\frac{3}{5}$; 20) $2\frac{1}{2} \cdot \left(4\frac{5}{12} + x \cdot 2\frac{1}{3}\right) - 1\frac{2}{5} = 10\frac{79}{140}$;

3.2. Ifodaning qiymatini toping :

$$a) \left(45\frac{1}{2} - 2\frac{3}{8} \right) - \left(5\frac{5}{6} + 6\frac{3}{4} \right) + \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{5}{8} \right);$$

$$b) \left(36\frac{4}{5} - 12\frac{3}{10} \right) - \left(4\frac{2}{15} + 1\frac{1}{30} \right) + \left(20\frac{11}{12} - 10\frac{3}{8} - \frac{3}{16} - 3\frac{1}{48} \right);$$

$$e) \left(12\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6} \right) - \left(2\frac{8}{9} + 1\frac{4}{5} \right) - \left(5\frac{5}{8} - 4\frac{3}{4} \right) - \left(6\frac{9}{40} - 5\frac{11}{90} \right);$$

$$g) 56\frac{1}{4} - \left\{ \left(1\frac{5}{6} + 2\frac{13}{14} \right) + \left[27\frac{13}{30} - \left(15\frac{5}{12} - 12\frac{13}{20} \right) \right] \right\};$$

$$d) \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}; \quad e) 3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{13}{53} \cdot 3\frac{1}{88}; \quad yo) 5\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7} : 5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{22}; \quad j) \left(1\frac{11}{24} + 1\frac{13}{56} \right) \cdot 9 : 1\frac{2}{5};$$

$$z) \frac{8\frac{1}{2}}{15 : \frac{5}{17}}; \quad k) \frac{\frac{28}{7} : \frac{7}{9}}{\frac{29}{7} : \frac{1}{9}}; \quad l) \frac{4\frac{4}{5} : \frac{4}{17}}{3\frac{2}{5}}; \quad m) 8\frac{13}{16} \cdot \frac{47}{64} : 1\frac{1}{35} : 3\frac{1}{2};$$

Amallarni bajaring.

$$3.3. a) 2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 + 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : \frac{1}{2}; \quad b) 6\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12};$$

$$v) 2\frac{1}{2} \cdot 48 - 3\frac{3}{8} : \frac{1}{8} + 5\frac{5}{12} : \frac{7}{36}; \quad g) \left(3\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{3}{5} \right) \cdot 24;$$

$$3.4. a) \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{3}{5} \right) \cdot 24; \quad b) \left(5\frac{5}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24} \right) : 16\frac{2}{3};$$

$$v) \left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4} \right) : \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{7}{9} \right); \quad g) 48\frac{3}{8} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{75}{94} \cdot \left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 13 : 26 \right).$$

$$3.5. a) \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1 \right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14} \right); \quad b) \left(8\frac{7}{15} - 3\frac{3}{4} + 4\frac{2}{3} - 8\frac{7}{60} \right) : \left(4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} \right);$$

$$v) \left(1\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{42} + 5\frac{5}{7} : \frac{8}{21} \right) : \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{3} \right); \quad g) 2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{14} - 1\frac{39}{73} \cdot \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{5}{16} \right).$$

$$3.6.a) \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} : 4\frac{4}{7}};$$

$$b) \frac{28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{7}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}};$$

$$v) \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8} - 175\frac{4}{5} : 24};$$

$$g) \frac{\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot 3\frac{3}{5}}{14 - 15\frac{1}{8} : 2\frac{1}{5}}.$$

Mavzu: O'nli kasrlar va ular ustida amallar.

REJA:

1. O'nli kasrning ta'rifi va xossalari,
2. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish.
3. O'nli kasrlarni ko'paytirish.
4. O'nli kasrlarni bo'lish,
5. Xulosalar.

Qanday sonlar kasr sonlar deb ataladi?

Ta'rif. $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}_0$, $n \in \mathbb{N}$

Qanday sonlar o'nli kasrlar deb ataladi?

1-ta'rif. Mahraji o'n yoki undanda.

1. Ta'rif. Mahraji o'n yoki uning darajalaridan iborat bo'lgan kasr o'nli kasr deyiladi, ya'ni

$\frac{m}{10^n}$ ($\forall n, m \in \mathbb{N}$) ko'rinishdagi kasr o'nli kasrdir.

Agar $m = m_k \cdot 10^k + \dots + m_0$, $n \leq k$, *bo'linsa*,

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \dots + m_n \cdot 10^n + m_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + m_0}{10^n} = m_k 10^{k-n} + \dots + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \dots + \frac{m_0}{10^n}.$$

Agar $m_k \cdot 10^{k-n} + \dots + m_n = M$ deb belgilasak, u holda $\frac{m}{10^n}$ kasrni $M, m_{n-1}m_{n-2}\dots m_0$ ko'rinishda

yozamiz. Masalan, 1). $\frac{571}{100} = \frac{571}{10^2} = 5,71$

$$2). \frac{32}{10000} = \frac{32}{10^4} = 0,0032$$

$$(\forall m, n, s \in \mathbb{N}) \text{ uchun } \frac{m}{10^n} \approx \frac{10^s m}{10^{n+s}}, \text{ chunki, } m \cdot 10^{n+s} = 10^n \cdot 10^s \cdot m \dots \frac{m}{10^n} \approx \frac{10^s m}{10^{n+s}}$$

bo'lganligi uchun, $M, m_{n-1}\dots m_0, ea, M, m_{n-1}\dots m_0 00\dots 0$ kasrlari teng kuchli.

2. O'nli kasrlarni qo'shish algoritmi quyidagichadir:

1) Qo'shiluvchilarning verguldan keyingi raqamlarini (kasr qismini) nollar yozish bilan tenglashtiramiz.

2) Vergullarni hisobga olmasdan natural sonlar kabi qo'shamiz.

3) Yig'iidida har bir qo'shiluvchida nechtdan raqam bo'lsa, shuncha raqam ajratib vergul qo'yamiz.

Xuddi shu usul bilan kasrlarni taqqoslash va ayirish algoritmlari keltirib chiqariladi.

3. $M, m_{n-1}\dots m_0, ea, P, p_{q-1}\dots p_0$ o'nli kasrlari berilgan. Ularni $\frac{m}{10^n} ea, \frac{p}{10^q}$ ko'rinishda yozamiz.

$\frac{m}{10^n} \cdot \frac{p}{10^q} = \frac{m \cdot p}{10^{n+q}}$ kasrini mahrajsiz yozish uchun, $m \cdot p$ natural sonining oʻnli yozilishidan $n+q$ ta raqam oxiridan sanab vergul ajratamiz. Bundan quyidagi algoritm kelib chiqadi: Oʻnli kasrlarni koʻpaytirish uchun:

- 1) Koʻpaytuvchilardagi vergullarni tashlaymiz.
- 2) Hosil boʻlgan natural sonlarni koʻpaytiramiz.
- 3) Koʻpaytmada koʻpaytuvchilarda hammasi nechta raqam boʻlsa, shuncha raqam sanab vergul qoʻyamiz.

4. $M, m_{n-1} \dots m_0, \text{,} P, p_{q-1} \dots p_0$ oʻnli kasrlarni berilgan. $\frac{m}{10^n} : \frac{p}{10^q} = \frac{m \cdot 10^q}{10^n \cdot p}$

bunda $m \cdot 10^q, \text{,} P, 10^n \cdot p$ sonlari natural. Demak, oʻnli kasrlarni boʻlishni natural sonlarni boʻlish bilan almashtirishga keltirib olinadi.

5. Oʻnli kasrlar ustidagi amallar maktab kursida ham toʻla oʻtilganligini hisobga olib, talabalarga mustaqil ishlashga misollar topshiramiz.

Protsent (foiz) va promillar oʻnli kasrlarning xususiy holi boʻlgani uchun ular haqidagi maʼlumotlar mustaqil oʻrganish uchun topshiriladi.

Savollar:

1. Oʻnli kasr taʼrifini ayting.
2. Oʻnli kasrlarni taqqoslash qoidasini ayting va asoslang.
3. Oʻnli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish algoritmini ayting va asoslang.
4. Protsent tushunchasini taʼriflang. Sonning protsentini va protsentiga koʻra sonni topish algoritmini ayting. Misollar keltiring.

Misollar.

1 – misol. 23,158 va 2,28 oʻnli kasrlardan qaysi biri kattaligini aniqlang:

$$23,158 > 2,280;$$

demak, birinchi kasr ikkinchisidan katta.

2 – misol. 0,6273+3,004+12,17 ni toping.

Oʻnli kasrlarni qoʻshish xuddi butun sonlarni qoʻshishdek bajariladi. Ikki yoki bir necha kasrni qoʻshishda ularni birini ikkinchisining tagiga shunday yozish kerakki, xarakteristikalarining oxirgi raqamlari bir ustunchada boʻlishi zarur. Soʻngra yozilgan sonlarni xuddi natural sonlardek qoʻshib, vergul qoʻsiluvchilarning qaeida boʻlsa, yigʻindida ham vergulni shu joyga qoʻyish kerak. Hosil boʻlgan oʻnli kasr berilgan kasrlarning yigʻindisi boʻladi.

Yechish. 0,6273

3,004

12,17

15,8013

3 – misol. a) 1,204 - 0,6308 ni toping.

Ikki oʻnli kasrning ayirmasini topishi uchun, ayiriluvchini kamayuvchi tagiga shunday yozish kerakki, bunda xarakteristikalarining oxirgi raqamlari bir ustunda boʻlsin, shundan keyin xuddi natural sonlarni ayirgandek ayirish bajarilaveradi; hosil boʻlgan ayirmada xarakteristikaning oxirgi raqami ayirma komponentlari turgan ustunda boʻlishi kerak.

1,204

0,6308

0,5732

Agar ayirmaning komponentlaridan biri natural son bo'lsa, bu holda natural sonni o'nli kasr ko'rinishida yozish paytida uning o'ngdan oxirgi raqamidan iborat bo'ladi.

b) $12 - 9,604$ ni toping.

12,000

9,604

2,396

4 – misol. $0,643 \cdot 1,12$ ko'paytmani toping.

Qaralayotgan misolda verguldan keyin ko'payuvchida 3ta, ko'paytuvchida 2ta kasr xona bor, shuning uchun ko'paytmada o'ngdan 5ta xonadan keyin vergul qo'yish kerak.

0,643

1,12

1286

643

643

0,72016

5 – misol. O'nli kasrni butun songa bo'lish butun sonlarni bo'lishda qilingan ishlarga asoslanib bajariladi.

Qandaydir sonni o'nli kasrga bo'lish uchun, bo'luvchidagi vergulni tashlab, vergulni tashlash natijasida bo'luvchi necha marta ortgan bo'lsa, bo'linuvchini ham shuncha marta orttirib, amalni butun sonlarni bo'lish qoidasi bo'yicha bajarish kerak.

$23,71 : 0,08 = 23,71 : 8$

$$\begin{array}{r|l}
 23,71 & 8 \\
 \hline
 16 & 2,96375 \\
 \hline
 77 & \\
 72 & \\
 \hline
 51 & \\
 48 & \\
 \hline
 30 & \\
 24 & \\
 \hline
 60 & \\
 56 & \\
 \hline
 40 & \\
 40 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

6 – masala. Sutdan 16% qaymoq olinadi. 1250 kg sutdan qancha qaymoq olish mumkin?

Yechish: $\frac{1250}{100} \cdot 16 = 200$ kg qaymoq olish mumkin.

7 – masala. Sutdan o'rta hisobda 16% qaymoq olinadi. 200 kg qaymoq olish uchun qancha sut kerak?

Yechish: $\frac{200}{16} \cdot 100 = 1250$ kg sut olish mumkin.

8 – masala. 1250 kg sutdan 200 kg qaymoq olindi. Sutda necha % qaymoq borligini toping?

Yechish: $\frac{200}{1250} \cdot 100 = 16\%$ qaymoq bor.

Mustaqil yechish uchun misollar.

I. Yig'indini toping.

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1) $203,731 + 5,98$ | 3) $1,48 + 97,7634$ | 5) $0,5374 + 1,09789$ |
| 2) $1001,34 + 15,8$ | 4) $1951,2801 + 89,643$ | 6) $14,41 + 0,4038$ |

II. Ayirmani toping.

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $8,62 - 3,25$ | 3) $82,51 - 0,432$ | 5) $0,651 - 0,0117$ |
| 2) $54,302 - 0,456$ | 4) $311,249 - 5,247$ | 6) $8,2176 - 0,043$ |
| 7) $214 - 0,456$ | 8) $672,03 - 0,398$ | 9) $64,0095 - 5,095$ |

III. Ko'paytmani hisoblang.

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 1) $103,9 \cdot 2,6$ | 4) $0,802 \cdot 0,508$ | 7) $5,34 \cdot 0,64 \cdot 6$ |
| 2) $44,2 \cdot 21,3$ | 5) $30,01 \cdot 3,09$ | 8) $0,169 \cdot 0,8 \cdot 0,71$ |
| 3) $0,018 \cdot 0,004$ | 6) $1001,01 \cdot 4,04$ | 9) $22,42 \cdot 2,3 \cdot 0,71$ |

IV. Bo'lishni bajaring.

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $12,4 : 0,031$ | 5) $3 : 0,015$ | 9) $3,6 : 0,09$ |
| 2) $11,5 : 2,5$ | 6) $9 : 0,0004$ | 10) $18,6 : 0,004$ |
| 3) $2,7856 : 0,32$ | 7) $21,875 : 3,125$ | 11) $7 : 5,6$ |
| 4) $0,012 : 0,02$ | 8) $49,44 : 4,8$ | 12) $9 : 0,0004$ |

V. Amallarni bajaring.

- 1) $(6,17 - 598,24) \cdot 7 + 850 \cdot 8,4$;
- 2) $62,7 \cdot 0,725 - 2,4 \cdot (2,05 + 0,404)$;
- 3) $64,85 + (5,36 - 2 \cdot 1,86 + 0,051)$;
- 4) $(0,8 - 0,007 \cdot 0,52) \cdot 4,05 - 1,8 \cdot 1,854$;
- 5) $0,1 \cdot 0,01 \cdot 0,001 \cdot 1000$;
- 6) $0,7 \cdot 0,11 \cdot 0,13 \cdot 1001$;

VI. Masalalarni yeching.

- 1) Nashriyot 2 kunda olingan qog'ozning 60% ishlatdi. 2 – kuni 1 – kunga nisbatan $1\frac{1}{5}$ marta ortiq qog'oz ishlatildi. Agarda $6\frac{3}{5}$ t qog'oz olingan bo'lsa, nashriyot 1 – kuni qancha qog'oz ishlatdi?
- 2) Yangi uzilgan nokdan 16% qoqi tushadi. 48 kg nok qoqisini olish uchun necha kg yangi uzilgan nok olish kerak?
- 3) Paxtadan 30% tola olinsa, 60 tonna tola olish uchun qancha paxta kerak?
- 4) Brigada ekin maydonining 180 gektariga paxta, 60 gektariga sholi ekdi. Sholi maydoni paxta maydonining necha foizini tashkil etadi.
- 5) Qutida 25 kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 12% ini tashkil etsa, qutining massasini toping?
- 6) 30 ta talabadan 25 tasi qishki sinovlarning hammasini topshirdi. Ba'zi sinovlarni topshira olmagan talabalar barcha sinovlarni topshirgan talabalarning necha foizini tashkil etadi?
- 7) Go'sht qaynatilganda o'z vaznining 40% ini yuqotadi. 6 kg go'sht qaynatilganda vazni necha kg kamayadi?
- 8) Do'konga 96 tonna karam keltirildi. Agar karamning 80% i sotilgan bo'lsa, do'konda qancha karam qolgan?
- 9) Ishchining maoshi dastlab 25% ga, so'ngra yana 25% ga oshirilgan bo'lsa, uning maoshi necha foizga oshgan?
- 10) $2\frac{3}{5}$ va $\frac{1}{2}$ sonlar ayirmasining 10% ini toping?

Amallarni bajaring :

$$\begin{array}{ll} a) 4,735 : 0,5 + 14,95 : 1,3 - 2,121 : 0,7; & b) 589,72 : 16 - 18,305 : +0,0567 : 0,7 \\ v) 3,006 - 0,3417 : 34 - 0,875 : 125; & g) 22,5 : 3,75 + 208,45 - 2,5 : 0,004. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a) (0,1955 + 0,187) : 0,085; & b) 15,76267 : (100,6 + 42697); \\ v) (86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2) & g) (9,09 - 900252) \cdot (25,007 - 12,507). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a) (0,008 + 0,992) \cdot (5 \cdot 0,6 - 1,4); & b) (0,93 - 0,07) \cdot (0,93 - 0,805); \\ v) (50000 - 1397,3) : (20,4 + 33,603); & g) (2779,6 + 8024) : (1,98 + 2,02). \end{array}$$

$$a) \frac{4,06 \cdot 0,0058 + 3,3044895 - (0,7584 : 2,37 + 0,0003 : 8)}{0,03625 \cdot 80 - 2,43};$$

$$b) \frac{2,045 \cdot 0,003 + 10,518395 - 0,464774 : 0,0562}{0,003092 : 0,0001 - 5,188};$$

$$v) \frac{57,24 \cdot 3,55 + 430,728}{2,7 \cdot 1,88 - 1,336} + \frac{127,18 \cdot 4,35 + 14,067}{18 + 2,1492 : 3,582};$$

$$g) 52 : \left(\frac{6 : (0,4 - 0,2)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,04 - 33,81) \cdot 4}{6,48 : (28,57 - 25,15)} \right) - 8.$$

Mavzu: Ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr sifatida.

REJA:

1. Oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga aylantirish.
2. Cheksiz davriy o'nli kasrlar.
3. Cheksiz davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrga aylantirish.
4. Ba'zi xulosalar.

Oddiy kasrlarni qanday qilib o'nli kasrga aylantiramiz?

Oddiy kasrni o'nliga aylantirish uchun, kasrning surati mahraji:

1. Masalan, $\frac{8}{25} \approx \frac{32}{100}$ shuning uchun $\frac{32}{100} = 0,32$ Qanday shartlar bajarilganda $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ kasri o'nli kasr ko'rinishda yoziladi?

Teorema. Agar $\frac{b}{a} = \frac{b}{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ bo'lsa, u holda $\frac{b}{a}$ kasr biror o'nli kasrga teng kuchli bo'ladi. Isbot.

Faraz qilaylik:

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{2^\alpha \cdot 5^\beta} \cdot 1) \cdot \alpha = \beta \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{2^\alpha \cdot 5^\alpha} = \frac{b}{10^\alpha},$$

$$2) \cdot \alpha < \beta, \frac{b}{a} = \frac{b \cdot \alpha^{\beta-\alpha}}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot \alpha^{\beta-\alpha}} = \frac{B_2}{10^\beta};$$

$$3) \cdot \alpha = \beta, \frac{b}{a} = \frac{b \cdot 5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 5^{\alpha-\beta}} = \frac{B_2}{10^\alpha}$$

Demak, $\frac{b}{a}$ o'nli kasrga aylanadi.

Endi $\frac{b}{a}$ qisqarmaydigan kasr $\frac{b}{a} = \frac{c}{10^m}$ bo'lsin. $10^m \cdot b = a \cdot c$ Agar s ning tub yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli biror r tub son tegishli bo'lsin, u holda $10^m b : p$.

Lekin 10^n ning tub yoyilmasida faqat 2 va 5 lar mavjud.

Shuning uchun $\overline{10^m : p}$. Bu holda $b : r$ bo'lib, $\frac{b}{a}$ kasrning a qisqaruvchanligini bildiradi. Bu esa, shartga ziddir.

Oddiy kasrni o'nli kasrga aylantirish uchun, kasrning suratini mahrajiga bo'lamiz.

2. $\frac{1}{3}$ kasrni o'nli kasrga aylantiraylik. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$; $\frac{1}{6}$ ni o'nli kasrga aylantirsak $\frac{1}{6} = 0,1666\ldots$

Demak, kasr mahrajining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga 2 va 5 dan boshqa tub bo'luvchilar aralashsa, u holda kasr cheksiz davriy o'nli kasrga aylanadi.

Aniqrog'i: 1) Agar kasr mahrajining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga 2 va 5 tub bo'luvchilari qatnashmasa, davr birdaniga verguldan keyin boshlanadi.

Masalan, $\frac{1}{3} = 0,333\ldots 0,(3)$

Bunday kasrlar sof davriy kasrlar deyiladi.

2) Agar 2 yoki 5 bilan bir qatorda boshqa tub bo'luvchilar qatnashsa, davr verguldan bir yoki bir nechta raqam keyin boxilanadi.

Masalan, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = 0,1666\ldots = 0,1(6)$ Bunday kasrlar aralash davriy

6 2–3 kasrlar deyiladi.

Kasrning davrida bir va undan ortiq sondagi raqamlar qatnashishi mumkin.

3. Sof davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun kasrning mahrajiga davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha 9, suratiga esa davrni yozamiz.

Masalan, $1)0,(35) = \frac{35}{99}$; $2)0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $3)0,(54) = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

Aralash davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun kasrning mahrajiga davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha 9 va nechta raqam davrda qatnashsa, shuncha nol, suratiga verguldan 2-davrgacha bo'lgan sondan 1 - davrgacha bo'lgan son ayirmasi yoziladi.

Masalan: $1)0,1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $2)0,7(61) = \frac{761-7}{990} = \frac{754}{990} = \frac{377}{495}$

4. Istalgan nomanfiy ratsional son davriy kasr ko'rinishda yozilishi mumkinligini e'tiborga olib, ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr deb ta'riflaymiz.

Savollar:

1. Oddiy kasr qanday qilib o'nli kasrga aylantiriladi?
2. O'nli kasrlarning qanday turlarini bilasiz? Ta'riflarini ayting.
3. O'nli kasrni oddiy kasrga aylantirish yo'llarini tushuntiring va asoslang.
4. Ratsional songa o'nli kasr orqali ta'rif bering.

Misollar.

1 – misol. $\frac{2}{3}$ oddiy kasrni o'nli kasrga aylantiring.

Buning uchun kasrning suratini mahrajga bo'lamiz.

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 3 \\
 18 & 0,666 \dots = 0,(6) \text{ sof davriy o`nli} \\
 \hline
 20 & \\
 18 & \\
 \hline
 20 & \\
 18 & \\
 \hline
 20 &
 \end{array}$$

2 – misol. $\frac{2}{5}$ kasrni o`nli kasrga aylantiring.

Yechish. $\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$ kasrni surat va mahrajini 2 ga ko`paytirdik.

3 – misol. $\frac{3}{20}$ kasrni o`nli kasrga aylantiring. $\frac{3}{20} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{15}{100} = 0,15$.

4 – misol. $\frac{3}{14}$ kasrni cheksiz davriy o`nli kasrga aylantiring.

$$\begin{array}{r|l}
 30 & 14 \\
 28 & 0,21(428571)4 \dots \\
 \hline
 20 & \\
 14 & \\
 \hline
 60 & \\
 56 & \\
 \hline
 40 & \\
 28 & \\
 \hline
 120 & \\
 112 & \\
 \hline
 80 & \\
 70 & \\
 \hline
 100 & \\
 98 & \\
 \hline
 20 & \\
 14 & \\
 \hline
 60 & \\
 56 & \\
 \hline
 40 &
 \end{array}$$

5 – misol. $\frac{40}{11}$ kasr berilgan. O`nli kasrga aylantiring.

$$\frac{40}{11} = 3 + \frac{7}{11}$$

$\frac{7}{11}$ ni o`nli kasrga aylantiramiz.

$$\begin{array}{r|l}
 70 & 11 \\
 66 & 0,6363 \dots = 0,(63) \\
 \hline
 40 & \\
 33 & \\
 \hline
 70 & \\
 66 & \\
 \hline
 40 & \\
 33 & \\
 \hline
 70 &
 \end{array}$$

Demak, $\frac{40}{11} = 3 + 0,(63) = 3,(63)$

6 – misol. $\frac{4}{25} = \frac{4 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{16}{100} = 0,16$.

$$\begin{array}{r|l}
 40 & 25 \\
 25 & 0,16 \\
 \hline
 150 & \\
 150 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

7 – misol. 5,(8) cheksiz davriy o`nli kasrni oddiy kasrga aylantiring.

Yechish. Cheksiz o`nli kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun, agar uning takrorlanmaydigan raqami bo`lmasa, suratiga davrini mahrajiga esa davrida nechta raqam bo`lsa, shuncha 9 yozamiz:

$$5,(8) = 5\frac{8}{9}$$

8 – misol. 3,4(3) davriy kasrni oddiy kasrga aylantiring.

Yechish. Takrorlanmaydigan raqami 4 bo`lgan cheksiz o`nli kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun suratiga ikkinchi davrgacha bo`lgan son 43 dan davrgacha bo`lgan son (takrorlanmaydigan raqam) 4 qiymatining ayirmasini yozamiz, mahrajida esa davrda nechta raqam bo`lsa, shuncha (bitta) 9 va nechta takrorlanmaydigan raqam bo`lsa, shuncha 0 yozamiz:

$$3,4(3) = 3 + \frac{43 - 4}{90} = 3 + \frac{39}{90} = 3 + \frac{13}{30} = 3\frac{13}{30}$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Oddiy kasrni o`nli kasrga aylantiring

$$\frac{3}{11}, \frac{19}{3}, \frac{24}{5}, \frac{7}{4}, \frac{12}{5}, \frac{17}{6}, \frac{3}{8}, \frac{17}{125}, \frac{5}{7}, \frac{3}{13}, \frac{14}{625}, \frac{3}{64}, \frac{11}{375}, \frac{32}{75}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{15}, \frac{5}{22}, \frac{10}{99}$$

2. Davriy o`nli kasrni oddiy kasrga aylantiring

$$0,(18), \quad 0,1(7), \quad 0,(7), \quad 8,(5), \quad 3,7(3), \quad 0,(8), \quad 0,(7), \quad 0,(07), \\ 2,32(6), \quad 7,145(2), \quad 0,42(6), \quad 0,(37), \quad 0,14(134)$$

3. O`nli kasrni oddiy kasrga aylantiring

$$0,27; \quad 2,4; \quad 1,85; \quad 3,3125; \quad 5,375; \quad 2,15; \quad 1,35; \quad 12,052; \quad 8,032; \quad 17,1375;$$

4. Quyidagi amallarni bajaring

$$\begin{array}{ll}
 a) \frac{0,8(3) + 0,4(6)}{0, (3)} & b) 0, (8) + 0, (7) \\
 v) 8, (8) + 3,7(3) & g) 0,5(3) + 0,48(1) \\
 d) 1,3(5) - 0,6(5) & e) 5,7(2) - 2,2(6) \\
 yo) 6,5(2) - 2,5(3) & j) 8, (8) - 6, (7)
 \end{array}$$

3.32. Ifodalarning qiymatini toping :

$$\begin{array}{ll}
 a) \frac{0,8333... - 0,4(6)}{1\frac{5}{6}} \cdot \frac{1,125 + 1,75 - 0,41(6)}{0,59}; & b) \frac{\left(\frac{5}{8} + 2,708333...\right) : 2,5}{(1,3 + 0,7(6) + 0, (36)) \cdot \frac{110}{401}} \cdot \frac{1}{2}; \\
 v) \frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right) : 13\frac{8}{9} + 3\frac{3}{65} \cdot 0, (26)}{(18,5 - 13,777...) \cdot \frac{1}{85}} \cdot 0,5; & g) \frac{\frac{3}{4} + 0,8(5) \cdot \frac{1}{2}}{9 : (0,9(23) - 0,7(9))} + \frac{41}{43}.
 \end{array}$$

3.31. Davriy o'qli kasrni oddiy kasrga aylantiring.

$$\begin{array}{lll}
 a) 0, (3) & d) 13,0(48); & z) 2, (123); \\
 b) 0,3(2); & e) 0, (4); & k) 2,333(45); \\
 v) 0,71(23); & yo) 0, (45); & l) 41,8519(504); \\
 g) 11, (75); & j) 3,1(44); & m) 35,73(4845);
 \end{array}$$

Mavzu: Haqiqiy sonlar.

REJA:

1. Irratsional son tushunchasi va cheksiz davriy bo'lmagan o'qli kasr.
2. Haqiqiy sonlar to'plamining xossalari.
3. Haqiqiy sonlar to'plami bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plam orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik.
4. Haqiqiy sonlar to'plamining quvvati haqida tushuncha.

Haqiqiy son deb nimaga aytiladi?

1. Quyidagi teoremani ko'rib chiqaylik:

Teorema. Kvadrati 2ga teng ratsional son mavjud emas.

Isbot: Faraz qilaylik, mavjud bo'lsin, ya'ni $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ va $D(p;q) = 1$.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2k.$$

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q = 2l, \text{ ya'ni } p:2 \wedge q:2. \text{ Bu shartga zid. Demak, faraz noto'g'ri.}$$

Teorema isbotlandi.

Ta'rif. Ratsional bo'lmagan sonlar irratsional sonlar deyiladi va ularning to'plami O - kabi belgilanadi. $Q \cup Q = R$ - haqiqiy sonlar to'plami deyiladi, Irratsional sonlar cheksiz davriy bo'lmagan o'qli kasrlar, ratsional sonlar esa cheksiz davriy o'qli kasrlar kabi yoziladi.

Demak, haqiqiy sonni bir so'z bilan cheksiz o'qli kasr deb atash mumkin, ya'ni

$x = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ haqiqiy sonning kami bilan olingan taqribiy $x_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ qiymati,

$x'_n = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots} + \frac{1}{10^n}$ **ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati deyiladi.**

2. R-to'plamning xossalari:

1°. R -cheksiz -sanoqsiz.

2°. R-tartiblangan.

3°. R-uzluksizdir.

3. $(\forall x \in R)$ soniga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini va aksincha son o'qining har bir nuqtasiga yagona haqiqiy son mos kelishini tushuntiramiz. $(\forall x \in Q)$ soniga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishi ma'lum. $(\forall x \in R)$ -irratsional bo'lsa, unga ham bitta nuqta topilishini ko'rsatamiz.

Masalan: $x = \sqrt{2}$

$$|OA| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

A nuqtaga sonlar o'qida A^1 nuqta mos keldi. Uning koordinatasi $\sqrt{2}$, ya'ni $A'(\sqrt{2})$. Xuddi shunday istalgan irratsional songa bittadan nuqtani mos keltirish mumkin va aksincha.

Shunday qilib, R -to'plami-bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli mos lik o'rnatish mumkin ekan.

1. $[0;1]$ kesmadagi nuqtalar to'plami sanoqsizdir.

Ta'rif. $[0;1]$ kesmadagi nuqtalar to'plami bilan teng quvvatli to'plam kontinium quvvatli to'plam deyiladi. Bunday to'plamlar haqida bir nechta teoremlarni isbotsiz qabul qilamiz.

Teorema 1. Har qanday $[a,b]$ dagi nuqtalar kontinium quvvatga ega.

Teorema 2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ larning har biri kontinium quvvatiga ega bo'lsa, u holda $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$ to'plam ham kontinium quvvatga ega va aksincha.

Natija. R to'plam kontinium quvvatga ega.

Savollar:

1. Irratsional son tushunchasini kiritilishi zaruratini tushuntiring,
2. Irratsional son ta'rifini ayting.
3. Haqiqiy son deb nimaga aytiladi?
4. Haqiqiy sonlar to'plami qanday tuzilgan?
5. Haqiqiy sonlar to'plami bilan son o'qi nuqtalari orasida qanday bog'lanish bor?
6. Haqiqiy sonlar to'plamining quvvati haqida nima deyish mumkin?
7. Haqiqiy sonning kami va ortig'i bilan olingan o'nli yaqinlashishlari deb nimaga aytiladi? Ular qanday topiladi?

Misollar.

1 – misol. Agarda r – ratsional son, α - irratsional son bo'lsa, $r + \alpha = x$ irratsional son ekanligini isbotlang.

Isboti: Teskarisidan isbotlaylik. Agarda x – ratsional son bo'lsa, u holda $\alpha = x - r$ ham ratsional son bo'ladi. Ammo α - irratsional son, demak x – irratsional son.

2 – misol. $\sqrt{2}$ qanday son?

$\sqrt{2} = 0,44$ cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr hosil bo'ldi.

Demak, bu son irratsional sonidir.

04	200
4	16
84	400
4	336
88	6400

3 – misol. $(\forall x \in R)$ - irratsional son bo'lsin. Unga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini ko'rsating.

Yechish. $x = \sqrt{17}$ $|OA| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

A nuqtaga sonlar o'qida A' nuqta mos keldi. Uning koordinatasi $\sqrt{17}$, ya'ni $A'(\sqrt{17})$. Demak, R to'plam bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli mos lik o'rnatdik.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. α va β - irratsional sonlar, r - ratsional son. Quyidagi sonlardan qaysi biri ratsional son bo'ladi?

a) $\alpha + \beta$; b) $\alpha + r$; v) $\sqrt{\alpha}$; g) $\sqrt{r}$; d) $\alpha \cdot \beta$; e) $\sqrt{\alpha + r}$; j) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$?

2. Agar $(\forall x \in R)$ - irratsional son bo'lsa, unga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini ko'rsating?

a) $x = \sqrt{10}$; b) $x = \sqrt{5}$; v) $x = \sqrt{13}$; g) $x = \sqrt{29}$

d) $x = \sqrt{50}$; e) $x = \sqrt{41}$; j) $x = \sqrt{73}$

3. Quyidagilar qanday sonlar?

$\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{136}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{17}$; 5,18; 3,1(14); $18\frac{3}{5}$; $\sqrt{39}$.

Mavzu: Haqiqiy sonlar ustida amallar.

REJA:

1. Haqiqiy sonlarning yig'indisi.
2. Haqiqiy sonlarning ayirmasi.
3. Haqiqiy sonlarning ko'paytmasi.
4. Haqiqiy sonlarning bo'linmasi.

Ta'rif. x va u haqiqiy sonlarning yig'indisi deb, $x_s + u_n < Z < x'_s + y'_n$ shartni qanoatlantiradigan Z haqiqiy soniga aytiladi. Misol. 3,657642... va 0,874622... sonlarining yig'indisi 0,001gacha aniq likda topilsin.

1) $n = 0$ $\left. \begin{matrix} x_0 = 3, & y_0 = 0, \\ x'_0 = 4, & y'_0 = 1. \end{matrix} \right\} 3 + 0 < Z < 4 + 1; 3 < Z < 5$

$x_1 = 3,6; y'_0 = 0,9$

2) $n = 1$ $y' = 0,8$ $x'_1 = 3,7$

$4,4 < Z < 4,6$

$x_2 = 3,65; x'_2 = 3,66$

3) $n = 2$ $y_1 = 0,87$ $y'_2 = 0,88$

$4,52 < Z < 4,54$

$x_3 = 3,657; y'_3 = 3,658$

4) $n = 3$ $y_3 = 0,874; y'_3 = 0,875$

$4,531 < Z < 4,533$

$n = 4$ $x_4 = 3,6576$ $x'_4 = 3,6577$

5) $y_4 = 0,8746$ $y'_4 = 0,8747$ demak, $Z \approx 4,532$

$4,532 < Z < 4,532$

Ta'rif. x va y haqiqiy sonlarning ko'paytmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, u ixtiyoriy manfiy bo'lmagan x, y uchun $x_n \cdot y_n < z < x'_n \cdot y'_n$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Misol. $x=1,34205...$ va $y=1,63244...$ bo'lsa, ko'paytmaning to'rtta o'nli ishorasi topilsin.

$$p = 4 x_n \cdot u_n = 1,3420 \cdot 1,6324 = 2,19068080;$$

$$1) x'_n \cdot y'_n = 1,3420 \cdot 1,6325 = 2,19097825;$$

$$2,19068080 < z < 2,19097825;$$

$$n = 5 \quad x_5 \cdot y_5 = 1,34205 \cdot 1,63244 = 2,1908161020$$

$$2) x'_5 \cdot y'_5 = 1,34206 \cdot 1,63245 = 2,1908458470$$

$$2,1908 < Z < 2,1908$$

Demak, $Z=2,1908$.

Ta'rif. x va y haqiqiy sonlarning $x - y$ ayirmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, $y \ x_a - y'_a < Z < x'_n - u_n$ shartni qanoatlantiradi.

Misol. $x=3,423421\dots$ va $y=3,234519\dots$ bo'lsa, ayirmaning birinchi uchta o'nli ishorasi topilsin.

$$n = 3 \quad x - y_3 = 3,423 - 3,235 = 0,188;$$

$$x'_3 - y'_3 = 3,424 - 3,234 = 0,190$$

$$0,1 < Z < 0,1$$

$$n = 4 \quad x_4 - y_4 = 3,4234 - 3,2346 = 0,1888;$$

$$x'_4 - y'_4 = 3,4235 - 3,2345 = 0,1890;$$

$$0,18 < Z < 0,18$$

$$n = 5 \quad x_5 - y_5 = 3,42342 - 3,23452 = 0,18890;$$

$$x'_5 - y'_5 = 3,4243 - 3,23451 = 0,18892;$$

$$0,188 < Z < 0,188$$

Demak, $Z = 0,188$.

Ta'rif. x va y haqiqiy sonlarning $x:y$ bo'linmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, $u \ x_n:y'_n < Z < x'_n:y_n$ shartli qanoatlantiradi.

Misol: $x=1,53247\dots$; $y = 2,03725\dots$ bo'linmaning qiymatini 0,001 gacha aniq likda toping.

Yechish:

$$n = 2 \quad x_2 : y'_2 = 1,53 : 2,04 = 0,750$$

$$x'_2 : y_2 = 1,54 : 2,03 = 0,758620\dots$$

$$0,75 < Z < 0,758620\dots$$

$$n = 3 \quad x_3 : y'_3 = 1,532 : 2,038 = 0,7517173\dots$$

$$x'_3 : y_3 = 1,533 : 2,037 = 0,757138\dots$$

$$0,7517173\dots < Z < 0,757138\dots$$

$$n = 4 \quad x_4 : y'_4 = 1,5324 : 2,0373 = 0,75222\dots$$

$$x'_4 : y_4 = 1,5325 : 2,0372 = 0,752258\dots$$

$$0,75222\dots < Z < 0,752258\dots$$

Demak, $Z \approx 0,752$.

Savollar:

1. Haqiqiy sonlarning yig'indisi qanday topiladi? Yig'indisining Qanday xossalari bor?
2. Haqiqiy sonlar ko'paytmasi ta'rifini ayting. Ko'paytma xossalarini ayting va asoslang.
3. Haqiqiy sonlar ayirmasi qanday topiladi?
4. Haqiqiy sonlar bo'linmasini topish qoidasini ayting.

Misollar.

1 – misol. $3,678624\dots$ va $0,786422\dots$ sonlarning yig'indisini 0,001 gacha aniq likda toping.

Yechish.

$$n = 0 \quad x_0 = 3 \quad y_0 = 0 \quad 3 + 0 < z < 4 + 1; \quad 3 < z < 5$$

$$x'_0 = 4 \quad y'_0 = 1$$

$$x_1 = 3,6 \quad y'_1 = 0,8$$

$$ta'rifga ko'ra \ x_n + y_n < z < x'_n + y'_n$$

$$2) n=1 \quad y' = 0,7 \quad x'_1 = 3,7$$

$$3,6 + 0,7 < z < 0,8 + 3,7$$

$$4,3 < z < 4,5$$

$$x_2 = 3,67 \quad x'_2 = 3,68$$

$$3) n=2 \quad y_2 = 0,78 \quad y'_2 = 0,79$$

$$3,67 + 0,78 < z < 3,68 + 0,79$$

$$4,45 < z < 4,47$$

$$x_3 = 3,678; \quad x'_3 = 3,679$$

$$4) n=3 \quad y_3 = 0,786 \quad y'_3 = 0,787$$

$$3,678 + 0,786 < z < 3,679 + 0,787$$

$$4,464 < z < 4,466$$

$$5) n=4 \quad x_4 = 3,6786 \quad x'_4 = 3,6787$$

$$y_4 = 0,7864 \quad y'_4 = 0,7865$$

$$4,4652 < z < 4,4652$$

$$Demak: \quad z = 4,465$$

2 – misol. $x=1,42303$. . . va $u=1,63424$. . . bo'lsa, ko'paytmaning to'rtta o'nli ishorasi topilsin.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$x_n \cdot y_n < z < x'_n \cdot y'_n$$

$$n=4 \quad x_n \cdot y_n = 1,4230 \cdot 1,6342 = 2,3254666$$

$$1) \quad x'_n \cdot y'_n = 1,4231 \cdot 1,6343 = 2,3257723$$

$$2,325 < z < 2,325$$

$$n=5 \quad x_5 \cdot y_5 = 1,42305 \cdot 1,63424 = 2,3256052$$

$$2) \quad x'_5 \cdot y'_5 = 1,42306 \cdot 1,63425 = 2,3256358$$

$$2,3256 < z < 2,3256$$

$$Demak \quad z = 2,3256$$

3 – misol. $x=4,432412$. . . va $u=3,324539$. . . bo'lsa, ayirmaning birinchi uchta o'nli ishorasini toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$x_n - y'_n < z < x'_n - y_n$$

$$n = 3 \quad x_1 - y'_1 = 4,432 - 3,325 = 1,107$$

$$x'_1 - y_1 = 4,433 - 3,324 = 1,109$$

$$1,107 < z < 1,109$$

$$1,1 < z < 1,1$$

$$n = 4 \quad x_4 - y'_4 = 4,4324 - 3,3246 = 1,1078$$

$$x'_4 - y'_4 = 4,4325 - 3,3245 = 1,1080$$

$$1,10 < z < 1,10$$

$$n = 5 \quad x_5 - y'_5 = 4,43241 - 3,32454 = 1,10787$$

$$x'_5 - y_5 = 4,43242 - 3,32453 = 1,10789$$

$$1,107 < z < 1,107$$

Demak $z = 1,107$.

4 – misol. $x=4,532 \dots$ va $u=2,147 \dots$ bo`lsa, bo`linmani 3 ta o`nli ishorasi topilsin.

Yechish. Ta`rifga ko`ra

$$x_n : y_n < z < x'_n : y'_n$$

$$n = 2 \quad x_2 : y'_2 = 4,53 : 2,14 = 2,1069767$$

$$2,1168224$$

$$x'_2 : y_2 = 4,54 : 2,15 = 2,1214953$$

$$2,1116279$$

$$2,11 < z < 2,11$$

$$n = 3 \quad x_3 : y_3 = 4,532 : 2,147 = 2,1108523$$

$$x'_3 : y'_3 = 4,533 : 2,148 = 2,1103351$$

$$2,110 < z < 2,110$$

Demak $z = 2,110$.

Mustaqil yechish uchun misollar.

I. Berilgan sonlarning yig`indisi va ayirmasini 0,001 gacha aniqliqda toping?

1) $x = 4,234561\dots$ va $y = 2,132137\dots$

2) $x = 2,174135\dots$ va $y = 1,235447\dots$

3) $x = 12,325147\dots$ va $y = 2,428945\dots$

4) $x = 5,254132\dots$ va $y = 2,432465\dots$

5) $x = 2,345603\dots$ va $y = 0,784047\dots$

6) $x = 3,354324\dots$ va $y = 1,213548\dots$

7) $x = 3,685427\dots$ va $y = 2,475134\dots$

8) $x = 7,546587\dots$ va $y = 5,324165\dots$

9) $x = 5,244563\dots$ va $y = 3,342548\dots$

10) $x = 4,182115\dots$ va $y = 1,257139\dots$

II. Berilgan sonlarning ko`paytmasini va bo`linmasini 0,001 gacha aniq likda toping.

- 1) $x = 1,34324....$ va $y = 1,36424....$
- 2) $x = 2,46542....$ va $y = 0,25643.....$
- 3) $x = 3,12431...$ va $y = 1,42114....$
- 4) $x = 2,84351...$ va $y = 1,12328....$
- 5) $x = 4,17823....$ va $y = 4,03241....$
- 6) $x = 2,84359....$ va $y = 1,12524....$
- 7) $x = 5,13425...$ va $y = 2,34267....$
- 8) $x = 3,25467....$ va $y = 0,83544....$
- 9) $x = 2,15374....$ va $y = 1,03435....$
- 10) $x = 6,15234...$ va $y = 2,37568.....$

Mavzu: Sonlarni yaxlitlash va taqribiy sonlar ustida amallar.

REJA:

1. Taqribiy son tushunchasi.
2. Yaxlitlash.
3. Tavqribiy sonning yuqori va quyi chegarasi.
4. Absolyut va nisbiy xato.
5. Ishonchli raqamlar.
6. Qiymatli raqamlar.
7. Arifmetik amallarning xato liklari.

Taqribiy sonlarni qanday ish bajarganda uchratishimiz mumkin?

1. Taqribiy sonlar:

a) texnik o'lash natijasida;

b) jadvallardan (kvadratlar, logarifmlar,...) foydalanishda;

v) ildizlar chiqarishda;

g) sonlarni yaxlitlashda;

va hokazo kabi hollarda hosil bo'ladi.

2. Agar sonimizda raqamlar keragidan ortiq bo'lsa, u holda son yaxlitlanadi.

Masalan. $475427 \approx 475000$ (kami bilan) $475827 \approx 476000$ (ortig'i bilan)

Ba'zi hollarda kami bilan ham, ortig'i bilan ham yaxlitlash mumkin.

$$3,1 < \pi < 3,2$$

$$3,14 < \pi < 3,15$$

$$3,141 < \pi < 3,142$$

3. Agar x soni a_1 va a_2 qiymatlari orasidagi qiymat bo'lsa, ya'ni $a_1 < x < a_2$, y holda

a_1 - quyi chegara q.ch.

a_2 - yuqori chegara yu.ch.

$a_1 = \text{q.ch. } x, a_2 = \text{yu.ch. } x$

$\text{q.ch. } x < x < \text{yu.ch. } x$

Bulardan:

$$\text{q.ch.}(x+y) = \text{q.ch.}x + \text{q.ch.}y$$

$$\text{yu.ch.}(x+y) = \text{yu.ch.}x + \text{yu.ch.}y$$

$$\text{q.ch.}(x \cdot y) = \text{q.ch.}x \cdot \text{q.ch.}y$$

$$\text{yu.ch.}(x \cdot y) = \text{yu.ch.}x \cdot \text{yu.ch.}y$$

$$\text{q.ch.}(x-y) = \text{q.ch.}x - \text{yu.ch.}y$$

$$\text{yu.ch.}(x-y) = \text{yu.ch.}x + \text{q.ch.}y$$

$$\text{q.ch.}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{q.ch.}x}{\text{yu.ch.}y}$$

$$\text{yu.ch.}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{yu.ch.}x}{\text{q.ch.}y}$$

Chegaralar usuli bilan hisoblash $x \approx \frac{q.ch.x + yu.ch.x}{2}$ formulasi bilan amalga oshiriladi.

4. 1) Agar a soni x -ning taqribiy qiymati bo'lsa, u holda $|x - a| = \Delta a$ absolyut xato lik deyiladi.
 $x - a = \pm \Delta a \Rightarrow x = a \pm \Delta a$.

2) $\frac{\Delta a}{|a|}$ - nisbiy xato lik deyiladi va $\delta(a) = \dots$ kabi belgilanadi,

$$\delta(a) = \left(\frac{\Delta a}{|a|} * 100 \right) \%, \Delta a = |x - a|$$

5. Agar absolyut xato lik oxirgi razryad birligini yarmidan ortiq bo'lmasa, u holda taqribiy sonning hamma raqamlari ishonchli.

$$a_1 = 2,5; \quad \Delta a_1 = 0,5$$

Masalan, 1) $a_2 = 138; \quad \Delta a_2 = 0,5$

$$a_3 = 13,4; \quad \Delta a_3 = 0,05$$

$$a_4 = 0,078; \quad \Delta a_4 = 0,005$$

2) $a = 2,537; \quad \Delta a = 0,005$ bunda birinchi 2 ta raqam ishonchli, qolganlari shubhali.

6. Sonning oxiri va boshidagi noldan tashqari barcha raqamlari qiymatli raqam deyiladi. Nol son yozuvi oxirida qiymatli hisoblanadi, agar u ishonchli bo'lsa.

250 - hammasi qiymatli.

500 $\approx$ 536, bunda nollar qiymatli emas.

7. a) Yig'indining xatosi.

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b. \quad \delta(a+b) \leq \delta(a), \quad \text{agar } \delta(a) \geq \delta(b), \text{ bo'lsa.}$$

b) $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$$

v) $\Delta(a*b) = a\Delta b + b\Delta a$

$$\delta(a*b) = \delta(b) + \delta(a)$$

g) $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

Savollar:

1. Taqribiy son haqida tushuncha bering.
2. Sonlarni yaxlitlash qoidalarini ayting.
3. Taqribiy sonning quyi va yuqori chegarasi haqida ma'lumot bering.
4. Absolyut va nisbiy xato ta'riflarini ayting, ularni hisoblash yo'lini tushuntiring.
5. Absolyut va nisbiy xatoning taqribiy hisobdagi ahamiyati qanday?
6. Taqribiy son yozuvidagi ishonchli va qiymatli raqamlar qanday aniqlanadi?

Misollar.

1 – misol. 8,35327 sonni 0,0001; 0,001 va 0,01 gacha aniq likda yaxlitlang.

Yechish. 8,3532; 8,353; 8,35; hosil bo'ladi.

2 – misol. $x = 3,44159\dots$ sonni 0,001 gacha aniq likda kami va ortig'i bilan yaxlitlang.

Yechish. $3,44159 \approx 3,441$ (kami bilan)

$3,44159 \approx 3,442$ (ortig'i bilan)

demak, $3,441 < x < 3,442$

3 – misol. $x = 7,172354\dots$ sonni 0,0001 gacha aniq likda quyi va yuqori chegaralarini toping.

Yechish. q. ch. $x \approx 7,1723$

yu. ch. $x \approx 7,1724$

$7,1723 < x < 7,1724$

4 – misol. $x=5,7324\dots$ $u=3,1125\dots$ q. ch. $(x-u)$ ni 0,001 gacha ani likda toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra $q.ch.(x-u)=q.ch.x - q.ch.u$

q.ch. $x \approx 5,732$

yu.ch. $u \approx 3,113$

q.ch. $(x-u) \approx 2,619$

Yechish: Ta'rifga ko'ra ayirmaning nisbiy xatosi $\delta(x-y) = \frac{\Delta(x+y)}{x-y}$ ga teng.

$$\Delta(a+b) = 0,002 + 0,003 = 0,005$$

$$a-b = 17,23 - 11,38 = 5,85$$

$$\delta(a-b) = \frac{0,005}{5,85} = 0,00085$$

8 – misol. $x \approx 55,32 \pm 0,02$ Ko'paytmaning nisbiy xatosini toping.
 $y \approx 27,41 \pm 0,001$

Yechish:

$$\Delta(xy) = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y = 27,41 \cdot 0,02 + 55,32 \cdot 0,01 = 0,5482 + 0,5532 = 1,1014$$

$$x \cdot y = 55,32 \cdot 27,41 = 1516,3212$$

yoki yaxlitlaganda $xy = 1516$ Demak, $xy \approx 1516 \pm 1,5$ ($1,5 > 1,1014 - 0,3212$)

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,02}{55,32} + \frac{0,01}{27,41} = 0,0003615 + 0,0003648 = 0,0007263 \approx 0,001$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Quyidagi sonlarni 0,0001; 0,001; 0,01 gacha aniq likda yaxlitlang.

a) 3,174564 ... v) 21,174536... d) 0,34768...

b) 17,343417... g) 13,456879... e) 5,238718...

2. $x=12,3247\dots$ va $y=7,4348$ q.ch $(x-u)$ va yu. ch. $(x-u)$ ni 0,001 gacha aniq likda toping.

3. $x=7,1723$ va $y=5,7324$ q.ch $(x+u)$ va yu. ch. $(x+u)$ ni 0,001 gacha aniq likda toping.

4. Yig'indining xatosini toping.

a) $x \approx 3,532 \pm 0,001$

b) $x \approx 12,637 \pm 0,002$

$y \approx 7,221 \pm 0,002$

$y \approx 15,285 \pm 0,001$

e) $x \approx 0,758 \pm 0,001$

z) $x \approx 24,148 \pm 0,001$

$y \approx 1,384 \pm 0,003$

$y \approx 54,367 \pm 0,002$

5. Ayirmaning xatosini toping.

a) $x \approx 27,23 \pm 0,002$ ba $y \approx 21,38 \pm 0,003$

b) $x \approx 42,35 \pm 0,002$ ba $y \approx 15,83 \pm 0,003$

e) $x \approx 25,63 \pm 0,001$ ba $y \approx 17,25 \pm 0,002$

z) $x \approx 17,35 \pm 0,001$ ba $y \approx 11,83 \pm 0,002$

6. Ko'paytmaning xatosini toping.

$$a) x \approx 45,23 \pm 0,02$$

$$y \approx 17,14 \pm 0,01$$

$$b) x \approx 3,873 \pm 0,005$$

$$y \approx 3,871 \pm 0,005$$

$$e) x \approx 3,34 \pm 0,01$$

$$y \approx 27,25 \pm 0,02$$

$$z) x \approx 2,178 \pm 0,02$$

$$y \approx 3,718 \pm 0,01$$

7. Bo`linmaning xatosini toping.

$$a) x \approx 5,14 \pm 0,005$$

$$y \approx 2,31 \pm 0,01$$

$$b) x \approx 2,25 \pm 0,005$$

$$y \approx 0,15 \pm 0,005$$

$$e) x \approx 2,43 \pm 0,01$$

$$y \approx 4,54 \pm 0,004$$

$$z) x \approx 14,75 \pm 0,005$$

$$y \approx 7,45 \pm 0,01$$

8. Darajaning xatosini toping.

$$a) x \approx 103,5 \quad \Delta x = 0,005$$

$$d) x \approx 8,35 \quad \Delta x = 2,005$$

$$b) x \approx 85,3 \quad \Delta x = 0,003$$

$$e) x \approx 105,3 \quad \Delta x = 0,008$$

$$e) x \approx 75,3 \quad \Delta x = 0,002$$

$$k) x \approx 96,8 \quad \Delta x = 0,002$$

$$z) x \approx 85,9 \quad \Delta x = 0,001$$

$$3) x \approx 35,7 \quad \Delta x = 0,002$$

9. Ildizning nisbiy va absolyut xatosini toping.

$$a) a = \sqrt[3]{2,718} \quad \Delta a = 0,0005$$

$$d) a = \sqrt[3]{8,85} \quad \Delta a = 0,0003$$

$$b) a = \sqrt{1,187} \quad \Delta a = 0,0005$$

$$e) a = \sqrt{3,83} \quad \Delta a = 0,0004$$

$$e) a = \sqrt{3,35} \quad \Delta a = 0,0004$$

$$k) a = \sqrt{9,35} \quad \Delta a = 0,0005$$

$$z) a = \sqrt[3]{27,42} \quad \Delta a = 0,0005$$

$$3) a = \sqrt{4,45} \quad \Delta a = 0,0004$$

Mavzu: Kompleks sonlar

Reja:

1. Mavhum son tushunchasi.
2. Kompleks son va uning turli shakllari.
3. Kompleks sonlar ustida amallar.

Qanday sonlar mavhum sonlar deb ataladi?

Kompleks son deb $z=x+iy$ ko'rinishidagi ifodaga aytiladi. Bunda x va u sonlar haqiqiy sonlar bo'lib, x ga z sonning haqiqiy qismi, u ga esa z sonning mavhum qismi, i ni mavhum bir lik deyiladi.

Agar $x = 0$ bo'lsa, $z = yi$ ga sof mavhum son deyiladi.

1. Kompleks son tushunchasiga odatda quyidagi tenglama orqali kelinadi $x^2+1=0$.

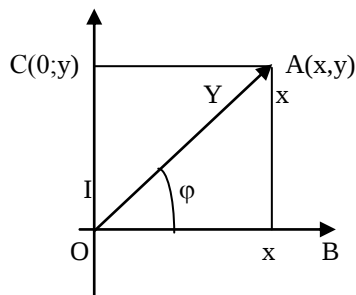
Ushbu tenglamani qanoatlantiruvchi haqiqiy son yo'q. Bu tenglama ildizga ega bo'lishi uchun yangi, mavhum sonlar deb ataluvchi sonlar kiritiladi. Mavhum va haqiqiy sonlar umumiy nom bilan **kompleks son** deb ataladi.

Kompleks son deb $z=x+iy$ ko'rinishidagi ifodaga aytiladi. Bunda x va u sonlar haqiqiy sonlar bo'lib, x ga z sonning haqiqiy qismi, u ga esa z sonning mavhum qismi, i ni mavhum bir lik deyiladi.

Agar $x = 0$ bo'lsa, $z = yi$ ga sof mavhum son deyiladi.

2. $z = x+yi$ kompleks sonni tekis likdagi dekart koordinatalari sistemasida $A(x;u)$ nuqta bilan tasvirlash qabul qilingan. U holda $x = z + oi$ haqiqiy son abtsissa o'qida yotuvchi $V(x;u)$ nuqta

bilan $yi = 0 + yi$ mavhum son ordinata o'qida yotuvchi $S(0;u)$ nuqta bilan tasvirlanadi. (1- chizma)



$o = o + oi$ songa mos keluvchi nuqta koordinata boshi bo'ladi. Masalan, $z = -3 + 4i$, $\alpha = 5$, $\beta = -7i$ sonlar mos ravishda $A_1(-3;4)$, $B_1(5;0)$ va $C_1(0;7)$ nuqtalar bilan tasvirlanadi.

Bunday tasvirlashda abtissa o'qi - haqiqiy o'q va ordinata o'qi - mavhum o'q deb yuritiladi.

$z = x + yi$ kompleks sonni boshi koordinata boshida va uchi $A(x;u)$ nuqtada yotuvchi vektor bilan ham tasvirlash mumkin. Bu holda haqiqiy sonlar, haqiqiy o'qda yotuvchi vektorlar bilan va mavhum sonlar mavhum o'qda yotuvchi vektorlar bilan tasvirlanishi ravshan. Umuman aytganda, kompleks sonlar to'plami bilan tekis likdagi barcha nuqtalar to'plami orasida biektiv akslantirish mavjud.

$z = x + yi$ kompleks sonining geometrik tasvirini ifodalovchi vektorning uzunligi bu kompleks sonning moduli deyiladi va $u = r = |z| = |x + yi|$ ko'rinishida belgilanadi.

$r = |z|$ ni Pifagor teoremasi bo'yicha 1- chizmadagi to'g'ri burchakli AOV uchburchakda topamiz.

Bunda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bo'ladi.

Masalan $a = -3 + 4i$, $\beta = \sqrt{5} - i\sqrt{7}$ sonlarning modullari mos ravishda

$$r_1 = |a| = \sqrt{9 + 16} \quad r_1 = 5$$

$$r_2 = |\beta| = \sqrt{5 + 7} \quad r_2 = \sqrt{12} \text{ ga teng.}$$

Noldan farqli har bir kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sonidir. Ox o'qining musbat yo'nalish bilan $\overrightarrow{OA}$ vektor orasidagi burchakni φ deb belgilaymiz. Unda $\triangle AOV$ dan $x = r \cos \varphi$ va $y = r \sin \varphi$ larni topamiz. Bularni $z = x + yi$ ga qo'yamiz:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

z kompleks sonning (1) shakliga uning trigonometrik shakli deyiladi. Bunda $r \geq 0$, lekin istalgan (manfiy, nol, musbat) qiymatlarni qabul qila oladi. Bu φ burchak z kompleks sonining argumenti deb ataladi. $z = x + yi$ ifoda z kompleks sonning algebraik shakli deb yuritiladi.

(1) ni umumiy shaklda $z = r((\cos \varphi + 2\pi k) + (i \sin \varphi + 2\pi k))$ deb yozish mumkinligi ravshandir, bunda k - istalgan butun son.

Har bir kompleks sonni yuqorida aytilgan shakllarini biridan ikkinchisiga o'tkazish mumkin.

Masalan, algebraik shakldagi $z = 1 - \sqrt{3}i$ kompleks sonni trigonometrik shakliga keltiraylik. Buning uchun r bilan φ ni topib ularning qiymatlarini (1)ga qo'yamiz. Bu erda

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \quad r = 2. \text{ Endi } \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \text{ va } \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ lardan uning}$$

to'rtinchi chorakda ekanligi va 300° ga yoki $\frac{5\pi}{3}$ ga tengligini ko'ramiz. Shunday qilib,

$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ hosil bo'ladi.}$$

3. Ixtiyoriy shaklda berilgan kompleks sonlar ustida qo'shish, ayirish, bo'lish va ko'paytirish amallari qo'yidagicha bajariladi.

$$\text{I. } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\text{II. } z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\text{Bu erdan } i^2 = (0 + i)(0 + i) = -(0 + 1)(0 + 0) = -1$$

$$\text{III. } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \text{ bu yerda } z_2 \neq 0$$

Biz endi quyidagi trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida ko'paytirish va bo'lish amallarini ko'rib o'tamiz.

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ formulalardan kompleks sonning trigonometrik shakli kelib chiqadi.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

Kompleks sonning trigonometrik shaklidagi ko'rinishidan foydalanib

$$z_1 = r(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$\text{I. } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2)$$

$$\text{II. } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) [\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)]}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) [\cos(\varphi_2) - i \sin(\varphi_2)]} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (3)$$

bu yerda $z_2 \neq 0$

Demak, trigonometrik shakldagi ikkita kompleks sonning bo'linmasi ham trigonometrik shaklga ega bo'lib, bo'linmaning moduli bo'linuvchi va bo'luvchi modullarining bo'linmasiga, argumenti esa bo'linuvchi va bo'luvchi argumentlarning ayirmasiga teng.

Misol. $z_1 = 7(\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ)$ va $z_2 = 4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$ sonlarning bo'linmasini topaylik. Avvalo z_1 ni trigonometrik shaklga keltiramiz:

$$z_1 = 7(\cos(-20^\circ) - i \sin(-20^\circ))$$

Endi (3) formula bo'yicha

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{4} [\cos(-20^\circ - 10^\circ) + i \sin(-20^\circ - 10^\circ)] = \frac{7}{4} (\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) = \frac{7}{8} (\sqrt{3} - i)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{8} (\sqrt{3} - i) \text{ ni topamiz.}$$

(2) formula bo'yicha

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (4)$$

n - natural son. Faraz qilaylik $\sqrt[n]{r} = p(\cos \psi + i \sin \psi)$ bunda $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ shunda

(1) formulaga asosan

$$z = [p(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = p^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

$$p^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ demak } p = \sqrt[n]{r} \quad \sqrt[n]{r} \text{ bu deb } \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \text{ arifmetik ildiz}$$

deb tushuniladi.

r ga $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ qiymatlarni olish etarlidir, chunki k ning boshqa qiymatlarida topilgan ildiz qiymatlarining takrori bo'ladi.

Shunday qilib:

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{z} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (5)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Misol. $\omega = \sqrt{-1}$ ni toping. Haqiqatdan $-1 \cos \pi + i \sin \pi$ (2) formula

$$\text{asosida } \sqrt{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1$$

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad \omega_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

Savollar.

- 1) Algebraik shakldagi kompleks sonni trigonometrik shaklga keltirishga misol keltiring.
- 2) Modul formulasini yozing.
- 3) Kompleks sonlar modullarining yig'indisini xossalarini ko'rsating.
- 4) Kompleks sonlarning geometrik joylanishiga oid misollar keltiring.
- 5) Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarishning qanday usullarini bilasiz?

Misollar.

1 - misol. Kompleks sonni trigonometrik ko'rinishga keltiring.

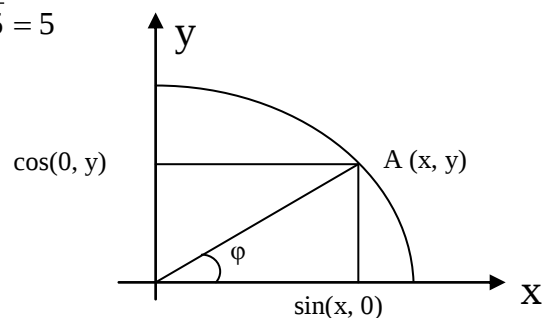
$$z = 3 + 4i \quad a = 3 \quad b = 4 \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad \varphi = 53^\circ 12' \approx 53^\circ$$

$$z = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z = 5(\cos 53^\circ + i \sin 53^\circ)$$



2 - misol. Soddashtiring. a) $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$, chunki $i^2 = -1$.

b) $\sqrt{-x^2 - y^2 + 2xy} = \sqrt{-(x^2 - 2xy + y^2)} = i\sqrt{(x - y)^2} = (x - y)i$, agarda $x \geq y$ bo'lsa.

3 - misol. Amallarni bajaring.

$$a) \sqrt{-25} + \sqrt{-49} - \sqrt{-64} + \sqrt{-1}$$

Yechish. $i^2 = -1$ bo'lganligidan

$$\sqrt{25 \cdot i^2} + \sqrt{49 \cdot i^2} - \sqrt{64 \cdot i^2} + \sqrt{i^2} = 5i + 7i - 8i + i = 5i$$

$$b) \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{16 \cdot i^2} \cdot \sqrt{9 \cdot i^2} = 4i \cdot 3i = 12i^2 = -12$$

$$v) (\sqrt{a} + 3\sqrt{-b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{-b}) = (\sqrt{a} + 3i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b}) = a - i\sqrt{ab} + 3i\sqrt{ab} - 3bi^2 = a + 3b + 2i\sqrt{ab};$$

z) $(3 + \sqrt{-2})^3 = (3 + i\sqrt{2})^3$ formula bo'yicha ochib chiqamiz.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(3 + i\sqrt{2})^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot i\sqrt{2} + 3 \cdot 3 \cdot (i\sqrt{2})^2 + (i\sqrt{2})^3 = 27 + 27\sqrt{2}i - 18 - 2\sqrt{2}i = 9 + 25\sqrt{2}i$$

4 - misol. $\sqrt[3]{1}$ barcha qiymatlarini toping.

Yechish: 1 ni trigonometrik ko'rinishga keltiramiz.

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \cdot \sqrt[n]{r(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n})}$ formuladan foydalanamiz.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3} \quad k=0, 1, 2 \text{ deb ildizning uchta qiymatini topamiz.}$$

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 – misol. $x^4 = 1$ tenglamani eching.

Yechish: Tenglamani ildizini $x = \sqrt[n]{A}(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n})$ tenglikdan topamiz.

$$x = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4})$$

$k=0, 1, 2, 3$ deb

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i0 = 1$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Kompleks sonlarni trigonometrik ko'rinishga keltiring.

$$a) z = -1 - i; \quad b) z = 1 - i; \quad v) z = \sqrt{3} + i; \quad g) z = -1 + \sqrt{3}i;$$

$$d) z = -2; \quad e) z = i; \quad yo) z = 1; \quad j) z = -i;$$

$$z) z = 1 + i; \quad k) z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad l) z = \frac{\sqrt{33}}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2}; \quad m) z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$n) z = 2i; \quad o) z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad p) z = -i; \quad r) z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i;$$

2. Ifodani soddalashtiring.

$$1) \sqrt{-\epsilon}$$

$$4) \sqrt{-81}$$

$$7) \sqrt{-a^2}$$

$$2) \sqrt{-a}$$

$$5) \sqrt{-\frac{9}{4}}$$

$$8) \sqrt{-\frac{a^2}{\epsilon^2}}$$

$$3) \sqrt{-(a-\epsilon)^2}$$

$$6) \sqrt{-9x}$$

$$9) \sqrt{-a^2 - \epsilon^2}$$

3. Amallarni bajaring.

- 1) $\sqrt{-144} - \sqrt{-81} - \sqrt{-1} + \sqrt{-9}$
- 2) $3\sqrt{-4} + 5\sqrt{-27} - 3\sqrt{-16} - 5 - \sqrt{-3}$
- 3) $3 + 2i + (4 - 3i) - [(8 - 5i) - (5 + 13i)]$
- 4) $a + \epsilon i - (2a - 3\epsilon i) + [(a - 4\epsilon i) + (5a - 2\epsilon i)]$
- 5) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-\epsilon}$
- 6) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2}$
- 7) $i\sqrt{-x^2}$
- 8) $(2 - 5i)(8 - 3i)$
- 9) $(5 + 2\sqrt{-7}) \cdot (6 - 5\sqrt{-7})$
- 10) $(\sqrt{a} - \sqrt{-\epsilon}) \cdot (\sqrt{a} + 3\sqrt{-\epsilon})$
- 11) $(3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-7}) \cdot (2\sqrt{-7} + 3\sqrt{-5})$
- 12) $\frac{a^2 + \epsilon^2}{a - \epsilon i}$
- 13) $\frac{x - y}{x + yi}$
- 14) $\frac{4}{1 + \sqrt{-3}}$
- 15) $\frac{3 - 5i\sqrt{3}}{3 + 5i\sqrt{3}}$
- 16) $\frac{36 - \sqrt{-2}}{2 + 3i\sqrt{2}}$
- 17) $(a + \epsilon i)^2$
- 18) $\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2$
- 19) $(3 - \sqrt{5} + 2\sqrt{-1})^2$
- 20) $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3$
- 21) $\sqrt{3 + 4\sqrt{-1}}$
- 22) $\sqrt{-3 - 4i}$
- 23) $\sqrt{1 + 4\sqrt{-3}}$
- 24) $\sqrt{2 - 3\sqrt{-5}}$
- 25) $\sqrt[8]{-1}$
- 26) $\sqrt[8]{1}$

4.1. Hisoblang:

a) $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i);$ b) $(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i), \quad x \in \mathbb{R};$

v) $\frac{(1 + 2i)^2}{1 - 3i};$ g) $(1 - 4i) - (i(3 - 4i) + 3i);$ d) $(1 + 4i)^2 - (3 + i^9);$

e) $3 + 8i + 9i^2 + 10i^3$ yo) $8 - 4(i^{15} + 1) + 13i;$ j) $21i^4 + 23i^{19} + 17i^{17}.$

4.6. Tegishli kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozib, hisoblashlarni bajaring:

a) $(1 + i)^{16};$ b) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20};$ v) $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24};$ g) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{20}}{(1 - i)^{20}};$

d) $(1 + i)^9(1 - i)^{15};$ e) $(1 + 2i)^8(2 + 3i)^3;$ yo) $(2 + i)^{26}(2 + 3i)^9;$ j) $\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{15}}.$

3.1. Trigonometrik shaklda berilgan sonlarning ko'paytmasini toping:

$$a) z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad b) z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{24} \right) \quad v) z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right)$$

$$g) z_1 = 5(\cos \pi + i \sin \pi) \quad va \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}; \quad z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right);$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3.2 $\frac{z_1}{z_2}$ ni hisoblang :

$$a) z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{19} + i \sin \frac{\pi}{19} \right), \quad b) z_1 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad v) z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4},$$

$$g) z_1 = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{21} + i \sin \frac{\pi}{21} \right); \quad z_2 = 9 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right); \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}; \quad z_2 = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

3.3. Darajani hisoblang :

$$a) \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)^{20}; \quad b) \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^{16}; \quad v) \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)^{15}; \quad g) \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^{17};$$

$$d) \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{21} + i \sin \frac{\pi}{21} \right) \right)^7; \quad e) \left(\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{21} \right) \right)^7; \quad yo) \left(\sqrt{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^6;$$

$$j) \left(3 \left(\cos \frac{\pi}{13} + i \sin \frac{\pi}{13} \right) \right)^2.$$

3.4. $\sqrt{z}$ ni hisoblang :

$$a) z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad b) z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right); \quad v) z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \quad g) z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3.5. $z = 16 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ sonning uchunchi darajali va to'rtinchi darajali ildizlarini toping.

2.3. z kompleks sonning modulini toping;

$a) z = 3 + 4i;$ $b) z = -3 - 4i;$ $v) z = 1 + \sqrt{8}i;$ $g) z = 2\sqrt{2} + i;$ $n) z = -4;$
 $d) z = 3 + 3i;$ $e) z = 1 + 2\sqrt{3}i;$ $yo) z = 1 + i;$ $j) z = \sqrt{2} + i;$ $o) z = bi, \quad b \in R;$
 $z) z = \cos a + i \sin a (a \in R);$ $g) z = 1 + i \cos^2 a \quad (a \in R);$ $l) z = (2 + 3i)(3 - 4i);$
 $m) z = 4\sqrt{81} + 3\sqrt{21};$ $n) z = i;$ $p) z = 0.$

2.4. z Kompleks sonning argumentini toping :

$a) z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}};$ $b) z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2};$ $v) z = 3i;$ $g) z = 3;$
 $d) z = \frac{\sqrt{33}}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2};$ $e) z = -2\sqrt{3}i;$ $yo) z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i;$ $j) z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$
 $z) z = 1;$ $k) z = i;$ $l) z = -1;$ $m) z = -i.$

1.6. Yig'indini toping .

$a) (-3 + 2i) + (4 - i);$ $b) (4 + 5i) + (4 - 5i);$ $v) (5 + 2i) + (-5 - 2i);$ $g) 4 + (-3 + i);$
 $d) (1,4 - 3i) + (2,6 - 4i);$ $e) (3 + 8i) + (3 - 8i);$ $yo) (-7 + 3i) + (7 - 3i);$ $j) 4,3 + (1,7 - 9i);$
 $z) 8i + (4 - 6i);$ $k) -15i + (-4 + 5i);$ $l) (14 + 2i) + 8i;$ $m) 81 + (43 - 17i)$

1.13. Amallarni bajaring :

$a) -3i + 5 + 8i(3 - i);$ $b) (4 + 2i)(-1 - 3i) + 5 - 8i;$ $v) 3i(1 + i) + 3i(3 - i);$ $g) i(5 - 2i) + i(9 - 8i);$
 $d) (5 - 3i)(4 + i) + 15i;$ $e) 16 - (15 - i)(1 + i);$ $yo) 4(0,5 - 2,5i)(3 + i) + 5i;$ $j) 4,2(3 - i)(1 + i) + 2 + 3i;$
 $z) 3 + 5i + 2i^{1999};$ $k) 35 - i^{2000} + i^{1997};$ $l) i^{2001}(3 + 5i^4);$ $m) i^{2002} - i^{2001} - i^{1999}.$

1.9. Ko'paytmani hisoblang :

$a) (3 + 5i)(2 + 3i);$ $b) (4 + 7i)(2 - i);$ $v) (5 - 3i)(2 - 5i);$ $g) (-2 + i)(7 - 3i);$
 $d) \left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\frac{1}{4} - i\right);$ $e) \left(\frac{4}{7} + 3i\right)\left(\frac{7}{4} + 4,7i\right);$ $yo) (2 + 3i)(2 - 3i);$ $j) 4 \cdot (8,3 - i);$
 $z) (5 - 2i)(2i + 5);$ $k) (-3 + i)(3 - i);$ $l) 0 \cdot (4,5 - i);$ $m) \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) \cdot i;$

1.10. Ikki kompleks sonning bo'linma sin i toping .

$a) \frac{1+i}{1-i};$ $b) \frac{3-4i}{2+i};$ $v) \frac{2+3i}{2-3i};$ $g) \frac{1+2i}{3-2i};$
 $d) \frac{5-4i}{-3+2i};$ $e) \frac{-7+2i}{5-4i};$ $yo) \frac{3-4i}{-3+2i};$ $j) \frac{14-3i}{3i+2};$
 $z) \frac{51i}{4-i};$ $k) \frac{31i}{17+i};$ $l) \frac{31i}{17+i};$ $m) \frac{14+i}{31i};$
 $n) \frac{0}{3i};$ $o) \frac{1+4i}{1-5i};$ $p) \frac{1}{1+5i};$ $r) \frac{1}{1-5i};$

1.14. Hisoblang:

$$\begin{array}{llll}
 a) \frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}; & b) \frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}; & v) \frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}; & g) \frac{2-3i}{(1-i)(3+i)}; \\
 d) \frac{11}{1-2i} - \frac{13}{2-i}; & e) \frac{3-5}{3+i} + \frac{2+3i}{2-i}; & yo) \frac{13}{1-4i} + \frac{11}{1+4i}; & j) \frac{1-i}{1+i} + \frac{3-i}{3+i}; \\
 z) \frac{i^{18}+i^{19}}{2-3i} + \frac{1}{3+4i}; & k) \frac{2-3i}{2+3i} \cdot i^{18} + \frac{i}{1+i}; & l) \frac{4i^8}{9} + i(1+i^9); & m) i^3(1-i^4) + i^{12}.
 \end{array}$$

1.15. Amallarni bajaring.

$$\begin{array}{llll}
 a) (3-2i)^2; & b) (4+3i)^2; & v) \left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2; & g) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2; \\
 d) (3+2i)^2 - (3-2i); & e) (-3+5i) + (-3-5i); & yo) \left(\frac{i^6+1}{i^8-1}\right)^2; & j) \left(\frac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2.
 \end{array}$$

III BOB. Funksiya, hosila, integral

Mavzu: Funksiya va uning berilish usullari, xossalari

REJA:

1. Funksiya tushunchasi. Sonli funksiyalar
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi.
4. Murakkab funksiya. Algebraik. va transtsendent funksiyalar.

1. Agar x o'zgaruvchining qabul qilish mumkin bo'lgan har bir qiymatiga u o'zgaruvchining aniq bitta qiymati mos kelsa, u o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyiladi.

O'zgaruvchi u (funksiya) va erkli o'zgaruvchi x (argument) orasidagi funktsional boglanish simvolik ravishda $u = f(x)$ tenglik orqali yoziladi, bu erda f belgi u ni hosil qilish uchun x ustida bajariladigan amallar to'plamini bildiradi.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat X va U to'plamlar berilgan bo'lib, X to'plamdagi har bir x haqiqiy soniga biror f qonun yoki qoidaga binoan U to'plamdan aniq bitta u haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya berilgan deyiladi va $u = f(x)$ ko'rinishda yoziladi. Shu ta'rifda kiritilgan funksiya tushunchasi sonli funksiya deb ham yuritiladi. X - to'plam shu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va uni $D(f)$ kabi belgilash qabul qilingan. U - to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi yoki qiymatlar to'plami deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

Masalan. 1) $u = 3x$ ning aniqlanish sohasi $D(f) = \mathbb{R}$. O'zgarish sohasi esa $E(f) = \mathbb{R}$. 2) $u = \frac{1}{x}$ ning

aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. O'zgarish sohasi x esa $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

M: 1) $u = n!$ funksiya barcha natural sonlar to'plami $\mathbb{N}$ da aniqlangan. Uning qiymatlar to'plami ham $\mathbb{N}$ bo'ladi, Ya'ni bu funksiya $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ akslantirish bo'lib, $u = n!$ esa uning moslik qonunidir.

2) $S = \pi r^2$

2. Funksiyaning berilish usullari turlichadir.

1) Funksiyaning analitik usulda berilishi.

x o'zgaruvchining har bir qiymatiga ko'ra unga mos keladigan u ning qiymati x ustida analitik amallarning bajarilishi natijasida, ya'ni formulalar yordamida berilishi mumkin:

M: $y = x^2 + 1$, $y = \frac{x+1}{x^2+1}$, $y = \log_2(x+1)$

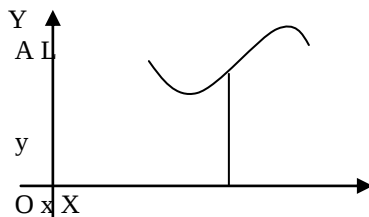
Funksiyaning bunday berilishi funksiyaning analitik usulda berilishi deyiladi.

2) Funksiyaning jadval usulida berilishi.

Ba'zan x va u o'zgaruvchilar orasidagi boglanish, ya'ni x o'zgaruvchanning qiymatiga mos keladigan u o'zgaruvchanning qiymatini ko'rsatish (topish) jadval shaklida berilishi mumkin.

Bunga logarifmlar jadvali misol bo'la oladi. Funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo'ladi. Lekin funksiyaning aniqlanish sohasi cheksiz to'plam bo'lganda, uning barcha qiymatlarini ko'rsatib bo'lmaydi.

3) Funksiyaning grafik usulda berilishi. Ba'zan x va u o'zgaruvchilar orasidagi boglanish tekislikdagi chiziq (egri chiziq) yordamida amalga oshirish mumkin. Aytaylik uOx tekislikda biror L chiziq berilgan bo'lsin.



Ox o'qida shunday x nuqtalarni qaraylikki, bu nuqtalardan Ou o'qiga parallel to'rtburchaklar o'g'kazilganda, ular L chiziqni bitta nuqtada kessin, Ox o'qidagi bunday nuqtalar

to'plamini X orqali belgilaymiz. Endi bu X to'plamdan biror x nuqtani olib, bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar chiqaramiz, Perpendikulyarning L chiziq bilan kesishgan A nuqtasi ordinatasini u bilan belgilab, olingan x ga shu u ni mos qo'yamiz. Rav shanki, bunday mos lik L chiziq orqali bajariladi. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga ko'rsatilgan qoidaga ko'ra u mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Funksiyaning bunday berilishi funksiyaning grafik usulda berilishi deyiladi.

3. 1) x argumentning $y = f(x)$ funksiyasi haqiqiy qiymatlarga ega bo'ladigan barcha haqiqiy qiymatlar to'plami (son o'qining barcha nuqtalari) $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish (mavjud lik) sohasi deyiladi.

2) Funksiyaning o'zgarish sohasi deb u qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha haqiqiy sonlar to'plamiga aytiladi,

3) Funksiyaning eng ko'p uchrab turadigan aniqlanishi sohalari - interval va kesma (yopiq interval) dir.

$a < x < v$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to'plami interval deb ataladi, u qisqacha (a, v) simvol bilan belgilanadi, a va v nuqtalar intervalga kirmaydi.

$a \leq x \leq v$ tengsiz liklarni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to'plami kesma (yopiq interval) deb ataladi, u qisqacha $[a, v]$ simvol bilan belgilanadi, a va v nuqtalar kesmaga kiradi.

$a \leq x < v$ va $a < x \leq v$ tengsiz liklarni qanoatlantiruvchi barcha haqiqiy sonlar to'plami yarim ochkq intervallar deyiladi va mos ravishda $[a, v)$ va $(a, v]$ simvollar bilan belgilanadi. $-\infty < x < a$, $-\infty < x < a$, $a > x < \infty$, $a < x < +\infty$, va $-\infty < x < +\infty$. tengsiz liklarning qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to'plamlari cheksiz intervallar deb ataladi va mos ravishda $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $(a, +\infty]$ va $(-\infty, +\infty)$ simvollar bilan belgilanadi.

4. Murakkab funksiya.

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin. Argument x ning X oraliqda olingan har bir qiymatida funksiyaning mos. qiymatini topib, bu funksiyaning qiymatlaridan U to'plamini tuzamiz.

Endi shu U to'plamda o'z navbatda $i = F(y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan x , ar bir x songa U to'plamda bitta u soni ($u = F(y)$) mos qo'yiladi.

Demak X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u soni mos qo'yiladi. Bu esa u ni x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lishini bildiradi va bunday belgilanadi:

$$i = F(y) = F(f(x))$$

Bunday funksiya murakkab funksiya deyiladi.

Masalan: 1) $u = \sqrt{x^2 - 1}$; 2) $i = \sin 2x$; 3) $u = \cos^2 x$; $n = \sqrt{x^2 - 1}$ funksiya $u = \sqrt{x}$, $u = x^2 - 1$ funksiyalar yordamida hosil bo'lgan, $u = x^2 - 1$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan.

Algebraik funksiyalar

Ratsional va irratsional funksiyalarning birlashmasi algebraik funksiyalar sinfini tashkil qiladi.

Misol:
$$f(x) = \sqrt{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 8x + 4}} + (\sqrt[5]{x} + 1)^2$$

Bu erda ildiz ostida uning arifmetik qiymati ko'zda tutiladi.

Transtsendent funksiyalar.

Algebraik bo'lmagan funksiyalar transtsendent funksiyalar deyiladi.

Sodda transtsendent funksiyalar:

a) ko'rsatkichli funksiyalar: $u = a^x$ (a - birga teng bo'lmagan musbat son)

b) logarifmik funksiya: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) v) trigonometrik funksiyalar.

$$y = \arcsin x, u = \arccos x, y = \arctg x, y = \operatorname{arccot} x.$$

Savollar.

1. Funksiyaga misollar keltiring va uning ta'rifini ayting.
2. Funksiyaning berilish usullarini gapirib bering va unga xos misollar keltiring.
3. Qanday funksiya chiziqli funksiya deyiladi. Misol keltiring.
4. $u = x^2$ funksiyaning xossalari ayting.
5. Sodda va murakkab funksiyalarning farqini aytib bering va ko'rsatib bering.

6. Kamayuvchi, o'suvchi, juft, toq funksiyalarni tushuntiring va ularga xos misollar keltiring.
7. Funksiyaning aniqlanish sohasini grafik va analitik usullarida ko'rsating.
8. Algebraik va transtsendent funksiyalarga misollar keltiring.

Misollar.

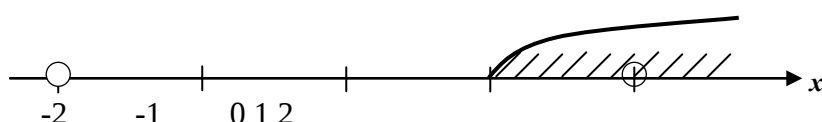
1 – misol. Funksiyaning aniqlanish sohasini, juft toqligini, davriyligini toping.

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$$

Yechish: 1) Aniqlanish sohasi, ya'ni x qabul qila oladigan barcha sonlarni topish uchun ildiz ostidagi ifoda nomanfiyligidan, 0 ga bo'lish mumkin emasligidan $x-1 \geq 0$, $x^2-4 \neq 0$ shartlar kelib chiqadi.

$$x \geq 1$$

$$x \neq 2, \quad x \neq -2 \quad \text{sonlar o'qida belgilab}$$



aniqlanish sohasi

$1 \leq x < 2$ va $2 < x < \infty$ ligi kelib chiqadi.

$$2) f(-x) = \frac{\sqrt{-x-1}}{(-x)^2-4} = \frac{\sqrt{-x-1}}{x^2-4} \quad \text{funksiya juft ham emas, toq ham emas.}$$

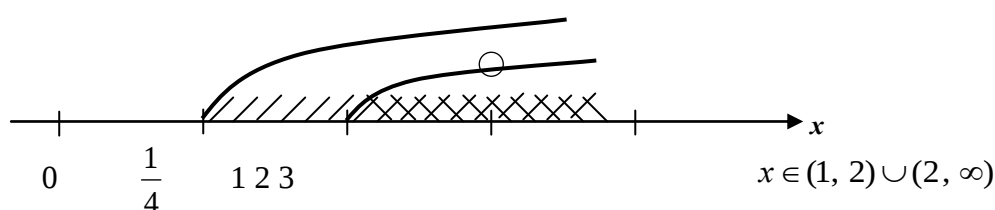
2 – misol. $y = \log_{x-1}(x - \frac{1}{4})$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Logarifm ta'rifiga ko'ra $\log_a b$ faqat $b > 0$, $a > 0$ va $a \neq 1$ da ma'noga ega. Demak,

$$\log_{x-1}(x - \frac{1}{4}) \Rightarrow x - \frac{1}{4} > 0 \quad x > \frac{1}{4}$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x - 1 \neq 1 \quad x \neq 2$$



3 – misol. $y = \sqrt{2 \sin x - \sqrt{3}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ildiz ostidagi ifoda nomanfiyligidan

$$2 \sin x - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n]$$

4 – misol. $y = \sin(3x+1)$ funksiyaning davrini toping.

Yechish. $y = \sin(ax + \epsilon)$ ning davri $aT = 2\pi$ teng likdan topamiz.

$$y = \sin(3x+1) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

I. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini, juft toqligini toping.

$$\begin{array}{ll}
1) y = \sqrt{1+x} - \sqrt{5-x} & 5) y = x^3 - 4x + 7 \\
2) y = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{1-x^2} & 6) y = \frac{2x-3}{x^2+1} \\
3) y = 2^{x+5} & 7) y = x^3 + 3x + 5 \\
4) y = \sqrt{4x-x^2} & 8) y = \frac{16}{x^2} - 1
\end{array}$$

II. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

$$\begin{array}{ll}
1) y = \log_3(2-x) & 2) y = \log_{x^2}(4-x) \\
3) y = \log_{x^3}(6-x) & 4) y = \log_x(3-x) \\
5) y = \log_x(6-x) & 6) y = \log_2 \log_3 \sqrt{4x-x^2-2} \\
7) y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4x-x^2-2} & 8) y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4x-4x^2} \\
9) y = \log_2 \log_3 \sqrt{4x-4x^2} & 10) y = \log_x x(x-4)
\end{array}$$

III. Trigonometrik funksiylarning aniqlanish sohasini toping.

$$\begin{array}{ll}
1) y = \sqrt{\operatorname{ctg} x - 1} & 2) y = \sqrt{2 \sin x - 1} \\
3) y = \sqrt{\operatorname{tg} x + 1} & 4) y = \frac{\arcsin 2x}{\ln(x+1)} \\
5) y = \frac{\arccos x}{\ln(x + \frac{1}{2})} \\
6) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2} & \text{funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli } x \text{ ning butun qiymatlari nechta.} \\
7) y = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x & \text{funksiya } x \text{ ning qanday qiymatlarida aniqlangan.} \\
8) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}} \cos x} & \text{funksiya } x(x \in [0; 2\pi]) \text{ ning qanday qiymatlarida aniqlangan?}
\end{array}$$

IV. 1) $y = 13 \sin^2 3x$ funksiyaning eng kichik musbat davrini toping.

2) $y = \cos(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2})$ funksiyaning eng kichik musbat davrini toping.

3) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ funksiyaning eng kichik davrini toping.

4) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3} - 2 \sin x + 3 \cos 2x$ funksiyaning eng kichik davrini toping.

5) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4} - 2 \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{2}{3}x$ funksiyaning eng kichik davrini toping.

6) $y = \cos(8x+1)$, $y = \sin(4x+3)$, $y = \operatorname{tg} 8x$ va $y = \operatorname{tg}(2x+4)$ funksiylar uchun eng kichik musbat davrini toping.

7) $y = \operatorname{tg} 3x$, $y = \operatorname{ctg} 6x$, $y = \cos(3x+1)$ va $y = \sin(6x+4)$ funksiylar uchun eng kichik musbat davrini toping.

Quyidagi funksiylarni aniqlanish sohasini toping:

$$1. f(x) = \frac{3}{x-2} \quad 2. f(x) = \frac{3x}{x-3,4} \quad 3. f(x) = \frac{4x-1}{3x-2}$$

$$4. f(x) = \frac{4x+13}{7x+14}$$

$$5. f(x) = \frac{4x}{(x-1)(x-2)}$$

$$6. f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$7. f(x) = \frac{4x^2-1}{x^2-7x+12}$$

$$8. f(x) = \frac{4x+1}{x^2-8x+15}$$

$$52. y = x$$

$$53. y = x^2$$

$$1. y = x^2 + 2$$

$$2. y = 3 - 4x^2$$

$$3. y = 3x - x^2$$

$$4. y = 3x^2 - 6x + 1$$

$$1. y = \frac{5}{x-2}$$

$$2. y = \frac{x}{x+1}$$

$$3. y = |x-4| - 2$$

Mavzu: Sodda elementar funksiyalar, ularning xossalari va grafigi

Reja:

1. Funksiya grafigining ta'ri.
2. Chiziqli va kvadratik funksiyalar.
3. Darajali funksiyalar.
4. Ko'rsatkichli funksiyalar.
5. Logarifmik funksiyalar.
6. Trigonometrik funksiyalar.
7. Teskari trigonometrik funksiyalar.

Sodda funksiyalar bizga maktabdan ma'lumdir. Bular: chiziqli va kvadratik funksiyalar, darajali funkdiyalar, ko'rsatkichli funksiyalar, logarifmik funksiyalar, trigonometrik funksiyalar, teskari trigonometrik funksiyalar.

Funksiyaning grafik tasviri nafaqat funksiya boglanishini ayoniy tasavvur qilishga, balki funksiyaning xossalari o'rganishni osonlantirishga imkon beradi. Shuning uchun funksiya formula bilan berilgan bo'lsa ham, ko'pincha koordinata tekisligidagi funksiyaning grafigiga murojaat qilinadi.

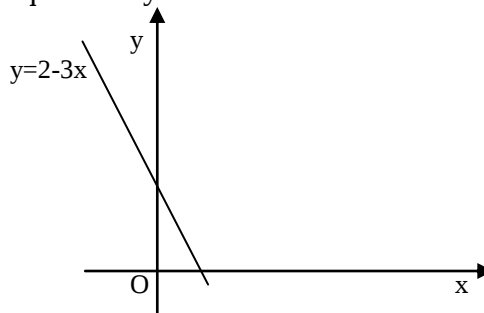
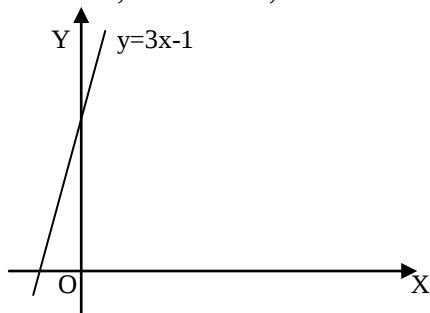
Ta'rif. X to'plamda berilgan f funksiyaning grafigi deb X to'plamdan olingan barcha x lar uchun koordinata tekisligining x va f(x) koordinatalariga ega nuqtalari to'plamiga aytiladi. Chiziqli va kvadratik funksiyalar.

$$u = ax + v \quad u = ax^2 + bx + s$$

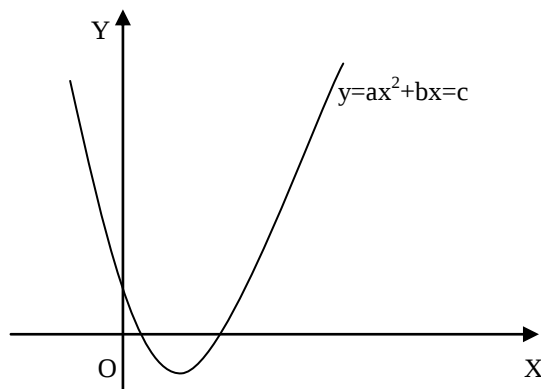
ko'rinishidagi funksiyalar mos ravishda chiziqli va kvadratik funksiyalar deb ataladi, bunda a, v, s - o'zgarmas haqiqiy sonlar.

$u = ax + v$ chiziqli funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Bu funksiya $a > 0$ da o'suvchi, $a < 0$ bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'ladi. Uning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni tasvirlaydi. Shuning uchun ham $u = ax + v$ funksiyaning chiziqli funksiya deb ataladi.

Masalan, $u = 3x + 1$, $u = 2 - 3x$ funksiyalar chiziqli funksiyalardir.



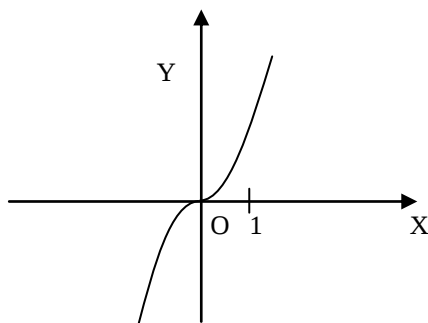
$u=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiya $(-\infty, +\infty)$, da aniqlangan. Bu funksiya $x > -\frac{b}{2a}$ ($a \neq 0$) tengsiz likni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida o'suvchi, $x < -\frac{b}{2a}$ ($a \neq 0$) tengsiz likni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida kamayuvchi bo'ladi. Kvadratik funksiyaning (kvadratik uchhadning) grafigi tekis likda parabolani ifodalaydi. Parabolaning holati a koeffitsent hamda diskriminant $d = b^2 - 4ac$ ning ishorasiga bog'liq bo'ladi.



2. Darajali funksiyalar.

Ushbu $u = x^n$ ($x > 0$) ko'rinishidagi funksiya darajali funksiya deb ataladi.

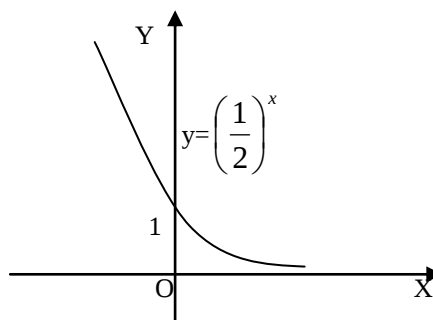
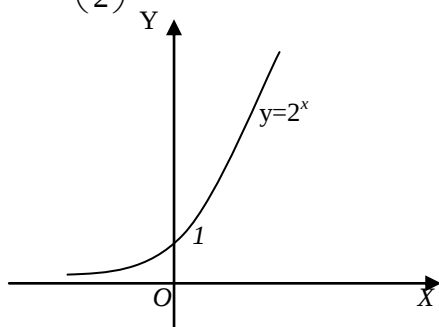
Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi n soniga bog'liq bo'ladi. Darajali funksiyaning grafigi $n > 0$ bo'lganda tekis likning (0:0) va (1:1) nuqtalaridan o'tadi, Masalan $u = x^3$ funksiyaning grafigi



3. Ko'rsatkichli funksiyalar. Ushbu $u=a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ko'rinishidagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deb ataladi.

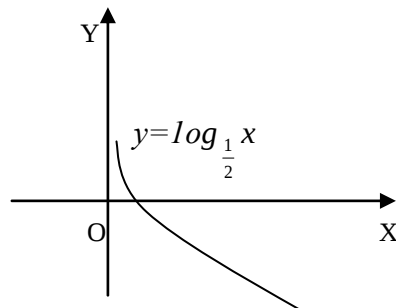
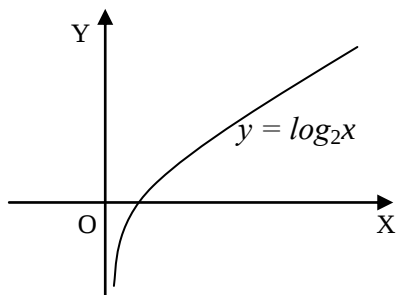
Qo'rsatkichli funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu funksiya $0 < a < 1$ bo'lganda kamayuvchi, $a > 1$ bo'lganda, esa o'suvchi funksiya bo'ladi. Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi tekisligining Ox o'qidan yuqori tomonda joylashgan.

$y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiyalarning grafiklarini tasvirlaymiz.



4. Logarifmik funksiya

Ushbu $u = \text{Log}_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ko'rinishidagi funksiya logarifmik funksiya deb ataladi. Logarifmik funksiya $(0; \infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu funksiya $0 < a < 1$ bo'lganda kamayuvchi, $a > 1$ bo'lganda esa o'suvchi bo'ladi. Logarifmik funksiyaning grafiga tekis likda Ou o'qiniy o'ng tomonida joylashgan. $u = \log_2 x$ va $u = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyaning grafiklari quyidagicha tasvirlanadi.

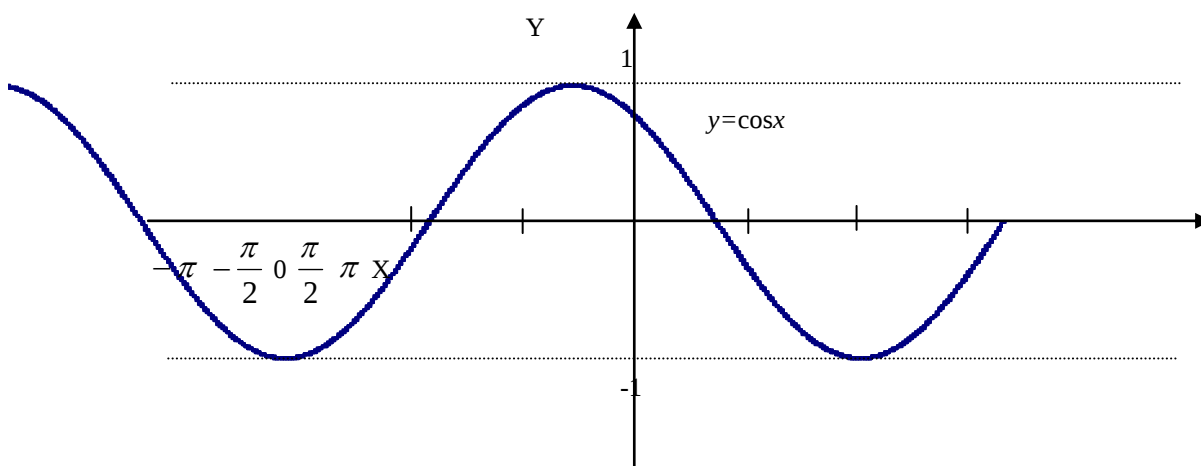
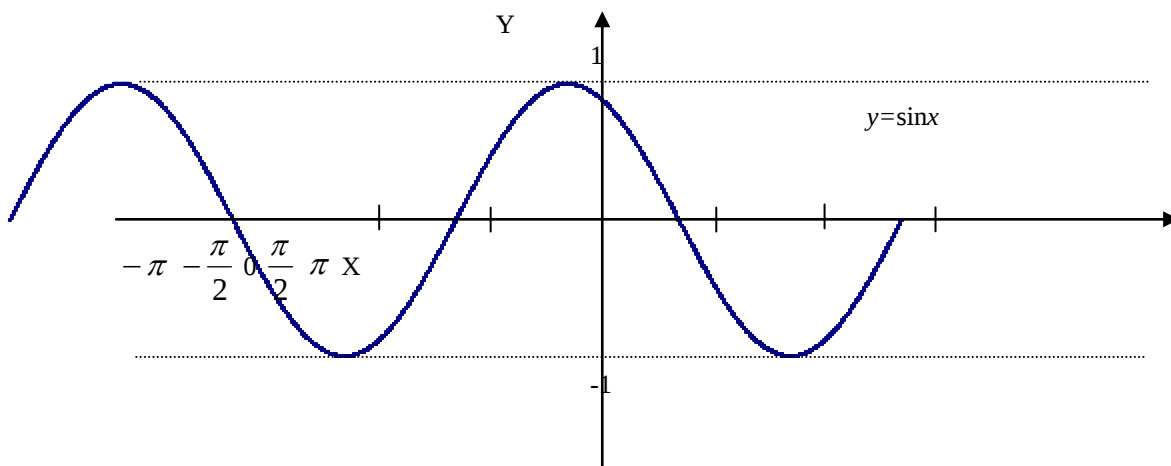


5. Trigonometrik funksiyalar.

Ushbu $u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \text{tg} x$, $u = \text{ctg} x$ funksiyalar trigonometrik funksiyalar deb ataladi.

$u = \sin x$, $u = \cos x$ funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan.

$u = \sin x$ toq funksiya. Demak, uning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

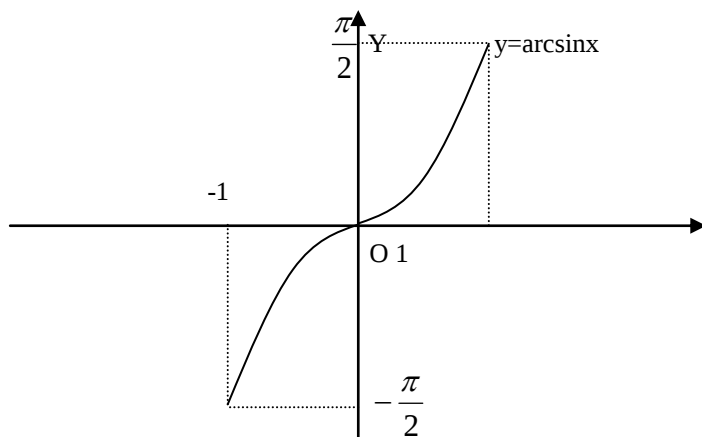


6. Teskari trigonometrik funksiyalar.

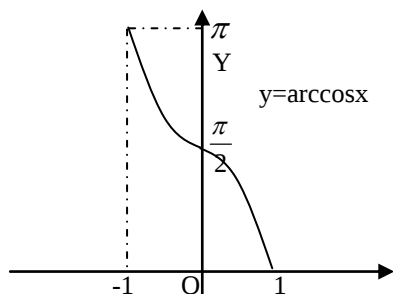
Ushbu $u = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $u = \text{arcctg} x$ funksiyalar teskari trigonometrik

funksiyalar deb ataladi.

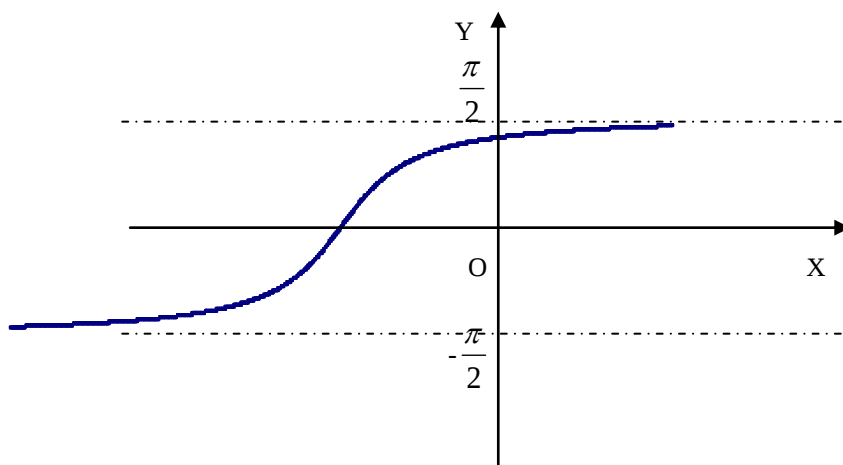
$y = \arcsin x$ funksiya $y = \sin x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, $X = [-1; 1]$ segmentda aniqlangan, $y = \arcsin x$ funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi quyidagicha tasvirlanadi.



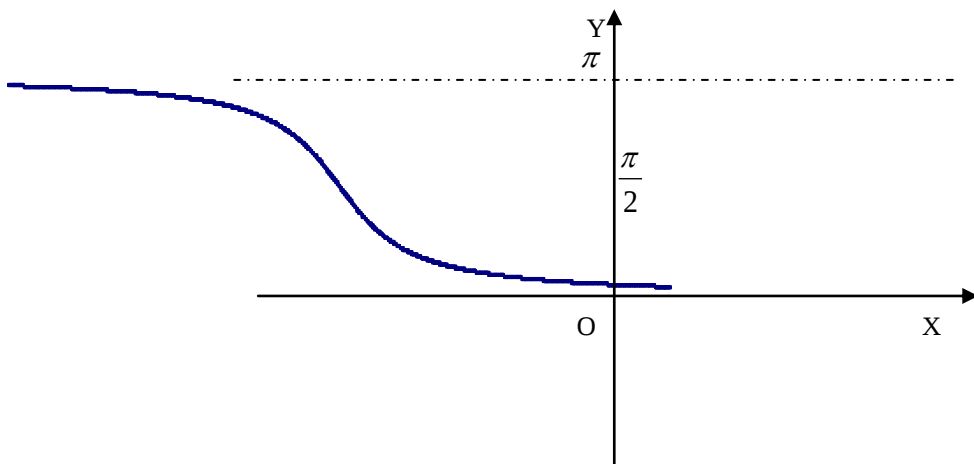
$y = \arccos x$, funksiya $y = \cos x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, $X = [-1; 1]$ segmentda aniqlangan. $y = \arccos x$ funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam $Y = [0; \pi]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi:



$u = \arctg x$ funksiya $u = \tg x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan. $y = \arctg x$ funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi



$u = \arccotgx$ funksiya $y = ctgx$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan $y = \arccotgx$ x funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam $Y = [0; \pi]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi:



Savollar

1. Darajali $u = x^n$ (n —natural son) funksiya va uning xossalari.
2. Darajali $u = x^n$ (n —manfiy butun son) funksiya va uning xossalari.
3. Darajali $u = x^n$ (a —kasr son) funksiya va uning xossalari.
4. Ko'rsatkichli funksiya va uning asosiy xossalari.
5. Turli asosli logarifmlar orasida qanday bog'lanish mavjud.
6. Logarifmik funksiya va uning xossalari.
7. Trigonometrik funksiyalar. Ularning asosiy xossalari nimadan iborat.
8. Teskari trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalari, grafigi.

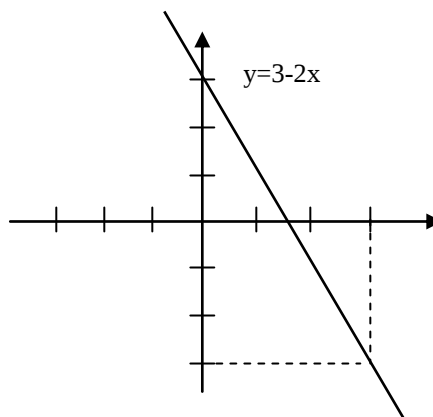
Misollar.

1 – misol. $y = 3 - 2x$ funksiya grafigini yasang.

Yechish: To'g'ri chiziq grafigini yasash uchun 2 ta nuqtani koordinatalarini bilish kifoya.

$$x=0 \text{ da } u=3 \text{ A } (0; 3)$$

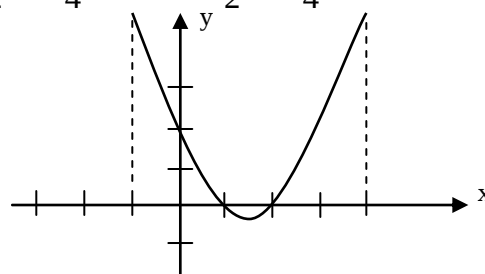
$$x=3 \text{ da } u=-2 \text{ A } (3; -2)$$



2 – misol. $y = x^2 - 3x + 2$ funksiya grafigini yasang.

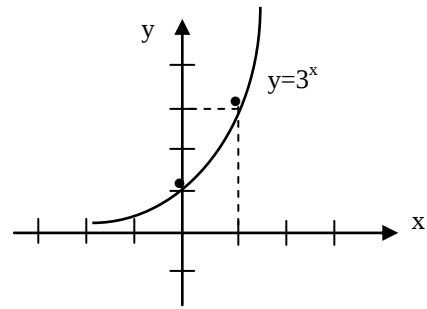
$$\text{Yechish: } y = x^2 - 3x + 2 = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} & x \text{ o'qdan siljiganli kni} \\ -\frac{1}{4} & y \text{ o'qdan siljiganli kni bildiradi} \end{cases}$$



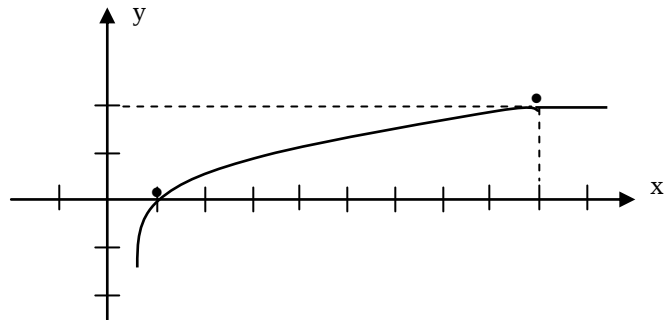
2 – misol. $y = 3^x$ funksiyaning grafigini yasang.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-1	-2
y	1	3	9	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



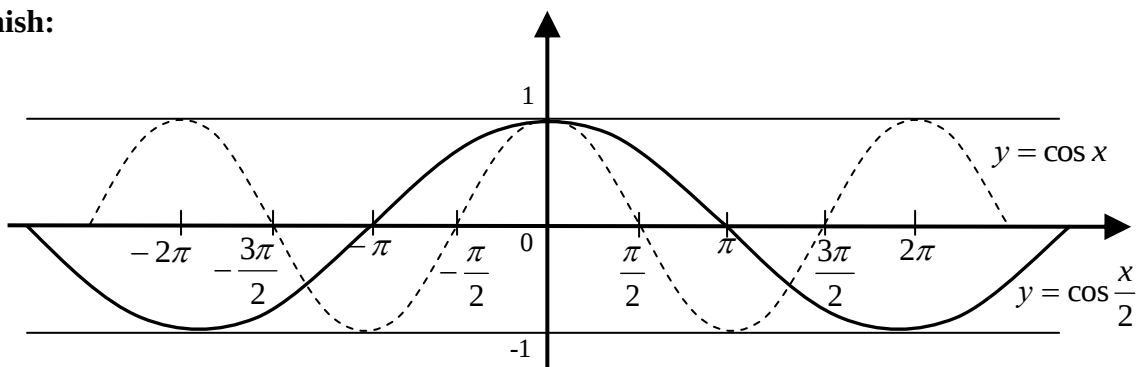
4 – misol. $y = \log_3 x$

x	1	9	27	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	0	2	3	-1	-2



5 – misol. $y = \cos \frac{x}{2}$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish:



6 – misol. $y = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{4}\pi - 3x)$ funksiya grafigini yasang.

Yechish: Berilgan funksiya grafigini quyidagicha yozib olamiz.

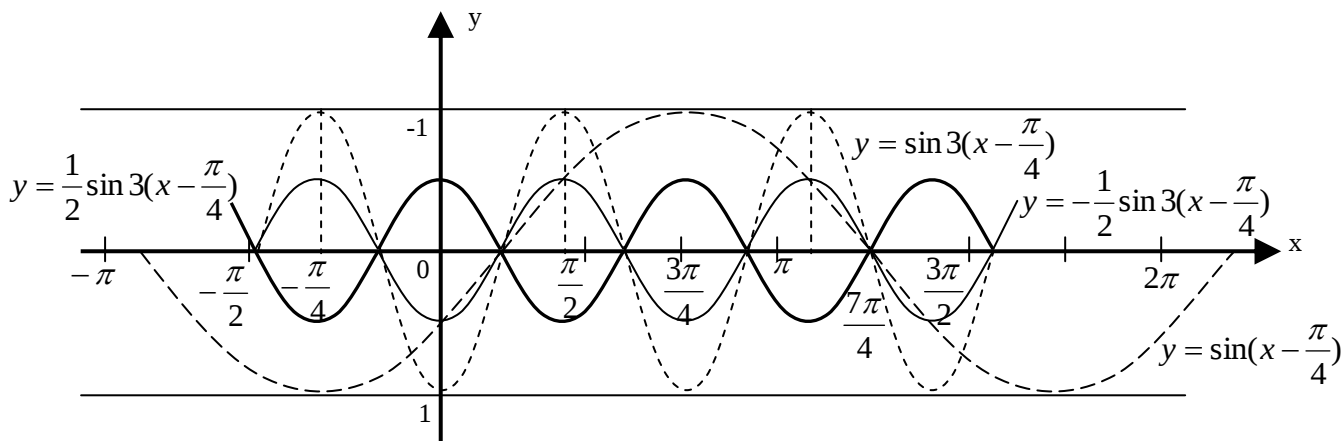
$$y = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{4}\pi - 3x) = -\frac{1}{2} \sin[3(x - \frac{\pi}{4})] \text{ grafikni yasash uchun,}$$

1) $y = \sin x$ funksiya grafigini $\frac{\pi}{4}$ ga o`ngga siljitamiz;

2) Ox o`qi bo`yicha 3 marta siqamiz, ya`ni $y = \sin 3(x - \frac{\pi}{4})$ funksiya grafigini yasaymiz.

3) Oy o`qi bo`yicha 2 marta siqamiz, ya`ni $y = \frac{1}{2} \sin 3(x - \frac{\pi}{4})$ funksiya grafigini yasaymiz.

4) $y = \frac{1}{2} \sin 3(x - \frac{\pi}{4})$ funksiya grafigini Ox o`qqa nisbatan simmetrik akslantiramiz.



Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Berilgan funksiyalarning grafigini yasang:

1) $y = 3x - 5$ 9) $y = 2^{x+1}$

2) $y = 2 - 3x$ 10) $y = 3^{x-1}$

3) $y = \frac{3}{4} - 2x$ 11) $y = (\frac{1}{2})^{x+1}$

4) $y = 2x^2 - 6x + 4$ 12) $y = 3\sin x$

5) $y = -x^2 + 3x - 1$ 13) $y = -3\cos x$

6) $y = x^2 + 5x + 4$ 14) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x$

7) $y = \log_5(x-1)$ 15) $y = 3\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$

8) $y = \log_2(x+2)$ 16) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{3})$

Adabiyotlar.

1. N. Ya. Vilenkin "Matematika" Moskva, 1977.
2. I. P. Stoylova, A. M. Pishkalo "Boshlang`ich matematika kursi asoslari" Toshkent, 1991 yil.
3. R. Ibrohimov "Matematikadan masalalar to`plami" Toshkent, 1995 yil.
4. A. M. Pishkalo "Sbornik zadach po matematike" Moskva, 1979
5. N. Ya. Vilenkin "Zadachnik – praktikum po matematike" Moskva, 1977
6. A. M. Pishkalo i drugiye "Teoriticheskiye osnovi nachalnogo kursa matematiki" M. 1974
7. A. G. Hikmatov, T. Turdiyev "Matematik analiz" Toshkent, O`qituvchi. 1990 yil
8. A. G. Hikmatov "Matematik analizdam mashqlar to`plami" Toshkent, O`qituvchi. 1990 yil
9. A. Hudoyberganov Matematika. Toshkent O`qituvchi. 1980.

