O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG’ONA POLITEXNIKA INSTITUTI

“MEXANIKA” FAKULTETI

“Amaliy mexanika va materiallar qarshiligi” KAFEDRASI

“NAZARIY MEXANIKA” FANIDAN

REFERAT

MAVZU: Moddiy nuqtaning tebranma harakati

Bajardi: 5-12 BIQ guruh talabasi
E. Abdulyatifov

Qabul qildi: dots. T. Sobirjonov

FARG’ONA-2013

MODDIY NUQTANING TEBRANMA HARAKATI

Moddiy nuqta harakatining texnikada alohida ahamiyatga ega bo’lgan turlaridan biri tebranma harakat hisoblanadi. Masalan, inshootlar poydevori tebranishi; mashina va mexanizm qismlari tebranishi; mayatnik, prujinaga osilgan yuk va vagon kuzovlarining tebranishi.

Moddiy nuqtaning davriy ravishda takrorlanadigan harakatiga *tebranma harakat* deyiladi.

Moddiy nuqtaning tebranma harakati texnikada asosan besh xilga bo’linadi.

1. Erkin tebranma harakat.

2. So’nuvchi tebranma harakat (muhit qarshiligidagi tebranma harakat).

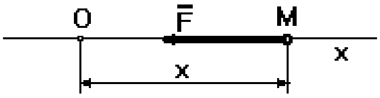
3. Majburiy tebranma harakat (davriy ta’sir etuvchi, uyg’otuvchi nomli kuch ta’siridagi tebranma harakat).

4. Majburiy tebranma harakat (muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat).

5. Juda kichik tebranma harakat.

1. Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat

Tebranish nazariyasi fizika va texnikaning qator ilmiy asoslarini tashkil etadi. Fan va texnikaning turli bo‘limlariga tegishli bo‘lgan tebranishlar bir-birlaridan, masalan, mexanikadagi, radiotexnikadagi, akustikadagi va b., o‘zlarining fizik mohiyati bilan tubdan farq qilsalar ham, lekin tebranma harakatning asosiy qonuniyatlari hamma vaqt bir xilligicha qolar ekan.



1 shakl

Shu sababli, mexanik tebranishlarning qonuniyatlarini o‘rganish o‘ta muhim bo‘lib, uning natijalari nafaqat texnikada, undan tashqari tebranishga bog‘liq bo‘lgan juda ko‘p boshqa sohalarda ham dolzarb (aktual) hisoblanadi. Avvaliga muhit qarshiligini hisobga olmagan holdagi erkin tebranishlarni ko‘rib o‘tamiz. To‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanuvchi M nuqtaga, faqat bitta - *muvozanatlovchi* $\overline{F}$ kuch qo‘yilgan bo‘lib, yo‘nalishi har doim O markazga qaraydi, moduli esa shu markazgacha bo‘lgan masofaga to‘g‘ri proportsional bo‘lsin (1 shakl). Shu to‘g‘ri chiziqli traektoriya bo‘ylab o‘tkazilgan koordinata o‘qiga $\overline{F}$ -kuchning proektsiyasi quyidagicha bo‘ladi,

$$F_x=-cx \tag{1}$$

Shakldan ko‘rinib turganidek $\overline{F}$ -kuchi nuqtani O markazdagi muvozanat holatga keltirishga harakat qiladi, chunki shu O nuqtada F=0 ga teng bo‘ladi; shu sababli uni «muvozanatlovchi» kuch deb ataladi. M nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz. Harakatning differentsial tenglamasini Ox o‘qidagi proektsiyasi ni yozamiz:

$$m\,x'' =F_x \quad \text{yoki} \quad m\,x'' =-sx. \tag{2}$$

Tenglikning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib va $c/m=k^2$ belgilash kiritib, yuqoridagi tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$x'' +k^2x=0 \tag{3}$$

(3) tenglama, *muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Ushbu chiziqli, ikkinchi darajali bir jinsli differentsial tenglamaning echimini $x=e^{nt}$ ko‘rinishda izlanadi. (3) tenglamadagi x-ni $x=e^{nt}$ orqali ifodalab, noma’lum n- ni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamadan iborat bo‘lgan xarakteristik tenglamani hosil qilamiz $n^2+k^2=0$. Ushbu tenglamaning ildizlari faqat mavhum ($n_{1,2}=\pm ik$) qiymatlar bo‘lgani sababli, differentsial tenglamalarning nazariyasiga asosan, (3) tenglamaning umumiy echimi, quyidagicha bo‘ladi

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt, \tag{4}$$

bu erdagi S_1 va S_2-lar integral doimiylari. Agar, S_1 va S_2- o‘zgarmas qiymatlarning o‘rniga A va α -dan tashkil topgan boshqacha, ya’ni $S_1=A\cos\alpha$, $S_2=A\sin\alpha$ larni kiritsak, u holda (4) tenglamaning ko‘rinishi $x=A(\sin kt\cdot\cos\alpha+\cos kt\cdot\sin\alpha)$ yoki

$$x=A\sin(kt+\alpha), \tag{5}$$

bo‘ladi. Bu (3) tenglamaning boshqacha echimi bo‘lib, integral doimiylari sifatida A va α -lar ishtirok etmoqda. Ular orqali harakatni tadqiq qilish ancha qulay hisoblanadi.

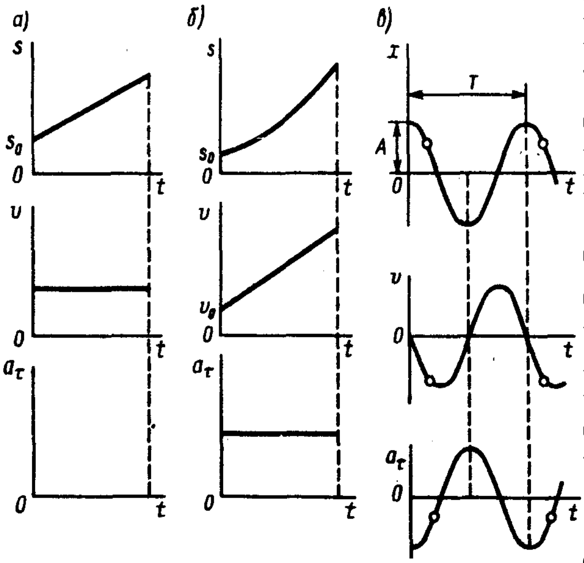
Tebranma harakatdagi nuqtaning tezligi

$$v_x = x' = Ak\cos(kt+\alpha), \qquad (6)$$

(5) qonuniyat bilan tebranuvchi nuqtaning harakati *garmonik tebranma harakat* deb ataladi. Bunday harakatning α=90° dagi grafigi 2, v shaklda tasvirlangan.

Bunday harakatning barcha xarakteristikalariga tasviriy kinematik tafsilotlar berish mumkin. Radiusi A ga teng bo‘lgan aylana bo‘ylab tekis harakatlanayotgan V nuqtaning harakatini ko‘rib chiqaylik. Nuqtaning harakati V_0 -holatdan boshlanib, $DOB_0=\alpha$ burchak orqali aniqlanadi. OV radiusning burchakli tezligi-k o‘zgarmas qiymat bo‘lsin. U holda, ixtiyoriy t vaqtda burchak $\varphi=\angle DOB=\alpha+kt$ bo‘lsin, V nuqtaning (Ox o‘qiga) DE -ga perpendikulyar bo‘lgan diametrga proektsiyasi M, x=Asin(kt+α), qonuniyat bilan harakat qiladi, bu erda x=OM, ya’ni garmonik tebranma harakat qilmoqda.

M nuqtaning tebranish markazi O nuqtadan eng katta uzoqlashgan qiymati A, *tebranish amplitudasi* deb ataladi. φ=kt+α *tebranish fazasi* deb ataladi. Tebranish fazasi- φ, nuqtaning koordinatasi x-dan farqli ravishda, berilgan vaqtdagi nuqtaning holatini aniqlabgina qolmasdan, keyingi harakatning yo‘nalishini ham belgilab beradi; masalan, fazasi φ bo‘lgan M holatdan, nuqta o‘ng tomonga qarab harakatlanadi, fazasi (π-φ) bo‘lganda esa chap tomonga qarab harakatlanadi. Bir-biridan 2π fazaga farqlanuvchi tebranma harakatlar bir xil hisoblanadilar (2, v shaklda o‘rtasi oq nuqtalar bilan bir xil fazalar belgilab qo‘yilgan).



Tebranishning boshlang‘ich fazasini α-qiymat orqali aniqlanadi. Masalan, α=0 bo‘lganda tebranma harakat sinusoida bo‘yicha sodir bo‘ladi (harakat O nuqtadan boshlanib, tezlik o‘ng tomonga yo‘naladi). $\varphi=\pi/2$ -bo‘lganda kosinusoida (harakat x=A holatdan va v_0 -tezlik bilan boshlanadi), OV radiusning burchakli tezligi bilan bir xil bo‘lgan k- qiymat *tebranishning davriy chastotasi* deb ataladi (3 shakl).

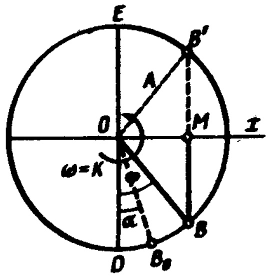
Nuqtaning to‘la bir marta tebranishi uchun sarflangan vaqt oralig‘i T (yoki τ), *tebranish davri* deb ataladi. Davr o‘tishi bilan faza 2π-ga o‘zgaradi. Shu sababli kT=2π bo‘lishi shart, bundan tebranish davri aniqlanadi

$$T=2\pi/k \qquad (7)$$

Tebranish davriga teskari nisbatda bo‘lgan

$$\nu=1/T=k/2\pi \qquad (8)$$

qiymat, tebranish chastotasi deb ataladi va u 1 s vaqt ichidagi tebranishlar sonini ifodalaydi.



3 shakl

Bundan ko‘rinib turibdiki, k - qiymat ν-dan faqat 2π ko‘paytmasi bilan farqlanar ekan. Keyinchalik, qisqaroq gapirish uchun k-ni ham chastota degan so‘z bilan atayveramiz.

1 masala. AV vertikal prujinaning V uchiga yuk osib qo‘yiladi va boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuboriladi. Agar yuk muvozanat holatda prujinani λ_{st} (prujinaning statik uzayishi) qiymatga uzaytiriladigan bo‘lsa, shu yukning harakat qonuni aniqlansin.

E ch i sh. Koordinata boshi O nuqtani prujinaning statik muvozanat holatga joylashtiramiz va Ox o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz (4 shakl). Elastiklik kuchi $F=c\lambda$. Ushbu masalada $\lambda=\lambda_{st}+x$ bo‘ladi. Shu sababli, $F_x=-c(\lambda_{st}+x)$.

Harakatning differentsial tenglamasini tuzamiz,

$$m\ddot{x}=-c(\lambda_{st}+x)+R$$

Lekin, masalaning shartiga ko‘ra $R=mg=c\lambda_{st}$ (muvozanat holatda og‘irlik kuchi R bilan elastiklik kuchi $c\lambda_{st}$ o‘zaro muvozanatlashadilar); Natijada $c/m=g/\lambda_{st}=k^2$,belgilash kiritib, quyidagini yozamiz,

$$x'' + k^2x=0$$

Bu tenglamani echmasdanoq, formula orqali tebranish davrini aniqlaymiz, $T=2\pi/k=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$

Yuqorida ko‘rib o‘tganimizdek, ushbu differentsial tenglamaning echimi, quyidagicha bo‘ladi,

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt,$$

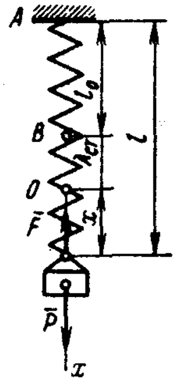
Boshlang‘ich shartlarga asosan, t=0 da $x=-\lambda_{st}$, $v_x=0$. Hamda

$$v_x=\dot{x}=kS_1\cos kt-kS_2\sin kt,$$

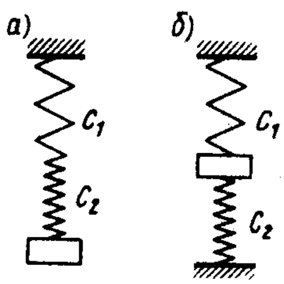
bu tenglamalardan integral doimiylarini aniqlaymiz, ya’ni $S_2=-\lambda_{st}$, $S_1=0$. Demak, nuqta $x=-\lambda_{st}\cos kt$ qonuniyat bilan tebranma harakat qilar ekan (bu erdagi λ_{st}-tebranish amplitudasi).

2 masala. Qattiqlik koeffitsientlari s_1 va s_2 -bo‘lgan ikkita ketma ket ulangan prujinalarga osib qo‘yilgan R yuk (5, a shakl)ning tebranish davri aniqlansin.

E ch i sh. Har bir prujina statik holatda R kuch bilan tortilmoqda. Demak, prujinalarning statik uzayishlari $\lambda_{st1}=R/s_1$, va $\lambda_{st2}=R/s_2$. U holda prujinalarning umumiy uzayishi



4 shakl



5 shakl

$$\lambda_{st}=\lambda_{st1}+\lambda_{st2}=R\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)=R\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}$$ ga teng bo‘laadi.

$R=s_{ekv}\lambda_{st}$ bo‘lganligi sababli, yuqoridagi formuladan,

$$s_{ekv}=\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}$$

bu erdagi s_{ekv}-ekvivalent prujinaning qattiqlik koeffitsienti, ya’ni shu ikkita prujinaning o‘rnini bosuvchi yagona prujinaning qattiqligi. Xususiy xolda, agar $s_1=s_2=s$ bo‘lsa, $s_{ekv}=s/2$ bo‘ladi.

Tebranish davri quyidagi formula orqali aniqlanadi,

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}=2\pi\sqrt{\frac{P}{g}\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}}$$

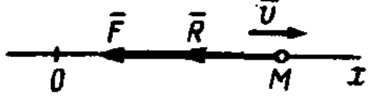
3 masala. Oldingi masalani, yuk prujinalarga 5, shakldagidek osilgandagi holati uchun echilsin.

Echish. Ushbu holatda, ikkala prujinaning statik uzayishi (siqilishi) o‘zaro teng bo‘ladi. Hamda og‘irlik kuchi R, $\lambda_{st1}=R/s_1$, va $\lambda_{st2}=R/s_2$ lardan iborat elastik kuchlari bilan muvozanatlashadi, ya’ni $R=(s_1+s_2)\lambda_{st2}$. Bundan $s_{ekv}=(s_1+s_2)$ bo‘ladi. Natijada tebranish davri

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}=2\pi\sqrt{\frac{P}{g(c_1+c_2)}}$$

2. Yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi erkin tebranishlar (So‘nuvchi tebranishlar).

Ushbu mavzuda, yopishqoq muhitlarning qarshiligi ta’siridagi erkin tebranma harakatni tekshirib ko‘ramiz]. Yopishqoq muhitlar (turli yog‘lar, suv va boshqa suyuqliklar) ning qarshiliklari nuqtaning tezligiga to‘g‘ri proportsional ravishda o‘zgaruvchan funktsiyadan iborat bo‘ladi, masalan $\overline{R}=-\mu\overline{v}$ (manfiy ishora, kuchni tezlikka teskari yo‘nalishda ekanligini ko‘rsatib turibdi). Nuqtaning harakatida muvozanatlovchi $\overline{F}$ kuch va muhit qarshiligi kuchi $\overline{R}$, ta’sir etsin (6 shakl).



6 shakl.

U holda $F_x=-cx$, $R_x=-\mu v_x=-\mu x'$ bo‘lganligi uchun, shu nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$m x''=-cx-\mu x'$$

Tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lib yuborib, tegishli belgilashlar kiritsak,

$$x''+2b x'+k^2x=0 \tag{12}$$

bu erdagi

$$k^2=c/m; \quad 2b=\mu/m \qquad (13)$$

k va b -qiymatlarning o‘lchov birliklari bir xil (1/vaqt); shu sababli ularni o‘zaro solishtirish mumkin.

(12) tenglama *tezlikka proportsional bo‘lgan qarshilik ta’siridagi erkin tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning echimini (3) tenglamadagi kabi $x=e^{nt}$ ko‘rinishda axtariladi. Ushbu x-ning qiymatini (12) ga qo‘ysak, xarakteristik tenglama kelib chiqadi, uning ildizlari

$$n_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-k^2} \qquad (14)$$

1. Agar, k>b bo‘lsa, ya’ni muvozanatlovchi kuchga nisbatan qarshilik kuchi kichkina bo‘lsa, quyidagi belgilash kiritilgandan so‘ng

$$k_1=\sqrt{k^2-b^2} \qquad (15)$$

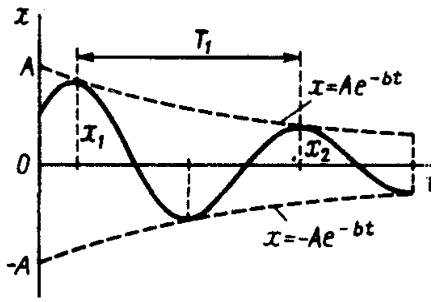
(14) ifoda $n_{1,2}=-b\pm ik_1$ ko‘rinishga keladi, ya’ni **xarakteristik tenglama**ning ildizlari kompleks sonlardan iborat bo‘lar ekan. U holda (12) tenglamaning umumiy echimi, (3) tenglamaning echimidan faqat e^{-bt}-ko‘paytmaga farq qilar ekan xolos, ya’ni

$$x=e^{-bt}(C_1\sin k_1t+C_2\cos k_1t) \qquad (16)$$

yoki (5) formula kabi o‘zgartirilsa,

$$x=A\,e^{-bt}\sin(k_1t+\alpha) \text{ bo‘ladi,} \qquad (17)$$

(17) formuladagi A va α -lar integral doimiylari hisoblanadi va ularning son qiymatlari boshlang‘ich shartlar yordamida aniqlanadi.



7 shakl.

(17) tenglama bo‘yicha sodir bo‘ladigan harakat, so‘nuvchi harakat bo‘ladi, chunki tenglamada e^{-bt} dan iborat ko‘paytma bo‘lganligi sababli, x=OM (6 shakl) qiymat vaqt o‘tishi bilan kamayib borib nolga intiladi.

Ushbu tebranma harakatning grafigi 7 shakldа tasvirlangan (grafik ikki tarafdan $x=A\,e^{-bt}$ va $x=-A\,e^{-bt}$ punktir egri chiziqlar ichiga olingan, chunki $\sin(kt+\alpha)$ ning son qiymati 1-dan oshmaydi).

T_1 vaqt oralig‘ini so‘nuvchi tebranishlar davri deb ataladi va u $\sin(kt+\alpha)$ ning davriga teng bo‘lib, uning qiymati

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-b^2}} \qquad (18)$$

Bir davr ichida, nuqta to‘la bir marta tebranadi, ya’ni x=0 holatdan (6 shakl) o‘ng tomonga qarab harakat boshlasa, bir davr o‘tgandan so‘ng yana shu nuqtadan yana o‘ng tomonga harakat boshlaydi. Agar (7) tenglikni e’tiborga olsak (18) formula quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$T_1=\frac{2\pi}{k\sqrt{1-b^2/k^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-b^2/k^2}}\approx T\left(1+\frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right) \qquad (19)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, $T_1>T$, ya’ni muhit qarshiligi ta’sirida tebranish davri ortar ekan, lekin qarshilik kuchi juda oz miqdorda bo‘lsa (ya’ni

$b<<k$), u holda b^2/k^2 nolga yaqin son bo‘lib, natijada $T_1 \approx T$ bo‘ladi. Demak, kichkina qarshilik kuchi tebranish davriga ta’sir etmas ekan.

Tebranayotgan nuqtaning ketma ket o‘ng (yoki chap) tomonga ikkita maksimum og‘ishiga ketgan vaqt ham T_1[1] -ga teng bo‘lar ekan. Demak, agar birinchi maksimal og‘ishi x_1, t_1 -vaqtga to‘g‘ri kelsa, undan keyingi maksimal og‘ish vaqti $t_2=t_1+T_1$ ga to‘g‘ri keladi va h.k. U holda (24.17) formula orqali, $k_1T_1=2\pi$ ekanligini hisobga olsak,

$$x_1=Ae^{-bt_1}\sin(k_1t_1+\alpha)$$

$$x_2=Ae^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha)=x_1e^{-bT_1}$$

Xuddi shunday ifodani har qanday ketma ket x_{n+1} ikkita og‘ish uchun $x_{n+1}=x_ne^{-bT_1}$ yozishimiz mumkin, Shunday qilib, tebranishning qulochi (razmaxi) geometrik progressiya bo‘yicha sekin asta kamayib borar ekan. Ushbu progressiya’ning mahraji e^{-bT_1}-ni *tebranish dekrementi* deb ataladi va uning logarifm modulini, ya’ni bT_1-ni *logarifmik dekrement* deb ataladi.

Yuqorida olingan natijalardan shuni aniqlash mumkin ekanki, kichkina qarshilik kuchi tebranishning davriga katta ta’sir ko‘rsatmas ekan, lekin har-bir tebranishda asta sekin tebranish qulochi (razmax) geometrik progressiya bo‘yicha kamayib borar ekan.

2. $b>k$ bo‘lsin, ya’ni qarshilik kuchi muvozanatlovchi kuchdan katta bo‘lsin. Quyidagi $b^2-k^2=r^2$ belgilash kiritamiz va (14) xarakteristik tenglamaning ildizlari $n_{1,2}=-b\pm r$ dan iborat bo‘lib, ikkala ildizi ham haqiqiy va manfiy (chunki $r<b$) sonlardan iborat bo‘lar ekan. Demak, $b>k$ bo‘lgandagi nuqta harakatining (12) differentsial tenglamasining echimi,

$$x=C_1e^{-(b+r)t}+C_2e^{-(b-r)t}$$

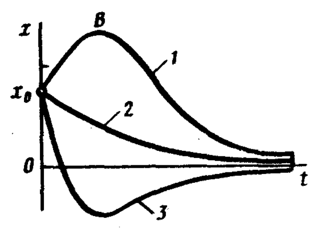
e^{-at}-funktsiya ($a>0$) vaqt mobaynida monoton (muntazam) kamayib borib, nolga intilganligi uchun, bunday harakat tebranma harakat bo‘lmaydi va muvozanatlovchi kuch ta’sirida asta sekin (asimptotik ravishda) muvozanat $x=0$ holatga keladi. Agar $t=0$ da $x=x_0>0$ va $v_x=v_{x0}$ bo‘lsa, bunday harakatning grafigi v_{x0} bog‘liq ravishda 8 shakldagi egri chiziqlardan biri ko‘rinishida bo‘ladi; (1-$v_{x0}>0$ bo‘lganda; 2- $v_{x0}<0$ bo‘lganda va $|v_{x0}|$ kichkina bo‘lganda; 3- $v_{x0}<0$ bo‘lganda va $|v_{x0}|$ katta bo‘lganda; ushbu natijalarning sifat ko‘rsatkichlari fizik mulohazalar orqali aniqlanadi). Agar $x_0<0$ bo‘lsa, grafiklarning ko‘rinishi aslo o‘zgarmaydi,(faqat Ot o‘q atrofida 180° ga aylanib qoladi, ya’ni ko‘zgudagi teskari tasvirga aylanib qoladi); va nihoyat $x_0>0$ va $v_{x0}=0$ bo‘lsa (1-egri chiziq) $t=0$ vaqtda o‘zining maksimal V holatida bo‘ladi.

3. Mavzuning so‘ngida $b=k$ bo‘lgan holatni ko‘rib o‘tamiz. Bu holda (14) xarakteristik tenglamaning ildizlari $n_{1,2}=\pm b$ bo‘ladi. ya’ni son qiymatlari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshi bo‘ladi va (12) tenglamaning umumiy echimi, quyidagi ko‘rinishga keladi,

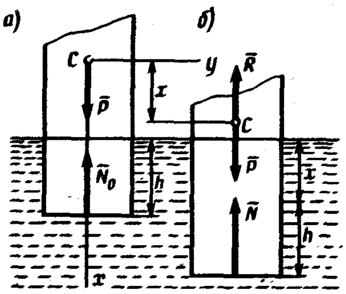
$$x=e^{-bt}(C_1+C_2t)$$

Bu holda ham nuqta tebranma harakatda bo‘lmaydi va vaqt o‘tishi bilan tebranmagan holda egri chiziqli harakat qilib asta-sekin (asimptotik ravishda) muvozanat, ya'ni x=0 holatga yaqinlasha boradi{Lopital qoidasiga ko'ra, agar $t \to \infty$ intilsa $\lim(t/e^{bt}) = \lim(1/be^{bt}) = 0$] va 8 shaklning 3-grafigi bo'yicha harakat qiladi.

5 masala. Solishtirma og'irligi $-\gamma$ bo'lgan suyuqlikka qisman cho'ktirilgan (massasi -m, ko'ndalang kesim yuzasi-S bo'lgan) tsilindrni (9 shakl)muvozanat holatdan chiqarib yuboriladi, natijada tsilindr tebranma harakat qila boshlaydi. Agar tsilindrning tebranma harakatiga suyuqlik (muhit) tomonidan ko'rsatiladigan qarshilik kuchi $\overline{R} = -\mu \overline{v}$ -dan iborat bo'lsa, shu tsilindrning so'nuvchi tebranma harakati aniqlansin



8 shakl



9 shakl

E ch i sh. Muvozanat holatda (9, a shakl) tsilindrga og'irlik kuchi $\overline{P}$ va tsilindr tomonidan siqib chiqarilgan suyuqlikning og'irligiiga teng bo'lgan arximed kuchi $\overline{N}_0$, ya'ni $N_0 = \gamma Sh$ (h-tsilindrning suvga cho'kib turgan qismining muvozanat holatdagi balandligi) ta'sir etadi.

Tsilindrning og'irlik markazi joylashgan S nuqtadan vertikal pastga qaratib Ox o'qini o'tkazamiz va tsilindrning S markazini boshlang'ich holatidan ixtiyoriy *x* masofada pastroqda tasvirlaymiz (9, b shakl). Tsilindrning ushbu holatida, unga: og'irlik kuchi $\overline{P}$, arximed qarshilik kuchi $\overline{N}_0$ va suyuqlikning qarshilik kuchi $\overline{R}$ -(bu kuchning yo'nalishi, har doim tsilindrning tezligiga teskari yo'nalishda bo'ladi)lar ta'sir etadi; $\overline{P}$ va $\overline{R}$ kuchlarni S nuqtaga vektor shaklida qo'yamiz. Tsilindrning cho'kishi qo'shimcha ravishda *x* masofaga ortganligini e'tiborga olsak, arximed kuchining moduli $N = \gamma S(h+x)$ bo'ladi (bundan ko'rinib turibdiki, arximed kuchi *x* masofaga proportsional ravishda muvozanatlovchi kuch bo'lib xizmat qilmoqda).

Tsilindrning ilgarilanma harakatining differentsial tenglamasini Sx o'qidagi proektsiyasini yozamiz:

$$m x'' = R_x + N_x + R_x \quad \text{yoki} \quad m x'' = R - (N_0 + \gamma Sx) - \mu v_x.$$

Tsilindrning muvozanat holatida $R = N_0$ bo'lishini va quyidagi belgilashlarni kiritsak,

$$\gamma S/m = k^2, \ \mu/m = 2b \qquad \text{(a)}$$

yuqoridagi differentsial tenglama (24.12) formuladagi ko'rinishga keladi, ya'ni

$$x'' + 2b x' + k^2 x = 0$$

U holda (a) belgilashlarni e'tiborga olib (18) formuladan so'nuvchi tebranma harakatning davrini aniqlasak, u quyidagicha bo'ladi:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma S/m - \mu^2/4m^2}}.$$

3. Majburiy tebranishlar. Rezonans

Ushbu mavzuda, nuqtaga muvozanatlovchi $\overline{F}$ -kuchdan tashqari vaqt mobaynida davriy ravishda o‘zgarib turuvchi $\overline{Q}$ -kuchi ham ta’sir etgan, ya’ni tebranma harakatning juda bir muhim masalasini ko‘rib o‘tamiz. $\overline{Q}$ -kuchining Ox o‘qidagi proektsiyasi,

$$Q_x=Q_0 \sin rt \qquad (1)$$

ga teng bo‘lsin. Bunday kuchni *qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi va shu kuch ta’siridagi tebranma harakatni *majburiy tebranishlar* deb ataladi. (1) formuladagi *r* -qiymatni *qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi* deb ataladi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lgan qo‘zg‘atuvchi kuch, boshqacha qonuniyat bo‘yicha ham o‘zgarishi mumkin. Lekin biz, faqat (25.1) ko‘rinishdagi qonuniyat bilan o‘zgaruvchi qo‘zg‘atuvchi kuchlar ustida mavzu olib boramiz xolos. Ushbu (1) ko‘rinishdagi qo‘zg‘atuvchi kuchni *garmonik qo‘zg‘atuvchi kuch* deb ataladi. Bunday kuch haqidagi muqim misol 1 masalada ko‘rib o‘tiladi.

1. Muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi majburiy tebranishlar[2]. Harakatlanuvchi nuqtaga muvozanatlovchi $\overline{F}$ kuchdan tashqari faqat *qo‘zg‘atuvchi kuch* - $\overline{Q}$ ta’sir etsin. U holda nuqtaning harakat differentsial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi

$$m x'' =-cx+ Q_0 \sin rt$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini m-ga bo‘lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$c/m=k^2, \quad Q_0/m=R_0 \qquad (2)$$

R_0-ning o‘lchov birligi tezlanish kabi bo‘ladi. U holda yuqoridagi differentsial tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$x'' + k^2x= R_0 \sin rt \qquad (3)$$

(3) tenglama *muhit qarshiligi bo‘lmagan holdagi nuqtaning majburiy tebranma harakatining differentsial tenglamasi* deb ataladi. Differentsial tenglamalar nazariyasiga asosan, bunday tenglamaning echimi $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu erdagi x_1- tenglamaning o‘ng tomonisiz, ya’ni (3) ko‘rinishdagi umumiy echimi bo‘lib (5) formulada berilgan, x_2 -esa (3) to‘liq tenglamaning birorta xususiy echimidan iborat bo‘ladi.

Tenglamaning x_2 - echimini $r \neq k$ deb hisoblab, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2=V \sin rt$$

bu erdagi V -o‘zgarmas qiymat bo‘lib, uning qiymati shunday bo‘lishi lozimki, uni (3)-ga qo‘yilganda tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 va uning ikkinchi tartibli hosilasi x''_2- ni (3) tenglamaga qo‘ysak,

$$-r^2B \sin rt+k^2B \sin rt=R_0 \sin rt$$

Ushbu tenglik vaqt t-ning ixtiyoriy qiymatlarida ham qanoatlanishi uchun $B(k^2-r^2)=R_0$ bo‘lishi kerak, yoki

$$V= R_0/(k^2-r^2)$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy echim aniqlandi, ya’ni

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \qquad (4)$$

To‘liq echim $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘lganligi sababli, hamda x_1-ning echimi (4) formuladan ma’lum bo‘lganligi uchun, (3) tenglamaning umumiy echimi

$$x=A\sin(kt+\alpha)+\frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin rt \qquad (5)$$

bu erdagi A va α - integral doimiylari bo‘lib, ular boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. (5) echimdan ko‘rinib turibdiki, tebranma harakat ikkita, ya’ni: 1) chastotasi -k va amplitudasi A -(amplituda boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda bo‘ladi) bo‘lgan *xususiy tebranishlar*; 2) chastotasi -r va amplitudasi V -(bu amplituda boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda bo‘lmaydi) bo‘lgan *majburiy tebranishlar*ning yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan.

Lekin amalda, u yoki bu qarshiliklar evaziga, xususiy tebranishlar tez orada so‘nadi. Shu sababli, nuqtaning asosiy tebranma harakati, (4) tenglama orqali bo‘ladigan majburiy tebranishlardan iborat bo‘ladi.

Majburiy tebranishlarning chastotasi -r, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasiga teng bo‘ladi. Agar shu majburiy tebranishlar amplitudasining qiymatini surat va mahrajini k^2-ga bo‘lib yuborsak,

$$v = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|} \qquad (6)$$

bu erdagi $\lambda_0=R_0/k^2=Q_0/c$, ya’ni λ_0-nuqtaning Q -kuch ta’siridagi statik og‘ishi bo‘lib (2) formula orqali aniqlanadi. Ko‘rinib turgandek, V-ning qiymati qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi r-ni, xususiy chastota k-ga nisbatiga bog‘liq ekan. Quyidagicha

$$z=r/k, \quad \eta=B/\lambda_0 \qquad (6)$$

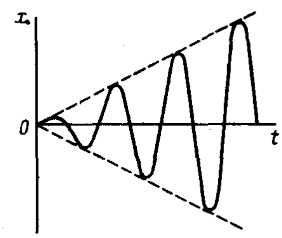
belgilashlar kiritamiz. O‘lchov birligi bo‘lmagan η-koeffitsientni *dinamiklik koeffitsient* deb ataladi. U orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasi V-ning (ya’ni, tebranish markazidan maksimal og‘ishni), statik λ_0-og‘ishga nisbatan necha marta katta bo‘lishi mumkin ekanligi aniqlanadi va chastotalarning nisbati z-ga bog‘liq bo‘ladi. (6) formulaning grafigi 3 shaklda tasvirlangan bo‘lib, yuqoridagi egri chiziq h=0 (qolgan egri chiziqlar η va z -larga bog‘liq ravishda tasvirlangan)uchun ko‘rsatilgan.

Grafikdan [yoki (6) formuladan] ko‘rinib turibdiki, r va k-qiymatlarning turli nisbatlarda olish hisobiga turlicha amplitudalarga ega bo‘lgan majburiy tebranishlar hosil qilish mumkin ekan. Agar r=0 (yoki $r<<k$) bo‘lsa, amplituda λ_0 -ga teng (yoki shu qiymatga yaqin) bo‘ladi, Agar r -ning qiymati k -ga yaqin bo‘lsa, amplituda V juda katta bo‘ladi. Va nihoyat $r >> k$ bo‘lsa amplituda V -

ning qymati juda kichik (yoki nolga yaqin) bo‘ladi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, agar r<k bo‘lsa, (1) va (4) tenglamalarni solishtirish orqali majburiy tebranishlar fazasi bilan qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi ustma-ust (ikkalasi ham rt-ga teng) tushar ekan. Agar r>k bo‘lsa, u holda sinusning ostiga manfiy ishorani kiritib, (4) formulani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(\mathrm{rt} - \pi)$$

Demak, r>k bo‘lganda majburiy tebranishlar fazasi bilan, qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasi, bir-biriga nisbatan π burchakka yo qiymati 1 shaklda ko‘rsatilgandek, katta miqdorda (katta quloch bilan tebrana boshlaydi) ortib ketadi. Bu haqdagi batafsil ma’lumotlar shu paragrafning oxirgi 3p. - da bayon etilgan.



1 shakl

Agar r=k bo‘lsa (3) tenglamaning x_2=Vsinrt dan iborat xususiy echimi bo‘lmaydi, uning echimini

$$x_2 = S \cdot t \cdot \mathrm{sosrt}$$

ko‘rinishda axtariladi. U holda, x''_2=-2Srsinrt-r^2Stsosrt, bularni (3) tenglamaga qo‘ysak va r=k ekanligini e’tiborga olib, -2Srsinrt=R_0sinrt, bundan S=-R_0/2r bo‘ladi. Natijada, muhit qarshiligi bo‘lmagan majburiy tebranma harakatdagi rezonans holatning tenglamasini yozamiz:

$$x_2=-(R_0/2r)t\cdot \mathrm{sosrt} \quad \text{yoki} \quad x_2=(R_0/2r)t\cdot \sin(\mathrm{rt}-\pi/2) \qquad (7)$$

Ushbu tenglamadan ko‘rinib turibdiki, haqiqatdan ham rezonans holatida majburiy tebranma harakatning qulochi vaqtga proportsional ravishda ortib borar ekan va bunday harakatning grafigi 1 shaklda tasvirlangan. Rezonans holatida faza π/2 burchakka suriladi.

2*. Muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranishlar. Harakatdagi nuqtaga, muvozanatlovchi kuch $\overline{F}$, tezlikka proportsional ravishda o‘zgaruvchi (2§) qarshilik kuchi $\overline{R}$ va (1) formula orqali ifodalanadigan qo‘zg‘atuvchi kuch Q ta’sir etsin. Bunday kuchlar ta’siridagi nuqtaning harakat differentsial tenglamasi, quyidagicha bo‘ladi

$$m x'' = -cx - \mu x' + Q_0 \sin \mathrm{rt} \qquad (8)$$

Tenglamaning ikkala tarafini m-ga bo‘lib, hamda (13) va (2) dagi belgilashlarni e’tiborga olsak, yuqoridagi tenglama

$$x'' + 2b x' + k^2 x = R_0 \sin \mathrm{rt} \qquad (9)$$

(9) tenglama, *yopishqoq muhit qarshiligi ta’siridagi majburiy tebranma harakatning differentsial tenglamasi* deb ataladi. Uning umumiy echimi $x=x_1+x_2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu erdagi x_1- tenglamaning o‘ng tomonisiz, ya’ni (12) ko‘rinishdagi tenglamaning umumiy echimi [k>b bo‘lganda, (17) ko‘rinishda] bo‘ladi, x_2 -esa (9) to‘liq tenglamaning birorta xususiy echimidan iborat bo‘ladi. Tenglamaning x_2 -echimini, quyidagi ko‘rinishda axtaramiz

$$x_2 = V \sin(\mathrm{rt} - \beta)$$

bu erdagi V va β -o‘zgarmas qiymatlar bo‘lib, ularning qiymatlari shunday bo‘lishi lozimki, ularning aniqlangan qiymatlarini (3)-ga qo‘yilganda, u tenglama ayniyatga aylanib qoladi. Shunga asosan, x_2 -ning hosilalarini hisoblaymiz

$$x' = Vr\cos(rt-\beta), \qquad x'' = -Vr^2\sin(rt-\beta)$$

Bu hosilalarni va x_2-ning qiymatlarini (9) ning chap tomoniga keltirib qo‘ysak, hamda qisqaroq yozish maqsadida rt-β=ψ (yoki rt =ψ+β) belgilash kiritsak

$$V(-r^2+k^2)\sin\psi+2brV\cos\psi=R_0(\cos\beta\,\sin\psi+\sin\beta\cos\psi)$$

Har qanday ψ-qiymatlarda ham, ya’ni ixtiyoriy vaqt uchun ushbu tenglama qanoatlanishi uchun, uning chap va o‘ng tomonlaridagi sinψ va cosψ larni oldilaridagi o‘zgarmas koeffitsientlar o‘zaro teng bo‘lishlari shart; Demak

$$V(r^2-k^2)= R_0\cos\beta, \qquad 2brB= R_0\sin\beta$$

Yuqoridagi ikkala tenglamani (bulardan β -ning qiymatini aniqlashda ham foydalaniladi) kvadratlarining yig‘indilari va ularni bir-birlariga nisbatlari orqali V va β larning qiymatlarini aniqlaymiz

$$v = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2p^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2} \tag{10}$$

(9) tenglamaning x_1- (k>b bo‘lgandagi) echimi (17) da aniqlangan, shunga ko‘ra, (9) tenglamaning to‘liq echimi, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(rt-\beta) \tag{11}$$

bu erdagi A va α -lar integral doimiylari bo‘lib, boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanadi. V va β lar esa (10) formulada aniqlangan bo‘lib, boshlang‘ich shartlarga bog‘liq emas, ularning b=0 bo‘lgandagi, ya’ni qarshilik kuchi yo‘q bo‘lgandagi qiymatlari (4) va (5) formulalarda aniqlangan.

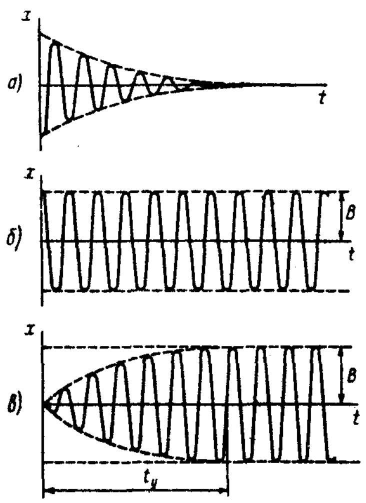
Ushbu tebranma harakat murakkab bo‘lib, xususiy [(.11) tenglamaning birinchi hadi, 2, a shakl] va majburiy [(.11) tenglamaning ikkinchi hadi, .2, b shakl] tebranma harakatlarning yig‘indilaridan iborat bo‘ladi. Bunday harakatning xususiy tebranishlari 2§ da ko‘rib o‘tilgan edi. O‘sha erda ta’kidlanganidek, bunday tebranishlar tez orada so‘nadi va bu so‘nish davri t_u -ni *o‘rnashish (o‘tish jarayoni) vaqti* deb ataladi, lekin ko‘p hollarda u e’tiborga olinmaydi.

Masalan, xususiy tebranishlarning qulochi 0,01V bo‘lgan holdagi o‘rnashish vaqti t_u ni Ae^{-bt}=0,01V tenglikdan aniqlanadi va

$$t_u = \frac{1}{b}\ln\frac{100\ A}{B} \tag{12}$$

Ko‘rinib turganidek, qanchalik qarshilik kuchi (ya’ni, qanchalik b) kichkina bo‘lsa, o‘rnashish davri shunchalik uzoq kechadi.

(11) qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan majburiy tebranma harakatning bir ko‘rinishi 2, v shaklda tasvirlangan, bu erda nuqtaning boshlang‘ich tezligi nolga teng. Boshlang‘ich shartlari hamda r va k_1 chastotalarning turli xil nisbatlari boshqacha bo‘lgan tebranishlarning $0<t<t_u$ vaqt oralig‘idagi, tebranish xarakterlari mutloq boshqacha bo‘lishi mumkin. Lekin, o‘rnash vaqti o‘tib ketgandan keyin xususiy tebranishlar batamom tugaydi va nuqta faqat



2 shakl

$$x= B\sin(rt-\beta) \qquad (13)$$

qonuniyat bilan harakatlanadi. Bunday qonuniyat bo‘yicha tebranishlar, *majburiy tebranishlar* deb ataladi. Ular, amplitudasi (10) formula orqali aniqlanadigan V-ga teng bo‘lgan va so‘nmaydigan garmonik tebranishlar bo‘lib, ularning chastotasi qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi r-ga teng bo‘ladi. Majburiy tebranishlarning fazasini qo‘zg‘atuvchi kuchning fazasiga nisbatan surilishi β-ga teng bo‘ladi.

Olingan natijalarni tadqiq qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz,

$$z=r/k, \quad h=b/k, \quad \lambda_0=R_0/k^2=Q_0/c \qquad (14)$$

bu erdagi z - chastotalarning nisbati; h- qarshilik kuchini belgilovchi qiymat; λ_0- Q kuchi ta’siridagi statik uzayish (masalan, prujinaga osilgan yukka qo‘shimcha ravishda qo‘yilgan Q kuch ta’sirida prujinaning qo‘shimcha uzayishi-λ_0).

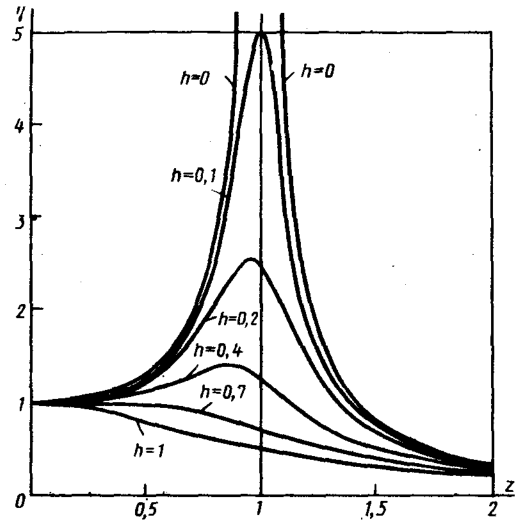
U holda, (10) tenglamaning surat va mahrajini k^2 -ga bo‘lib yuborsak:

$$v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-z^2)^2+4h^2z^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{2hz}{1-z^2} \qquad (15)$$

(15) formuladan ko‘rinib turibdiki, V va β lar ikkita z va h o‘lchovsiz qiymatlarga bog‘liq ekan. Yanada yaxshiroq tushuntirish maqsadida, h -ning ba’zi bir qiymatlari uchun, ushbu bog‘lanishlarning grafigi tasvirlangan. Birinchi grafikda (3 shakl) *dinamiklik koefftsient*ining $\eta=V/\lambda_0$ (amplituda V -ning qiymati, λ_0 -ning qiymatidan katta ekanligi) chastotalar nisbatiga qanday bog‘liq ekanligi tasvirlangan.

Ikkinchi (4 shakl) grafikda tebranish fazasining surilishi, ya’ni β-ning z -ga bog‘liq holdagi grafigi tasvirlangan. Har bir muqim masalada, berilgan shartlarga binoan λ_0, z, h larni aniqlab, ular yordamida V va β lar (15) formula orqali hisoblanadi yoki grafik orqali aniqlanadi. Bu grafiklar (yoki formulalar)dan ko‘rinib turibdiki, r va k -larning qiymatlarini turlicha tanlash evaziga turlicha amplitudaga ega bo‘lgan majburiy tebranishlar olish mumkin ekan.

Qarshilik kuchi juda oz va z -ning qiymati 1-ga yaqin bo‘lmagan son bo‘lsa, (15) formulada taqriban $h\approx 0$ deb hisoblash mumkin bo‘ladi. U holda, yuqoridagi 1p dagi natijalarni olishimiz mumkin, aniqrog‘i:

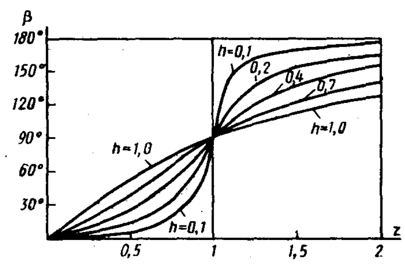


3 shakl.

$$\left.\begin{aligned} &B = \frac{\lambda_0}{\left|1 - z^2\right|} \\ &\beta \approx 0 \quad (z < 1 \text{ да}) \\ &\beta \approx 180^0 \quad (z > 1 \text{ да}) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Quyidagi xususiy hollarni ko‘rib chiqamiz.

1. Agar chastotalar nisbati z- juda kichkina (r<<k) bo‘lsa, u hoda $z\approx 0$ deb hisoblab (15) formuladan $V\approx\lambda_0$ ekanligini aniqlaymiz. Bu holdagi tebranma harakatning amplitudasi statik uzayish λ_0-ga teng bo‘lib, faza bo‘yicha surilish $\beta\approx 0$ bo‘ladi.



4 shakl.

2.Agar chastotalar nisbati juda katta (r>>k) bo‘lsa, amplituda V kichkina bo‘ladi. Bu holat inshootlarni Vibratsiya (titrash)ratsiyadan himoya qilishda, priborsozlikda va shunga o‘xshash texnikaning turli sohalari uchun katta ahamiyatga ega bo‘ladi. Qarshilik kuchi oz bo‘lsa, (15) formuladagi 2hz-ni e’tiborga olmasdan va $(1-z^2)\approx z^2$ deb hisoblasak, V-ning qiymatini aniqlash uchun taqribiy formula yozamiz,

$$V=\lambda_0/z^2=R_0/r^2 \qquad (17)$$

3. Barcha amaliy ishlarda h-ning qiymati 1 -dan ancha kichkina bo‘lgan holat, ayniqsa, katta qiziqish uyg‘otadi. U holda, agar z - ning qiymati 1-ga yaqin son bo‘lsa (15) formuladan ko‘rinib turganidek, majburiy tebranishlarning amplitudasi o‘zining maksimal qiymatiga chiqadi. Bunday bo‘lgan holatni *rezonans* deb ataladi.

(15) formuladan ko‘rinib turibdiki, agar maxrajdagi $f(\xi)=(1-\xi)^2+4h^2\xi$ (bu erda $\xi=z^2$) qiymat minimum bo‘lsa, $V=V_r=V_{max}$ bo‘lar ekan. Bu tenglamadan bir marta hosila olib, uni nolga tenglasak, ya’ni $f'(\xi)=-2(1-\xi-2h^2)=0$ bo‘ladi, bundan $\xi=1-2h^2$ bo‘ladi va shu qiymatda, ya’ni $z_r=\sqrt{1-2h^2}$ bo‘lganda V maksimum bo‘lar ekan. Demak, z -ning 1-dan ozgina kichik qiymatlarida rezonans hodisasi ro‘y berar ekan. Lekin amalda 1-ga nisbatan h^2 ancha kichkina bo‘lganligi sababli $z_r=1$ deb hisoblanadi. Agar h-ning qiymatlari o‘rtacha bo‘lganda, rezonans hodisasi uncha sezilmaydi (amplituda V uncha katta bo‘lmaydi, 3 shakl) va $h>\sqrt{2}/2\approx 0{,}7$ bo‘lganda rezonans umuman sodir bo‘lmaydi.

Majburiy tebranishlarning rezonans holatidagi amplituda va fazaning surilishini amaliyotda z=1deb qabul qilib, (15) formuladan kelib chiqadigan taqribiy hisoblashlar orqali aniqlanadi, ya'ni

$$V_r=\lambda_0/2h, \quad \beta_r=\pi/2 \qquad (18)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, h-ning kichkina qiymatlarida V_r -juda katta qiymatlarga ega bo'lishi mumkin ekan.

Shuni ta'kidlash lozimki, amplitudasi V_r -ga teng bo'lgan tebranishlar va rezonans holatidagi tebranishlar darhol ro'y bermaydi. Majburiy tebranishlarning o'rnashish protsesi 2, v shaklida ko'rsatilgani kabi kechadi. Qanchalik qarshilik kuchi kam bo'lsa, ya'ni qanchalik b yoki h kichkina bo'lsa, shunchalik V_r katta bo'ladi; hamda shu o'rinda majburiy tebranishlarning o'rnashish vaqti $t_{o'}$ - ham uzoq kechadi [(12) formulaga qarang].

Qarshilik kuchi yo'q bo'lsa, ya'ni b=h=0 bo'lsa, u holda rezonans holatidagi majburiy tebranishlar (7) formula orqali aniqlanadi, uning grafigi esa 1 shaklda tasvirlangandagi kabi bo'ladi. Shunday qilib, agar qarshilik kuchi yo'q bo'lsa, sistemaning «silkinish» protsesi shunchalik uzoq kechadi, tebranishning qulochi esa muntazam o'sib boradi. Agar qarshilik kuchi mavjud bo'lsayu, lekin u juda kichkina bo'lsa, yuqoridagi holatlar o'shanday kechadi.

3. Majburiy tebranishlarning umumiy xossalari.

Yuqorida olingan natijalarga asosan majburiy tebranishlar erkin tebranishlarga nisbatan quyidagi alohida muhim xusususiyatlarga ega ekanligi aniqlandi: 1) majburiy tebranishlarning amplitudasi boshlang'ich shartlarga bog'liq emas ekan; 2) majburiy tebranishlar muhit qarshiligi ta'sirida so'nmaydi; 3) majburiy tebranishlarning chastotasi, qo'zg'atuvchi kuchning chastotasiga teng bo'lib, tebranayotgan sistemaniing xarakteristikasiga bog'liq emas ekan (qo'zg'atuvchi kuch tebranuvchi sistemaga o'zinig chastotasini «o'tkazar» ekan); 4) Agar, qarshilik kuchi kichkina bo'lsa va chastota -*r* ning son qiymati, chastota -*k* ning son qiymatiga yaqin bo'lsa, juda kichkina qo'zg'atuvchi (kichkina Q_0) kuch ham intensiv ravishda majburiy tebratadi; 5) Agar, qo'zg'atuvchi kuchning chastotasi -*r* ning son qiymati, xususiy chastota -*k* ning son qiymatidan katta farq qilsa, juda katta qo'zg'atuvchi (katta Q_0) kuch ta'sirida ham majburiy tebranishlarning amplitudasini hohlagan miqdorda kichkina qilish mumkin ekan.

Majburiy tebranishlar, ayniqsa ulardagi rezonans hodisasi fizika va mexanikaning turli sohalarida o'ta muhim ahamiyatga ega. Masalan, mashina va dvigatellarning ishlashlarida, ularga davriy ravishda ta'sir etuvchi kuchlar paydo bo'ladi, natijada fundamentning va mashinaning qismlari majburiy tebranishlar ostida bo'lgan harakatlarda ishtirok etadilar.

Dvigatellarni turli xil aylanma tezliklar bilan ishlatish natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasini o'zgarish qonuniyatini tekshirib borish mumkin, dvigatelning chastotasi r=ω bo'ladi, bu erdagi ω-dvigatelning burchakli tezligi (1 masalaga qarang). ω-ning ortishi bilan, mashinaning (yoki fundamentning) tebranuvchi qismlarining amplitudasi ham ortib boradi va ω=k bo‘lganda, rezonanas hodisasi ro‘y beradi va majburiy tebranishlarning qulochi maksimumga chiqadi.

Dvigatelning burchakli tezligi ω-ning qiymati, yana ortib borishi natijasida, majburiy tebranishlarning amplitudasi V kamaya boshlaydi va ω>>k bo‘lganda, V -ning qiymati nolga yaqinlashadi. Aksariyat injenerlik inshootlarida, rezonanas hodisasi katta ziyon keltiradi, shu sababli r va k -ning qiymatlarini (r>>k) tanlash orqali, majburiy tebranishlarning amplitudasini nolga yaqinlashtiriladi, natijada amplitudani nolga keltiriladi.

Radiotexnikada esa, bunday ishlar teskarisicha qilinadi, ya’ni rezonans hodisasi juda katta ahamiyat kasb etadi va birorta kerak bo‘lgan radiostantsiyaning signalini boshqa signallardan ajratishda (to‘lqinni tanlashda) juda qo‘l keladi.

Majburiy tebranishlar nazariyasi, qator priborlarni yaratilishida, masalan vibrograflar - tebranuvchi jismlarning harakatlarini (fundamentning, mashinaning qismlarini va b.), seysmograflar - Erning ustki qatlamini tebranishini o‘lchash ishlarida asosiy ilmiy manba bo‘lib xizmat qiladi.

1 masala. Balka, uning ustiga o‘rnatilgan motorning og‘irligi ta’sirida λ_{st}=1sm qiymatga egilib qoladi. Motorning minutiga qanday sonli aylanishida (ayl/min) rezonans hodisasining ro‘y berishi aniqlansin.

E ch i sh. (11) formulaga asosan, balkaning erkin tebranishlarining davri

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$$

teng bo‘ladi. Agar motor valining og‘irlik markazi S valning geometrik markazi O nuqtadan siljigan bo‘lsa, u holda valning podshipniklari orqali motorga uzatiladigan davriy ravishda ta’sir etuvchi $\overline{Q}$ -kuch paydo bo‘ladi va bu kuch OS chiziq bo‘ylab yo‘naladi. $\overline{Q}$ -kuchning Ox o‘qdagi proektsiyasi $Q_x=Q\sin\omega t$ (ω-motor valining burchakli tezligi) motorga ta’sir etayotgan qo‘zg‘atuvchi kuch hisoblanadi. Bu kuchning chastotasi r=ω bo‘lgani uchun, majburiy tebranishlarning davri $T_M=2\pi/\omega$ bo‘ladi.

Agar, T_M=T bo‘lsa rezonans hodisasi ro‘y beradi, ya’ni $2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$ bundan,

$$\omega_{kr}=\sqrt{g/\lambda_{ст}}\approx 31{,}3\ s^{-1}$$

Demak, kritik aylanishlar soni,

$$n_{kr}=30\omega_{kr}/\pi\approx 300\ \text{ayl/min}.$$

Rezonans hodisasi bo‘lmasligi uchun, motorning aylanishlar soni n_{kr} -ga nisbatan bir necha marta katta bo‘lishi shart ekan.

2 masala. Qattiqlik koefftsienti *s* bo‘lgan prujinaga vertikal holda osib qo‘yilgan massasi m-ga teng bo‘lgan 1-yukning majburiy tebranishlari tadqiq qilinsin. Prujina osilgan D nuqta $\xi=a_0\sin rt$ qonuni bilan vertikal chiziq bo‘ylab tebranma harakat qilmoqda.

E ch i sh. Koordinata boshi O nuqtani yukning statik muvozanati holatiga joylashtiramiz va Ox o‘qini vertikal pastga yo‘naltiramiz (6 shakl). Agar deformatsiyalanmagan prujinaning uzunligi l_0 bo‘lsa, u holda prujinaning ixtiyoriy holatdagi uzunligi $l=l_0-\xi+\lambda_{st}+x$ bo‘ladi. Prujinaning uzayishi $\lambda=l-l_0=\lambda_{ct}+x-\xi$. Bu holatda yukka ta’sir etuvchi elastiklik kuchi $F=c\cdot\lambda=c(\lambda_{st}+x-\xi)$ -ga teng bo‘ladi. Shu sababli yukning harakat differentsial tenglamasi ($s\lambda_{st}=mg$ ekanligini hisobga olib) quyidagicha bo‘ladi:

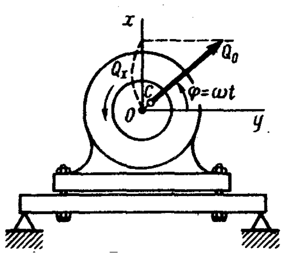
$$m\,x''=-\,c(\lambda_{st}+x-\xi)+mg \quad \text{yoki} \quad m\,x''=-cx+c\xi$$

$s/m=k^2$ -belgilash kiritsak,

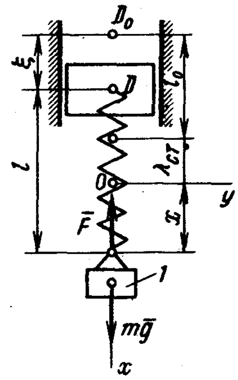
$$x''+k^2x=k^2a_0\sin rt$$

Demak, ushbu tenglama (25.3) tenglama bilan bir-xil ko‘rinishda bo‘ladi, agar $b=0$ va $R_0=k^2a_0$ ekanligini e’tiborga olsak (25.9) tenglama bilan ham bir xil bo‘ladi. (14) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, ushbu masalada $\lambda_0=a_0$ va $h=0$. Majburiy tebranishlarning amplitudasi va fazaning surilishi (16) formula orqali aniqlanadi.

Agar $r<<k$ bo‘lsa (agar prujinaning yuqorigi D nuqtasi juda sekin tebransa), u holda $z=0$ va $V\approx a_0$ bo‘ladi va fazaning surilishi $\beta=0$ bo‘ladi. Yukning tebranishini ko‘rinishidan xuddi prujinaning o‘rniga qattiq sterjenga mahkamlanganga o‘xshab ketadi, fizik jihatdan $k>>r$ -ga mos keladi. Agar $r=k$ bo‘lsa, rezonans holati sodir bo‘ladi va tebranishning qulochi kattalashib ketadi.



5 shakl.



6 shakl.

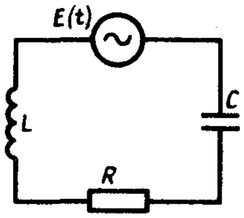
Agar r-chastotaning k-dan katta ($z>1$) bo‘lsa u holda prujining yuqorigi D nuqtasi yuqoriga ko‘tarilsa, yuk eng pastki holatga tushadi, D nuqta pastki holatiga tushsa, yuk o‘zining yuqorigi holatigacha ko‘tariladi (ya’ni fazaning surilishi $\beta=180°$ bo‘ladi); qanchalik *r* katta bo‘lsa, amplituda shunchalik kichkina bo‘ladi. Agar *r*, k-ga nisbatan juda katta ($z>>1$) bo‘lsa, amplituda $V\approx0$ bo‘ladi. Bu holda, prujinaning yuqorigi D uchi a_0 amplituda bilan tebranma harakatda bo‘lishiga qaramasdan yuk o‘zining statik muvozanat holatida (O nuqtada) joylashadi (chunki majburiy tebranishlarning chastotasi shunday kattaki, uning tebranish chastotasiga yukning tebranish chastotasi ulgurmaydi).

4*. Elektrodinamik analog. 2§ ning boshida aytib o‘tganimizdek, qator tebranish protseslarining qonuniyatlarini o‘zaro o‘xshashligi sababi, o‘sha harakatlarning differentsial tenglamalarining o‘xshashligidan kelib chiqadi. Bunga, ketma-ket ulangan, induktivligi L bo‘lgan g‘altak, R - omik qarshilik va S -hajmli kondensatorlardan iborat bo‘lgan konturni, hamda o‘zgaruvchan elektr yurituvchi kuch E(t) -ni (e.yu.k.) misol sifatida keltirish mumkin (7 shakl).

U holda Kirxgofning ikkinchi qonuniga binoan, kondensatorning zaryadi -q, quyidagi differentsial tenglamani qanoatlantiradi:

$$L q'' + R q' + (1/C)q = E(t) \qquad (19)$$

Ushbu tenglamani (8) tenglama bilan solishtirib, shuni aniqlash mumkinki Q_0sinrt -ni o‘rnida E(t) turibdi; U holda ikkala tenglamaning tuzilishi mutloq bir xil ekan. Demak, yuqorida ko‘rib o‘tilgan mexanik tebranishlarning qonuniyati va kondensatordagi zaryadlarning o‘zgarish qonuniyati ham bir-xil ekan. Hamda (8) va (19) ni solishtirib: 1) nuqtaning siljishi (koordinatasi) *x* - zaryad *q*-ga; 2) massa m-ga, induktivlik -L; 3) yopishqoq qarshilik koeffitsienti μ -ga, omik qarshilik R; 4) prujinaning qattiqlik koeffitsienti s-ga, 1/C qiymat; 5) qo‘zg‘atuvchi kuch Q-ga, e.yu.k. E.; lar analog sifatida ishtirok etmoqda.



7 shakl

Ushbu analoglar, nafaqat majburiy tebranishlar uchun o‘rinli bo‘lib qolmasdan, erkin (so‘nuvchi va so‘nmaydigan) tebranishlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi elektr zanjiri uchun, 2§ dagi (13) va (18) formulalar orqali so‘nuvchi elektr tebranishlarning xususiy tebranish davri

$$k^2 = 1/C, \quad b = R/2L, \quad \text{va} \quad T_1 = 2\pi/\sqrt{1/CL - R^2/4L^2},$$

agar omik qarshilik yo‘q bo‘lsa, tebranish davri $T = 2\pi\sqrt{CL}$ bo‘ladi.

Elektrodinamik analog xossasidan mexanik harakatlarni modellashtirishda qo‘llaniladi, xususan elektron analog mashinalarda qo‘llaniladi.