

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА КАФЕДРАСИ

Икрамов Р.Ғ., Абдуллаев Ҳ.О., Ёқуббаев А.А.

**МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА КУРСИДА СТАТИСТИК
УСУЛДАН ФОЙДАЛАНИШ**

(амалий машгулотлар учун)

НАМАНГАН-2010

Такризчи п.ф.н., проф. в.б. Н. Садриддинов

Ушбу услубий қўлланма молекуляр физика курсига оид бўлиб, университетларнинг физика, физика ва астрономия йўналишлари бўйича таълим олаётган талабалари учун тузилган ўқув дастурларига мувофиқ тайёрланган. Маълумки, ҳозирги вақтда талабаларнинг мустақил билим олишларига катта эътибор берилмоқда. Ушбу қўлланма ҳам ана шунга қаратилган.

Қўлланма талабаларнинг назарий билимларни мустақил эгаллаш кўникмаларини ривожлантиришга хизмат қилади. Бу услубий қўлланмада молекуляр физика курсида статистик усулнинг қўлланилиши кераклиги асосланган, унинг аҳамияти ва натижалари кўрсатилган, ўртача квадратик тезлик, температура каби катталикларнинг статистик талқини берилган. услубий қўлланма содда, равоён ёзилган.

Услубий қўлланма Наманган давлат университетининг физика -техника факультети илмий кенгашининг «13» май 2010 йилнинг 8- сонли мажлисида муҳокама қилинди, мақулланди ва чоп этишга тавсия қилинди.

Услубий қўлланма Наманган давлат университетининг физика -техника факультети физика кафедрасини «30» апрель 2010 йилнинг 17 - сон йиғилишида муҳокама қилинди ва чоп этишга тавсия қилинган.

Услубий қўлланма Наманган давлат университети ўқув-услубий кенгашининг «26» май 2010 йилдаги 9-сонли йиғилишида муҳокама қилиб, чоп этишга тавсия қилинган.

Наманган давлат университети 2010 йил

Кириш

Молекуляр физиканинг таълимий масаласи иссиқлик ҳаракатининг механик ҳаракатдан фарқини тушунтириш ҳисобланади. Бу ерда Ньютон қонунларини қўллашда чеклов борлигини аниқлаш ва иссиқлик ҳодисаларини ўрганишнинг иккита асосий – молекуляр кинетик ва термодинамик усуллари билан ўқувчиларни таништириш лозим.

Молекуляр физикани ўқитишни бошлашдаёқ ўқувчилар қуйидаги ҳолатларни аниқ билиб, ўзлаштириб олишлари зарур:

1. Ньютон қонунлари асос ҳисобланган классик механика катта фазовий жисмларнинг, алоҳида макрожисмлар ва яккаланган зарраларнинг ҳаракатини тўла тавсифлаб бера олади. Классик механика жисмларнинг массалари, бошланғич ҳолатлари, ўзаро таъсирлашув кучлари маълум бўлса, жисмлар ёки уларнинг қисмлари бир-бирига нисбатан қандай ҳаракатланишини ҳисоблашга имкон беради. Аммо, классик механика деформация жараёнида эластик кучларининг юзага келишини, модданинг бир агрегат ҳолатдан бошқасига ўтишини, ҳарорат ўзгарганда уларнинг тузилиши ва хоссаларини ўзгаришини тушунтириб бера олмайди.

2. Иссиқлик ҳодисалари Ньютон механикаси қонунларидан фарқ қилувчи қонунларга бўйсинади.

3. Иссиқлик ҳодисаларини ўрганиш учун иккита – термодинамик ва молекуляр кинетик усулларлардан фойдаланилади. Термодинамик усул энергиянинг сақланиш ва ўзаро айланиши қонунларига асосланган.

4. Термодинамика иссиқлик ҳодисаларининг назарияси бўлиб, у моддаларнинг атом, молекуляр тузилишини эътиборга олмайди. Термодинамиканинг ҳамма қонунлари кўп миқдордаги атомлар ва молекулалардан ташкил топган жисмларга, яъни макрожисмларга тааллуқли.

Термодинамика иссиқлик ҳодисаларининг физикавий моҳиятини очиқ бермайди, шунинг учун уни тавсифий, ёки феномонологик назария деб аталади.

5. Иссиқлик ҳодисаларини ўрганишнинг иккинчи усули модда тузилишининг молекуляр-кинетик назариясига ёки статистик механикага асосланган. Бу назарияда макрожисмларда содир бўладиган ҳамма жараёнларни модда Ньютон механикаси қонунларига бўйсинувчи заррачалардан ташкил топган деган фикрдан келиб чиқиб тушунтирилади.

6. Замонавий фан ва техникада иссиқлик ҳодисаларини ўрганишда ҳар икки усулдан фойдаланилади.

Ушбу ўқув-услубий қўланмада юқоридаги иккинчи ҳолат – иссиқлик ҳодисаларининг физикавий моҳияти Ньютон механикаси қонунларидан фарқ қилувчи қонунлар, яъни статистик қонунлар билан тушунтирилиши кўрсатилган.

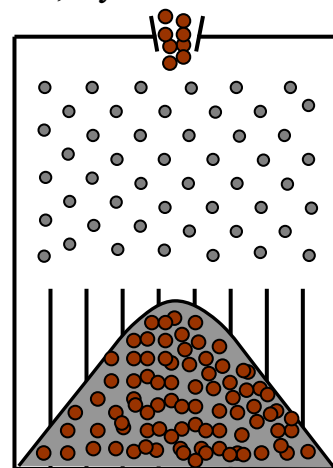
Модданинг тузилишини аниқлаш физиканинг асосий масалаларидан ҳисобланади. Бу масала молекуляр физика бўлимида ўрганилади. Бошданок шу нарсани ўқувчиларга тушунтириш зарурки, бу масалани механика методлари билан ҳал этиб бўлмайди. Биринчидан, молекулаларнинг

бошланғич ҳолатлари ва уларга таъсир этувчи кучлар маълум эмас. Шунинг учун молекулаларнинг ҳаракат тенгламаларини ёза олмаймиз. Иккинчидан, нормал шароитларда бир куб сантиметрдаги газ молекулаларининг сонига тенг тенгламаларни ёзиш учун Ернинг ёшидан ҳам катта бўлган вақт кетган бўлар эди. Энг муҳим аҳамиятlisi шуки, катта миқдордаги молекулалар тўплами эга бўлган хоссаларга (босим, температура) алоҳида, якка молекулалар эга эмас. Ана шу жиҳатлар молекулалар системасининг хоссаларини миқдорий тавсифлаш учун механика методларидан фарқ қилувчи методлар топиш зарурлигини кўрсатади.

Бундай методлар яратилган. Кўп сонли заррачалар системасининг ҳаракатини тавсифлаш учун математик эҳтимоллар назариясидан фойдаланилади. Эҳтимоллар назариясидан фойдаланилувчи тавсифлаш методини статистик метод деб аталган. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари бўлиб, тасодифий ҳодиса (катталикнинг сон қийматини тасодифийлиги), ҳодисанинг эҳтимоллиги, статистик тақсимот, тасодифий катталикнинг ўртача қийматлари ҳисобланади.

Тасодифий ҳодиса деб тажрибада содир бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Танга ташланганда у ёки бу томони билан тушиши тасодифий ҳодиса ҳисобланади. Газдаги бирор молекулаларнинг тезлиги ҳақида молекулаларнинг хаотик ҳаракатланишини эътиборга олиб гапирсак, бу тасодифий ҳодиса ҳисобланади: Молекула тезлигининг йўналишини ва сон қийматини олдиндан айтиб бўлмайди. Ҳодисанинг эҳтимоллиги тушунчаси (яъни тасодифий катталикнинг у ёки бу қиймати) ни жуда осон қабул қилиш мумкин: Хаёт тажрибаси ҳодисаларнинг, инсон фаолиятининг натижалари турлича бўлиши мумкинлигини кўрсатади.



1-расм

Статистик тақсимот тушунчасини киритишга алоҳида эътибор бериш зарур. Гальтон доскаси билан ўтказиладиган тажриба тасодифий катталикларнинг нормаль бир ўлчовли тақсимоти ҳақида тасаввур беришга имкон беради. Гальтон доскаси майда жисмлар (масалан: кум, мош, гурунч) координаталарининг бирор ўртача қийматидан тасодифий чекланишларининг тақсимотини кўрсатиб беради (1-расм).

Бизга маълумки, молекуляр–кинетик назария (МКН) молекулалар ҳаракатининг назариясидир. Ҳамма жисмларнинг, шу жумладан молекулаларнинг ҳаракатини ҳам механика қонунларидан фойдаланиб ўрганилади. Кўп сондаги молекулалар системаси, масалан, газ шундай хоссаларга эгаки (босим, температура), уларни бевосита механик қонунлардан аниқлаш мумкин эмас, бу газга механиканинг ҳаракат қонунларини қўллашда унинг чекланганлигини кўрсатади. Бир сўз билан айтганда газ ҳаракатини ўрганишда механика методларининг ўзи етарли эмас.

Молекулаларнинг ҳаракат қонунлари статистик хоссага эга. Ушбу иш молекулалар ва атомларнинг ҳаракат қонунлари макројисмларнинг ҳаракат қонунларидан фарқ қилишини ўқувчиларга кўрсатиб, тушунтириб беришга қаратилган. Бунда биз статистик методдан фойдаланиб газларнинг хоссаларини баён этишдан олдин, эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари ҳақида маълумотлар бериб ўтамиз.

Эҳтимоллик ҳақида тушунча

Эҳтимоллик терминини биз, «ишончлилиқ», «аниқлиқ» терминларидан фарқли равишда, фақат тасодифий воқеалар ҳақида гап кетган вақтда, яъни бирор сабабга кўра амалга ошиш шароитлари номаълум бўлган ва шунинг учун ишонч билан аввалдан айтиш мумкин бўлмаган воқеалар ҳақида гап кетганида фойдаланамиз.

Масалан, трамвайда билет олишимиздан аввал биз унинг тоқ сонли (номерли) ёки жуфт сонли бўлишини айта олмаймиз. Шунинг учун жуфт сонли билет сотиб олиш воқеасини тасодифий воқеа дейиш мумкин. Масалан, биз 10 та билет сотиб олсак (биратўла бир сотиб олишда эмас, албатта), улар орасида учта, олтита, саккизтаси жуфт сонли бўлиши мумкин. Бироқ уларнинг ичида битта ҳам жуфт сонли билет бўлмаслиги, ёки аксинча, уларнинг ўнталаси ҳам жуфт сонли бўлиши мумкин.

Бироқ биринчи қарашда тамомила ихтиёрий бўлиб кўринган воқеада маълум қонуният бор. Бу қонуният шундан иборатки, агар тажриба (билет сотиб олиш) етарлича кўп марта такрорланса, тахминан ярми ҳолида жуфт сонли билет сотиб олинishi мумкин. Бундай «тажриба»лар сони қанча кўп бўлса, жуфт сонли билетлар улуши яримга шунча яқин бўлади. Бундай ҳолда жуфт сонли билет сотиб олиш эҳтимоллиги $\frac{1}{2}$ га тенг деб гапирилади.

Худди шундай тангани кўплаб марта ташлаб, унинг тахминан ярмига яқин ҳолларда герб томони билан тушишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Танга қанча кўп ташланса, шундай бўлиши эҳтимоли шунча кўп бўлади.

Бу ва шунга ўхшаш тажрибалар асосида эҳтимолликнинг шундай таърифини бериш мумкин: *воқеанинг эҳтимоллиги деб, воқеа амалга ошадиган тажрибалар сонининг тажрибаларнинг умумий сонига нисбатининг тажрибалар сони чексиз ортиб боргандаги лимитига айтилади.*

Агар n та тажрибадан (ёки кузатишдан) n' тасида бизни қизиқтирган ҳодиса амалга ошса, у ҳолда бу ҳодисанинг w эҳтимоллиги шундай формула билан ифодаланади:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}. \quad (1)$$

Биз айтиб ўтган билет сотиб олиш мисолида жуфт сонли (номерли) билет олиш эҳтимоллиги $\frac{1}{2}$ га тенг. Тоқ сонли билет олиш эҳтимоллиги ҳам шундай. Бу икки эҳтимолликнинг йиғиндиси бирга тенг. Бу йиғинди бизга

сотиб олинган билетнинг тоқ ёки жуфт сонли бўлиш «воқеа»сининг эҳтимоллигини билдиради. Бироқ бундай воқеанинг бўлиши муқаррар, демак, бирга тенг бўлган эҳтимоллик бу ишончлиликдир. Аксинча, бирор воқеанинг бўлиши мумкин бўлмаса (масалан, мутлақо билетнинг номери бўлмаса), бу воқеанинг эҳтимоллиги нолга тенг бўлади.

Билетлар (шунингдек, танга ташлаш мисолида ҳам) мисолида «тажриба»нинг (билет сотиб олишнинг) натижаси икки натижага олиб келиши мумкин: билетнинг сони тоқ бўлиши ёки жуфт бўлиши мумкин ва ҳар иккала ҳолнинг бўлиши тенг эҳтимоллидир. Бироқ ҳамма вақт ҳам шундай бўлавермайди. Масалан, нишонга ўқ отишда икки натижа — мўлжалга тегиши ёки бекор кетиши мумкин, бироқ бу икки натижанинг эҳтимоллиги $\frac{1}{2}$ га тенг деб бўлмайди, чунки ўқнинг нишонга тегиш ва бекорга кетиши отишнинг тенг эҳтимолли натижалари эмас. Агар жуда кўп ўқ отилган бўлса, нишонга тегишнинг умумий отишлар сонига нисбати яримга тенг бўлиши маҳол: яхши милтиқ билан таъминланган мерган отувчида бу нисбат бирга якин, мерган бўлмаган отувчида эса нолга якин бўлиши мумкин. Гарчи отишнинг ҳар бир натижага олиб келиш эҳтимоллиги $\frac{1}{2}$ га тенг бўлмаса-да, уларнинг йиғиндиси (айни бир отувчи учун) бу ҳолда ҳам бирга тенг: отишнинг бирор натижага олиб келиши — нишонга тегиши ёки бекор кетиши ҳақида тўла аниқлик билан айтиш мумкин!

Эҳтимолликларни қўшиш теоремаси

Эҳтимоллик назариясининг муҳим қоидаларидан бирини таърифлашда бундан ташқари эҳтимоллик катталигининг яна бир таърифини беришга имкон берадиган шундай бир мисолни кўрайлик. Бу таъриф келгусида бизга керак бўлади.

Яшикда ўлчамлари ва оғирлиги жиҳатидан тамомила бир хил бўлган 20 та силлиқ шар солинган ва улардан 5 таси оқ рангга, қолганлари эса қора рангга бўялган бўлсин. Агар энди яшикдан бир шарни олсак, шарлар рангидан ташқари ҳамма жиҳатлари билан бирдай бўлгани учун ундан бир шарни олиш эҳтимоллиги ихтиёрий бошқа бирини олиш эҳтимоллигига тенг бўлади. Қандайдир белги қўйиш учун олмоқчи бўлган ҳар бир шар учун яшикдан олиниш эҳтимоллиги $\frac{1}{20}$ га тенг бўлиши равшан.

Энди яшикдан айнан оқ шар олиниш эҳтимоллиги қандай бўлишини кўрайлик. Ҳар бир шарнинг (оқми ёки қорами) яшикдан олиниш эҳтимоллиги $\frac{1}{20}$ га тенг бўлгани, оқ шарларнинг ҳаммаси эса бешта (бизга улардан қайси бири олиниши бари бир) бўлгани учун изланаётган эҳтимоллик барча оқ шарлар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:

$$w = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20}. \quad (2)$$

Бу натижа эҳтимоллик назариясининг энг муҳим қоидаларидан бири — эҳтимолликларни қўшиш теоремасини ифодалайди. Бу теоремага кўра, *агар w_1, w_2, w_3 ва x, k — бир-бирини истисно қилувчи бир неча воқеаларнинг эҳтимоллиги бўлса, бу воқеалардан бирортасининг амалга ошириш эҳтимоллиги бу барча воқеаларнинг эҳтимолликлари йиғиндисига тенг бўлади.*

Демак, бир неча воқеалар эҳтимолликларининг йиғиндиси бизга бир воқеанинг, ёки бошқа воқеанинг, ёки учинчи воқеанинг амалга ошириш эҳтимоллигини берар экан. Бунда бу воқеалар ёки улардан лоақал икkitаси айти бир вақтда амалга оша олмайди деб фараз қилинади. Масалан, бизнинг мисолимизда $\frac{5}{20}$ — бу яшиқдаги оқ шарлардан биттасининг олиниш эҳтимоллиги, шарларни олиш бир марта бажариладиган бўлгани учун қандайдир бир оқ шар олинган экан, бошқа ҳеч қандайи олиниши мумкин эмас.

Бу мисол эҳтимолликнинг олдингисидан фарқ қиладиган янги таърифни беришга имкон беради. Биз оқ шарни олиш эҳтимоллиги $\frac{5}{20}$ бўлишини аниқладик. Бироқ 20 сони шарни олиш амали бажарилишининг мумкин бўлган барча сони, 5 сони эса — мумкин бўлган барча воқеалардан (ҳаммаси 20) айти бизни қизиқтирган воқеа — оқ шарнинг чиқишига молик бўлган сон. Бу эса айти шу воқеанинг эҳтимоллигини *барча ҳоллар тенг имконли бўлганда воқеанинг амалга ошириш мумкин бўлган барча ҳоллар сонининг мумкин бўлган барча ҳоллар умумий сонига нисбати сифатида таърифлашга имкон беради.*

Эҳтимолликнинг бундай таърифни Лаплас берган. Бу таъриф аввалги таърифга зид эмас. Эҳтимолликнинг бу таърифи учун барча ҳолларнинг тенг имконли бўлиши, тенг эҳтимолликда бўлиши аҳамиятга эгадир. Бизнинг шарларга оид мисолимизда худди шундайдир.

Эҳтимоллик назариясининг физикада қўлланишларида ҳам одатда тенг эҳтимолликли воқеалар билан иш кўришга тўғри келади.

Шу ерда бироз аввалроқ Больцман қонуни формуласи (39) га эътибор қаратамиз. (Бу қонунни куйида кўриб чиқамиз). Эҳтимоллик тўғрисида юқорида айтилганлардан бу формуладаги n/n_0 катталиқ эҳтимоллик маъносига эга экани келиб чиқади. Ахир n_0 молекуланинг исталган бири U энергияга эга бўлиши мумкин-ку! Демак, n_0 мумкин бўлган ҳолларнинг умумий сони. Ҳақиқатда эса n молекула U энергияга эга бўлади. Бинобарин, n — биз аввал қулайлик туғдирувчи ҳоллар сони деб атаган сон. Шунинг учун U энергияга эга бўлган молекулалар улуши (тўла асос билан) деб аталган n/n_0 нисбат айти вақтда n_0 молекулалардан исталганининг бундай энергияга эга бўлиш эҳтимоллигидир.

Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси

Энди эҳтимоллик назариясининг бир муҳим қоидасини — эҳтимолликларни кўпайтиришни баён қилиш қолди. Бу қоида икки ёки ундан

кўп биргаликда рўй бериши мумкин бўлган бир-бири билан боғлиқ бўлмаган воқеалардан иборат *мураккаб* воқеанинг эҳтимоллигини аниқлашга тегишлидир. Икки ёки undan ортиқ воқеалардан бирортасининг эҳтимоллиги бошқасининг бўлиш-бўлмаслигига боғлиқ бўлмаган воқеалар мустақил (эркли) воқеалар деб аталади.

Дастлабки билетлар ёки мерганга оид мисолларимизга қайтиб, масалан шундай масала кўйишимиз мумкин: мерганнинг отиш жойига кетатуриб трамвайда жуфт сонли билет олиши ва undan сўнг биринчи отган ўқининг муваффақиятли нишонга тегиш эҳтимоллиги қандай бўлади? Бу икки ҳодисанинг мустақил (эркли) ҳодисалар эканлиги равшан.

Айтайлик, бизнинг мерган учун нишонга уриш w_1 эҳтимоллиги 0,8 га тенг, яъни ўқ отиш жойига ўртача 10 марта борганида саккизта ҳолида нишонга биринчи ўқ билан уради. Бироқ бу ҳолларнинг фақат ярмидагина айна вақтда жуфт сонли билет сотиб олади, чунки жуфт сонли билет сотиб олиш w_2 эҳтимоллиги $\frac{1}{2}$ га тенг. Бинобарин, жуфт сонли билет олиш билан нишонга муваффақиятли уриш воқеаларидан иборат *мураккаб* ҳодисанинг изланаётган w_{12} эҳтимоллиги — бу воқеалардан ҳар бирининг эҳтимолликлари кўпайтмасига тенг:

$$w_{12} = w_1 \cdot w_2 = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4. \quad (3)$$

Икки ёки undan ортиқ мустақил (эркли) ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги улардан ҳар бирининг алоҳида эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг.

Эҳтимоллик ва физикавий катталикларнинг ўртача қиймати

Молекулаларнинг ҳаракатини характерловчи турли физикавий катталикларнинг ўртача қийматлари — ўртача тезлик, ўртача энергия ва шунга ўхшашлардан бир неча марта МКНнинг асосий тенгламасини

$$p = \frac{1}{3} m_0 n v^2 \quad (4)$$

келтириб чиқаришда фойдаланилади. Молекуляр системаларни бундай тавсиф қилиш йўлидан фойдаланишнинг сабаби шуки, бу системаларни ташкил қилган зарралар сони жуда кўп бўлгани учун бу зарраларнинг ҳар бирига тегишли бўлган катталикларни ўрганишнинг имконияти ҳам, зарурати ҳам йўқ. Катталикларнинг ўртача қийматларидан фойдаланиш бизнинг тамомила аниқ қонунлар, масалан, идеал газнинг ҳолат тенгламасини чиқариш учун ҳам халақит бермаслигини кўрсатиш мумкин

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (5)$$

Физикавий катталикларнинг ўртача қийматлари ҳам эҳтимоллик тушунчаси билан чамбарчас боғланганлигини кўриш қийин эмас.

Ҳар қандай молекуляр системанинг зарралари узлуксиз тартибсиз ҳаракатланиши туфайли етарлича катта вақт оралиғида бундай система кўп сонли молекуляр ўзаро таъсирлар натижасида бир-бирини *мураккаб* тарзда

алмаштирувчи ҳисобсиз ҳолатларни эгаллайди. Узоқ вақт ичида ҳар бир бундай ҳолатда бизнинг система бир марта эмас, кўплаб марта бўлади.

Айтайлик, системага ёки унинг ихтиёрий қисмига тегишли бирор a катталикни аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун система устида унинг турли ҳолатларида кўплаб кузатишлар (албатта, фикран) олиб боришимиз керак. Бундай кузатишлар сонини N орқали белгилаймиз. Бунда N кузатишлардан N_1 тасида бизни қизиқтирган катталикнинг a_1 қийматни олганини топамиз; N_2 кузатишлар эса a катталикнинг a_2 қийматини беради ва ҳоказо. a катталикнинг ўртача қиймати таърифга кўра қуйидагига тенг бўлади:

$$\bar{a} = \frac{N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 + \dots}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots} = \frac{\sum N_i a_i}{\sum N_i}. \quad (6)$$

Бунда $\sum N_i = N_1 + N_2 + N_3 + \dots$ йиғинди кузатишларнинг умумий сони N га тенг бўлгани учун, a нинг ўртача қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$\bar{a} = \frac{N_1}{N} a_1 + \frac{N_2}{N} a_2 + \dots = \sum \frac{N_i}{N} a_i. \quad (7)$$

Бироқ $\frac{N_1}{N}$, яъни a катталикнинг a_1 қиймат қабул қиладиган кузатишлар сонининг умумий кузатишлар сони N га нисбати бу қийматнинг эҳтимоллигидир. Худди шунингдек, $\frac{N_2}{N}$ ҳам a қийматнинг a_2 га тенг бўлиш эҳтимоллигидир ва ҳоказо. Бинобарин, *a катталикнинг ўртача қиймати унинг алоҳида қийматларининг тегишли эҳтимолликларга кўпайтмасининг йиғиндисига тенг:*

$$\bar{a} = W_1 a_1 + W_2 a_2 + W_3 a_3 + \dots = \sum W_i a_i. \quad (8)$$

Молекуляр физика қонунларининг ҳамма вақт эҳтимоллик характерида бўлишини биз юқорида таъкидлаб ўтган эдик, бироқ бундан уларнинг аниқлиги йўқолмайди. Бунинг сабаби шуки, ўзгармас ташқи шароитларда бўладиган ҳар қандай система учун уни тавсифловчи физикавий катталиклар ҳам амалда ўзгармайди ва уларнинг ўртача қийматларига тенг бўлади. Бундай ҳолларда система мувозанат ҳолатида бўлади деб гапирилади. Бу масала қуйида батафсилроқ ўрганилади.

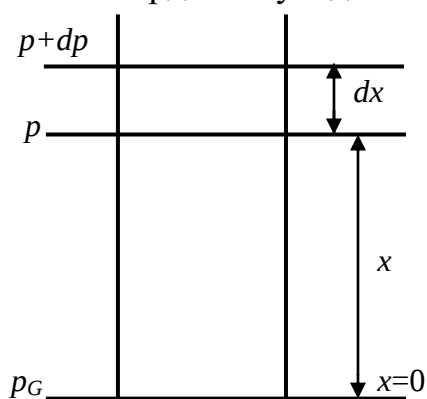
Барометрик формула

Молекулалар сонининг улкан эканлиги ҳар бир молекула ҳаракатини алоҳида ўрганишни кераксиз қилиб қўйади. Зарралар сони бунчалик катта бўлганида уларнинг ҳаракатини характерловчи катталикларнинг ўртача қийматларинигина, масалан, уларнинг ўртача тезлиги, ўртача энергияси ва шу кабиларни билиш билан чекланиш мумкин экан. Молекуляр системаларни ўрганишда биз шу усулдан фойдаланамиз. Ҳар қандай модданинг уч агрегат ҳолатидан энг соддаси газсимон ҳолатидир, чунки бу ҳолда молекулалар орасидаги таъсир қилувчи кучлар жуда кичик бўлиб,

уларни назарга олмаслик мумкин. Шунинг учун ҳам молекуляр физикани баён қилиш газларнинг хоссаларини ўрганишдан бошланади. Бунда дастлаб молекулалараро кучлар жуда кичиккина эмас, ҳатто батамом йўқ деб фараз қилинади. Содда бўлиши учун молекулаларнинг ўлчамларини ҳам назарга олмаймиз, яъни уларни моддий нуқталар деб оламиз. Бундай қилинганда газ молекулаларини мутлақо эркин деб ҳисобланиши керак. Бу деган сўз, улар ҳеч қандай куч таъсирига дуч келмаган барча жисмлар ҳаракатлангани каби тўғри чизиqli текис ҳаракат қилади демакдир. Бинобарин, ҳар бир молекула ўзини идишда бошқа молекула йўқдек тутади.

Гарчи маъқул шароитларда бу фаразлар ўринли бўлиб, бундай идеаллаштириш бизни ҳақиқатдан унчалик узоқ олиб кетмаса-да, келгусида реал газларни ўрганишда улардан воз кечамиз. Ўзаро таъсирлашмайдиган моддий нуқталар тўплами сингари хоссаларга эга бўлган газ *идеал газ* деб аталади. Идеал газларнинг кинетик назария (ГКН)ни баён қилиш бизнинг биринчи вазифамиз бўлади.

Молекуляр ҳаракатлар тамомила тартибсиз (хаотик) бўлади, у эса шунга олиб келадики, газнинг зарралари идишнинг бутун ҳажми бўйлаб текис тақсимланади ва ҳар бир ҳажм бирлигида ўртача бирдай сонда зарралар бўлади. Мувозанат ҳолатида газнинг босими ва температураси бутун ҳажм бўйича бирдай бўлади. Бироқ молекулаларга ташқи кучлар таъсир



2-расм

қилмагандагина шундай бўлади. Бундай ташқи кучлар таъсир қилганда молекуляр ҳаракатлар газлар табиатини ўзига хос ўзгартириб юборади.

Масалан, оғирлик кучи таъсирида бўлган газ (ҳаво)ни кўрайлик. Агар молекулаларнинг иссиқлик ҳаракати бўлмаганда эди, уларнинг ҳаммаси оғирлик кучи таъсирида Ерга «қулаб» тушар ва бутун ҳаво Ер сирти яқинида юпқа қатлам ҳосил қилиб тўпланган бўлар эди. Агар оғирлик кучи мавжуд бўлмай, молекуляр

ҳаракат мавжуд бўлганда эди, молекулалар бутун олам фазоси бўйлаб тарқалиб кетган бўлар эди. Атмосфера — Ернинг ҳаво қобиғи ўзининг ҳозирги тарзида айни бир вақтда молекулаларнинг иссиқлик ҳаракати (хотик) ва Ерга тортишиш кучи борлиги туфайли мавжуддир. Шу билан бирга атмосферада молекулаларнинг баландлик бўйича тугал аниқ тақсимланиши мавжуд бўлади. Молекулаларнинг шундай тақсимланишига мос равишда газ босимининг баландликка боғлиқ ҳолда ўзгариш қонуни қарор топади, бу қонунни топиш қийин эмас.

Ҳавонинг вертикал устунини кўрайлик (2-расм). Ернинг $x = 0$ бўлган сиртида босим p_0 га, x баландликда эса p га тенг бўлсин. Баландлик dx га ортганида босим dp га ўзгаради. Маълумки, бирор баландликдаги ҳавонинг босими юзи бир бирликка тенг бўлган шундай баландликдаги вертикал ҳаво устунини оғирлигига тенг. Шунинг учун dp юзи бир бирликка тенг бўлган

ҳаво устунининг x ва $x + dx$ баландликлардаги оғирликлари фарқига тенг, яъни асос юзи бир бирликка тенг бўлган dx баландликдаги ҳаво устун оғирлигига тенг:

$$dp = -\rho g dx, \quad (9)$$

бу ерда ρ —ҳавонинг зичлиги (ҳажм бирлигидаги массаси) ва g —оғирлик кучининг тезланиши. Газнинг ρ зичлиги, равшанки, молекула массаси m ни уларнинг ҳажм бирлигидаги сони n га кўпайтирилганига тенг:

$$\rho = m n. \quad (10)$$

Кинетик назариядан маълумки, молекулалар сони $n = \rho / kT$. Бинобарин, $\rho = m \rho / kT$ ва $dp = -\frac{mg}{kT} p dx$. Бу тенгламани (ўзгарувчиларни ажратиш учун) қуйидаги кўринишда қайта ёзиш мумкин:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dx. \quad (11)$$

Агар температура ҳамма баландликда бирдай деб ҳисобласак (умуман айтганда бу нотўғри), бу ҳолда бу тенгламани интеграллаб шундай ифода оламиз:

$$\ln p = -\frac{mg}{kT} x + \ln C, \quad (12)$$

бу ерда C —интеграллаш ўзгармаси. Бундан

$$p = C e^{-\frac{mg}{kT} x}, \quad (13)$$

C ўзгармас $x = 0$ бўлганда $p = p_0$ эканлиги шартидан аниқланади. (13) тенгламага x ва p нинг бу қийматларини қўйиб ёзсак: $C = p_0$.

Бинобарин, бизни қизиқтираётган ҳаво босимининг Ер юзидан баландликка боғлиқлиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT} x} \quad (14)$$

ёки $m = \mu / N_0$ эканлигини назарга олсак (бу ерда μ —молекуляр масса, яъни моль массаси, N_0 — Авогадро сони), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} x}. \quad (5)$$

Босимнинг баландлик ортиши билан камайиб боришини кўрсатувчи (14) тенглама *барометрик формула* деб аталади. Бу тенгламадан газнинг босими баландлик ортиши билан экспоненциал қонунга мувофиқ камайиб бориши кўриниб турибди. Бу қонундан Ер сиртидан баландликни аниқлаш учун фойдаланилади, бунинг учун шу баландликдаги босим ва денгиз сатҳи баландлигидаги босим ўлчанади (албатта, денгиз сатҳидаги баландлигидаги босимни бир марта ўлчаш етарли).

Тоғ чўққилари, самолётнинг учиш баландлигини ўлчашга мўлжалланган асбоблар шкалалари бевосита метрларда даражаланган махсус барометрдан иборат бўлади. Бу мақсадлар учун, бироқ (14) тенгламада

температурага тузатма киритиш керак, чунки барометрик формулани чиқаришда биз температурани барча баландликларда ўзгармас бўлади деб фараз қилдик, ҳолбуки температура баландлик ортган сари пасайиб боради.

(14) барометрик формуладан фойдаланиб Больцман доимийси k ни аниқлаш мумкин, бироқ температура тузатмаси туфайли аниқлик унча катта бўлмайди.

Аввал кўрганимиздек, газнинг босими ҳажм бирлигидаги молекулалар сонига пропорционал ($p = n k T$) бўлгани учун (14) формула, шунингдек баландлик ортиши билан молекула зичлигининг камайиш қонунини ҳам ифодалайди:

$$n = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}x}, \quad (16)$$

бу ерда n ва n_0 — ораларидаги баландлик фарқи x га тенг бўлган нуқталардаги ҳажм бирлигидаги молекулалар сони. Бу формула, худди (15) формула сингари, Ернинг атмосфераси чексизликкача ёйилган эканини кўрсатади.

Барометрик формула (14) ва (16) ни чиқаришда биз оғирлик кучи тезланиши g ни ўзгармас, яъни баландликка боғлиқ эмас деб фараз қилдик. Шунга асосланиб (11) тенгламани интеграллаётганда g ни интеграл белгисидан ташқарига чиқардик. Бундай соддалаштиришни x нинг нисбатан кичик қийматлари (ўнлаб километрлар чамаси) учунгина қабул қилиш мумкин. Катта баландликларда оғирлик кучи тезланиши Ер сиртидан узоқлашган сари камайишини назарга олиш керак. Ҳақиқатан ҳам, бутун олам тортишиш қонунидан Ер марказидан r масофада оғирлик кучининг тезланиши

$$g(r) = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(r_0 + x)^2} \quad (17)$$

га тенг бўлади, бу ерда γ — гравитация доимийси (СИ системасида унинг қиймати $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, СГС системасида эса $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{дина} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2$); M — Ернинг массаси ва r_0 — Ернинг радиуси. Шунинг учун (11) тенглама

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{M m}{k T} \frac{dx}{(r_0 + x)^2} \quad (18)$$

кўринишда ёзилиши керак. Интеграллаганимиздан кейин қуйидагини оламиз:

$$\ln p = \gamma \frac{M m}{k T} \frac{1}{r_0 + x} + \ln C \quad (19)$$

ёки

$$\begin{aligned} p &= C \exp \left(\gamma \frac{M m}{k T} \frac{1}{r_0 + x} \right) = C \exp \left(\gamma \frac{M}{r_0^2} \frac{m}{k T} \frac{r_0^2}{r_0 + x} \right) = \\ &= C \exp \left(\frac{m g}{k T} \frac{r_0^2}{r_0 + x} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

кўринишга келади. Бу ерда e^A кўринишидаги экспоненциал функциянинг даража кўрсаткичи A жуда катта ифода бўлганида ёзилиш формасидан фойдаланилган.

Интеграллаш ўзгармаси C ни $x = 0$ бўлганда босим $p = p_0$ бўлади деган шартдан топилади. x ва p нинг бу қийматларини (20) формулага қўйиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$C = p_0 \exp\left(-\frac{m g r_0}{k T}\right), \quad (21)$$

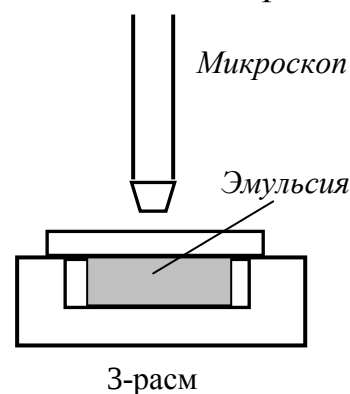
ниҳоят, босимнинг баландликка боғлиқлиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{m g r_0}{k T} \left(1 - \frac{r_0}{r_0 + x}\right)\right]. \quad (22)$$

Бу формуладан юзаки қараганда парадоксал натижа келиб чиқади, ҳатто Ердан чексиз узоқлашганда, яъни $x \rightarrow \infty$ бўлганда ҳам босим нолга тенг эмас:

$$p_\infty = p_0 e^{-\frac{m g r_0}{k T}}. \quad (23)$$

Бу деган сўз, Ернинг (шунингдек бошқа планеталарнинг ҳам) атмосфераси чексизликкача ёйилган ва газнинг зичлиги ҳеч қаерда ҳам нолга тенг бўлмаслиги керак. Физикавий жиҳатдан бундай бўлиши мумкин эмас, чунки молекулалар сони чекли, Коинот эса чексиз. Шунинг учун Ернинг атмосфераси мувозанат ҳолатида эмас, деган хулоса қилишга тўғри келади. Мувозанат ҳолатида бўлмаслиги шундаки, атмосфера газ илгирисиз олам фазосига ёйилиб кетади. Бироқ бу Ер атмосферасининг йўқолиб кетишига олиб келмаган (ва миллиард йиллар давомида олиб келмайди), чунки ҳаво зарраларининг фақат жуда кичик миқдоригина Ернинг атмосфера қобиғини ташлаб кетади. Бироқ бундай ҳолат, масалан, Ойнинг атмосферасини йўқотишга олиб келиши (қачонлардир Ой атмосферага эга бўлган бўлса) мумкин эди (бу тўғрида кейинроқ батафсил тўхталиб ўтамыз).



Перрен тажрибаси

(16) формуладан Перрен барометрик формулани тажрибада текшириш ва Больцман доимийсини аниқлаш (ёки худди шундай Авогадро сонини аниқлаш) учун фойдаланди.

Бунда Перрен ўзининг Броун ҳаракатига доир тажрибаларида кўрсатганидек, унча катта бўлмаган муаллақ зарраларни жуда катта ўлчамли ўзаро таъсирлашмайдиган молекулалар деб қараш мумкин эканлиги фактидан фойдаланди. Шунинг учун Броун заррасига ўхшаш зарралар суюқликда муаллақ бўлиб оғирлик кучи таъсирига дуч келса,

баландлик ўзгариши билан газ молекулалари сингари, яъни (16) қонунга мувофиқ тақсимланади дейиш мумкин.

Перрен бир-бирига аралашмайдиган икки суюқликдан иборат эмульсия тайёрлади. Бу эмульсияда бир суюқлик иккинчисида муаллақ бўлган майда томчилар ҳосил қилади, бу томчи зарраларининг ўлчамлари деярли бир хил ва тахминан шарсимон шаклда. Вертикал ўрнатилган ва аниқлик даражаси жуда кичик бўлган микроскоп ёрдамида муаллақ зарраларнинг баландлик бўйича тақсимланиши кузатилди (3-расм). Бунинг учун микроскоп эмульсиянинг турли баландликлардаги (чуқурликдаги) қатламларига фокусланди. Микроскопнинг кўриш майдонида 0,001 мм дан қалин бўлмаган қатламдаги зарраларгина кўринди ва бу қатламдан юқорида ёки пастда бўлган зарралар мутлақо кўринмасди. Кўриш майдонидаги зарралар сони унча кўп бўлмай, уларни санаш мумкин эди. Бу соң, равшанки ҳажм бирлигидаги зарралар сони n га пропорционал бўлади. Ўлчашлар кўплаб марта ўтказилди ва уларнинг ўртачаси аниқланди. Баъзи тажриба серияларида саналган зарраларнинг умумий сони кўп мингларча бўлди. Бу ўлчашлар ҳақиқатан ҳам зарралар концентрацияси (16) формула билан ифодаланган экспоненциал қонунга мувофиқ ўзгаришини кўрсатди, бунда зарранинг Архимед қонунига мувофиқ оғирлик йўқотиши назарга олинган.

Агар зарранинг массаси m бўлса, у ҳолда унинг оғирлиги Архимед кўтариш кучини назарга олганда қуйидагига тенг бўлади:

$$mg \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (24)$$

бу ерда ρ_0 — зарра моддасининг зичлиги, ρ эса бу зарра муаллақ турган суюқликнинг зичлиги. Шунинг учун (16) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$n = n_0 \exp \left[- \frac{mg \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right)}{kT} x \right]. \quad (25)$$

(25) формуладан шу нарса келиб чиқадики, агар микроскопнинг кўриш майдонида эмульсиянинг x_1 ва x_2 қатламидаги зарралар сони n_1 ва n_2 ни саналса, у ҳолда қуйидаги

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp \left[- \frac{mg \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right)}{kT} (x_1 - x_2) \right] \quad (26)$$

нисбатдан Больцман доимийси k ни аниқлаш мумкин бўлади, бунинг учун зарраларнинг массаси m , уларнинг зичлиги ρ_0 , суюқлик зичлиги ρ ва T температурани ўлчаш керак. Суюқликнинг зичлиги ва температураси умумий маълум бўлган методлар билан ўлчанади. Эмульсия зарраларининг массаси ва зичлигини ўлчашгина, уларнинг ўлчамлари жуда кичик (микроскопик) бўлгани учун қийинчилик туғдиради.

Зарралар моддасининг зичлигини Перрен эмульсиянинг массасини ва ҳажмини ўлчаш йўли билан аниқлади. Бунинг учун дастлаб маълум идиш (пикнометр)ни тўлдирган сувнинг M_0 массаси тортиш йўли билан аниқланди. Бундан пикнометрнинг ҳажми m_0 / ρ_1 аниқланди (бу ерда ρ_1 — сувнинг зичлиги). Сўнгра худди шу пикнометрни тўлдирган (сувдаги) эмульсиянинг m_1 массаси аниқланди. Шундан кейин эмульсияли пикнометр печга жойлаштирилди ва суюқлик буғлантириб юборилди; пикнометр қайтадан тортилди ва бунинг натижасида эмульсиядаги зарраларнинг M_2 массаси аниқланди. Бу ўлчашлардан эмульсиядаги сувнинг ҳажми

$$V_{св} = (M_1 - M_2) / \rho_1, \quad (27)$$

сўнгра эмульсия зарраларининг ҳажми аниқланади:

$$V_{yi} = \frac{M_0}{\rho_1} - \frac{M_1 - M_2}{\rho_1}, \quad (28)$$

демак, зарралар моддасининг зичлиги ρ_0 топилади:

$$\rho_0 = \frac{M_2}{V_{yi}} = \frac{M_2 \rho_1}{M_0 - M_1 + M_2}. \quad (29)$$

Эмульсия зарраларининг радиусини (биз уларни соф шар шаклида деб олган эдик) Перрен капилляр найни тўлдириб турган эмульсияда зарраларнинг тушиш тезлиги v ни ўлчаш йўли билан аниқлади. Қовушоқлиги η бўлган суюқликда v тезлик билан тушаётган a радиусли шарчага юқорига вертикал йўналган

$$F = 6\pi\eta av \quad (30)$$

ишқаланиш кучи таъсир қилади. Бундан ташқари, тушаётган шарчага юқорига йўналган Архимед кучи

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g, \quad (31)$$

бу ерда ρ суюқликнинг зичлиги ва оғирлик кучи

$$mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g \quad (32)$$

(бу ерда ρ_0 — шарча моддасининг зичлиги) таъсир қилади. Архимед кучи ва оғирлик кучининг натижавийси

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho_0 - \rho) g \quad (33)$$

шарчани пастга қараб g тезланиш билан ҳаракатлантиради ($\rho_0 > \rho$). Бироқ шарчанинг тезлиги орта борган сари ишқаланиш кучи F ортади ва шарчани тормозлайди. Бунинг натижасида шарча ҳаракатининг шундай ўзгармас тезлиги юзага келадики, бунда

$$6\pi\eta av = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho_0 - \rho) g \quad (34)$$

тенглик қарор топади. Перрен худди шу тезликни ўлчади. (34) (формуладан зарранинг радиуси ва унинг тегишли массаси аниқланади:

$$a = \sqrt{\frac{9 \eta v}{2 g (\rho_0 - \rho)}}, \quad m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0. \quad (35)$$

Шундай қилиб, (26) формулага кирувчи барча катталикларни ўлчаш мумкин.

(26) ни логарифмлагандан сўнг Больцман доимийси k ни ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишга келади:

$$k = \frac{m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) g (x_2 - x_1)}{T \ln (n_1 / n_2)}. \quad (36)$$

Перрен тажрибаларидан олинган k нинг қиймати ҳозирги вақтда қабул қилинган қийматидан бирмунча кичик. Кейинроқ бошқа тадқиқотчилар шу методнинг ўзи билан k нинг аниқроқ қийматини олдилар.

Больцман қонуни

Юқорида олинган барометрик формула газнинг оғирлик кучи таъсирида бўлган ҳоли учун чиқарилган. (16) формула

$$n = n_0 e^{-\frac{m g x}{k T}} \quad (37)$$

даги $m g x$ катталик молекуланинг x баландликдаги потенциал энергиясини билдиради. Шунинг учун (16) формула бизга энергияси $U = m g x$ бўлган зарралар сони n ни беради дейиш мумкин, бунда энергияси нолга тенг бўлган зарралар сони n_0 га тенг бўлиши керак (баландлик x нолдан ҳисобланади). Агар оғирлик кучи ўрнига бирор бошқа куч таъсир қилса ва энергиянинг ифодаси бошқача кўринишда бўлса, газнинг табиати жуда ўзгариб кетади деб ҳисоблашга ҳеч қандай асос йўқ. Агар газ қандайдир куч майдонида бўлиб, шу туфайли унинг зарралари бирор потенциал энергияга эга бўлса, у ҳолда берилган U энергияли зарралар сони қуйидаги формула билан аниқланади:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{k T}} \quad (38)$$

(38) формула *Больцман формуласи* деб аталади. Бу формула иссиқлик мувозанати шароитида U энергияга эга бўлган зарралар улушини аниқлашга имкон беради:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{U}{k T}}. \quad (39)$$

(39) формула берилган U энергияли зарралар улуши $\frac{n}{n_0}$ нинг шу энергия катталигидан ташқари, фақат температурага боғлиқ бўлишини кўрсатади. Бу нарсa температуранинг ўзини ҳам бирмунча бошқача, яъни зарраларнинг энергия бўйича қандай тақсимланишига боғлиқ бўлган катталик сифатида талқин қилишга имкон беради.

Берилган температурада бирор u энергияга эга бўлган молекулалар улуши u нинг қийматига боғлиқ бўлади ва u ортган сари бу улуш тез камаяди. Бу деган сўз, жуда катта энергияли молекулалар улуши ҳамма вақт ҳам жуда кам бўлади. Шу билан бирга температура қанча паст бўлса, u нинг ортиши билан $\frac{n}{n_0}$ шунча тез камайиб боради.

Таксимот ҳақида тушунча. Таксимот функцияси

Идеал газларнинг кинетик назарияси асосий тенгламаларига молекулаларнинг ўртача кинетик энергияси киришини биламиз, ўртача кинетик энергия эса ўз навбатида молекулаларнинг ўртача квадратик тезликлари билан аниқланади. Ўртача квадратик тезликнинг маъноси шуки, бу тезлик газнинг босими аслида қандай бўлса, шундай қиймат олиши учун унинг барча молекулалари (улар тезликларининг катталиклари бирдай, йўналишлари эса тенг эҳтимолли бўлганда) эгаллаши керак бўлган тезликдир. Бироқ аслида молекулаларнинг тезликлари бирдай эмас ва буни биз ҳатто асосий тенгламани чиқаришда эътиборга олган эдик. Тажриба ҳам буни тасдиқлайди.

Масалан, Штерн тажрибалари ёрдамида молекулаларнинг тезлигини ўлчашда силжиган полоска аниқ эмас, балки турли тезликдаги молекулалар нишоннинг турли жойларига тушгани учун ёйилган бўлиб кўринган эди. Молекулаларнинг оғирлик майдонида баландликка боғлиқ равишда тақсимланиши (барометрик формула) ҳам шундан дарак беради. Агар молекулаларнинг тезликлари бирдай бўлганда эди, тақсимланиш тамомила бошқача бўлар эди. Ҳақиқатан ҳам, Ер сиртига яқин барча молекулаларнинг тезликлари бирдай бўлиб, унинг вертикал ташкил этувчиси u га тенг деб фараз қилайлик. Бу молекулалар

$$\frac{m u^2}{2} = m g x \quad (40)$$

шарт билан аниқланадиган x баландликкача кўтарилган, яъни

$$x = u^2 / 2 g \quad (41)$$

баландликкача кўтарилган ва сўнгра Ерга дастлабки кинетик энергиялари билан қайтган бўлар эди, яъни ўзини юқорига отилган ихтиёрий жисмдек тутган бўлар эди. Бундай шароитларда атмосферанинг x баландликда кескин чегараси бўлар ва бу чегарадан ташқарида атмосфера бўлмас эди. Тажриба эса атмосферанинг кескин чегараси йўқ эканини ва u баландлик ортиши билан барометрик формулага мувофиқ камайишини кўрсатади. Барча молекулаларнинг тезликлари тенглиги тўғрисидаги фараз шундай қилиб тажрибага зиддир.

Молекулаларнинг тартибсиз ҳаракатлари ва уларнинг ўзаро тўқнашувлари туфайли газ молекулалари ўзларининг тезликлари бўйича қандайдир тарзда тақсимланади, уларнинг орасида жуда тез молекулалар ҳам, жуда секин молекулалар ҳам бўлади. Молекуляр ҳаракатларнинг

тамомила хаотиклигига қарамай, тўқнашувларнинг ва уларнинг молекуляр тезлигига кўрсатадиган ўзгаришларининг тасодифий характерда эканига қарамай, молекулаларнинг тезлик бўйича тақсимои тасодифий ва ихтиёрий бўлмасдан, тамомила аниқ бўлишини назария ва тажриба кўрсатади. Унинг характерига молекулалараро тўқнашувлар ҳам, хатто ташқи майдонлар ҳам таъсир кўрсата олмайди. Бу тақсимот бир қийматли ва мумкин бўлган ягона характердир. Бу молекуляр ҳаракатларнинг хаотиклиги ҳақидаги тасаввурларга зид эмас, балки худди ана шу хаотиклик туфайлигина шундай тақсимот юзага келади.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимои қонунини чиқаришга киришишдан аввал тақсимот ҳақидаги масаланинг моҳиятини аниқлайлик. Молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимоини аниқлаш деган сўз, гўё берилган u ёки бу тезликларга эга бўлган молекулалар сонини аниқлашдек туюлади. Бироқ масала бундай қўйилишда маънога эга бўлмайди, чунки аниқ (математик аниқ!) берилган тезликка эга бўлган молекулаларнинг эҳтимол тутилган сони нолга тенг. Чунки тезликнинг турли қийматлари сони чексиз катта. Молекулаларнинг сони эса чекли. Шунинг учун тезликнинг ҳар бир ихтиёрий берилган қийматига тўғри келадиган молекулалар сони нолга тенг. Ана шу сабабга кўра масала бошқача ифодаланган бўлиши керак: қанча молекула (ёки молекулаларнинг қандай қисми) берилган тезлик яқинидаги бирор интервалда ётувчи тезликларга эга бўлади?

Статистик масалалар ҳамма вақт ҳам ана шу йўсинда қўйилади. Масалан, мамлакатнинг аҳолиси ёшига нисбатан қандай тақсимланишини аниқлаш керак бўлса, бу деган сўз бирор аниқ (математик аниқ) ёшдаги одамларнинг эҳтимол тутилган сонини аниқлаш деган маънони англатмайди. Бундай масаланинг маъноси йўқ, чунки ёшнинг турли қийматлари сони чексиз катта, одамлар сони эса чекли. Ёшлари фақат маълум интервалда ётган одамларнинг эҳтимол тутилган сонинигина аниқлаш мумкин. Кундалик ҳаётимизда фалон одам 18 ёшда деганимизда биз унинг ёши роппа-расо 18 ёш 0 кун, 0 минут, 0 секунд демоқчи бўлмаймиз. Бизнинг айтганимиз шу кишининг ёши 18 ва 19 орасидаги интервалда ётади демакдир. Худди шунингдек, масалан, ўқув йилида мактабларнинг ишлашини планлаштирилар экан мактабга боровчи етти ёшли болалар сони билан қизиқилади, бироқ, унда 1 сентябрь соат эрталаб 8 да роппа-расо 7 ёшга тўлган болалар сони билан қизиқилади деган гап эмас. Режалаштиришда етти ва саккиз ёшлар орасидаги болалар сони билан қизиқилади.

Тақсимот функцияси

Зарраларнинг тезликлар бўйича тақсим-ланишини ўрганишда биз ҳам тезликлари (ёки тезлик компоненталари) маълум тезликлар интервалида ётган зарралар сонини излаймиз. Тезликлари бирор v дан $v + \Delta v$ гача интервалда

ётган ҳажм бирлигидаги Δn зарралар сони интервалнинг катта бўлишига боғлиқ, яъни $\Delta n \propto a \Delta v$ ёки

$$\Delta n = a \Delta v \quad (42)$$

бўлиши равшан, бу ерда a — пропорционаллик коэффиценти.

Шунингдек, Δn тезликнинг ўзига боғлиқ бўлиши ҳам равшан, чунки интервалларнинг катталиклари бирдай, бироқ тезликнинг абсолют қийматлари турлича бўлганида зарралар сони турлича бўлади. Ҳақиқатан ҳам, масалан, 99 дан 100 гача ёш интервалидаги одамлар сони билан 30 дан 31 гача ёшлар интервалидаги одамлар сонидан фарқли бўлади, ҳолбуки иккала ҳолда ҳам интерваллар оралиғи бирдай. Демак, (42) формуладаги пропорционаллик коэффиценти тезликнинг функцияси бўлиши керак:

$$a = f(v). \quad (43)$$

Нихоят, Δn катталик, шунингдек ҳажм бирлигидаги зарралар сони n га ҳам пропорционал бўлиши керак. Шунинг учун Δn нинг формуласи шундай кўринишда бўлиши керак:

$$\Delta n = n f(v) \Delta v. \quad (44)$$

Бу формулани одатда шундай кўринишда ёзилади:

$$\frac{\Delta n}{n} = f(v) \Delta v. \quad (45)$$

Бу формулада $\frac{\Delta n}{n}$ катталик тезликлари v дан $v + \Delta v$ гача ётган ҳажм бирлигидаги зарралар улушини билдиради. $f(v)$ функция *тақсимот функцияси* деб аталади. Бизнинг вазифамиз бу функциянинг кўринишини аниқлашдир. Унинг маъноси (45) формуладан равшан. Ҳақиқатан ҳам, $\Delta v = 1$ бўлганда

$$f(v) = \frac{\Delta n}{n}. \quad (46)$$

Бу деган сўз, $f(v)$ функция тезликлари v тезлик яқинидаги тезлик-лар интервали *бирлигида* ётган зарралар улушига тенг.

Лимитга ўтиб, (45) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dn}{n} = f(v) dv. \quad (46)$$

Юқорида гапирилган эҳтимоллик ҳақидаги гаплардан (46) формуладаги $\frac{dn}{n}$ катталикнинг эҳтимоллик маъносига эга эканлиги келиб чиқади: бу катталик газнинг ҳажм бирлигидаги молекулаларининг ихтиёрий биттасининг v тезлик яқинидаги dv интервалда ётувчи тезликка эга бўлиш эҳтимоллигидир. $f(v)$ тақсимот функцияси катталигига эса шундай эҳтимоллик маъносини бериш мумкин: бу катталик газнинг унинг ҳажм бирлигидаги ихтиёрий молекуласи v тезлик яқинидаги *бирлик* интервалда ётган тезликка эга бўлиш эҳтимоллигидир. Шунинг учун уни *эҳтимоллик зичлиги* деб юритилади.

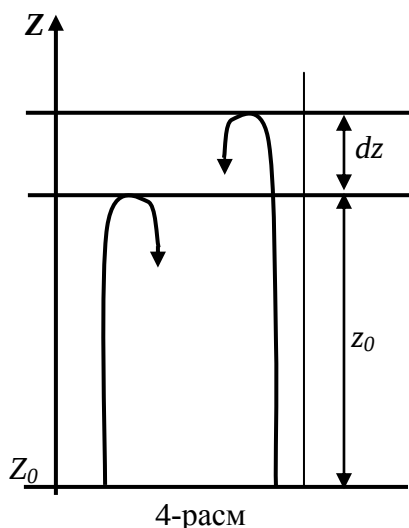
Биз аввал ҳосил қилган барометрик формула молекулаларнинг тезликлари бир хил бўлмай, тезликлар бўйича муайян тарзда тақсимланган бўлгани учун шундай кўринишга эгадир. Бу тақсимот характери ҳам худди шу $f(v)$ функциянинг кўринишига боғлиқ. Аввал ҳосил қилган барометрик формуладан фойдаланиб, биз тақсимот функциясини аниқласак, унинг кўриниши молекулалар зичлигинг баландликка боғлиқ ҳолда ўзгариш муносабати (16) нинг ўзи бўлар экан. тезликлари

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad (47)$$

Тақсимот функциясини бошқа йўллар билан ҳам келтириб чиқариш мумкин эканлигини айтиб ўтайлик. Уни Максвелл (1859 й.) эҳтимоллик назарияси тасаввурлари асосида келтириб чиқарди. Больцман (1877 й.) бу функцияни газ молекулаларининг тўқнашувларини ўрганиш асосида келтириб чиқарди. Бундай тўқнашувлар туфайли ана шундай тақсимот қарор топади. Барометрик формула ана шу формуланинг натижаси сифатида чиқарилиши мумкин. Биз осон бўлиши учун юқорида чиқарган барометрик формуламиздан тақсимот қонунини топиш учун фойдаланамиз.

Молекулаларнинг тезлик компоненталари бўйича тақсимои

Оғирлик майдони таъсиридаги бўш фазога жойлаштирилган газ тўлдирилган идишни кўз олдимизга келтирайлик. Идиш ичидаги газ мувозанатда бўлади ва унинг молекулалари тезликлар бўйича қандайдир тарзда тақсимланган. Ана шу тақсимот қонунини топиш талаб қилинади. Агар бирор пайтда идиш синдирилса, газ молекулалари бутун йўналишлар бўйлаб, жумладан, оғирлик кучи таъсирига қарши— юқорига қараб ҳам ҳаракатлана бошлайди. Оғирлик кучининг бўлиши бизга идиш синдирилгунча мавжуд бўлган тақсимотни аниқлашга имкон беради.



Координата ўқларидан бири, масалан, z ўқни ҳисоб боши идиш турган жойдан бошланадиган қилиб тик юқорига қараб йўналтирамиз. Оғирлик кучининг фақат молекулалар тезлигининг z – компонентиға таъсир қилиши равшан, шунинг учун молекулаларнинг тезликлар бўйича эмас, тезликнинг v_z ташкил этувчиси қийматлари бўйича тақсимотини излаймиз.

Молекулаларнинг z ўқ бўйлаб юқорига ҳаракат қилишида улар тезлигининг z – компоненти камайиб боради. Агар, масалан, бирор молекула учун бирор бошланғич z_0 баландликда бу компонента v_{z0} га тенг бўлган бўлса, бирор z баландликда қуйидаги энергия сақланиш қонуни ўринли бўлади:

$$\frac{m v_{z0}^2}{2} = \frac{m v_z^2}{2} + m g z, \quad (48)$$

бу ерда v_z – тезликнинг z – компонентасининг z баландликдаги қиймати. Кинетик энергиялари $\frac{m v_{z0}^2}{2} \leq m g z$ бўлган молекулаларнинг z дан юқори баландликка қўтарила олмаслиги равшан. Улар қўтарилиши мумкин бўлган энг юқори z баландлик $z = \frac{v_{z0}^2}{2g}$ тенгликдан аниқланади. Бундай баландликда бу молекулаларнинг v_z ташкил этувчиси нолга тенг бўлиб қолади ва улар юқорига отилган ҳар қандай жисм сингари тезланиб пастга қулайди.

Бирор ихтиёрий z баландликда асос майдони бирга тенг бўлган dz баландликли газ қатламини ажратамиз (4-расм). Бу қатламдаги газ ҳаракатланаётган молекулалардан иборат. Бу молекулалар қатлам орқали пастдан юқорига ва юқоридан пастга ўтаётган молекулалардир (бизни фақат молекулалар тезликларининг z ўқ бўйлаб ташкил этувчиларигина кизиқтираётганини эслатиб ўтайлик). Қатламдаги пастдан юқорига ва юқоридан келаётган молекулаларнинг фарқи шуки, пастдан келаётган молекулалар тезликларининг z – компоненталарининг модули $\sqrt{2gz}$ қийматдан катта, юқоридан келаётган молекулалар тезликларининг z – компоненталари эса 0 дан ∞ гача бўлган ихтиёрий қийматга эга бўлиши мумкин.

Қатламдаги молекулалар сони ўзгармас бўлиши керак бўлган мувозанат ҳолатида юқоридан пастга ўтаётган молекулалар сони пастдан юқорига ўтаётган молекулалар сонига тенг бўлиши керак.

z_0 баландликда тезликларининг z – компоненталари v_{z0} дан $v_{z0} + dv_{z0}$ гача интервалда ётган ҳажм бирлигидаги молекулалар сони қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$dn_{z0} = n_{z0} f(v_{z0}) dv_{z0}. \quad (49)$$

z баландликда биз танлаган қатламни вақт бирлиги ичида $n_{z0} v_{z0} f(v_{z0}) dv_{z0}$ та шундай молекулалар кесиб ўтади. Қатламни пастдан юқорига кесиб ўтувчи молекулаларнинг умумий сонини (бу сонни $N_{\uparrow}$ билан белгилаймиз) қуйидагича ёзиш мумкин:

$$N_{\uparrow} = \int_{\sqrt{2gz}}^{\infty} n_{z0} v_{z0} f(v_{z0}) dv_{z0} = n_{z0} \int_{\sqrt{2gz}}^{\infty} v_{z0} f(v_{z0}) dv_{z0}. \quad (50)$$

Худди шундай қатламни юқоридан пастга кесиб ўтувчи молекулалар сони $N_{\downarrow}$ қуйидагича тенг бўлади:

$$N_{\downarrow} = \int_0^{\infty} n_z v_z f(v_z) dv_z = n_z \int_0^{\infty} v_z f(v_z) dv_z. \quad (51)$$

Мувозанат ҳолатида, айтиб ўтганимиздек, $N_{\uparrow}$ ва $N_{\downarrow}$ бир-бирига тенг бўлиши керак:

$$n_{z0} \int_{\sqrt{2gz}}^{\infty} f(v_{z0}) v_{z0} dv_{z0} = n_z \int_0^{\infty} f(v_z) v_z dv_z. \quad (52)$$

Бу тенгликнинг ҳар икки қисмини n_{z0} га бўлиб ва барометрик формулага мувофиқ $\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{mgz}{kT}}$ эканлигини эътиборга олиб, шундай ёзамиз:

$$\int_{\sqrt{2gz}}^{\infty} f(v_{z0}) v_{z0} dv_{z0} = e^{-\frac{mgz}{kT}} \int_0^{\infty} f(v_z) v_z dv_z. \quad (53)$$

(48) энергия сақланиш қонунини дифференциаллаб (z нинг қиймати аниқ эканини назарга олиб) қуйидагини оламиз:

$$v_{z0} dv_{z0} = v_z dv_z.$$

(53) тенгламанинг чап томонидаги интеграл остидаги $v_{z0} dv_{z0}$ нинг қийматини унга тенг бўлган $v_z dv_z$ қийматга алмаштирамиз. Бунда интеграллашнинг пастки чегарасини ноль билан алмаштирамиз ва у тенглама шундай бўлади:

$$\int_0^{\infty} f(v_{z0}) v_z dv_z = e^{-\frac{mgz}{kT}} \int_0^{\infty} f(v_z) v_z dv_z. \quad (54)$$

Бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$f(v_{z0}) = f(v_z) e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (55)$$

ёки

$$f(v_z) = f(v_{z0}) e^{\frac{mgz}{kT}}. \quad (56)$$

Энергиянинг сақланиш қонуни (48) ни назарга олиб, тенглик фақат

$$f(v_z) = A \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) \quad \text{ва} \quad f(v_{z0}) = A \exp\left(-\frac{mv_{z0}^2}{2kT}\right) \quad (57)$$

бўлгандагина ўринли эканини кўриш қийин эмас (юқоридаги ифодаларда A — бирор ўзгармас). Бунга ишонч ҳосил қилиш учун (48) ни назарга олган ҳолда бу функцияларни (56) формулага қўйишнинг ўзи етарли. Таксимот функциясининг ҳар қандай бошқа кўринишида (56) тенглама энергиянинг сақланиш қонунига мувофиқ келмайди.

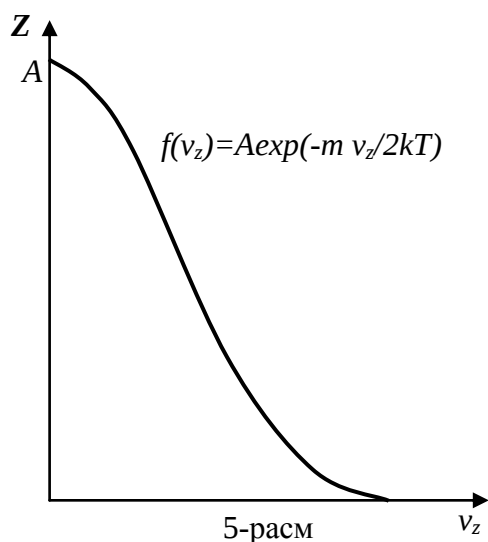
Шундай қилиб, z ўқ бўйлаб тезлик ташкил этувчилари бўйича молекулалар тақсимоти функцияси шундай кўринишда бўлади:

$$f(v_z) = A \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right). \quad (58)$$

Тезликларининг z -компоненталари v_z дан $v_z + dv_z$ гача интервалда ётган ҳажм бирлигидаги молекулалар сони энди қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$dn = n A e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \quad \text{ёки} \quad \frac{dn}{n} = A e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z. \quad (59)$$

Юқорида кўрсатиб ўтганимиздек, $\frac{dn}{n}$ газ ихтиёрий молекуласи тезлигининг z -компонентаси dv_z гача аниқликда v_z га тенг эканлиги эҳтимоллиги эди. Биз яна тақсимот функциясига кирувчи A ўзгармасни аниқлашимиз керак. Бунинг учун $\frac{dn}{n}$ ни v_z нинг $-\infty$ дан $+\infty$ гача мумкин бўлган барча қийматлари бўйича интеграллаш етарли. Молекулаларнинг мумкин бўлган тезликлари албатта $-\infty$ дан ∞ гача ёйилган эмас. Ҳар ҳолда



молекулаларнинг тезликлари ёруғлик тезлигига тенг бўлган ($3 \cdot 10^8$ м/сек) табиий чегаравий қиймат билан чекланган. Шунинг учун функцияни $-\infty$ дан ∞ гача $\exp(-m v_z^2 / 2 k T)$ чегараларда интеграллаш нотўғри бўлиб кўриниши мумкин.

Ҳақиқатда эса, интеграллаш учун худди шу чегараларнинг олиниши ҳеч қандай хатога олиб келмайди. Бунинг сабаби шуки, $\exp(-m v_z^2 / 2 k T)$ функция v_z нинг қийматлари ортиши билан жуда тез камайиб кетади. Масалан, v_z нинг нисбатан кичик қийматларидаёқ, яъни $m v_z^2 / 2 k T \approx 5$ бўлган қийматларидаёқ, бу функциянинг қиймати унинг $v_z = 0$ даги бирга тенг бўлган қийматининг 1 % ига яқинини ташкил қилади.

Бунда биз газ молекуласининг бирор қийматли z -компонентали тезликка эга бўлиш эҳтимоллигини оламиз. Бундай эҳтимоллик бирга тенг, чунки ҳар қандай молекула тўғрисида бу молекула қандайдир z -компонентали тезликка эгадир, деб ишонч билан айтиш мумкин ($v_z = 0$ қиймат бошқа қиймат билан тенг аҳамиятли!). Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n} = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} dv_z = 1, \quad (60)$$

бундан

$$A = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} dv_z \right)^{-1}. \quad (61)$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун янги ўзгарувчи $x^2 = m v_z^2 / 2 k T$ киритамиз. У ҳолда

$$v_z = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} x \quad \text{ва} \quad dv_z = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} dx. \quad (62)$$

Шунинг учун,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} d v_z = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} d x. \quad (63)$$

Маълумки, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} d x = \sqrt{\pi}$. Бинобарин,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} d v_z = \sqrt{\frac{2 \pi k T}{m}}. \quad (64)$$

(58) тенгламадаги бизни қизиқтираётган A ўзгармас қуйидагига тенг:

$$A = \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{1/2}. \quad (65)$$

Таксимот функциясининг ифодаси шундай кўринишга келади:

$$f(v_z) = \frac{dn}{n dv_z} = \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}}. \quad (66)$$

Бу функциянинг график тасвири 5-расмда кўрсатилган. Графикдан $f(v_z)$ функциянинг $v_z \rightarrow \infty$ да нолга интилиши кўриниб турибди. Бироқ тезлигининг z – компонентаси нолга тенг бўлган молекулалар улуши нолга тенг эмас. (66) формуладан ва 5-расмдаги эгри чизикдан тезликларининг z – компонентаси нолга яқин бўлган молекулалар улуши A га тенг (бу ўзгармаснинг физикавий маъноси ҳам шундан иборат). Температура ортиши билан бундай молекулалар улуши камаяди.

Молекулаларнинг тезлик ташкил этувчилари бўйича таксимот функциясини оғирлик кучи таъсиридаги газ ҳоли учун ҳосил қилган эдик. Молекулаларнинг тезлик ташкил этувчилари бўйича таксимот функцияси кўриниши қандайдир йўсинда оғирлик кучининг таъсири билан боғланган ёки оғирлик кучи ана шундай тақсимланишни ҳосил қилади деган маънони билдирмайди. Юқорида кўрсатиб ўтганимиздек, биз таксимот функциясини чиқаришда фойдаланган барометрик формуланинг ўзи молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимланишининг натижасидир. Молекулаларнинг тезликлар бўйича таксимот қонунини (формуласини) келтириб чиқаришда оғирлик кучининг роли фақат шундан иборатки, оғирлик кучи газда шундай таксимот мавжуд эканини «намоён» қилади. Оғирлик кучининг бундай тақсимланишининг қарор топишида ҳеч қандай роли йўқ эканлиги таксимот функцияси ифодасида оғирлик кучини характерловчи g катталиқнинг иштирок этмаслигидан ҳам кўриниб турибди.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти

Газ молекулаларининг тезликларнинг z -компоненталари бўйича таксимот функциясининг юқорида чиқарилган ифодаси

$$\frac{dn_z}{n dv_z} = A e^{-\frac{m v_z^2}{2 k T}} \quad (67)$$

тезликнинг фақат z -компонентаси учунгина «имтиёзли» эмас. Молекулаларнинг тезликларнинг бошқа компоненталари бўйича тақсимот функциялари ҳам шундай аниқланиши керак, шунинг учун

$$\frac{dn_x}{n dv_x} = A e^{-\frac{m v_x^2}{2 k T}}, \quad \frac{dn_y}{n dv_y} = A e^{-\frac{m v_y^2}{2 k T}}. \quad (68)$$

Энди биз молекула тезлигининг айти бир вақтда уч шартни қаноатлантириш эҳтимоллигини топишимиз мумкин:

1) тезликнинг X ўқ бўйича ташкил этувчиси v_x дан $v_x + dv_x$ гача чегараларда ётади;

2) тезликнинг Y ўқ бўйича ташкил этувчиси v_y дан $v_y + dv_y$ гача чегараларда ётади;

3) тезликнинг z ўқ бўйича ташкил этувчиси v_z дан $v_z + dv_z$ гача чегараларда ётади.

Тезлик ташкил этувчиларининг ҳар бир координата ўқлари бўйича қийматлари бошқа ўқлар бўйича ташкил этувчиларининг қийматларига боғлиқ бўлмайди. Шунинг учун молекула тезлигининг бир вақтда кўрсатилган учала шартни қаноатлантириш эҳтимоллиги бу мураккаб «воқеа» нинг эҳтимоллигидир. Бундай эҳтимоллик эса ҳар бир алоҳида воқеалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг эканлигини биламиз. Агар биз координата ўқлари бўйича ташкил этувчилари юқорида кўрсатилган чегараларда бўлган ҳажми бирлигидаги молекулалар сонини dn_{xyz} билан белгиласак, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

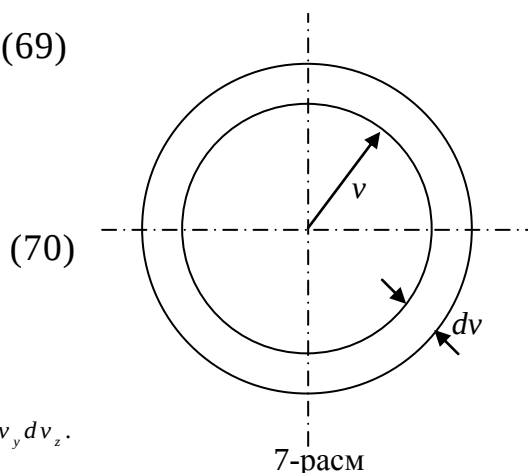
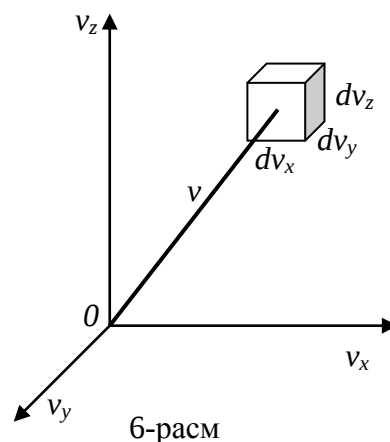
$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A^3 e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} dv_x dv_y dv_z, \quad (69)$$

бу ерда $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Бундан

$$dn_{xyz} = n A^3 e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} dv_x dv_y dv_z$$

ёки

$$dn_{xyz} = n \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} dv_x dv_y dv_z. \quad (71)$$



Бу формула ҳажм бирлигидаги газ молекулалари сонидан қанчаси координата ўқлари бўйлаб ташкил этувчилари v_x ва $v_x + dv_x$, v_y ва $v_y + dv_y$, v_z ва

$v_z + dv_z$ интервалларда ётган тезликли молекулалар эканини, яъни тезликлари катталиги жиҳатидан ҳам, йўналиши жиҳатидан ҳам берилган интервалда ётувчи молекулалар сонини кўрсатади. Бу формулага яққол геометрик маъно бериш мумкин.

Газнинг ҳажм бирлигидаги v тезлик компоненталари юқорида кўрсатилган интервалларда бўлган барча молекулаларни тўпладик ва уларни чиқариб юбордик деб фараз қилайлик. Бир секунддан сўнг уларнинг ҳаммаси бошланғич вазиятдан v масофада ва томонлари dv_x , dv_y , dv_z бўлган параллелепипед ичида, яъни $d\omega = dv_x dv_y dv_z$ ҳажмда бўлади. Бу 6-расмда бизнинг фикрий тажрибамиз ўзига хос координаталар системасида тасвирланган бўлиб, унинг ўқлари бўйлаб v_x , v_y ва v_z ташкил этувчилар қўйилган. Бу параллелепипеднинг ҳажм бирлигидаги молекулалар сони (71) формулага мувофиқ (газнинг ҳажм бирлигидаги молекулалар сони билан чалкаштирмаслик керак: бу ерда гап тезликлар «фазоси» даги ҳажм бирлиги устида боради) қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{dn_{xyz}}{d\omega} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (72)$$

Бу катталик, албатта, v тезлик векторининг йўналишига боғлиқ бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун энди молекулаларнинг тезликлар бўйича уларнинг йўналишига боғлиқ бўлмаган ҳолда тақсимот функциясини топиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, газнинг ҳажм бирлигидаги тезликлари барча йўналишлар бўйича v дан $v + dv$ гача интервалда бўлган барча молекулаларни бир жойга тўпласак ва сўнгга чиқариб юборсак, улар ҳар томонга учиб кетиб, 1 секунддан сўнг радиуси v ва қалинлиги dv бўлган шар қатламида (7-расм) текис тақсимланган бўлади. Бу шар қатлами биз юқорида қайд қилган «параллелепипедлар» нинг йиғиндисидан иборат бўлади. Бу қатлам ҳажм бирлигидаги молекулалар сони (яна газ ҳажми бирлигидаги молекулалар сони билан чалкаштирмаслик керак) ҳар бир параллелипипеддаги сингари бўлади, яъни (71) формула билан аниқланади. *Бутун* қатламдаги молекулалар сони эса газ ҳажми бирлигидаги тезликлари v дан $v + dv$ гача бўлган интервалда ётган молекулалар сонидир.

Бу сон қуйидагига тенг бўлиши равшан

$$dn = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\Omega, \quad (73)$$

бу ерда $d\Omega$ – шар қатламининг $4\pi v^2 dv$ га тенг бўлган ҳажми. Шундай қилиб,

$$dn = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (74)$$

ёки

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (75)$$

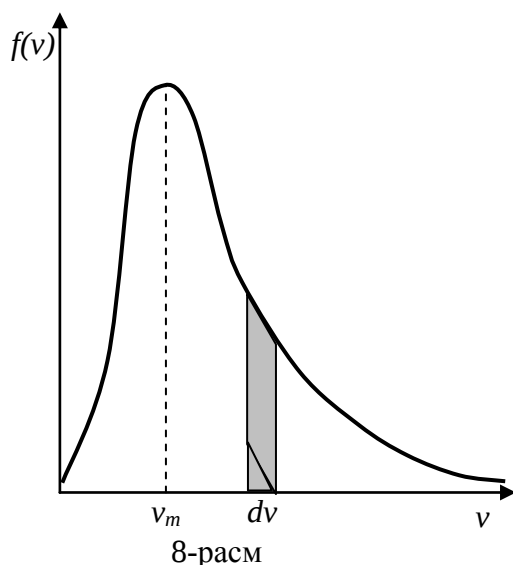
Бу формула молекулаларнинг тезликлар бўйича Максвелл тақсимот қонунини ифодалайди.

$\frac{dn}{n}$ катталиқ—газнинг ихтиёрий танланган молекуласи албатта v ва $v + dv$ орасидаги интервалда ётувчи тезликка эга бўлиши эҳтимоллигидир. Бошқача айтганда, $\frac{dn}{n}$ катталиқ тезликлари v дан $v + dv$ гача интервалда ётган ҳажм бирлигидаги барча молекулаларнинг улушидир.

Қуйидаги

$$f(v) = \frac{dn}{n dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (76)$$

катталиқ молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимот функциясидир. Бу функция газ ҳажми бирлигидаги молекулаларнинг тезликлари айна шу тезликни ўз ичига олган тезликларнинг бирга тенг интервалида ётган улушини билдиради.



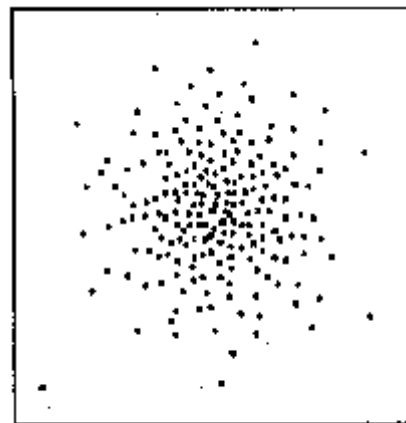
Максвелл тақсимот функциясининг кўриниши график равишда 8-расмда кўрсатилган. Бу функция $v = 0$ ва $v \rightarrow \infty$ да нолга айланади, бундай бўлиши табиий: газда ҳаракатсиз молекулалар ва тезликлари чексиз катта бўлган молекулалар йўқ. 8-расмдаги эгри чизиқдан тезликнинг бирор $v_{э}$ қийматида тақсимот функция максимумга эга бўлиши кўриниб турибди, яъни газ барча

молекулаларининг энг кўп улуши $v_{э}$ га яқин тезликлар билан ҳаракатланади. Шунингдек, бундай дейиш мумкин: газ молекулаларида $v_{э}$ га яқин бўлган тезликлар бошқаларидан кўпроқ учрайди, молекуланинг тезлиги $v_{э}$ га яқин бўлиш эҳтимоллиги энг каттадир. Шунинг учун Максвелл тақсимои эгри чизиғининг максимуми энг катта эҳтимолликли тезлик дейилади.

Молекулаларнинг тезликлари тақсимои ва тезлик компоненталари бўйича тақсимои орасидаги фарқни яхши тушуниш учун тасодифийлик қонунлари худди молекулаларнинг тақсимоидаги каби асосий роль ўйнайдиган бошқа процессни қараб чиқамиз.

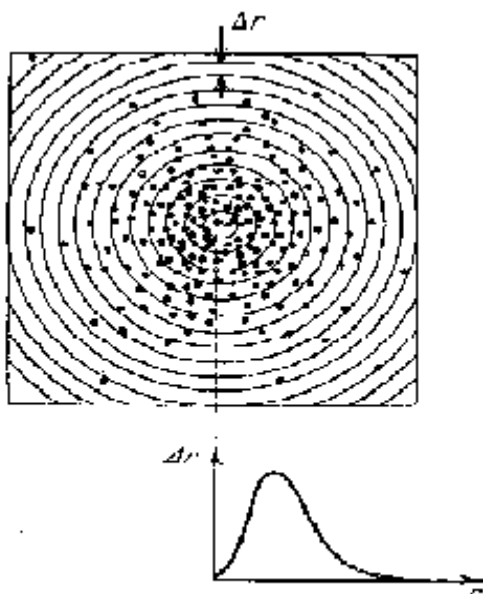
Фараз қилайлик, нишоннинг марказидаги нуқтаси мўлжалга олиниб ўқ узилаётган бўлсин. Отувчи қанчалик мерган бўлмасин ва қурол қанчалик аниқ созланган бўлмасин, ўқлар мўлжалланаётган нуқтага аниқ тегмайди, балки нуқта атрофида бирор масофада ёйилган бўлади (9-расм).

Бунга амалда ҳисобга олиш мумкин бўлмаган бир қанча сабаблар бор: патрондаги зарядлар тамомила бир хил бўлмаслиги, шамолнинг таъсири ва шунга ўхшашлар (газда эса бундай тасодифий факторлар ролини молекулалараро тўқнашувлар ўйнайди, бу ҳақда кейинроқ тўхталиб ўтамиз). Жуда кўп ўқ узилганда ўқларнинг мўлжалланаётган нуқта атрофида тақсимланиши, яъни нуқтагача бўлган масофалари бўйича тақсимланиши муайян қонунга бўйсунар экан. Бу қонун характери аниқлаш қийин эмас. 9-расмда ўқларнинг мўлжалланаётган нуқта атрофидаги теккан жойлари тасвирланган. Бундай тақсимотни икки хил баҳолаш мумкин. Нишоннинг бутун майдонини, отиш бўйича мусобақаларда қилинадигандек, бир-биридан тенг Δr масофаларда қатор айланалар ўтказиб, ҳалқасимон полосаларга ажратиш ва ҳар бир полосадаги ўқ ўрнининг Δn сонини аниқлаш, яъни мўлжалланган нуқтадан r масофадаги r дан $r + \Delta r$ гача интервалга тўғри келувчи ўқлар ўрни сонини аниқлаш мумкин. Агар марказий доира кичик бўлса, ундаги ўқлар ўрни нолга яқин бўлади, чунки жуда кичик доирани мўлжаллаб бўлмайди. Ҳалқасимон полосаларнинг марказдан узоқлиги ортган сари ўқлар ўрни сони аввал орта боради, бирор максимумга етгандан кейин камаяди ва етарлича узоқлашгач, нолга тенг бўлади (10-расмдаги эгри чизикқа қаранг).

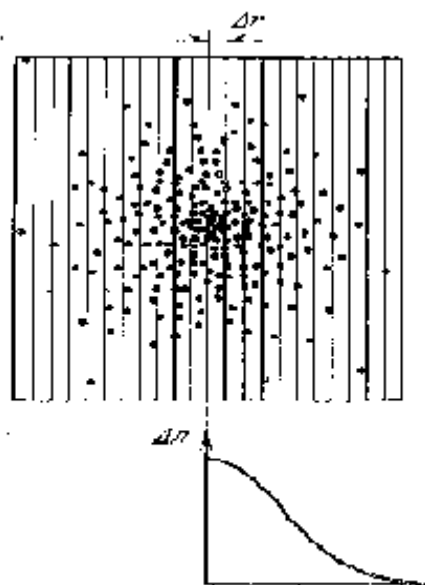


9-расм

Бошқача йўл тутиш ҳам мумкин. Нишон майдонини бир-биридан худди шундай Δr масофада турган қатор параллел чизиклар воситасида полосаларга бўламиз (11-расм). Энди ҳар бир полосага тўғри келадиган ўқ ўринлари ҳисобланса, унинг марказий полосадан узоқлашган сари Δn



10-расм



11-расм

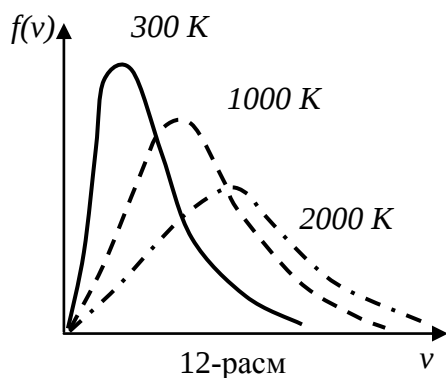
монотон камайиб боришини, мўлжалланган нуқтадан етарлича катта масофада нолга интилишини расмдан осон кўриш мумкин; бу 11-расмдаги эгри чизиқдан ва 5-расмдаги шунга ўхшаш эгри чизиқдан кўриниб турибди. Баён қилинган усулларнинг биринчиси $f(v)$ функцияни аниқлаш, иккинчиси эса $f(v_x)$ тезликнинг компоненталари бўйича тақсимот функциясини аниқлаш усулидир.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимот эгри чизигидан фойдаланиб, ҳажм бирлигидаги газ молекулаларининг тезликлари берилган

dv тезликлар интервалида бўлган $\frac{dn}{n}$ улушини график тарзда аниқлаш

мумкин. Бу улуш 8-расмдаги асоси dv ва баландлиги $f(v)$ бўлган штрихланган полосанинг майдонига тенг. Тақсимот эгри чизиги ва текисликлар ўқи орасидаги ҳамма майдон ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг умумий сонини бериши равшан. (76) формуладан кўриниб турганидек, тақсимот эгри чизигининг кўриниши газнинг табиати ва температурасига боғлиқ (формулага молекуланинг массаси m киради).

12-расмда азот молекулаларининг турли температураларда тезликлар бўйича тақсимланиш эгри чизиқлари берилган. Бу эгри чизиқлар температуранинг ортиши билан молекулаларнинг тезликлари ортишини, бутун эгри чизиқнинг эса катта тезликлар томонига силжишини кўрсатади. Бироқ эгри чизиқлар ва тезликлар ўқи билан чегараланган майдон, албатта, ўзгармайди. Шу туфайли температура ортиши билан эгри



чизиқнинг максимуми пасаяди.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича Максвелл тақсимоти тенгламасини чиқаришда молекулалараро тўқнашувларни мутлақо инобатга олмадик, ҳолбуки тўқнашувлар молекулаларнинг тезликларига, яъни уларнинг тезликлар бўйича тақсимланишига таъсир кўрсатмай иложи йўқ. Аслида эса ана шу тўқнашувлар туфайлигина тезликлар бўйича Максвелл

тақсимоти юзага келади. Ҳақиқатан ҳам, газ шундай ҳолатдаки, унинг барча молекулалари бирдай тезликка (модули жиҳатидан) эга деб фараз қилайлик. Бундай ҳолат турғун (мувозанат) ҳолати бўла олмайди, чунки тўқнашувлар шунга олиб келадики, молекулаларнинг тезликлари бирдай бўлмай қолади. Икки молекуланинг ҳар қандай тўқнашувида бир молекуланинг тезлиги ортади, иккинчисиники камаяди. Максвелл биринчи марта шунга эътибор бердики, унингча, тўқнашувларда тезликлари ортадиган молекулалар сони тўқнашувлар натижасида тезликлари камаядиган молекулалар сонига тенг бўладиган ҳолат бўлиши керак. Бундай ҳолат мувозанат ҳолати бўлади. Молекулаларнинг тезликлар бўйича Максвелл тақсимоти худди шундай ҳолатга мувофиқ келади. Кейинчалик Больцман шуни кўрсатдики, агар газ молекулаларининг тезликлар бўйича

тақсимоти Максвелл тақсимоти бўйича бўлмаган ҳолатда бўлса, бундай газ молекулаларининг тўқнашувлари туфайли Максвелл тақсимоти бўладиган ҳолатга ўз-ўзидан ўтар экан.

Максвелл тақсимоти (баъзида Максвелл-Больцман тақсимоти деб ҳам юритилади)—*мувозанатли* тақсимотдир. Биз бу тақсимотни қарашни уни мувозанатли тақсимот деб қарашдан бошладик. Шунинг учун, масалан, (58) формулани чиқаришда тўқнашувларни ҳисобга олиш керак бўлмади. Агар Δz_0 қатламни ташлаб кетган қандайдир молекулалар тўқнашувлар туфайли Δz қатламга етмаган бўлса, бунинг ўрнига бу қатламга етиши лозим бўлмаган қандайдир бошқа молекулалар тўқнашувлар туфайли бу қатламга етган.

Газда бўладиган молекуляр ҳаракатларни ҳамма вақт биз хаотик деб атадик. Энди иссиқлик ҳаракатларининг хаотиклиги тушунчасига аниқ таъриф беришимиз мумкин: *агар молекулалар тезликлари Максвелл қонунига мувофиқ тақсимланган бўлса, молекулаларнинг ҳаракати батамом тартибсиз (хаотик) бўлади.*

Газ мувозанат ҳолатда бўлганида молекулалар ана шундай тамомила хаотик ҳаракатда бўлади. Бу мувозанатли ҳолат *температура* катталиги билан, температура эса ўз навбатида молекулалар ҳаракатининг ўртача кинетик энергияси билан характерланади. Бундан температуранинг айти шу *хаотик* ҳаракатлар ўртача кинетик энергияси билан аниқланиши келиб чиқади. Молекулаларнинг ҳар қандай йўналган ҳаракатлари, бундай ҳаракатда уларнинг тезликлари қандай бўлмасин, температурага ҳеч қандай алоқадор эмас. Кучли шамол ҳосил қилган ҳаво тезлиги қанчалик катта бўлмасин, у ҳавони иситмайди. Ҳатто энг кучли шамоллар ҳам иссиқ ёки совуқ бўлиши мумкин, чунки газнинг температураси шамолнинг йўналишли тезлиги билан эмас, молекулаларнинг бутун газдаги йўналишли ҳаракати билан бирга бу ҳаракатидан мустақил равишда хаотик ҳаракатлари билан белгиланади.

Молекулаларнинг ўртача тезликлари

Максвелл тақсимот функциясидан фойдаланиб, молекуляр физика учун муҳим бўлган бир қатор катталикларни ҳисоблаш мумкин. Бу ерда мисол тариқасида ўртача арифметик тезлик $\bar{v}$ ни, ўртача квадратик тезлик $\bar{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$ ни ва энг катта эҳтимолли тезлик $v_{y-y.}$ ни келтириб чиқарамиз. Молекулаларнинг ўртача арифметик тезликларини ҳисоблашдан бошлаймиз.

Ўртача арифметик тезлик $\bar{v}$ деб, ҳажм бирлигидаги ҳамма молекулаларнинг ҳамма тезликлари йиғиндисининг ҳажм бирлигидаги молекулалар сонига нисбати билан аниқланувчи физикавий катталикка айтилади.

Ҳажм бирлигида тезликлари v дан $v + dv$ гача интервалда ётган молекулалар сони $nf(v)dv$ га тенг бўлиши равшан. Бундай барча молекулалар тезликлари

йиғиндиси $\int_0^\infty v n f(v) dv$ га тенг. Хар қандай тезликка эга бўлган барча молекулаларнинг тезликлари йиғиндисини топиш учун бу функцияни нолдан чексизликкача мумкин бўлган барча тезликлар бўйича интеграллаш керак. Бинобарин, барча тезликларнинг йиғиндиси қуйидагига тенг бўлади:

$$\int_0^\infty v n f(v) dv, \quad (77)$$

ўртача арифметик тезлик эса

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \int_0^\infty v n f(v) dv = \int_0^\infty v f(v) dv. \quad (78)$$

Бу ерга $f(v)$ учун аввал олинган (76) ифодани қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} dv \quad (79)$$

Бу ифодага кирадиган интегрални ҳисоблаш учун интеграл ости ифодани ўзгартирамиз:

$$v^3 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} dv = v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} v dv. \quad (80)$$

Бундаги $v dv = \frac{1}{2} d(v^2)$ бўлгани учун

$$v^3 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2} v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} d(v^2) \quad (81)$$

ва

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} d(v^2). \quad (82)$$

Янги ўзгарувчи $z = m v^2 / 2kT$ киритиб, интегрални шундай ёзамиз:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}} d(v^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \int_0^\infty z e^{-z} dz \quad (83)$$

ва бўлаклаб интеграллаш йўли билан қуйидагини оламиз:

$$\int_0^\infty z e^{-z} dz = 1. \quad (84)$$

Шундай қилиб, (79) формуладаги интеграл учун шундай ифодани оламиз:

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} dv = 2 \left(\frac{k T}{m} \right)^2. \quad (85)$$

Уни (79) га қўйиб $\bar{v}$ учун шундай ифодани келтириб чиқарамиз:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k T} \right)^{3/2} \cdot 2 \left(\frac{k T}{m} \right)^2 = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}}. \quad (86)$$

Тезликнинг бирор координата ўқи бўйича *ташқил этувчисининг* ўртача арифметик қийматини ҳам худди шундай тарзда ҳисоблаш мумкин.

Умуман айтганда, тезликнинг ихтиёрий компонентасининг ўртача қиймати нолга тенг бўлиши мумкин, чунки тезликнинг компонентаси тенг эҳтимоллик билан мусбат ва манфий бўлиши мумкин. Бироқ бундай компонента *модулининг* ўртача қиймати тўғрисида бундай деб бўлмайди. Масалан, тезликнинг *x*-компонентаси модулининг ўртача арифметик қийматини, яъни $|\overline{v_x}|$ катталикини топайлик. Унинг учун (78) га ўхшаш тенгламани ёзиш мумкин:

$$|\overline{v_x}| = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x) dv_x. \quad (87)$$

Бу ерда $f(v_x)$ —молекулаларнинг v_x ташқил этувчи бўйича тақсимот функцияси бўлиб, биз уни аввал топган эдик:

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2 k T}}. \quad (88)$$

Бу ифодани (87) ифодага қўйиб ёзамиз:

$$|\overline{v_x}| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2 k T}} dv_x. \quad (89)$$

Бу формулага кирувчи интеграл $m v_x^2 / 2 k T \equiv z^2$ ўзгарувчи алмаштириш йўли билан олинади. У ҳолда $|\overline{v_x}|$ учун шундай ифода ҳосил бўлади:

$$|\overline{v_x}| = \sqrt{\frac{2 k T}{\pi m}}. \quad (90)$$

(86) ва (90) ифодаларни таққослаб *x*- компонента модулининг ўртача қиймати $|\overline{v_x}|$ тезликнинг ўртача қиймати $\bar{v}$ дан икки марта кичик эканини аниқлаймиз:

$$|\overline{v_x}| = \bar{v} / 2. \quad (91)$$

Бу ифода бизга вақт бирлиги ичида идиш деворининг бирлик юзига урилаётган молекулаларнинг ўртача урилишлари сонини топишдан иборат қизиқарли масалани ҳал қилишга имкон беради.

Δt вақт ичида юзи S бўлган майдонни кесиб ўтувчи молекулаларнинг сони $\frac{1}{2} n v_x S \Delta t$ га тенг бўлишини кўрсатиш мумкин. Бундан вақт *бирлиги* ичида

бирлик юзага $\frac{1}{2} n v_x$ молекула тушади деган хулоса чиқади. Бу ерда v_x ни унинг ўртача қиймати $\overline{|v_x|}$ билан алмаштириб, вақт бирлиги ичида бирлик юзага урилаётган молекулаларнинг ўртача сони $\bar{v}$ ни топамиз:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} n \overline{|v_x|} = \frac{n \bar{v}}{4}. \quad (92)$$

Молекулаларнинг ўртача квадратик тезлиги. Молекулаларнинг ўртача квадратик тезлиги $\sqrt{\overline{v^2}}$ ни топиш учун ҳажм бирлигидаги молекулалар тезликлари квадратлари йиғиндисининг ҳажм бирлигидаги молекулалар сонига нисбатини ҳисоблаш керак. Бундан аввалги мулоҳазаларимизни такрорлаб шундай ёзамиз:

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv. \quad (93)$$

Бу ерда $f(v)$ учун (76) ифодани қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (94)$$

Бу ифодадаги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз ва қуйидаги натижани оламиз:

$$\int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{3}{8} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \sqrt{\pi}. \quad (95)$$

Бундан

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} \quad \text{ва} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (96)$$

Аввал ҳам шундай ифодани чиқарган эдик.

Молекулаларнинг энг катта эҳтимолли тезлиги

Энди молекулаларнинг энг катта эҳтимолли тезлиги $v_{\dot{y},\dot{y}}$ ни, яъни энг кўп сондаги молекулаларнинг тезликлари яқин бўлган тезликни ҳисоблайлик. Бу тезликка Максвелл тақсимооти эгри чизигининг максимуми мос келади (8-расмга қ.) Шунинг учун $v_{\dot{y},\dot{y}}$ тезликни топишда тақсимот функцияси (76) дан олинган ҳосилани нолга тенглаш керак:

$$\frac{d}{dv} f(v) = \frac{d}{dv} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right]. \quad (97)$$

Бу тенглик бажарилиши учун қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \right) = 0. \quad (98)$$

Дифференциаллаганимиздан сўнг қуйидагича ёзамиз:

$$2 v e^{-\frac{m v^2}{2 k T}} \left(1 - \frac{m v^2}{2 k T} \right) = 0. \quad (99)$$

Бу тенглик ёки $v = 0$, ёки $v = \infty$ бўлганда ёки $1 - \frac{m v^2}{2 k T} = 0$ шарт бажарилганда ўринли бўлади. Бу шартлардан аввалги иккитаси тақсимот эгри чизиғининг максимумига мос келмайди. Бинобарин, $v_{\text{ў.ў.}}$ нинг қиймати

$$1 - \frac{m v_{\text{ў.ў.}}^2}{2 k T} = 0 \quad (100)$$

шартдан топилар экан. Бундан

$$v_{\text{ў.ў.}} = \sqrt{\frac{2 k T}{m}}. \quad (101)$$

(86), (96) ва (101) ифодаларни таққослаб, тезликнинг ҳисоб-ланган учала қийматлари орасидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{v}{v_{\text{ў.ў.}}} = \sqrt{\frac{3 \pi}{8}} \frac{v}{v_{\text{ў.ў.}}} = 1,09 \frac{v}{v_{\text{ў.ў.}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_{\text{ў.ў.}}}{v_{\text{ў.ў.}}} = 1,22 \frac{v_{\text{ў.ў.}}}{v_{\text{ў.ў.}}}. \quad (102)$$

Бу учала қиймат орасидаги фарқнинг катта эмаслиги, ўртача арифметик, ўртача квадратик тезлик ҳам энг катта эҳтимолли тезликка яқин бўлиши кўриниб турибди.

Нисбий тезликлар учун Максвелл формуласи

Кўп масалаларни ечиш учун Максвелл формуласидан унинг молекулалар тезлигининг одатдаги эмас, балки нисбий бирликларда ифодаланган шаклидан фойдаланиш қулай. Бунда тезлик бирлиги учун молекулаларнинг энг катта эҳтимолли тезлиги $v_{\text{ў.ў.}}$ олинади. Бинобарин, нисбий тезлик u қуйидагига тенг бўлади

$$u = v / v_{\text{ў.ў.}}. \quad (103)$$

Бу ерда v — молекулаларнинг берилган тезлиги, $v_{\text{ў.ў.}}$ эса берилган температурадаги энг катта эҳтимолли тезликдир. Юқорида ҳозир аниқлаганимиздек

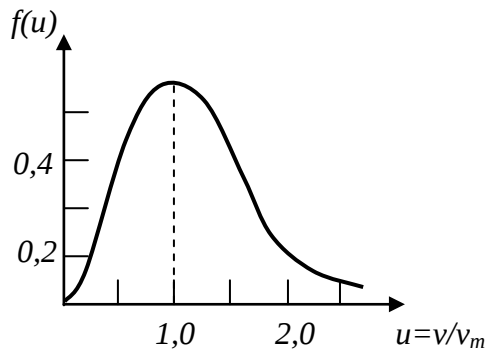
$$v_{\text{ў.ў.}} = \sqrt{2 k T / m}. \quad (104)$$

Максвелл формуласи

$$\frac{dn}{n dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (105)$$

да эса $\frac{m}{2kT}$ дан икkitаси қатнашади. Формуладаги бу ифодани унга тенг бўлган $1/v_{\text{ср.}}^2$ ифода билан алмаштириб ва $v/v_{\text{ср.}}$ ни u ҳарфи билан белгилаб, Максвелл тенгламасини шундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (106)$$



13-расм

Бу тенглама универсал тенгламадир. Тақсимот функцияси бу кўринишда газнинг турига ҳам, температурага ҳам боғлиқ бўлмайди.

Худди шундай тенгламани тезликларнинг координата ўқлари бўйича ташкил этувчиларига кўра молекулалар тақсимоти функцияси учун ҳам тузиш мумкин. Агар, масалан, тезликнинг x -компонентаси ҳақида бораётган бўлса, u ҳолда бу ерда

$u_x = v_x / v_{\text{ср.}}$ нисбий тезликни киритиб (12.5) тақсимот функциясини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dn}{n du_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_x^2}. \quad (107)$$

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимотига тегишли турли масалаларни ечиш учун тақсимот формулаларининг (106) ва (107) кўринишларидан фойдаланиш қулай. 13-расмда нисбий тезликлар учун тақсимот эгри чизиғи берилган.

Масалан,

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} \quad \text{ва} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_x^2} \quad (108)$$

функциялар u ва u_x ларнинг турли қийматлари учун аввалдан ҳисобланган ва графиклар тарзда берилган бўлиши ҳамда улардан изланаётган катталикларни аниқлаш мумкин. 1-жадвалда бу функциянинг кўпчилик масалаларни ечиш учун етарлича аниқликда ҳисобланган қийматлари берилган. Масалан, азот зарраларининг хона температурасида (300 К) тезликлари 275 ва 276 м/сек оралиғида бўлган молекулалар улушини топиш керак бўлсин.

Даставвал энг катта эҳтимолли тезликни топамиз:

$$v_{\text{ср.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2}{28}} \approx 394 \text{ м/сек.} \quad (109)$$

Нисбий тезлик u эса қуйидагига тенг бўлади:

$$u = \frac{v}{v_{\dot{y},\dot{y}}} = \frac{275}{394} \approx 0,70. \quad (110)$$

$u = v / v_{\dot{y},\dot{y}}$ ифодадан $du = dv / v_{\dot{y},\dot{y}}$ эканлиги келиб чиқади. Айни ҳолда тезликлар интервали 1 м/сек га тенг бўлиб, анча кичик ва $du = \frac{\Delta v}{v_{\dot{y},\dot{y}}} = 0,0025$ деб

1- ж а д в а л

u, u_x	$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}$	$f(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_x^2}$	u, u_x	$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}$	$f(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_x^2}$
0,1	0,022	0,558	1,2	0,770	0,133
0,2	0,087	0,542	1,3	0,703	0,104
0,3	0,185	0,515	1,4	0,623	0,079
0,4	0,308	0,480	1,5	0,535	0,059
0,5	0,439	0,439	1,6	0,447	0,044
0,6	0,567	0,393	1,7	0,362	0,031
0,7	0,677	0,345	1,8	0,286	0,022
0,8	0,761	0,297	2,0	0,165	0,010
0,9	0,813	0,251	2,2	0,086	0,004
1,0	0,830	0,208	2,4	0,041	0,002
1,1	0,814	0,168	3,0	0,003	-

ҳисоблаш мумкин. 1-жадвалдаги маълумотларга кўра яшаш осон бўлган графикдан $u = 0,70$ тезликка функциянинг қуйидаги қиймати мос келади:

$$\frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 = 0,677. \quad (111)$$

Бундан

$$\frac{dn}{n} = 0,677 \cdot 0,0025 = 1,7 \cdot 10^{-3}. \quad (112)$$

Демак, барча молекулаларнинг фақат 0,17% игина масалада берилган тезликлар интервалида ётар экан.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимооти билан боғлиқ бўлган муҳим масалалардан бири тезликлари берилган тезликдан юқори бўлган молекулалар улушини топишга доир масаладир. Бундай масалаларни ечиш учун ҳам нисбий тезликлар учун Максвелл формуласидан, яъни

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \quad (113)$$

формуладан фойдаланиш қулай.

Агар тезликлари бирор берилган v қийматдан, демак, муайян u қийматдан юқори бўлган молекулалар улушини топиш керак бўлса, u ҳолда тенгламани берилган u дан чексизликкача бўлган чегараларда интеграллаш керак эканлиги равшан, яъни

$$\frac{n_{>u}}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz, \quad (114)$$

бу ерда $n_{>u}$ — нисбий тезликлари берилган u дан катта бўлган молекулалар сони. Бинобарин, масалани ечиш бу ердаги интегрални ҳисоблашга келтирилади. 2-жадвалда u нинг турли қийматлари учун интегралнинг қийматлари берилган. Жадвалдан тезликлари энг эҳтимол тутилган тезликдан юқори бўлган молекулалар, яъни тезликлари $v > v_{y,y}$ бўлган молекулалар сони газдаги барча молекулаларнинг 57,24% га тенг эканлиги, яъни ярмидан кўп эканлигини кўриш мумкин.

2- ж а д в а л

u	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz$	u	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz$	u	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz$
0,1	0,9992	0,8	0,7340	1,5	0,2123
0,2	0,9941	0,9	0,6550	1,6	0,1632
0,3	0,9807	1,0	0,5724	1,7	0,1230
0,4	0,9582	1,1	0,4900	1,8	0,0905
0,5	0,9190	1,2	0,4105	1,9	0,0602
0,6	0,8685	1,3	0,3370	2,0	0,0460
0,7	0,8061	1,4	0,2702		

Бу деган сўз, Максвелл тақсимоти эгри чизиғи максимумга нисбатан симметрик бўлмайди ва шундай эканлиги юқорида берилган графиклардан ҳам равшан кўриниб турибди (8, 12, 13-расмларга қ).

Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимот қонуни ва планеталар атмосфералари

Ер атмосферасининг тамомила мувозанат ҳолатда бўлмаслиги ва олам фазосига ҳавонинг узлуксиз сочилиши мумкин эканлигига биз юқорида китобхон эътиборини жалб қилган эдик. Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимот қонуни бу масалани батафсил ўрганишга имкон беради.

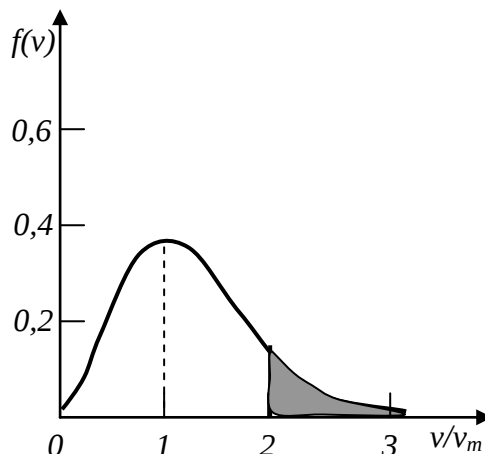
Бирор жисм Ернинг тортиш кучини енгиб, уни тарк этиши учун у иккинчи космик тезлик деб аталмиш $1,12 \cdot 10^4$ м/сек тезликка эга бўлиши лозим эканлиги маълум. Бундай тезликда жисм чексизликка узоқлашиш учун керак бўлган ишни бажара оладиган кинетик энергияга эга бўлади. Бу Ер атмосферасидаги ҳаво молекулаларига ҳам тегишлидир.

Максвелл тақсимоти қонунига мувофиқ, атмосфера молекулалари ичида тезликлари иккинчи космик тезликдан юқори бўлган молекулалар ҳам бор. Бинобарин, шундай (худди шундай) молекулаларгина атмосферани тарк этиб олам фазосига сочилиши мумкин. Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти формуласи Ер атмосфераси ҳавосида бундай молекулалар қанча эканлигини топишга имкон беради. Буни график равишда

хал қилиш энг қулай ҳисобланади. 14-расмда Максвелл тақсимоти эгри чизиғи берилган, бунда тезликлар абсцисса ўқи бўйлаб $v / v_{\text{ў.ў.}}$ нисбий бирликларда қўйилган ва бинобарин, эгри чизиқнинг максимумига (энг катта эҳтимолли тезликка) бирга тенг абсцисса мос келади. Иккинчи космик тезлик 0°C да $3,94 \cdot 10^2$ м/сек га тенг бўлган энг катта эҳтимолли тезликдан 28 марта катта:

$$\frac{1,12 \cdot 10^4}{3,94 \cdot 10^2} = 28$$

бўлгани учун 14-расмда $1,12 \cdot 10^4$ м/сек тезликка 28 га тенг бўлган абсцисса мос келади. Эгри чизиқнинг кўринишидан ҳеч қандай ҳисобларсиз ҳам атмосферада уни тарқатиш учун етарли тезликларга эга бўлган зарралар сони нақадар оз эканлиги кўриниб турибди. Таққослаш учун 14-расмда тезликлари $2v_{\text{ў.ў.}}$ ва $3v_{\text{ў.ў.}}$ орасидаги интервалда бўлган зарралар улушига тенг юз штрихланган. Тезликлари $28v_{\text{ў.ў.}}$ дан катта бўлган зарралар улуши бу диаграммадаги 28 рақамдан ўнг томондаги юзга тенг бўлар эди.



14-расм

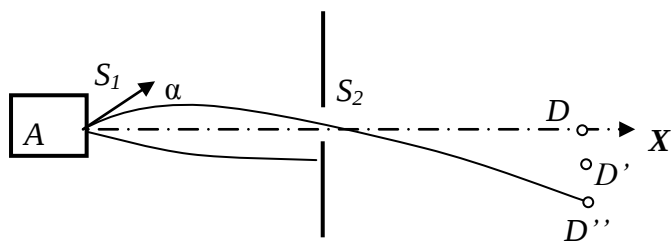
Массаси ва демак, тортишиш кучи ҳам Ерникидан кўплаб кичик бўлган Ой учун иккинчи космик тезлик $2,4 \cdot 10^3$ м/сек га тенг. Ўша диаграмманинг ўзида бу тезликка қиймати 6 га тенг абсцисса тўғри келади. Бундай тезликка эга бўлган зарралар улуши ҳам жуда кам, бироқ ҳар ҳолда агар Ойнинг қачонлардир атмосфераси бўлган бўлса, унинг атмосферасини бизнинг давримиздан узоқ вақтлар илгари амалда тамомила йўқотиши мумкин бўлиши учун бу улушни кам деб бўлмайди.

Тақсимот қонунини экспериментал текшириш

Молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимоти қонунини экспериментал текшириш учун, биз Штерн тажрибаларини баён қилишда танишган, молекуляр дасталар методидан фойдаланилган. Шу тажрибанинг ўзи ҳам унинг деталларини бироз ўзгартирилганда молекулалар тезликлари қийматини берибгина қолмасдан, молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимоти қонунини аниқлашга хизмат қилиши ҳам мумкин. Агар атомлар конденсацияси рўй берадиган нишон учун металл эмас, шиша ишлатилса, у ҳолда силжиган полосанинг турли қисмларидаги чўкманинг шаффофлигидан унга тушган атомлар сонини, бинобарин, уларнинг тезликлар бўйича тақсимланишини ҳам билиш мумкин. Штерннинг ўзи бундай тажрибани ўтказган, бироқ у эришган ўлчашлар аниқлиги етарли бўлмаган эди.

1947 йилда Штерннинг ўзи Истерман ва Симпсон билан биргаликда молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимотини текшириш учун бирмунча одатдан ташқари ва жуда қийин тажриба ўтказди, бу тажрибада ҳам молекуляр дасталар методидан фойдаланилди. Бу тажрибада даста молекулаларининг оғирлик кучи майдонида эркин тушиши кузатилди. Тажриба схемаси 15-расмда кўрсатилган.

Атомлар манбаи сифатида унча катта бўлмаган A печда 450K температурагача қиздирилган ва эриб буғланаётган (цезийнинг эриш температураси 301,65 K, ёки 28,5°C) цезийдан фойдаланилди. Печдан цезий атомлари кенглиги 0,02 мм бўлган s_1 тор горизонтал тирқиш орқали учиби чиқади. s_1 тирқишдан 1 м масофада худди биринчи тирқиш кенлигидаги иккинчи s_2 тирқиш жойлаштирилган. Йўғонлиги ҳам 0,02 мм бўлган ингичка вольфрам сим шаклидаги D нишон s_2 тирқишдан 1 м масофада жойлаштирилади (сим расм текислигига перпендикуляр). Шундай қилиб, дастанинг умумий L узунлиги манбадан нишонгача 2 м га тенг. Бутун қурилма юқори вакуумли цилиндрга жойлаштирилган. s_1 , s_2 тирқишлар ва D нишон битта аниқ горизонтал тўғри чизик бўйлаб жойлаштирилган.



15-расм

Нишонга тушаётган атомлар сони қуйидагича саналади. Сим-нишон орқали электр ток ўтказилиб, шундай температурагача қиздириладики, цезийнинг нишонга тушаётган атомлари ионлашиб, мусбат зарядланган ионларга айланади. Бу ионлар шу ондаёқ нишонни тарқ этиб, симни ўраб турган манфий зарядланган цилиндрга тушади, цилиндрда атомларнинг ўтишлари учун ёриқлар (тирқишлар) қилинган. Сим ва цилиндр орасида ионларнинг оқимидан иборат электр токи ўтади ва бу токни маълум кучайтиришдан сўнг ўлчаш мумкин (даста атомларни бундай қайд қилиш методи сиртқи ионизация методи деб аталади. Бу метод асосан осон ионланувчи атомлар, масалан, ишқорий металллар атомлари учун қўлланилади). Ток кучи ионлар сони орқали ва бинобарин, симга тушаётган атомлар сони орқали бевосита аниқланади.

Дастадаги цезий атомлари манбадан нишонгача бўлган икки метр йўлда оғирлик кучи таъсирида пастга «оғади» ва маълумки, парабола бўйлаб ҳаракатланади. Шунинг учун s_1 тирқишни X ўқ бўйлаб горизонтал тезлик билан тарқ этган атомлар s_2 тирқиш орқали ўтмайди ва нишонга тушмайди (15-расмдаги пунктир чизик). s_2 тирқишдан эса s_1 тирқишдан маълум кичик α бурчак остида чиққан атомларгина ўтади, бу расмда туташ чизик билан кўрсатилган.

Бундай зарралар траекториясининг ҳар қандай нуқтасининг x ва y координаталари учун қуйидаги маълум тенгликларни ёзиш мумкин:

$$x = v_x t, \quad y = v_y t - \frac{gt^2}{2}. \quad (115)$$

Бу икки тенгламадан вақтни йўқотсак, шундай тенглик оламиз:

$$y = v_y \frac{x}{v_x} - \frac{gx^2}{2v_x^2}. \quad (116)$$

Бу тенглама атомлар ҳаракатланадиган парабола тенгласидир.

Атомлар траекториясининг s_2 тирқиш орқали ўтадиган нуқтасида y координата нолга тенг, x координата эса $\frac{L}{2}$ га тенг. Бу нуқта учун (115) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$v_y \frac{L}{2v_x} - \frac{gL^2}{8v_x^2} = 0. \quad (117)$$

Бундан v_y катталики учун шундай ифодани ҳосил қиламиз:

$$v_y = \frac{gL}{4v_x}. \quad (118)$$

Бизни y катталики, яъни атомларнинг манбадан $x = L$ масофада X ўқдан силжиши қизиқтиради. (115) формулага x ўрнига L ва v_y ўрнига $\frac{gL}{4v_x}$ катталикларни қўйиб,

$$y = -\frac{gL^2}{8v_x^2} \quad (119)$$

ни топамиз.

Шундай қилиб, атомларнинг вертикал бўйича силжиши фақат v_x нинг қиймати билан аниқланади ва α бурчакнинг кичик қийматларида атомлар тезлигининг v қийматига жуда яқин бўлади (чунки $v_x = v \cos \alpha$ ва кичик бурчакларда $\cos \alpha$ бирга яқин). Сим-нишонни вертикал бўйлаб силжитиб (расмдаги D' ва D'' вазиятлар) ҳамда турли баландликларда ион токи (нишонга тушган атомлар сони) ни ўлчаб, турли тезликка эга бўлган атомлар сони топилади, бу атомларнинг тезликлар бўйича тақсимотини беради. Шунинг назарда тутиш керакки, симга y ёки бу баландликда тушаётган атомлар сонини ўлчаб, атомларнинг тезликлари бирор тезликлар *интервалида* ётган сони аниқланади, чунки сим қанча ингичка бўлмасин ҳар ҳолда чекли ва унга тезликлари айнан тенг эмас, балки бир-бирига яқин бўлган атомлар тушади.

Бу тажрибани ўтказишнинг қийинлиги шундаки, энг секин атомлар ҳам ҳаммаси бўлиб 0,2 мм га яқин баландликка силжийди (Штерн — Истерман — Симпсон тажрибасида энг катта эҳтимолли тезликли атомлар 0,174 мм га силжиган). Бир s_1 ва s_2 тирқишларнинг кенглиги ва сим-нишоннинг қалинлиги бор-йўғи 0,02 мм (дастанинг йўғонлиги ҳам шундай!) бўлгани учун ўлчашлар ҳар ҳолда етарлича катта аниқликда ўтказилган эди. Бу тажриба фақат цезий атомлари билангина эмас, тушиш баландлиги яна

ҳам кичик бўлган натрий атомлари дастаси билан ҳам етарлича аниқ ўтказилган. Ўлчашлар молекулаларнинг тезликлар бўйича Максвелл тақсимои қонунини тўла-тўқис тасдиқлади.

Молекуляр физика курсида статистик усуллардан фойдаланишга оид масалалар

1. 300 мм.сим.уст. босимда зичлиги 0,3 г/л бўлган газ молекулаларининг ўртача арифметик, ўртача квадратик ва эҳтимоллиги энг катта тезликлари топилсин.

Ечилиши: Расмда молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимои функциясининг графиги кўрсатилган. Унда g , $\bar{g}$ ва $\sqrt{g^2}$ тезликлар катталикларининг ўзаро жойлашуви кўрсатилган. Изланаётган тезликлар қуйидаги муносабатлар

билан ифодаланади. $g = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (1)$

$\bar{g} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \quad (2) \quad \text{ва} \quad \sqrt{g^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (3)$

Менделеев-Клапейрон тенгламасига кўра

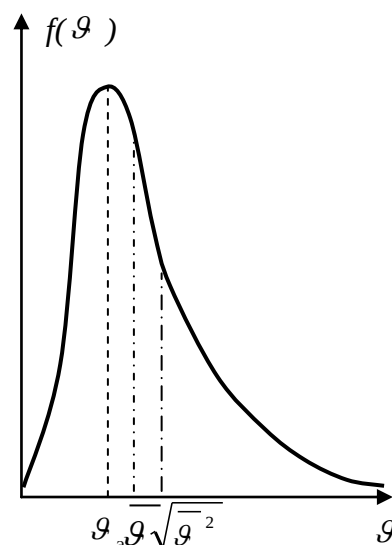
$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad p = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu},$

$\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho} \quad (4). \quad (4) \text{ ни } (1), (2) \text{ ва } (3) \text{ қўйиб:}$

$g = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}, \quad \bar{g} = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}} \quad \text{ва} \quad \sqrt{g^2} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$

1) $g = 513 \text{ м / сек}; \quad 2) \bar{g} = 579 \text{ м / сек}; \quad 3) \sqrt{g^2} = 628 \text{ м / сек}.$

$g < \bar{g} < \sqrt{g^2}$ олинган натижалар графикка мос келади.



2. Қандай температурада азот молекулаларининг ўртача квадратик тезлиги уларнинг эҳтимоллиги энг катта тезлигидан 50 м/сек га ортиқ бўлади?

Ечилиши: Эҳтимоллиги энг катта тезлик: $g = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}; \quad \text{ўртача}$

квадратик тезлик: $\sqrt{g^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad \text{Масала шартига кўра } \sqrt{g^2} = g + \Delta g;$

$\Delta g = \sqrt{g^2} - g = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \quad \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta g}{\sqrt{3} - \sqrt{2}},$

$T = \frac{\mu(\Delta g)^2}{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}, \quad T = 83,37 \text{ К}.$

3. 0°C да кислород молекулаларининг қанча қисми 100 м/сек дан 110 м/сек гача ораликдаги тезликларга эга бўлади?

Ечилиши: 1-усул. Максвелл қонунига кўра молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимланиши қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u, \quad (1) \quad \text{бунда } u\text{-нисбий тезлик } u = \frac{g}{g_0}. \text{ Масала}$$

шартига кўра $g = 100 \text{ м/сек}$ ва $\Delta g = 10 \text{ м/сек}$. Эҳтимоллиги энг катта тезлик

$$g_0 = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 376 \text{ м / сек}.$$

Демак, $u = \frac{g}{g_0} = \frac{100}{376}$ ва $u^2 = 0,071$ $e^{-u^2} = 0,93$ ва $\Delta u = \frac{10}{376}$. (1) га сон

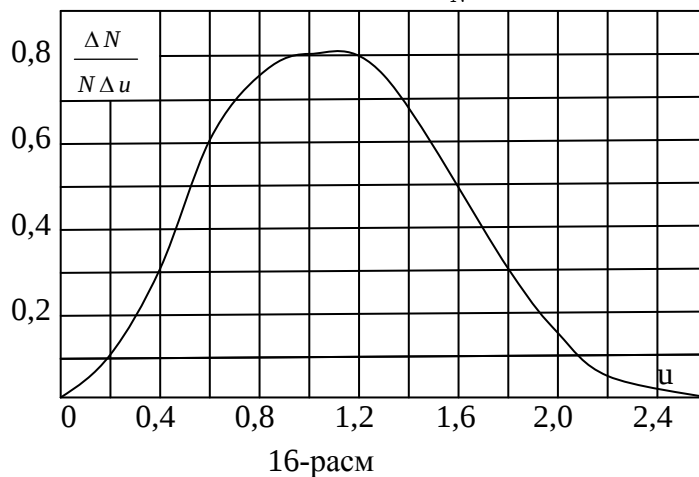
қийматларни қўйиб: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,93 \cdot 0,07 \cdot \frac{10}{376} = 0,004 = 0,4\%$. Шундай қилиб,

тезликлари кўрсатилган ораликда ётган молекулаларнинг сони молекулалар умумий сонининг $0,4\%$ ига тенг.

2-усул. Бу масалани 1- жадвалда берилганларга асосан чизилган $\frac{\Delta N}{N \Delta u} = f(u)$ графикдан фойдаланиб (16-расмга қаранг) ҳам, ечиш мумкин.

Бизда $u = 0,27$. Графикдан кўринадики, u нинг қийматига $\frac{\Delta N}{N \Delta u} \cong 0,16$ мос

келади. Бизда $\Delta u = 0,027$ бўлганлиги учун, $\frac{\Delta N}{N} = 0,16 \cdot 0,027 = 0,004 = 0,4\%$



4. 150°C да азот молекулаларининг қанча қисми 300 м/сек дан 325 м/сек гача ораликдаги тезликларга эга бўлади?

Ечилиши: Максвелл қонунига кўра $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u, \quad (1)$

u -нисбий тезлик $u = \frac{g}{g_0} \quad (2).$ $\Delta u = \frac{\Delta g}{g_0} = \frac{g_2 - g_1}{g_0}. \quad (3)$

$g_0 = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (4) \quad u^2 = \frac{g_1^2}{g_0^2} = \frac{g_1^2 \mu}{2RT}, \quad (5) \quad \Delta u = \frac{(g^2 - g^1) \sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}, \quad (6)$

(5) ва (6) ни (1) га қўйямиз:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g_1^2 \mu}{2RT}} \frac{g_1^2 \mu}{2RT} \frac{(g_2 - g_1) \sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}.$$

Бундан $\frac{\Delta N}{N} = 2,8\%$ эканлиги келиб чиқади.

5. Тезликлари $\sqrt{g^2}$ дан $\sqrt{g^2} + \Delta v$ интервалда ётган молекулаларнинг ΔN_1 сони тезликлари g_1 дан $g_1 + \Delta g$ интервалда ётган молекулаларнинг сони ΔN_2 дан неча марта кичик?

Ечилиши: 1-усул. Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимланиши учун Максвелл функциясида фойдаланамиз

$$f(g) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m g^2}{2kT}\right) \quad (1). \text{ Тезликлари } g_1 \text{ дан } g_1 + \Delta g \text{ гача бўлган}$$

молекулаларнинг нисбий сони $\frac{\Delta N_1}{N} = \int_{g_1}^{g_1 + \Delta g} f(g) dg \quad (2).$ Агар $g_1 \gg \Delta g$ бўлса, $f(g)$ функция бу интервалда $f(g_1) = \text{const}$ бўлади деб олиш мумкин. У ҳолда (2) дан қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\frac{\Delta N_1}{N} = f(g_1) \int_{g_1}^{g_1 + \Delta g} dg = f(g_1)[g_1 + \Delta g - g_1] = f(g_1) \Delta g.$$

$g_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ бўлганлиги учун (1) ва (2) тенгламалардан қуйидагини оламиз.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_1}{N} &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT} \frac{2kT}{m}\right) \frac{2kT}{m} \Delta g \\ \frac{\Delta N_1}{N} &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp(-1) \frac{2kT}{m} \Delta g \end{aligned} \quad (3)$$

Шунга ўхшаб иккинчи ҳол учун ҳам $\frac{\Delta N_2}{N} = \int_{\sqrt{g^2}}^{\sqrt{g^2} + \Delta g} f(\sqrt{g^2}) d\sqrt{g^2}$, аммо $\sqrt{g^2} \gg \Delta g$

бўлганлиги учун $f(\sqrt{g^2}) = \text{const}$. Ўртача арифметик тезлик ифодасидан фойдалансак $\sqrt{g^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_2}{N} &= f(\sqrt{g^2}) \int_{\sqrt{g^2}}^{\sqrt{g^2} + \Delta g} d\sqrt{g^2} = f(\sqrt{g^2}) \Delta g \\ \frac{\Delta N_2}{N} &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT} \frac{3kT}{m}\right) \frac{3kT}{m} \Delta g \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2}\right) \frac{3kT}{m} \Delta g \quad (4)$$

(3) тенгликни (4) бўлиб керакли муносабатни оламиз

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{\exp(-1) 2kT \Delta g / m}{\exp(-3/2) 3kT \Delta g / m} = \exp\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2}{3}.$$

Ҳисоблашларни бажариб қуйидаги ифодани оламиз $\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = 1,1$

2-усул. Таксимот функцияси, $\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u$, (1) $g = g_0$ бўлганлиги

учун $u = \frac{g}{g_0} = 1$ (2), $\Delta u = \frac{\Delta g}{g_0}$ (3). (2) ва (3) ни (1) қўйсақ қуйидаги ифода ҳосил бўлади

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \frac{\Delta g}{g_0} \quad (4)$$

Худди шу усулда $g = \sqrt{g_0^2}$ бўлганлиги учун $u = \frac{\sqrt{g_0^2}}{g_0} = \sqrt{\frac{3RT}{2\mu}} = \sqrt{1,5}$

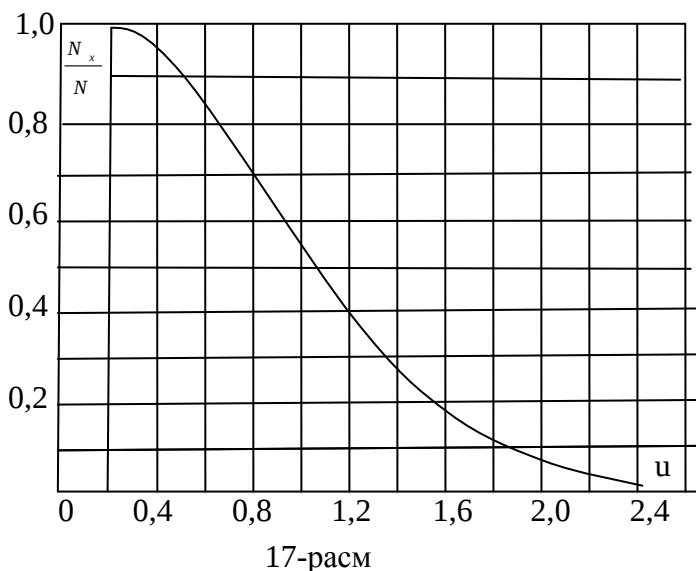
$$\frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1,5} 1,5 \frac{\Delta g}{g_0} \quad (5)$$

(5) ни (4) бўлсақ қуйидаги жавобни оламиз $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{e^{-1}}{e^{-1,5} 1,5} = \frac{e^{0,5}}{1,5} = 1,1$.

Ихтиёрий темепературада ихтиёрий газ учун $\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = 1,1$ га тенг.

6. $t = 150^\circ \text{C}$ температурада азот молекулаларининг қандай қисми $v_1 = 300 \text{ м / сек}$ дан $v_2 = 800 \text{ м / сек}$ интервалдаги тезликларга эга бўлади? *Ечилиши:* Берилган масаладаги тезликларнинг оралиғи катта бўлганлиги учун, Максвеллнинг формуласидан фойдаланиш мумкин эмас. Бу масалани қуйидагича ечамиз:

тезликлари мос равишда g_1 ва g_2 лардан катта бўлган молекулаларнинг N_1 ва N_2 сонларини топамиз. У вақтда изланаётган молекулаларнинг сони $N_x = N_1 - N_2$ бўлади. N_1 ва N_2 сонларни топиш учун 2-жадвалда берилганларга асосан чизилган $\frac{N_x}{N} = F(u)$ графикдан фойдаланамиз (17-расмга қаранг). Бу масалада



$g_0 = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 500 \text{ м / сек} \dots$ Демак,

$u_1 = \frac{300}{500} = 0,6$ ва $u_2 = \frac{800}{500} = 1,6$. 17- расмдаги графикдан u нинг қийматига мос

келувчи $\frac{N_1}{N} = 0,87 = 87\%$ ва $\frac{N_2}{N} = 0,17 = 17\%$ ни топамиз. Бу топилган миқдорлар шуни ифодалайдики, ҳамма молекулаларнинг 87% қисми 300 м/сек дан катта тезликлар билан ҳаракатланади ва фақат 17 % молекулалар 800 м/сек дан

катта тезликларга эга бўлади. У вақтда тезликлари 300 м/сек дан 800 м/сек гача ораликда бўлган молекулаларнинг нисбий сони $\frac{N_x}{N} = 87\% - 17\% = 70\%$ га тенг бўлади.

7. Идишда 1600° К температурали 8 г кислород бор. Илгариланма ҳаракатининг кинетик энергияси $w_0 = 6,65 \cdot 10^{-20} \text{ Ж}$ дан юқори бўлган кислород молекулаларининг сони қандай?

Ечилиши: Молекулаларнинг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси w_0 га тенг бўлиши учун, $\frac{m \vartheta_0^2}{2} = w_0$ тенгламани қаноатлантирувчи ϑ_0 тезликка эга бўлиши керак. Бундан $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2w_0}{m}}$. Молекулаларнинг эҳтимоллиги энг катта бўлган тезлиги $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Бўлганлигидан, бу молекулаларнинг нисбий тезлиги $u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_0} = \sqrt{\frac{w_0}{kT}} = 1,73$ га тенг бўлади. 17-расмдаги графикдан фойдаланиб нисбий тезликлари $u = 1,73$ дан катта бўлган молекулаларнинг $\frac{N_x}{N}$ нисбий сонини топамиз. $\frac{N_x}{N} = 0,12$. Шундай қилиб, берилган температурада кислороднинг 12% молекулалари w_0 энергиянинг берилган қийматидан катта кинетик энергияга эга бўлади. Идишдаги кислород молекулаларининг умумий сони $N = \frac{m}{\mu} N_A = 1,5 \cdot 10^{23}$.

Демак, $N_x = 0,12 N = 1,8 \cdot 10^{22}$.

8. Перрен микроскоп ёрдамида муаллақ гуммигут заррачалар концентрациясининг баландликка қараб ўзгаришини кузатади ва барометрик формулани қўллаб, экспериментал равишда Авогадро сонининг қийматини топди. Перрен тажрибаларидан бирида қатламларнинг ораси 100 мкм бўлганда пастки қатламдаги муаллақ гуммигут заррачаларининг сони юқори қатламдагидан 2 марта кўп эканлигини аниқлади. Гуммигутнинг температураси 20° С , $3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ диаметрли гуммигут заррачалари зичлиги заррачалар зичлигидан $0,2 \text{ г/см}^3$ га кам бўлган суюқликка аралаштирилган. Бу берилганларга асосан Авогадро сони топилсин.

Ечилиши: Барометрик формуладан фойдаланамиз $p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$ (1)

Концентрация (ҳажм бирлигидаги зарралар сони) $n = \frac{p}{kT}$ га тенг, бундан

$p = nkT$ (2). (2) ни (1) га қўйиб, h_1 ва h_2 баландлик учун мос келувчи

$n_1 = n_0 e^{-\frac{\mu gh_1}{RT}}$ ва $n_2 = n_0 e^{-\frac{\mu gh_2}{RT}}$ ларни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\mu g (h_1 - h_2)}{RT}} = e^{\frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}} \quad \text{ёки} \quad \ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}. \quad \text{Заррачанинг массаси}$$

$m = \frac{\mu}{N_0}$ бўлганлигидан, (3) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{N_0 m (h_2 - h_1) g}{RT}, \quad \text{бундан, Архимед қонунига асосан киритилган тузатмани}$$

назарга олган ҳолда охирги натижани ҳосил қиламиз

$$N_0 = \frac{RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{gV (\rho - \rho')(h_2 - h_1)} = 6,1 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1},$$

Бунда ρ -гидрогеннинг зичлиги ва ρ' -суюқликнинг зичлиги.

МУНДАРИЖА

Кириш _____	3
Эҳтимоллик ҳақида тушунча _____	5
Эҳтимолликларни қўшиш теоремаси _____	6
Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси _____	7
Эҳтимоллик ва физикавий катталикларнинг ўртача қиймати _____	8
Барометрик формула _____	9
Перрен тажрибаси _____	13
Больцман қонуни _____	16
Тақсимот ҳақида тушунча. Тақсимот функцияси _____	17
Тақсимот функцияси _____	18
Молекулаларнинг тезлик компоненталари бўйича тақсимоти _____	20
Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти _____	24
Молекулаларнинг ўртача тезликлари _____	30
Молекулаларнинг энг катта эҳтимолли тезлиги _____	33
Нисбий тезликлар учун Максвелл формуласи _____	34
Молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимот қонуни ва планеталар атмосфералари _____	37
Тақсимот қонунини экспериментал текшириш _____	38
Молекуляр физика курсида статистик усуллардан фойдаланишга оид масалалар _____	41

Икромов Рустамжон Ғуломжонович
Абдуллаев Ҳакимжон Олимжанович
Ёкуббаев Анасхон Акмалхонович

МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА КУРСИДА СТАТИСТИК УСУЛДАН ФОЙДАЛАНИШ

(Услубий қўлланма)

*НамДУ ўқув-услубий кенгаши томонидан «26» май 2010 йилда кўриб
чиқилган ва чоп этишига рухсат этиган: баённома №9*

Босма табоғи 3.

Адади 100

Наманган 2010