

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA KAFEDRASI O‘QITUVCHISI
BOHONOV ZAFAR SAYDIMAHMUDOVICHNING

“TOPOLOGIK FAZO BAZASI VA AJRALUVCHAN TOPOLOGIK FAZOLARGA
DOIR MISOLLAR YECHISH” MAVZUSIDAGI

AMALIY MASHG‘ULOT ISHLANMASI

Ushbu amaliy mashg‘ulot ishlanmasida ajraluvchan topologik fazolarga hamda topologik fazo bazasiga doir tushunchalar berilgan va misollar yechib ko‘rsatilgan. Ishlanma oxirida mustaqil yechish uchun misol va masalalar keltirilgan.

Biror X to'plam va uning qism to'plamlaridan iborat $\tau = \{G_\alpha\}$ oila berilgan bo'lsin. Bu oila chekli sondagi elementlarga ega bo'lishi ham mumkin. Jumladan, τ oilaga X to'plamning barcha qism to'plamlari tegishli bo'lishi mumkin. Shundan kelib chiqib, quyi α indeksning qabo'l qilishi lozim bo'lgan qiymatlari qanday to'plamga tegishli ekanligini ko'rsata olmaymiz. X to'plam elementlarini nuqtalar deyiladi.

Ta'rif. Xning qism to'plamlar oilasi $\tau = \{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilaylik.

- 1) τ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsin
- 2) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ ga tegishli bo'lsin.
- 3) $\emptyset$ bo'sh to'plam τ ga tegishli bo'lsin
- 4) X to'plam τ ga tegishli bo'lsin.

U holda τ oilani X dagi topologik struktura deyiladi. X to'plamda biror τ topologik struktura aniqlangan bo'lsa, holda (X, τ) juftlikka **topologik fazo** deyiladi. Biror to'plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi to'rtta shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlaridan iborat birorta oilani aniqlash etaridir. (X, τ) topologik fazo bo'lsa, Xning elementlarini nuqtalar deb, τ ga tegishli Xning qism to'plamlarini esa ochiq to'plamlar deb ataladi. 1)-4)-shartlarni topologik fazo aksiomalari deyiladi.

TOPOLOGIK FAZO BAZASI

(X, τ) - topologik fazo, $B = \{U_n\}$ - ochiq to'plamlar oilasi bo'lsin, ya'ni $U_n \in \tau$

Ta'rif. (X, τ) fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'plamini B oilaga tegishli to'plamlar yig'indisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, B oila (X, τ) topologik fazoning **bazasi** deyiladi,

Misol. $X = R^n$, τ – evklid topologiyasi bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy

$x \in A$ uchun $r_x > 0$ son mavjud bo'lib, $B_{r_x}(x) \in A$ bo'lsa A -ni ochiq to'plam deyiladi, A -ochiq to'plam bo'lsa, $A = \bigcup_x B_{2x}(x)$ ya'ni A -ni ochiq sharlar yig'indisi sifatida yozish mumkin.

Xulosa shuki, R^n da xamma ochiq sharlardan va bo'sh to'plamdan iborat oila Evklid topologiyasi uchun baza hosil qiladi. Umuman olganda, bu fakt ixtiyoriy (X, p) metrik fazo uchun o'rinlidir, ya'ni ochiq sharlar va bo'sh to'plamdan iborat oila metrik fazo uchun baza tashkil qiladi. Topologik fazo bazasi qo'yidagi xossalarga ega.

1. $B = \{U_\alpha\}$ oila (X, τ) topologik fazo bazasi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in X$ nuqta va uning ixtiyoriy U atrofi uchun B oilaga tegishli va $x \in U_{\alpha_0} \subset U$ munosabatni qanoatlantiruvchi U_{α_0} to'plamning mavjud bo'lishi zarur va Yetarli.

2. (X, τ) -topologik fazoda $B = \{U_\alpha\}$ oila baza bo'lsa, quyidagilar o'rinlidir:

1) $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ 2) $U_{\alpha_1} U_{\alpha_2}$ to'plamlar va ixtiyoriy $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ nuqta uchun U_{α_3} mavjud bo'lib, $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$

3. X - ixtiyoriy to'plam, $B = \{U_\beta\}$ qism to'plamlar oilasi uchun

1) $\bigcup_\beta U_\beta = X$,

2) $\emptyset \in B$

3) ixtiyoriy $U_{\beta_1}, U_{\beta_2} \in B$ to'plamlar va ixtiyoriy $a \in U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ nuqtaning U_{β_3} atrofi mavjud bo'lib $a \in U_{\beta_3} \subset U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ shartlar bajarilsa, X to'plamda yagona shunday τ topologiya mavjudki, (X, τ) fazo uchun B oila baza bo'ladi.

1.yordamida E^2 fazoda baza uchun mos ochiq sharlar oilasi va bo'sh to'plam olinsa, diskret topologiyalik fazoda baza bo'sh tuplamdan va har biri bitta nuqtadan tashkil topgan to'plamlar oilasidan iboratdir.

Topologik fazoning muxim sinfi sanoqli bazali topologik fazodir. E^n dagi bunday baza uchun ratsional koordinatali markazlarga va ratsional sonlardan iborat radislarga ega barcha ochiq sharlarni olish mumkin. Sanoqli bazaga ega bo'lmagan fazo uchun diskret topologiyalik har qanday sanoqsiz to'plamni olish mumkin. Vektor fazo mavzusidan bizga ma'lumki, bazis uchun chiziqli erkli vektorlar sistemasi olinadi. Fazoning har qanday vektorini ushbu vektorlar orqali chiziqli ifodalaniladi. Yuqorida biz qisim to'plamlarni har biri bitta nuqtadan va ϕ to'plamdan tashkiltopgan to'plamlar oilasini diskret topologiyalik fazo bazasi uchun olish mumkinligini takidladik.

Buning isboti har qanday ochiq tuplam o'zini barcha nuqtalari birlashmasidan iborat bo'lishdan kelib chiqadi.

AJRALUVCHAN (XAUSDORF) TOPOLOGIK FAZO

Ta'rif. Agar topologik fazoning har qanday ikki nuqtasi uchun o'zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo'lsa, u holda ushbu fazoning ajraluvchan yoki xausdorf fazosi deyiladi.

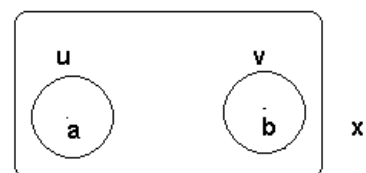
Ta'rifni qo'yidagicha talqin qilish mumkin: (X, τ) -Xausdorf topologik fazo bo'lsa, ixtiyoriy $a, b \in X, a \neq b$ nuqtalar uchun $U, V \in \tau$ to'plamlar mavjud bo'lib, $a \in U, b \in V$ va $U \cap V = \emptyset$ bajariladi.

U va V atroflar a va b nuqtalarni bir-biridan ajratadi.

Ta'rifdan natijalar:

1. (X, τ) Xausdorf topologik fazoda

har biriga bittadan nuqta qarashli bo'lgan qism to'plamlar yopiqdir.

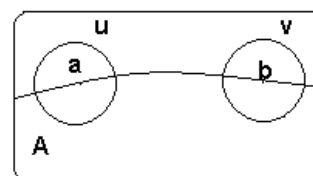


Xausdorf fazosida chekli to'plamlar yopiqdir.

2. Xausdorf fazosi X ning har qanday A qism fazosi ajraluvchan fazodir.

1-misol. Bittadan ortiq nuqtaga ega bo'lgan

antidiskret fazo ajralmaydi.



2-misol. Diskret fazo ajraluvchanlik xossaga ega.

3-misol. Har qanday metrik fazolar ajraluvchan

Ajraluvchan fazoda elementlar sonining ikkitadan kam bo'lmasligi talab etiladi.

Xausdorf fazosi aksiomalarini keltiraylik:

AA₀: Fazoda (T_0 -fazo) turlicha nuqtalarining har bir jufti uchun, nuqtalardan biri ikkinchisini o'z ichiga olmaydigan atrofga egadir.

AA₁: Fazoda ikkita turlicha nuqtalarning har bittasi ikkinchisini o'z ichiga olmaydigan atrofga ega (T_1 -fazo).

AA₂: Fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjuddir (T_2 -fazo).

Masalalar yechish namunalari

1 – misol. Ixtiyoriy topologik fazoda baza uchun X dagi barcha ochiq to'plamlarni olish mumkinligini ko'rsating.

Yechish. X ning barcha qism to'plamlari ochiq bo'lgani uchun τ ga element. Ularning yig'indisi ochiq to'plam bo'lib τ ga tegishli.

$X \in \tau$ va $\emptyset \in \tau$ Demak, X dagi barcha ochiq to'plamlar baza tashkil etadi.

2 – misol. Tabiiy topologiyalik R^1 da barcha chegaralangan ochiq intervallarning baza ekanligini ko'rsating.

Yechish. $\forall a \in R$ nuqta va uning ixtiyoriy U atrofi uchun B oilaga tegishli U_α interval mavjud bo'lib, a nuqtani uz ichiga oladi va U ning qismi bo'ladi, ya'ni $a \in U_\alpha \in U$

3 – misol. Tabiiy topologiyalik R^2 da

a) Ikkita bazis ko'rsating,

b) Sanoqli bazis ko'rsating.

Javob: a) Chegaralangan barcha ochiq doiralar to'plami;

b) Ratsional koordinatali markazlarga ega bo'lib, ratsional radiusli ochiq doiralar to'plami.

4 – misol. Sanoqli bazali X topologik fazoda X ning har qanday U ochiq qobig'idan sanoqli qism qobiqni ajratish mumkinligini isbotlang.

Ta'rif. F to'plam va U oila aniqlangan bo'lib, F ning har bir nuqtasi U oilaning birorta elementiga tegishli bo'lsa, u holda U oilani F to'plamning qobig'i deyiladi.

Ta'rif. Agar U ning har qanday elementi ochiq to'plam bo'lsa, u holda U oila F to'plamning ochiq qobig'i deyiladi.

Ta'rif. U oilaning biror qism oilasi F to'plamning qobig'i bo'lsa, u holda uni qism qobig' deyiladi.

Isbot. Uning har bir elementi B bazis elementlarining birlashmasidan iborat bo'lishidan B ning m qism oilasi mavjud bo'lib, y o'z navbatida X - ni qobig'i bo'lishi mumkin. m ning har bir elementiga uni o'z ichiga oluvchi Uning elementini mos keltiramiz.

m ning elementlari va Uning mos elementlari sanoqli qobig'lar bo'lib, m X ning qism qobig'ini tashkil etadi.

5– misol. Sanoqli bazaga ega bo'lmagan topologik fazoga misol keltiring.

Javob: Diskret topologiyalik sanoqsiz to'plam.

6- misol. Topologik fazolar ichidan T_0 topologik fazo bo'lmaydiganlariga misol keltiring.

Yechish. Antidiskret topologik fazoni T_0 fazo bo'lmaydigan topologik fazoga misol qilib keltirish mumkin. Haqiqatdan ham, antidiskret topologik fazoning topologioyasi $\tau = \{\emptyset, X\}$ to'plamdan iborat.

Antidiskret topologik fazoning ixtiyoriy olingan $x, y \in X, (x \neq y)$ nuqtalari uchun shu nuqtalardan faqat bittasini o'z ichiga oluvchi ochiq to'plam mavjud emas. Chunki, bu fazoning ochiq to'plamlari faqat $\emptyset, X$ to'plamlardan iborat xolos, shuning uchun ixtiyoriy olingan $x, y \in X, (x \neq y)$ nuqtalarning bittasini o'z ichiga oluvchi to'lam albatta ikkinchisini ham o'z ichiga oladi.

7- misol To'g'ri chiziq tabiiy topologiyalik bo'lib, $Y = [0; 2] \cup]4; 8[$ to'plam induksiyalangan topologiyalik qism fazo bo'lsin. $]5; 6[, [0; 2], [0; 1[,]1; 2]$ – ochiq to'plam, $[6; 7], [0; 2],]4; 8[,]4; 5]$ lar esa Y da yopiq to'plam ekanligini ko'rsating.

Yechish. To'plamlarning birinchi gruppasi Y va R^1 dagi ochiq to'plamlarning kesishmasidan iborat. Masalan: $[0; 2] = Y \cap [-1; 3]$, $[1; 2] = [1; 3] \cap Y$. To'plamlarning ikkinchi gruppasi Y da ochiq to'plamlarning to'ldiruvchi to'plamlaridir.

Masalan: $[4; 8] = Y \setminus [0; 2]$

Misol va masalalar

1. $(X, \{G_\alpha\})$ – topologik fazo bo'lsin. $Y \subset X$ qism fazo uchun $\{G_\alpha \cap Y\}$ qism to'plamlar sistemasi topologik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi. Buni induksiyalangan topologiya deyiladi va ψ orqali belgilanadi. $Y = X \cap Y$, $\emptyset = \emptyset \cap Y$ to'plamlar ψ ga element. Shu bilan birga

$$\bigcup_\alpha (G_\alpha \cap Y) = (\bigcup_\alpha G_\alpha) \cap Y \in \psi \text{ va } \bigcap_\alpha (G_\alpha \cap Y) = (\bigcap_\alpha G_\alpha) \cap Y \in \psi$$

2. To'g'ri chiziqdagi tabiiy topologiya butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ da diskret topologiyani induksiyalashi ko'rsatilsin.

3. Diskret (trivial) topologiyali X fazoning har bir Y to'plamida diskret (trivial) topologiyani induksiyalanishi isbotlansin.

4. X fazoda ikkita diskret va trivial topologiya berilgan. $Y \subset X$ fazoda induksiyalangan mos diskret va trivial topologiyalar ustma-ust tushuvchi Y qism to'plamni aniqlang.

5. Induksiyalangan topologiya (Y, ψ) dagi $H \subset Y$ ochiq (yopiq) to'plam X da ochiq (yopiq) bo'lmasligi mumkin. Buni qo'yidagi misollarda tekshiring.

a) $H = Y$, $Y \subset X$ da ochiq ham yopiq ham emas.

b) $Y = E^1$, $X = E^2$

6. F to'plam X fazoda $A \subset X$ qism fazoning qism to'plami bo'lsin. $B \subset A$ va $B \subset X$ uchun B da induksiyalangan topologiyalarning ustma-ust tushishi isbotlansin.

7. Sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilmagan topologik fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketliklar limiti yagona bo'lishi shart emasligiga misol keltiring.

8. F to'plam (Y, ψ) qism fazoda yopiq bo'lishi uchun uning (X, τ) ga tegishli yopiq qism to'plamlar kesishmasidan iborat bo'lishining zarur va Yetarliligi isbotlansin.

9. $F \subset (X, \tau)$ fazoning (Y, ψ) qism fazosida yopiq bo'lsa, u holda $F = Y \cap \bar{F}$ ni isbotlang, bunda $\bar{F}$ F ning (X, τ) dagi yopig'i.

10. $Y \subset X$ da ochiq to'plam bo'lsa, u holda Y qism fazoning har bir F ochiq to'plami X da ochiq bo'lishini ko'rsating.

11. $A, B \subset X$ fazoda qism to'plamlar bo'lib, $B \subset A$ bo'lsin: a) $\text{int}_X B \subset \text{int}_A B$ ni ko'rsating. A va B ($A \neq B$) ga misol keltiring.

b) $\partial_A B \subset \partial_X B$; misol keltiring, $A \neq B$ bo'lsin.

12. A va B X topologik fazoning ixtiyoriy qism to'plamlari bo'lsin. Qo'yidagilarni ko'rsating:
- $\text{int}_X(B \cap A) \subset \text{int}_A(B \cap A)$, $A \neq B$ uchun misol keltiring.
 - $(\bar{B})_X \cap A \supset (\overline{B \cap A})_A$, $A \neq B$ uchun misol keltiring.
13. Agar $B \subset A \subset X$ bo'lsa, u holda $(\bar{B})_A = (\bar{B})_X \cap A$
14. Trivial topologiyalik fazo AA_0 aksiomaning qanoatlantirmasligini ko'rsating.
15. Qo'yidagi fazolar: a) Tabiiy topologiyalik R^2 ;
- $X = \{a, b\}$, X ning ochiq to'plamlari $\tau = \{\emptyset, a, X\}$ bo'lsa;
 - Diskret topologiyalik fazo AA_0 aksiomani qanoatlantirishini ko'rsating.
16. Fazoning har qanday ikkita turli nuqtalari X da turli qoplamalarga ega bo'lsa T_0 fazo, ya'ni AA_0 aksioma o'rinli bo'ladigan fazo bo'lishini isbotlang.
17. T_0 fazoning qism fazosi Y , o'z navbatida T_0 fazo bo'lishini ko'rsating.
18. Tabiiy topologiyalik R^2 va diskret topologiyalik fazolar uchun AA_1 aksioma o'rinli bo'lishini ko'rsating.
19. Qo'yidagi fazolar uchun AA_1 aksioma bajarilmasligini ko'rsating:
- Trivial topologiyalik fazo;
 - $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, a, X\}$ – ochiq to'plamlar sistemasi.
20. X fazo T_1 fazo, ya'ni AA_1 aksioma bajariladigan fazo bo'lishi uchun nuqta yopilmasining nuqta ekanini ko'rsating.
21. Agar X fazo nuqtalarining T_1 to'plami chekli bo'lsa, u holda X ning diskret fazo bo'lishini isbotlang.
22. T_1 fazoning qism fazosi T_1 fazo bo'lishini isbotlang.
23. Tabiiy topologik R^2 va diskret fazolar uchun AA_2 aksioma bajarilishini, trivial fazoda AA_2 aksioma o'rinli emasligini tekshiring.
24. Xausdorf fazosi T_2 ning Y qism fazosi o'z navbatida Xausdorf fazo bo'lishini ko'rsating.
25. Ma'lumki, haq qanday T_1 topologik fazo T_0 topologik fazo bo'ladi, lekin teskarisi, har doim ham o'rinli emas. Bunga misol keltiring.
26. Topologik fazo Xausdorf fazosi bo'lishi uchun, uning har bir nuqtasi o'zining atroflari yopig'larining kesishmasidan iborat bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlansin.
27. Har xiol limitlarga ega bo'lgan yaqinlashuvchi ketma- ketliklar mavjud bo'ladigan T_1 fazoga misol keltiring.