

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI



NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA – MATEMATIKA FAKUL'TETI
MATEMATIKA KAFEDRASI O'QITUVCHISI

JO'RAYEV ILHOMJONNING

"Oliy matematika asoslari" fanidan

5111000 – Kasb ta'limi (bakalavriat) yo'nalishi

1 – bosqich talabalari uchun

"VEKTOR (CHIZIQLI) FAZO VA AKSLANTIRISHLAR"

MAVZUSIDA YOZGAN

AMALIY MASHG'ULOT ISHLANMASI



Namangan 2011

ANNOTATSIYA:

Ushbu, “Vektor fazo va akslantirishlar” mavzusidagi amaliy mashg’ulot ishlanmasida akslantirishlar va vektor (chiziqli) fazo mavzulariga doir asosiy tushuncha va ta’riflar shuningdek, tayanch so’z va iboralar keltirilgan bo’lib, atroflicha yoritilgan. Amaliy mashg’ulot ishlanmasida 7 ta masala va misollar yechib korsatilgan bo’lib, qo’shimcha ravishda 14 ta misol va masalalar keltirilgan.

MAVZU: VEKTOR (CHIZIQLI) FAZO VA AKSLANTIRISHLAR

Asosiy ta'rif va tushunchalar:

F - maydon va V -additiv abel' guruxi bo'lsin.

T a' r i f. Xar bir $\lambda \in F$ va xar bir $x \in V$ elementlarga biror qoida bo'yicha λ va x elementlarning ko'paytmasi deb ataluvchi va λx ko'rinshida belgilanuvchi $y \in V$ element mos qo'yilgan bo'lib, quyidagi shartlar (aksiomalar) bajarilgan bo'lsin:

1) agar $\lambda, \mu \in F$, $x \in V$ bo'lsa, u xolda

$$\lambda(\mu x) = \mu(\lambda x) = (\lambda\mu)x;$$

2) xar qanday $x \in V$ uchun $1 \cdot x = x$

(bu yerda 1 orqali maydonning birlik elementi belgilangan);

3) agar $\lambda, \mu \in F$, $x \in V$ bo'lsa, u xolda

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

4) agar $\lambda \in F$ va $x, y \in V$ bo'lsa, u holda

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Bu shartlarni qanoatlantiruvchi V additiv abel' guruxga F maydon ustida *chiziqli* (yoki *vektor*) fazo deyiladi.

Ta'rif. Ushbu $x, y \in V$ vektorlarning ayirmasi deb V ni additiv gurux sifatida qaralgandagi ayirmasiga, ya'ni $x - y = x + (-y)$ ga aytiladi.

Chiziqli fazo aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalarga o'tamiz.

1 – jumla.

a) Xar qanday $\lambda \in F$, $x, y \in V$ elementlar uchun

$$\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y.$$

b) Xar qanday $\lambda, \mu \in F$ va $x \in V$ elementlar uchun

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x.$$

Xaqiqatan, $\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y) = \lambda(x + (-y) + y) = \lambda x$.

Bundan $\lambda(x - y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y$.

Shunga o'xshash $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ munosabat isbotlanadi.

2 – jumla.

a) Xar qanday $\lambda \in F$ uchun $\lambda \cdot 0 = 0$

b) Xar qanday $\lambda \in V$ uchun $0 \cdot x = \bar{0}$.

Xaqiqatan, $\lambda \bar{0} = \lambda(x - x) = \lambda x - \lambda x = \bar{0}$ va $0 \cdot x = (\lambda - \lambda)x = \lambda x - \lambda x = \bar{0}$. Bu jumlaning aksinchasi xam o'rinli.

3 – jumla.

Agar biror $\lambda \in F$ va $\lambda \in V$ elementlar uchun $\lambda x = \bar{0}$ bo'lsa, u xolda yo $\lambda = 0$ yoki $x = \bar{0}$.

Xaqiqatan, agar $\lambda x = \bar{0}$ va $\lambda \neq 0$ bo'lsa, u xolda $\lambda^{-1} \in F$ element mavjud va $\lambda^{-1} \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda x) = (\lambda^{-1} \lambda)x = 1x = x$. Bundan $x = \bar{0}$.

Natural n soni bo'yicha matematik induksiya yordamida xar qanday $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ va $x, x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ elementlar uchun $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x = \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x$ va $\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \lambda x_1 + \dots + \lambda x_n$ munosabatlarning o'rinli ekanligi ko'rsatiladi.

$$\text{Bulardan} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{k=1}^m x_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_i x_k \quad (n, m \in N)$$

$$x_k - \sum_{i=1, i \neq k}^n \mu_i x_i = \bar{0}.$$

ya'ni $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, bu erda $\lambda_k = 1$, $\lambda_i = -\mu_i (i \neq k)$.

Bu jumladan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Nol' vektorni o'z ichiga oluvchi xar qanday vektorlar tizimi chiziqli bog'langan, chunki nol' vektor boshqa vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi (chiziqli ifodaning barcha koeffitsientlari nol'ga teng).

2. Agar vektorlar tizimi chiziqli bog'langan bo'lsa, u xolda bu tizimni o'z ichiga olgan xar qanday vektorlar tizimi xam chiziqli bog'langan bo'ladi.

Bu natijadan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

3. Agar vektorlar tizimi chiziqli erkli bo'lsa, u xolda uning xar qanday qism tizimi xam chiziqli erkli bo'ladi.

Ta'rif: f – binar munosabat, agar har qanday x, y, z lar uchun $\langle x, y \rangle \in f$ va $\langle x, z \rangle \in f$ ligidan $y = z$ ligi kelib chiqsa, **funksiya (akslantirish)** deyiladi.

$\langle x, y \rangle \in f$ bo'lsa, bu holat $y = f(x)$ yoki $f : x \rightarrow y$ kabi yoziladi.

Funksiya akslantirish deb ham yuritiladi.

Ta'rif: f - funksiyaning aniqlanish sohasi deb, $Domf = \{\exists y (\langle x, y \rangle \in f)\}$ to'plamga aytiladi.

Ta'rif: f - funksiyaning qiymatlar sohasi deb, $Imf = \{\exists x (\langle x, y \rangle \in f)\}$ to'plamga aytiladi.

Ta'rif: Agar f funksiya A va B to'plamlar juftligida berilgan bo'lsa, $f \subset A \times B$ bo'lsa, u holda f ni A to'plamdan B to'plamga **akslantirish** deyiladi.

Ta'rif: Shu holatda $Domf = A$, $Imf \subset B$ bo'lsa, A to'plamni B to'plamning **ichiga akslantirish** deyiladi.

Ta'rif: Agar $Domf = A$, $Imf = B$ bo'lsa, A to'plamni B to'plamning **ustiga akslantirish** deyiladi. Bunday akslantirish **syur'ektiv akslantirish** deb ham yuritiladi.

Ta'rif: f funksiya, agar bu funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har qanday x, y lar uchun $f(x) = f(y)$ shartdan $x = y$ ekanligi kelib chiqsa, bunday akslantirish **In'ektiv** yoki **o'zaro bir qiymatli akslantirish** deyiladi.

Ta'rif: Ham ustiga ham in'ektiv bo'lgan akslantirish **biektiv** akslantirish deyiladi.

Misollar. (Vektor fazo va akslantirishlarga doir)

1-misol. Berilgan a to'g'ri chiziqda yotuvchi va umumiy boshlang'ich O nuqtaga ega bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalarining $D_1(a)$ to'plamida qo'shish amali quyidagicha aniqlanadi:

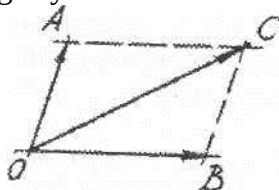
Yo'nalgan $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ kesmalar berilgan bo'lsin. $\vec{OB}$ kesmaning yo'nalishini va uzunligini o'zgartirmasdan boshlang'ich nuqtasini A nuqtaga ko'chiramiz. Bunda V nuqta biror S nuqtaga ko'chadi. $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ yo'nalgan kesmalarining yig'indisi deb $\vec{OC}$ yo'nalgan kesmaga aytamiz.

Yo'nalgan $\vec{OA}$ kesmaning $\lambda \in R$ songa ko'paytirish amali esa quyidagicha aniqlanadi:

- 1) agar $\lambda = 0$ bo'lsa, $\lambda \cdot \vec{OA} = \vec{OO}$, ya'ni uzunligi 0 ga teng yo'nalgan kesma $\lambda \cdot \vec{OA}$ deb olinadi;
- 2) agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\lambda \cdot \vec{OA} = \vec{OO}$, yo'nalgan kesmaning yo'nalishi $\vec{OA}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, uzunligi $|\lambda \vec{OA}|$ esa $|\vec{OA}|$ ga, ya'ni $\vec{OA}$ yo'nalgan kesma uzunligini λ ga ko'paytirilganiga teng;
- 3) agar $\lambda < 0$ bo'lsa, yo'nalgan kesmaning yo'nalishining yo'nalishiga teskari, uzunligi esa $\lambda |\vec{OA}|$ ga teng.

Bu amallarga nisbatan $D_1(a)$ to'plam R xaqiqiy sonlar maydoni ustida chiziqli fazo xosil qiladi.

2-misol. Berilgan α tekislikda yotuvchi va umumiy boshlang'ich nuqtaga ega bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalarning $D_2(\alpha)$ to'plamida qo'shish amali parallelogramm qoidasi bilan aniqlanadi: $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ kesmalarning yig'indisi deb, $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ kesmalariga qurilgan $OACB$ parallelogrammning (2-shakl) diagonaliga aytiladi.



Yo'nalgan kesmani $\lambda \in R$ songa ko'paytirish amali ilgari misoldagi kabi aniqlanadi. Bu amallarga nisbatan $D_2(\alpha)$ to'plam R maydon ustida chizikli fazo xosil qiladi.

3-misol. Fazoda umumiy boshlang'ich nuqtaga ega bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalarning D_3 to'plamida qo'shish va xaqiqiy songa ko'paytirish amallarini ilgari misoldagi kabi kiritilsa, u R maydon ustida vektor fazo xosil qiladi.

4-misol. F – ixtiyoriy maydon, n – natural son bo'lsin. F^n to'plamda qo'shish amalini ushbu

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

qoida orqali, $\gamma \in F$ skalyarga ko'paytirish amalini esa

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \dots, \gamma\alpha_n)$$

qoida orqali kiritilsa, u F maydon ustida vektor fazoga aylanadi.

5-misol. Ilgari misoldagi F^n to'plamda qo'shishni o'sha misoldagi kabi, γ skalyarga ko'paytirish amalini esa xar qanday $\gamma \in F$ va $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ uchun $\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ qoida orqali kiritamiz. Bu amallarga nisbatan F^n chiziqli fazo bo'lmaydi, chunki uning uchun ikkinchi aksioma bajarilmaydi.

6-misol. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha funktsiyalardan iborat $C[a, b]$ to'plamda funktsiyalarning yig'indisini va $\lambda \in R$ skalyarga ko'paytmasini odatdagicha kiritilsa, u R maydon ustida chiziqli fazo xosil qiladi.

7-misol. F – sonlar maydoni bo'lib, koeffitsientlari bu maydondan olingan barcha ko'pxadlarning $F[t]$ to'plamida ko'shish va skalyarga ko'paytirish amallarini ilgari misoldagi kabi kiritilsa, u F ustida chiziqli fazoga aylanadi.

8-misol. Quyida keltirilgan binar munosabatlardan qaysilari akslantirish bo'lishini aniqlang. Akslantirishlarning qaysilari ichiga, ustiga (syur'ektiv), in'ektiv yoki biektiv bo'lishini tekshiring:

- $f = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid y = x^2 \}$
- $f = \{ \langle x, y \rangle \in [0; \infty) \times (-\infty; \infty) \mid y = x^2 \}$
- $f = \{ \langle x, y \rangle \in [0; \infty) \times [0; \infty) \mid y = x^2 \}$
- $f = \{ \langle x, y \rangle \in [0; 1] \times [0; 1] \mid y = x^2 \}$

- e) $f = \{ \langle x, y \rangle \in N \times N \mid y = x^2 \}$
 f) $f = \{ \langle x, y \rangle \in [0; \infty) \times (-\infty; \infty) \mid x = y^2 \}$
 g) $f = \{ \langle x, y \rangle \in [0; \infty) \times [0; \infty) \mid x = y^2 \}$
 h) $f = \{ \langle x, y \rangle \in [-1; 1] \times [-1; 0] \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
 i) $f = \{ \langle x, y \rangle \in [-1; 0] \times [-1; 1] \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
 j) $f = \{ \langle x, y \rangle \in [-1; 0] \times [-1; 0] \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
 k) $f = \{ \langle x, y \rangle \in N \times N \mid x - y = 4 \}$

9-misol. $A = \{1; 2; 3\}$ to'plamni $B = \{a; b\}$ to'plamning barcha ustiga akslantirishlarini ko'rsating.

10-misol. $H = \{1; 2; 3\}$ to'plamni barcha o'zining ichiga akslantirishlarini ko'rsating.

11-misol. f – akslantirish chekli M to'plamni o'zining ichiga akslantirish bo'lsin. f – akslantirish in'ektiv bo'lishi uchun, uning ustiga akslantirish bo'lishi zarur va yetarli ekanligini ko'rsating.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A.G. Kurosh «Oliy algebra kursi » T. 1978 y.
2. X. Rasulov «Algebradan ma'ruzalar matni » N. 2005 y
3. X. Rasulov, K Xalilov, R. Mamasodiqov «Matematikadan ma'ruzalar» N. 2009.
4. M. Xolmurodov, K Xalilov, K Akramova «Matematikadan mustaqil ishlar to'plami» N. 2009.
5. Yo. Soatov «Oliy matematika» 1996 y.
6. N.Ya. Vilenkin «Matematika» M. 1972 y.
7. V.P. Minorskiy «Oliy matematikadan masalalar to'plami». T.1986 y.