ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

УЛЫЎМА ФИЗИКА КАФЕДРАСЫ

Физика-математика факультетиниң IV курс студенти Реймов Рашид Қошқарбаевичтың питкериў қәнигелик жумысы

УЛЫЎМАЛЫҚ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ АЙЫРЫМ МӘСЕЛЕЛЕРИН MATHEMATICA УНИВЕРСАЛЛЫҚ ПАКЕТИНИҢ ЖӘРДЕМИНДЕ ШЕШИЎ

Илимий басшысы профессор Б.А.Абдикамалов ________________________
(қолы)

Кафедра баслығы физика-математика
илимлериниң кандидаты Ж.О.Акимова ________________________
(қолы)

Нөкис – 2012

Мазмуны

КИРИСИЎ

Ҳәзирги заман физикасы экспериментлер, тәжирийбелер ҳәм теориялық изертлеўлер нәтийжелерине тийкарланып тез раўажланып баратырған илимлерден болып есапланады. Бундай тез раўажланыўға тийкарынан еки себеп өз үлеслерин қоспақта:

1. Физиканың экспериментallық базасының қурамаласыўы ҳәм раўажланыўы. Буған биринши гезекте ҳәзирги ўақытлары иске түсип атырған элементар бөлекшелердиң гигант тезлеткишлерин (мысал ретинде Үлкен адронлық коллайдерди), космосқа шығарылған изертлеў аппаратларын (байланыс қураллары, барлық диапазонларда ислейтуғын ҳәр қыйлы телескоплар, Habble космослық телескопы терең вакуумдеги технологиялар), ярым өткизгишлер физикасының раўажланыўы болған радиоэлектрониканың, оптоэлектрониканың жетискенликлерин көрсетиўге болады.

2. Компьютер техникасы менен Дүньялық Internet тармағының адамзат турмысына кеңнен кирип келиўи еки мәселени шешти: Биринשиси есаплаў техникасының тезлиги менен ислеў қәбилетлилигиниң артыўы ҳәм усыған сәйкес көп санлы жаңа программалаў тиллериниң (системалардың, универсаллық пакетлердиң) пайда болыўы. Екиншиси информациялық революция - Internet

тармағының ҳәр күн сайын раўажланыўы. Бул өз гезегинде информациялық технологиялардың күшли алға илгерилеўине, Жер жүзиниң барлық орынларында турған адамлардың илимий ҳәм басқа да информацияларды үлкен тезликлерде ала алыўына, бир бири менен тығыз байланыста турыўына мүмкиншиликтиң туўылыўы болып табылады.

Физиканың улыўма курсы бойынша қубылысларды терең түсиниўде есаплаўларды ҳәм сол есаплаўлар тийкарында графиклер, диаграммалар қурыўды көп талап ететуғын бөлимлердиң саны аз емес. Оларға механикалық тербелислерди (еркин, сөниўши, мәжбүрий), толқынлардың интерференциясын, молекулалық физика менен термодинамикадағы ҳәр қыйлы бөлистириўлерди, идеал ҳәм ҳақыйқый газлердеги процесслер менен олардың ҳал теңлемелерин, қатты денелердиң жыллылық сыйымлықларын, салыстырмалық теорияларына байланыслы Әлемниң раўажланыўына тийисли болған ҳәм тағы да басқа ҳәр қыйлы есаплаў ислерин көрсетиўге болады. Усылардың қатарына физикалық эксперимент нәтийжелерин қайта ислеў, жиберилген қәтеликлерди есаплаў ҳәм сол тийкарда өлшенип атырған физикалық шаманың мәнисин анықлаў ислери де киреди.

Жоқарыда айтылған есаплаў жумысларын әмелге асырыў ушын оғада көп санлы программалаў тиллери орын алған. Бул питкериў жумысында есаплаўларды әмелге асырыў ушын Mathematica универсаллық пакетиниң 5-8 версиялары сайлап алынды. Жумыс 2011-2012 оқыў жылы барысында орынланып, ол өз ишине Эйнштейнниң улыўмалық салыстырмалық теориясына тийисли болған әҳмийетли мәселелерди шешиў болып табылады (бундай мәселелердиң қатарына Шварцшильд шешими, Шварцшильд метрикасы ушын геодезиялық сызықларды есаплаў, Меркурий орбитасының прецессиясын есаплаў киреди).

1-§. Улыўмалық салыстырмалық теориясындағы Кеплер мәселеси

Кеплер мәселеси деп бир бири менен гравитация арқалы тәсир етисетуғын еки сфералық симметрияға ийе денениң қозғалысын излеў мәселесине айтады. Классикалық тартылыс нызамында бул проблеманың шешими Исаак Ньютонның өзи тәрепинен табылды: бул теория бойынша басланғыш шәртлерге сәйкес денелер конуслық кесимлер бойынша қозғалады (эллипс, парабола ямаса гиперболалық орбита менен). Улыўмалық салыстырмалық теориясы шеклеринде бул мәселе анық түрде қойылған жоқ. Себеби релятивистлик физикада абсолют қатты дене моделиниң болыўы мүмкин емес. Ал абсолют қатты денеден басқа денелердиң барлығы да сфералық симметрияға ийе болып тәсирлесе алмайды. Оның ушын Ньютон физикасында орын алатуғын ноқатлық дене моделине өтиўге туўры келеди. Бирақ улыўмалық салыстырмалық теориясында бундай ноқатлық денелер де белгили бир машқалаларды пайда етеди. Усының менен бир қатарда денелердиң ийелеген орынлары ҳәм олардың тезликлерин бериў менен бирге барлық кеңисликтеги гравитациялық майданды да (метриканы) бериў талап етиледи (буны улыўмалық салыстырмалық теориясындағы басланғыш шәртлер машқаласы деп атайды). Усындай жағдайларға байланыслы улыўмалық салыстырмалық теориясында Кеплер мәселесиниң дәл аналитикалық шешими усы ўақытларға шекем табылмады (Бул Ньютонның тартылыс нызамындағы үш дене мәселесине сәйкес келеди). Бирақ бул мәселе шеклеринде денелердиң қәсийетлерин зәрүрли болған дәлликлерде есаплаўға мүмкиншилик беретуғын усыллардың пүтин комплекси дөретилген: сынап көрилетуғын дене жақынласыўы, постньютонлық (Ньютоннан кейинги) формализм, санлық улыўмалық салыстырмалық теориясы. Биз төменде гравитациялық майдан деп айтылғанда кеңислик-ўақыт нәзерде тутылады.

2-§. Тарийхий мағлыўматлар

Егер орайлық дене әтирапында айланыўшы бөлекшеге қосымша сыртқы күшлер тәсир етпесе, онда бул бөлекше гравитациялық Ньютон күшиниң тәсиринде барлық ўақытта да бир эллипс бойынша қозғалады. Егер сырттан қосымша күшлер тәсир жасалса (мысалы басқа планеталардың гравитациялық тәсири), онда бөлекше турақлы түрде өзгеретуғын параметрлерге ийе эллипс тәризли орбита бойынша қозғалады. Бул эллипстиң айланыўы орбитаның прецессиясы деп аталады. Бул прецессияның шамасын астрономлар үлкен дәлликте өлшей, ал теоретиклер болса сыртқы тәсирлердиң шамасы менен бағытларын билген ҳалда болжай алады. Ньютонның гравитация теориясы (пүткил дүньялық тартылыс нызамы) Меркурий перигелийиниң бақланатуғын аўысыўының 99,26 процентин түсиндире алды. Ал ҳәр 100 жылда орын алатуғын 40 мүйешлик секундлық аўысыўды Ньютон нызамы тийкарында ҳеш ким түсиндире алмады.

1859-жылы Францеялы астроном, Париж обсерваториясының директоры Урбен Жан Жозеф Леверье бақлаўлар тийкарында анықланған меркурий планетасының прецессиясының теориялық болжаўлар менен азмаз сәйкес келмейтуғынлығын тапты. Орбитаның перигелийи Ньютон нызамы тәрепинен анықланған шамадан тезирек қозғалатуғын болып шықты. Бул эффектиң шамасы жүдә киши – ҳәр жүз жылда 38”. Бирақ бул шама өлшеўлердиң жиберетуғын қәтелигинен әдеўир үлкен еди (өлшеўлер 1” муғдарында қәтелик жиберетуғын еди). Бул ашылыўдың әҳмийети уллы еди ҳәм сонлықтан XIX әсирдеги көп санлы физиклер менен астрономлар, аспан механикасы бойынша қәнигелер бул мәселени шешиўге тырысты. Классикалық физика шеклеринде көп санлы шешимлер усынылды. Олардың ишиндеги ең белгилилери мыналар: Қуяш әтирапындағы планеталар аралық көзге көринбейтуғын шаң-тозаңның болыўы, Қуяштың квадруполлик моментиниң бар екенлиги (өз көшери дөгерегинде айланыўының салдарынан Қуяштың формасы сфера емес, ал жалпайған сфераға айланады), Меркурийдиң еле табылмаған тәбийий жолдасы, еле табылмаған Қуяшқа ең жақын планета (бул гипотезалық планетаға Вулкан атамасы берилди). Бул болжаўлардың ҳеш қайсысы да тастыйықланбағанлықтан физиклер кескин түрдеги пүткиллей жаңа гипотезаларды усына баслады. Мысалы бир қатар физиклер тартылыс нызамын өзгертиў керек (буның ушын Ньютон нызамындағы R диң квадратының орнына басқа көрсеткишти қойыў да усынылды). Бир қатар физиклер гравитациялық потенциалға планетаның тезлигинен ғәрезли болған ағзаны қосыўды усынды.

Бирақ бундай тырысыўлардың басым көпшилиги қарама-карсылықларға ийе болып шықты. Өзиниң аспан механикасы бойынша жумысларында [6] белгили математик Лаплас егер гравитациялық тәсир денелер арасында бир заматта жеткерилип берилетуғын болса (бул жағдайда мәселеге тезликке байланыслы потенциалды киргизиўге туўры келеди), онда қозғалыўшы планеталар системасында импульс сақланбайды — импульстиң бир бөлими гравитациялық майданға бериледи (бундай аўҳал электродинамикада зарядлар электромагнит тәсирлескенде орын алады). Ньютон тәлиматының көз-қараслары бойынша егер гравитациялық тәсирлесиў шекли тезлик пенен берилетуғын болса ҳәм денелердиң тезликлеринен ғәрезсиз болса, онда барлық планеталардың Қуяш бурынырақ ийелеген орынға қарай тартылыўы керек. Усындай тийкарда Лаплас Кеплер мәселесиндеги орбиталардың эксцентриситети менен үлкен ярым көшерлериниң әсирлер даўамында өзгериске ушырайтуғынлығын көрсетти. Бул шамалардың өзгериўлериниң ең жоқары шеклеринен (бул шеклер Қуяш системасы менен Айдың қозғалысының орнықлылығынан келип шығады) Лаплас гравитациялық Ньютонлық тәсирлесиў тезлигиниң "жақтылықтың 50 миллион тезлигинен киши болмайтуғынлығын" көрсетти [3,5]. Бул ўақыя шама менен 1797-жылы болып өткен еди.

Лаплас методы Ньютон гравитациясын туўрыдан-туўры улыўмаластырған жағдайларда дурыс нәтийжелерди береди. Бирақ қурамалырақ моделлер ушын оның қолланыўға болмайды. Мысалы электродинамикада қозғалыўшы зарядлар тартысыўы ямаса ийтерисиўи басқа зарядлардың көзге көринип турған орынларынан байланыслы емес, ал егер олар туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалатуғын болған жағдайда тап усы ўақыт моментинде көринетуғын орынларынан ғәрезли. Бул Лиенар-Вихерт потенциалының қәсийети болып табылады [8]. Егер мәселеге улыўмалық салыстырмалық теориясы көз-қарасларынан қарайтуғын болсақ $(v/c)^3$ тәртибиндеги ағза дәллигене шекем сондай нәтийжелерди аламыз [9].

Жоқарыда келтирилген машқалалардан қутылыўы мақсетинде XIX әсирдиң соңғы 30 жылы ишинде илимпазлар Вебердиң, Гаусстың, Риманның ҳәм Максвеллдиң электродинамикалық потенциалларына тийкарланған гравитациялық тәсирлесиўлер нызамын пайдаланыўға тырысты [10]. 1890-жылы Левиге Вебер менен Риман нызамларының комбинациясын пайдаланыўдың нәтийжесинде перигелийдиң керекли болған аўысыўын ҳәм орнықлы орбитаны алыў сәти түсти. Екинши сәтли тырысыў П.Гебер тәрепинен 1898-жылы исленди. Бирақ усындай жағдайларға қарамастан басланғыш электродинамикалық потенциаллар дурыс емес болып шықты (мысалы Вебер нызамы Максвеллдиң электромагнетизм кирмеди). Бул гипотезалар ықтыярлы гипотезалар сыпатында толық бийкарланды [1,11]. Максвелл теориясын пайдаланатуғын басқа теориялар (мысалы Г.Лоренцтиң теориясы) прецессия ушын дым киши шаманы берди [3.12].

1904—1905 жыллары Х.Лоренцтиң, А.Пуанкарениң ҳәм А.Эйнштейнниң жумысларында арнаўлы салыстырмалық теориясының фундаменти қурылды ҳәм қәлеген тәсирлесиўдиң жақтылықтың тезлигинен үлкен тезликлер менен тарқалыўы бийкарланды. Сонлықтан Ньютонның гравитация нызамын салыстырмалық принципи менен сәйкес келиўши, киши тезликлерде ҳәм әззи гравитациялық майданларда пүткил дүньялық тартылыс нызамына айланатуғын басқа теория менен алмастырыў мәселеси пайда болды. Бундай жумыслар менен А.Пуанкаре 1905-1906 жыллары, Г.Минковский 1908-жылы ҳәм А.Зоммерфельд 1910-жылы шуғылланды. Бирақ олар қарап шыққан моделлер перигелийдиң аўысыўы ушын дым киши шаманы берди [12-13].

1907-жылы А.Эйнштейн гравитациялық майданды тәрийиплеў ушын сол ўақытлардағы салыстырмалық теориясын (ҳәзирги ўақытта бул теорияны арнаўлы салыстырмалық теориясы деп атайды) улыўмаластырыў керек деген жуўмаққа келди. 1907-жылдан баслап ол избе-из жаңа теорияны дөретиўге қарай жүрди ҳәм 1915-жылдың ақырына шекем өзиниң гравитация теориясын (улыўмалық салыстырмалық теориясын) толық дөретти. Бул теорияны дөретиўде Эйнштейн жол көрсеткиш ретинде өзиниң салыстырмалық принципин пайдаланды. Бул принцип бойынша бир текли гравитация майданы барлық материяға бирдей тәсир етеди ҳәм сонлықтан оны еркин түсиўши бақлаўшы таба алмайды. Усы жағдайға сәйкес барлық гравитациялық эффектлерди тезлениўши есаплаў системаларында пайда етиў мүмкин. Тап сол сыяқлы гравитация майданында тезлениўши есаплаў системаларында жүзеге келетуғын эффектлерди пайда ете аламыз. Сонлықтан гравитация есаплаў системасының тезлениўине байланыслы болған инерция күши түринде тәсир етеди. Бундай инерция күшлери қатарына орайдан қашыўшы күш ямаса Кориолис күши де киреди. Усы жағдайларға байланыслы гравитациялық күштиң шамасы инерт массаға пропорционал. Нәтийжеде кеңислик-ўақыттың ҳәр қыйлы ноқатларында инерциал есаплаў системалары бир бирине салыстырғанда тезлениўге ийе болады. Бундай жағдайлардың барлығы да бизиң кеңислигимиз классикалық физикадағы евклидлик кеңислик емес, ал риман геометриясының майысқан кеңислиги деген болжаўды қабыл етсек дурыс болады. Усының менен бирге кеңислик пенен ўақыт арасындағы байланыс майысқан болып шығады. Бундай майысқанлық әдеттеги шараятларда гравитация күши сыпатында көринеди [14]. Сагиз жыл даўам еткен жумыстың ақырыныда кеңислик-ўақыттың оның ишинде жайласқан материя тәрепинен қалай майысатуғынлығын тапты. Бул майысыўды Энештейнниң теңлемелери берди. Гравитацияның инерция күшлеринен айырмасы соннан ибарат, ол кеңислик-ўақыттың майысқанлығы бойынша анықланады. Ал бул майысқанлық инвариантлы түрде өлшенеди. Эйншейнниң теңлемелериниң шешимлирен биринширлерден болып Эйнштейнниң өзи жуўық түрде ҳәм Шварцшилд тәрепинен дәл түрде алынды. Бул шешимлер Меркурийдиң аномаллық прецессиясын түсиндирди ҳәм жақтылық нурының гравитация майданында аўысыўы ушын дәл мәнис берди. Теорияның бул болжаўы 1919-жылы англиялы астрономлар тәрепинен тастыйықланды.

3-§. Сынап көрилиўши дене жақынласыўы

Бундай жақынласыўды бир дենениң массасы m екинши дененииң массасы M шамасына салыстырғанда есапқа алмастай киши деп есапланады. Бул Қуяш дөгерегинде айланыўшы планеталар ушын жаман емес, ал космослық аппаратлар ушын дерлик идеал жақынласыў болып табылады. Бундай жағдайда биринши денени сынап көрилетуғын дене деп атайды. Сынап көрилетуғын дене екинши дене пайда еткен гравитациялық майданға тәсир етпеўи керек ҳәм екинши дене тәрепинен пайда етилген кеңислик-ўақыттың геодезиялық сызықлары бойынша биринши дене қозғалады деп есапланады. Еки дене мәселеси космологиялық масштабларға салыстырғанда әдеўир киши масштабларды қаралып атырғанлықтан лямбда ағзаның метрикаға тәсирин есапқа алмаўға болады ҳәм қәлеген сфералық симметрияға ийе дененииң гравитациялық майданы Шварцшильд шешими менен бериледи. Ендигиден былай бөлекше деп аталатуғын жеңил дененииң қозғалысы егер тасыў-қайтыў күшлерин ҳәм гравитациялық нурланыўдың реакцияларын есапқа алмасақ Шварцшильд кеңислигиниң геодезиялық сызықлары бойынша болады.

Тап усындай жақынласыўды Эйнштейн биринши рет Меркурий планетасының аномаллық прецессиясын есаплады. Бул улыўмалық салыстырмалық теориясының биринши тастыйықланыўы болып табылады. Соның менен бирге Эйнштейнниң бул жумысы сол ўақытлардағы аспан механикасының ең белгили болған жумысларының бирине айланды. Усындай жақынласыў улыўмалық салыстырмалық теориясы тәрепинен болжанатуғын жақтылық нурының аўысыўын да жеткиликли дәрежеде дәл тәрийиплейди. Бирақ усының менен бир қатарда гравитациялық нурланыўдың салдарынын орбиталардың релятивитлик қысқарыўын тәрийиплеў ушын бундай шешим жеткиликли емес.

4-§. Геометриялық кирисиў

Әдеттеги Евклид геометриясында Пифагор теоремасы орын алады. Бул теорема бойынша бир бирине шексиз жақын жайласқан еки ноқат арасындағы қашықлықтың квадраты ds^2 координаталардың дифференциалларының квадратларының қосындысына тең

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Бул формулада dx, dy ҳәм dz арқалы декарт координаталар системасындағы x, y ҳәм z көшерлериндеги ноқатлардың координаталары арасындағы шексиз киши айырмалар белгиленген. Енди $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ формуласы дурыс емес, ал кашықлық

$$ds^2 = F(x,y,z)dx^2 + G(x,y,z)dy^2 + H(x,y,z)dz^2$$

формуласының жәрдеминде берилетуғын дүньяны көз алдымызға келтиремиз. Бул формулада F, G ҳәм H шамалары арқалы орынның функциялары белгиленген. Бундай жағдайды көз алдыға келтириў қыйын емес. Себеби бизиң өзимиз тап усындай дүньяда жасап атырмыз: Жердиң бети иймейген, оны тегис картада майыстырмай тегис картада көрсетиў мүмкин емес. Декартлық емес координаталар да усы жағдайға мысал бола алады: сфералық (r, θ, φ) координаталарда Евклидлик кашықлық

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

түринде жазылады.

Ең ақырында ҳәм улыўмалық жағдайда биз сызғыштың өзиниң координаталық узынлығын ийелеп турған орны өзгергенде ғана емес, ал оның бағыты өзгергенде де ямаса айланғанда да өзгертеди деп есаплаўымыз керек. Буд жағдай узынлық ушын жазылған аңлатпада жаңа қосылыўшылардың (кесилискен қураўшылардың) пайда болыўына алып келеди:

$$ds^2 = g_{xx}\, dx^2 + g_{xy}dxdy + g_{xz}dxdz + \ldots + g_{zy}dzdy + g_{zz}dz^2.$$

Бул аңлатпада g_{xx}, g_{xy} ҳәм басқа да 6 функциялар координаталар өзгергенде метрлик тензор деп аталатуғын тензордың қураўшыларындай болып түрленеди. Метрлик тензорды әдетте метрика деп те атайды. Бул тензор бул улыўмаласқан Риман геометриясындағы кеңисликтиң барлық характеристикаларын анықлайды. Мысалы сфералық координаталарда кесилискен ағзалар жоқ, ал оның бирден бир ноллик қураўшысы $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ ҳәм $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$ болып табылады.

Қандай да бир координаталар системасында метрлик тензорды бергеннен кейин Риман кеңислигиниң барлық геометриясы беккем берилген болып есапланады ҳәм координаталарлы түрлендиргенде өзгериссиз қалатуғынлығын арнаўлы түрде атап өтемиз. Әпиўайы етип айтқанда координаталар тек ықтыярлы санлар болып табылады. Олар кеңисликтиң ноқатларын көрсетеди. Ал физикалық сызғыш жәрдеминде өлшенген еки ноқат арасындағы қашықлық ол ноқатларға қандай координаталардың берилгенинен пүткиллей ғәрезсиз. Өлшенген қашықлық координаталық тор өзгергенде инвариант болып қала береди.

Альберт Эйнштейн арнаўлы салыстырмалық теориясында кеңисликтеги еки ноқат арасындағы қашықлықтың инвариант болып табылмайтуғынын, ал бақлаўшының тезлигинен ғәрезли екенлигин көрсетти. Бул қашықлық ҳақыйқый инвариант шама болған интервалдың бир ўақытлық кеңислигине түсирилген проекциясы болып табылады. Интервал бақлаўшының қозғалысынан ғәрезли емес. Бирақ ол кеңислик-ўақыттың кеңисликлик координаталары менен бирге ўақытлық координатаны да өз ишине алады. Кеңислик-ўақыттығы ноқатлар ўақыялар деп аталады. Демек кеңислик-ўақыттағы интервал

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dx^2$$

формуласының жәрдеминде бериледи. Бул формула сфералық координаталар системасында

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

түрине ийе болады. Бул формула Пифагор теоремасының тәбийий улыўмаластырылыўы болып табылады ҳәм кеңислик-ўақыттың кыйсықлығы болмаған жағдайда дурыс нәтийжелерди береди. Ал улыўмалық салыстырмалық теориясында кеңислик-ўақыт майысқан ҳәм сонлықтан қашықлық

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

түриндеги улыўмалық формуланың жәрдеминде бериледи. Бул формула ушын Эйнштейнниң суммалаў қағыйдасы орынланады – төменде ҳәм жоқарыда ушырасатуғын индекс бойынша суммалаў операциясы орынланады. Соның менен бирге суммалаў индекслердиң барлық мәнислери бойынша (биз қарап атырған жағдайда төрт индекс бойынша, олардың үшеўи кеңисликлик, ал биреўи ўақытлық) жүргизиледи. Метриканың қураўшыларының дәл мәнислери гравитацияны пайда етиўши заттың тарқалыўы менен (оның массасы, энергиясы ҳәм импульси) Эйнштейнниң теңлемеси арқалы анықланады. Эйнштейн бул теңлемелерди энергияның ҳәм импульстиң сақланыў нызамларынан келип шыққан халда келтирип шығарды. Бирақ бул теңлемелердиң шешимлери жақтылықтың гравитация майданындағы аўысыўы сыяқлы бурын бақланбаған қубылыслардың бар екенлигин көрсетти. Бундай қубылыслардың бар екенлиги кейинирек эксперимнетлерде тастыйықланды.

5-§. Шварцшильд метрикасы

Швацшильд метрикасы бос кеңислик ушын космологиялық константасыз (турақлысыз) сфералық симметрияға ийе бирден бир дәл шешим болып табылады. Мысалы бул метрика басқа аспан денелеринен әдеўир кашықлықта жайласқан айланбайтуғын ҳәм зарядланбаған қара қурдымның ҳәм алыста жайласқан сфералық симметрияға ийе үлкен массаға ийе денениң гравитация майданын жеткиликли дәрежеде дәл тәрийиплейди. Бул шешимди биринши рет тапқан Карл Шварцшильддиң аты менен аталған.

Бул шешим статикалық шешим болып табылады, сонлықтан сфералық гравитациялық толқынлардың болыўы мүмкин емес.

Метриканың түри. Шварцшильд координаталары. Шварцшильд координаталары деп аталатуғын (t, r, θ, φ) координаталарында (олардың үшеўи сфералық координаталарға сәйкес келеди) топологиясы $R^2 \times S^2$ болған еки өлшемли Евклидлик кеңислик пенен еки өлшемли сфераның көбеймеси)

$$g = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

түрине ийе болады. Бундай метрикада интервал

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} - r^2\left(\sin^2\,\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

түринде жазылады. Бул формулада $r_s = 2GM/c^2$ шамасы Шварцшилдьд радиусы ямаса гравитациялық радиус деп аталады. M арқалы гравитация майданын пайда етиўши масса, ал G арқалы гравитациялық турақлы, c арқалы жақтылықтың вакуумдаги тезлиги белгиленген.

Жоқарыда келтирилген r координатасы радиус-вектордың узынлығы болып табылмайды. Бул шаманы усындай метрикада t = const, $r = r_0$ сферасының бетиниң майданы $4\pi r^2$ шамасына тең болатуғындай етип алады. Бундай жағдайда ҳәр қыйлы r шамаларына ийе еки ўақыя арасындағы "қашықлық" (бирақ басқа координаталары бирдей болыўы керек)

$$\int\limits_{r1}^{r2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} > r_2 - r_1, \qquad r_2,\ r_1 > r_s$$

интегралының жәрдеминде бериледи. M → 0 ҳәм r → ∞ шеклеринде Шварцшильд метрикасы сфералық координаталарда жазылған Минковский метрикасына өтеди. Сонлықтан массалы M денесинен үлкен қашықлықларда кеңислик-ўақыт жуўық түрде псевдоевкилидлик болып табылады ҳәм оның сигнатурасы (1,3) түринде жазылады. $r > r_s$ қашықлықлары ушын $g_{00} = 1 - r_s/r \leq 1$, g_{00} шамасы r диң өсиўи менен монотонлы өсетуғын болғанлықтан денениң жанындағы ноқатларда алыстағы ноқатлардағыға салыстырғанда меншикли ўақыт "әстерек өтеди". Солай етип үлкен массалы денелер тәрепинен ўақыттың өтиўиниң гравитациялық әстелениўи орын алады.

Дифференциаллық характеристикалар. $g_{00} = e^{\nu}$, $g_{11} = - e^{\lambda}$ белгилеўлерин киргиземиз. Бундай жағдайда нолге тең емес Кристоффелдиң ғәрезсиз символлары

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'_r}{2}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'_r}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{\lambda'_t}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'_r}{2} e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \text{ctg}\ \theta, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\nu'_t}{2},$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{\lambda'_t}{2}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}$$

түрине ийе болады. Майысыў тензорының инварианты мынаған тең:

$$I_1 = \left(\frac{r_s}{2r^3}\right)^2, \quad I_2 = \left(\frac{r_s}{2r^3}\right)^3.$$

Майысқанлық тензоры Петровтың классификациясы бойынша D типине киреди.

Масса дефекти. Егер материяның радиусы *a* болған сфералық симмтерияға ийе тарқалыўы орын алса, онда денениң толық массасы оның энергия-импульс тензоры арқалы

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2\, dr$$

формуласы менен байланысқан. Мысалы затлар статикалық тарқалған болса, онда $T_0^0 = \varepsilon$, ε арқалы кеңисликтеги энергияның тығызлығы белгиленген. Бизлер сайлап алған координаталарда шарлық қатламның көлеми

$$dV = 4\pi r^2 \sqrt{g_{11}}\, dr > 4\pi r^2\, dr$$

формуласы жәрдеминде анықланатуғын болғанлықтан

$$m = \int_0^a \frac{\varepsilon}{c^2} 4\pi r^2\, dr < \int_V \frac{\varepsilon}{c^2}\, dV$$

екенлигине ийе боламыз. Бул айырма дениниң массасының гравитациялық дефектин береди. Системаның толық энергиясының бир бөлеги гравитациялық майданның энергиясы түринде болады деп айтыўға мүмкин. Бирақ бул энергияны кеңисликте локалластырыў (базы бир көлемге жыйнаў) мүмкин емес.

Метрикадағы өзгешелик. Егер жоқарыда айтылған жағдайларға кеўил бөлсек метрика еки түрли өзгешеликке ийе: биринширси $r = 0$, ал екиншиси $r = r_s$ теңлиги орынланғанда. Ҳақыйқатында да Шварцшильд координаталарында денеге қулап түсиўши бөлекше ушын $r = r_s$ бетине жетиў ушын шексиз көп ўақыт талап етиледи. Бирақ басқа координаталарға өтиў (мысалы алып жүриўши есаплаў системасындағы Леметр координаталарыа өтсек) басқа жағдай орын алады. Бундай координаталар менен байланысқан денеге қулап түсиўши бақлаўшының көз-қарасы бойынша бул бетте кеңислик-ўақыт ҳеш қандай айрықшалыққа ийе болмайды. Соның менен бирге бақлаўшы $r = r_s$ бетине де, $r = 0$ болған областқа да шекли ўақыт ишинде келип жетеди (бул ўақыт бақлаўшы ушывн меншикли ўақыт деп аталады).

Шварцшильд метрикасының ҳақыйқый өзгешелиги тек $r \to 0$ шегинде бақланады. Бул шекте қыйсықлық (майысыў) тензорының скаляр инвариантлары шексизликке умтылады. Бундай өзгешеликти (бундай өзгешеликти сингулярлық деп атаймыз) координаталар системасын өзгертиў менен сапластырыўға (жоқ қылыўға) болмайды.

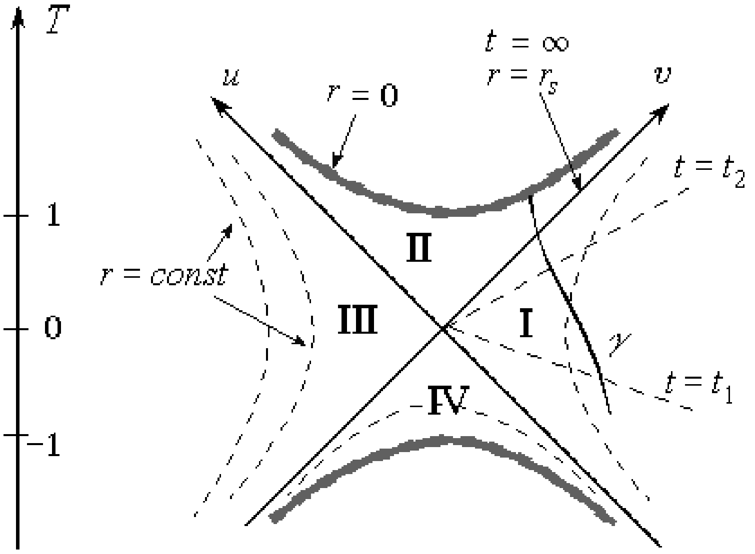
Ўақыялар горизонты. $r = r_s$ бети ўақыялар горизонты деп аталады. Егер координаталар системасын сәтли түрде сайлап алсақ (мысалы Леметер ямаса Крускала координаталарын алатуғын болсақ), онда қара қурдымнан ўақыялар горизонты арқалы ҳеш бир сигналдың шыға алмайтуғынлығын көрсетиўге болады. Бундай мағанада Шварцшильд қара қурдымынан сыртта майданның тек бир параметр, дениниң толық массасынан ғәрезли болатуғынлығы таң қаларлық жағдай емес.

Крускал координаталары. $r = r_s$ теңлиги орынланғанда сингулярлыққа жол қоймайтуғын координаталар системасын табыўға тырысыў мүмкин. Бундай координаталар системаларының көп екенлиги белгили ҳәм олардың ишинде ең жийи ушырасатуғыны Крускал координаталар системасы болып табылады. Бул координаталар системасы Эйнштейнниң ваккумлик теңлемелерин қанаатландыратуғын максимал даўам еттирилген көп түрликтиң барлығын бир карта менен қамтыйды. Бул (максимал даўам еттирилген) үлкен кеңислик-ўақыт $\tilde{\mathcal{M}}$

әдетте Шварцшильд ямаса сийрек жағдайларда Крускал кеңислиги деп аталады. Крускал координаталарындағы метрика былайынша жазылады:

$$ds^2 = -F(u,v)^2\,du\,dv + r^2(u,v)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (2)$$

Бул аңлатпада $F = \frac{4r_s^3}{r}e^{-r/r_s}$, ал $r(u,v)$ функциясы $(1-\frac{r}{r_s})e^{r/r_s}$ теңлемеси жәрдеминде анық емес түрде анықланады.



1-сүўрет. Шварцшильд кеңислигиниң θ = const, φ = const кесе-кесими. Сүўреттиң ҳәр бир ноқатына майданы 4πr^2(u,v) сферасы сәйкес келеди. Жақтылыққа мегзеси геодезиялық сызықлар (яғный фотонлардың дүньялық сызықлары) вертикал бағытқа 45^0 лық мүйеш жасайтуғын туўрылар. Басқа сөз бенен айтқанда бул u = const ҳәм v = const болған сызықлар.

$\tilde{\mathcal{M}}$ кеңислиги максималлық кеңислик болып табылады. Яғный оны оннан үлкен кеңислик-ўақытқа изометрлик жайластырыўға болмайды. Ал Шварцшильд координаталарындағы r > r$_s$ боласты ($\mathcal{M}$) бир айтып атырған $\tilde{\mathcal{M}}$ областтың бир бөлеги ғана болып табылады (1-сүўреттеги v > 0, r > r$_s$ областы). Жақтылықтың тезлигинен киши тезликлерде қозғалатуғын денениң дүньялық сызығының қыялық мүйеши 45^0 тан киши болады ҳәм бул дене $\mathcal{M}$ кеңислигин таслап кете алады (сүўреттеги γ иймеклиги). Усының салдарынан бул дене II областқа өте алады (бул областта r < r$_s$). Бирақ дене бул областты таслап r > r$_s$ болған областқа қайтып келе алмайды (буның ушын дүньялық сызығының қыялығы 45^0 тан үлкен болыўы ҳәм усыған сәйкес жақтылықтың тезлигинен де үлкен тезликлер менен қозғалыўы керек. Солай етип II область қара қурдым областы болып табылады. Оның шегарасы (v ≥ 0, r = r$_s$ үзик сызықлар) усыған сәйкес ўақыялар горизонты болып табылады.

$\tilde{\mathcal{M}}$ кеңислигинде жәнe бир тегис асимптоталық область бер болып (III область) бул обласқа Шварцшильд координаталарын киргизиў мүмкин. бирақ бул область I область пенен себеп арқалы байланыспаған. Демек ўақыялар горизонтының сыртында турған ҳалда бул областтан ҳеш қандай информациялар алыўдың мүмкиншилиги жоқ деп жуўмақ шығарамыз. Астрономиялық объектлер ҳақыйқатында да коллапсқа ушыраса IV ҳәм III областлар пайда болмайды. Себеби сүўретте көрсетилген диаграмманың шеп тәрепин коллапсланыўшы материя менен толған бос емес кеңислик-ўақыт пенен алмастырыў зәрүр.

Максимал түрде даўам еттирилген $\tilde{\mathcal{M}}$ Шварцшильд кеңислигиниң әҳмийетли (зор) қәсийетлерин атап өтемиз:

1. Бул кеңислик сингулярлық: горизонттың ишине түсиўши бақлаўшының r координатасы оның меншикли ўақыты τ базы бир шекли τ_0 мәнисине умтылғанда нолге умтылады. Бирақ оның дүньялық сызығын $\tau \geq \tau_0$ областына даўам еттириўге болмайды. Себеби $r = 0$ болған ноқатлар бул кеңисликте жоқ. Солай етип бақлаўшының тәғдири бизге оның меншикли ўақытының базы бир моментине шекем-ақ белгили болады

2. $\mathcal{M}$ кеңислиги статикалық болса да [(1)-метриканың ўақыттан ғәрезсиз екенлигинен көринип тур] $\tilde{\mathcal{M}}$ кеңислиги статикалық бола алмайды. Бул жағдайға былайынша анықлама беремиз: $\mathcal{M}$ кеңислигинде ўақытқа мегзес Киллинг векторы кеңейтилген $\tilde{\mathcal{M}}$ кеңислигиниң II ҳәм III областларында кеңисликке мегзес вектор болып табылады.

3. III область та $\mathcal{M}$ ге қарата изометрли. Солай етип максималлық даўам еттирилген Шварцшилд кеңислиги еки "әлемге" ийе болады. Олардың бири "бизиң" әлем (бул $\mathcal{M}$ ниң өзи), ал екиншиси тап усындай болған область. Қара қурдымның ишиндеги II область оларды тутастырады. Бул областты Эйнштейн-Розен көпири деп атайды. I областтан старт алған ҳәм жақтылықтың тезлигинен киши тезлик пенен қозғалыўшы бақлаўшы екинши әлемге өте алмайды (1-сүўретте көрсетилген). Бирақ ўақыялар горизонтын кесип өтиў менен сингулярлыққа түсиў ушын кеткен ўақытты ол өлшей алады. Кеңислик-ўақыттың усындай структурасы қурамалырақ қара қурдымларды изертлегенде сақланады ямаса қурамаласады. Усының нәтийжесинде басқа "әлемлер" ҳәм сол басқа "әлемлерге" саяхатқа шығыў ҳаққындағы көп санлы фантастикалық пикирлерди пайда етти. Соның менен бирге

әлемлерде қара қурдымлар арқалы саяхатқа шығыў жөниндеги илимий-фантастикалық көз-қараслар қәлиплести.

6-§. Шварцшильд шешиминиң алыныў тарийхы ҳәм интерпретациясы

Теоретик қәнигелер ушын Шварцшильд метрикасы өзиниң әпиўайылығы менен әдеўир үлкен теориялық қызығыўшылықларды пайда етеди. Соның менен бирге бул метрика көп санлы қурамалы сораўларды да пайда етеди.

1915-жылдың ортасында А.Эйнштейн гравитация теориясының ең биринши теңлемеси болған $R_{ij} = T_{ij}$ теңлемеси келтирилген мақаласын баспадан шығарды. Бул теңлемелер еле Эйнштейн теңлемелери емес еди. Бирақ бул теңлемелер вакуум болған жағдайда ($T_{ij} = 0$ болған жағдайда) Эйнштейнниң тийкарғы теңлемелерине сәйкес келетуғын еди. Вакуум ушын орайға қарата симметриялы теңлемелерди Шварцшильд 1915-жыл 18-ноябрьден баслап жылдың ақырына шекем интеграллады (шешти). Шварцшильд өзиниң мақаласын «Berliner Berichte» журналында баспадан шығарыў мақсетинде Эйнштейнге хабарласқан ҳәм соның нәтийжесинде ол 1916-жылы 9-январь күни "оның жумысын оғада үлкен қызығыўшылық пенен" оқып шыққанын ҳәм "бул машқаланың ҳақыйқый шешиминиң жүдә аңсат табылғанлығына жүдә ҳайран қалғанлығын" билдирген. Эйнштейнде дәслеп соншама қурамалы теңлемелердиң шешиминиң алыныўына гүман болған.

Шварцшильд өзиниң жумысын март айында тамам қылды. Соның менен бирге ол турақлы тығызлыққа ийе суйықлық ушын сфералық симметрияға ийе статикалық ишки шешим алды. Усы ўақытлары оған кеселлик қосылған ҳәм усының ақыбетинде Шварцшильд қайтыс болды.

Карл Шварцшильд (немисше Karl Schwarzschild) 1873-жылы Франкфурт-на-Майне қаласында туўылған ҳәм 1916-жылы 11-май күни Подстам қаласында 43 жасында қайтыс болған, Немис астрономы ҳәм физиги. Белгили астрофизик Мартин Швацшильдтиң әкеси.

1916-жыл май айынан баслап Г.А.Лоренцтиң шәкирти И.Дросте Эйнштейнниң ең кейинги майдан теңлемелерин изертлеў барысында мәселениң Шварцшильд тапқандай шешимин әдеўир әпиўайы жоллар менен тапты. Ол Швацшильд сферасында жақынлағанда шешимлердиң тарқалыўшылығын таллаў бойынша да бир катар жумысларды орынлады.

Дростениң изи менен көплеген изертлеўшилер Шварцшильд сферасының өткизбейтуғынлығын дәлиллилеўге бағдарланған көп сандағы мағлыўматларды ала баслады. Теориялық характердеги пикирлер физикалық аргумент пенен беккемленди. Бул аргумент бойынша "бундай денелер тәбиятта ушыраспайды". Себеби өлшемлери Шварцшильд радиусынан киши болған денелер, атомлар, жулдызлар ҳеш жерде жоқ.

К.Ланцош ҳәм сол дәўирлердеги ең уллы математик (математиклердиң короли саналған) Д.Гилберт ушын Шварцшильд сферасы "сингулярлық" түсиниги бойынша ойланыўдың керек екенлиги анық болды. П. Пенлеве ҳәм француз мектеби ушын (буған кейинирек Эйнштейнниң өзи де қосылды) бул жағдай илимий тартыслардың объектине айланды

1922-жылы Париж қаласында Эйнштейнниң келиўине байланыслы өткерилген коллоквиумда гәп тек Шварцшильд радиусының сингулярлық болып табылмайтуғынлығы ҳаққында айтылмай, ал ҳәзирги ўақытлары "гравитациялық коллапс" деп аталып жүрген гипотеза ҳаққында да айтылды.

Шварцшилд тәрепинен шеберлик пенен орынланған теориялық жумыс тек салыстырмалы табысқа ғана ийе бола алды. Ол пайдаланған усыл да, оның интерпретациясы да дыққатқа алынған жоқ. Оның жумысынан тек "Шварцшильд метрикасы" сөзинен басқа ҳеш нәрсе де сақланбады. Бирақ интерпретация мәселелери ҳәм ең дәслеп "Шварцшильд сингулярлығы" мәселеси шешилмеди. Ҳәтте сингулярлық ҳеш қандай әҳмийетке ийе емес деген пикирлер де айтыла баслады. Бундай көз-қарасқа еки жол алып келди: биринши жол теориялық, бул жол бойынша "Шварцшильд сингулярлығы" арқалы өтиўге болмайды (сингулярлық сиңиргишликке ийе емес). Екинши жол эмперикалық (бундай жағдай тәбиятта жоқ деген пикир). Бундай көз-қарас кең тарқалды ҳәм сол дәўирдеги илимий әдебиятта үлкен (басым) орынды ийеледи.

Енди биз Шварцшильд шешимин Mathematica универсаллық пакетиниң жәрдеминде есаплаўды көрсетемиз.

Биз дәслеп төрт өлшемли (t,r,θ,ф) сфералық координаталар системасын киргиземиз. Соның менен бирге жоқарыда айтылып өтилгениндей метриканы айланыўларға карата инвариант ҳәм ўақыттан ғәрезсиз деп есаплаймыз.

```
Clear["Global` * "];
```

gμν = DiagonalMatrix[{g00(r), g11(r), $-r^2$, $-r^2\sin^2(\theta)$}];

Енди бизиң массасы M болған сфералық жулдыз ушын g 00 r ҳәм g11(r) шамаларын табыўымыз керек.

a. Эйнштейн тензорының қураўшыларын нолге теңлестиремиз, яғный $G_{\mu\nu} = 0$ ҳәм метрлик қураўшылар ушын теңлемени шешемиз. Әззи майданлық шектен келип шығатуғын шегаралық шәртти қабыл етемиз. Әззи майданлық шек g00 → 1 + 2Ф/c^2 метрлик қураўшысын Ньютонның салмақ күши менен байланыстырады. Бул аңлатпада Ф арқалы Ньютонлық гравитациялық потенциал белгиленген. Буннан кейин Эйнштейн тензорын есаплаў ушын зәрүрли болған процедураларды орынлаймыз.

b. Критикалық радиус r = 2GM/c^2 Шварцшильд радиусы деп аталады. Бул улыўмалық салыстырмалық теориясы эффектиниң әҳмийетиниң өлшеми болып табылады. Биз дүзген программамыздың жәрдеминде Ай, Жер, Қуяш, ақ иргежейли, нейтронлық жулдыз ушын Шварцшильд радиусын есаплаўымыз керек.

Ескертиўлер ҳәм есаплаў схемасы. Эйнштейн тензорын есаплаў ушын Кристоффель символлары ҳәм қыйсықлық тензоры ушын дүзилген аңлатпалар керек. Кристоффель символлары былайынша есапланады:

christ[met_,var_:{t, r, θ, ϕ}]: = Module[{temp1, imet}, temp1 = Outer[D, met, var]; imet
= Inverse[met]//Simplify; 1 2 (Transpose imet. temp1, 1,3,2
+ Transpose[imet. temp1, {1,2,3}] − imet. Transpose[temp1, {3,2,1}])]

Егер биз Кристоффел символларын билетуғын болсақ, онда қыйсықлық тензоры былайынша анықланады:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\delta}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\nu}\Gamma^{\delta}_{\beta\mu}$$

Буннан

curvR[christ_,var_:{t, r, θ, ϕ}]: = Module[{temp1}, temp1
= Outer[D, christ, var]; (Transpose[Outer[D, christ, var], {1,2,4,3}]
− Transpose[Outer[D, christ, var], {1,2,3,4}]
+ Transpose[Inner[Times, christ, christ, Plus, 2], {1,3,4,2}]
− Transpose[Inner[Times, christ, christ, Plus, 2], {1,4,3,2}])]

Егер Кристоффель символларын ҳәм координаталарды curvR ға қоятуғын болсақ, онда 4x4x4x4 = 256 қураўшының дизимин аламыз. Айырым қураўшылары CurvR [.] [[1,2,3,4]] командасының жәрдеминде есапланады. Бул операцияда өзгериўшилер t → l, r → 2, θ → 3, и ф → 4 шамасына тең етип алынған. Қыйсықлық тензорының алгебралық симметриясына байланыслы қураўшылардың барлығы бир биринен ғәрезли емес.

Ең ақырында Эйнштейн тензоры $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ биз анықланған мына процедураның жәрдеминде есапланады:

$$\text{einstein[curv\_, met\_]} := \text{Module}[\{\text{dem}, \text{temp1}, \text{temp2}, i, j, s\}, \text{dem} = \text{Length[met]}; \text{temp1}$$
$$= \text{Simplify[ExpandAll[Table[Sum[curv}[[s, i, s, j]], \{s, \text{dem}\}], \{i, \text{dem}\}, \{j, \text{dem}\}]]]; \text{temp2}$$
$$= \text{Simplify[ExpandAll[Sum[Inverse[met]}[[j, i]]\text{curv}[[s, i, s, j]], \{s, \text{dem}\}, \{i, \text{dem}\}, \{j, \text{dem}\}]]];$$
$$\text{Simplify[ExpandAll[Table[temp1}[[i, j]] - (1\ \ 2)\text{met}[[i, j]]\text{temp2}, \{i, \text{dem}\}, \{j, \text{dem}\}]]]]$$

Егер қыйсықлық тензоры $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ ҳәм метрика einstein процедурасына кирген болса Эйнштейн Тензоры есапланған болады. $G_{\alpha\beta}$ Эйнштейн тензоры симметриялы тензор болып табылады

Шешими.

g00[r] ҳәм g11[r] қураўшылары ваккумлық теңлеме болған $G_{\mu\nu} = 0$ теңлемесинен алынады. Эйнштейн тензорын табыў ушын биз дәслеп gμν метрикасы ушын Кристоффель символлары $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ шамаларын есаплап алыўымыз керек.

$$\Gamma = \text{christ}[\text{g}\mu\nu, \{t, r, \theta, \phi\}]$$

Бул қатардың шешимлери:

$$\{0, \frac{\text{g00}'\ r}{2\text{g00}\ r}, 0{,}0\}, \{\frac{\text{g00}'\ r}{2\text{g00}\ r}, 0{,}0{,}0\}, \{0{,}0{,}0{,}0\}, \{0{,}0{,}0{,}0\}\},$$

$$-\frac{\text{g00}'\ r}{2\text{g11}\ r}, 0{,}0{,}0 \ \ , \ \ 0, \frac{\text{g11}'\ r}{2\text{g11}\ r}, 0{,}0 \ \ , \ \ 0{,}0, \frac{r}{\text{g11}\ r}, 0 \ \ , \ \ 0{,}0{,}0, \frac{r\sin^2\ \theta}{\text{g11}\ r} \quad ,$$

$$0{,}0{,}0{,}0 \ \ , \ \ 0{,}0, \frac{1}{r}, 0 \ \ , \ \ 0, \frac{1}{r}, 0{,}0 \ \ , \ \ 0{,}0{,}0, -\frac{1}{2}\ \sin^2\ '\ \theta \quad ,$$

$$\{\{0{,}0{,}0{,}0\}, \{0{,}0{,}0, \frac{1}{r}\}, \{0{,}0{,}0, \frac{(\sin^2)'[\theta]}{2\sin^2[\theta]}\}, \{0, \frac{1}{r}, \frac{(\sin^2)'[\theta]}{2\sin^2[\theta]}, 0\}$$

Жоқарыда {t,r,θ,ϕ} арқалы сфералық координаталар берилген. Айырым қураўшыларды табыў ушын Γ[[a,b,c]] ға кириў керек. Бул аңлатпада a, b ҳәм c шамалары {1, 2, 3, 4} мәнислерин қабыл етеди. Енди биз қыйсықлық тензоры болған $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ тензорын есаплай аламыз

$$R = \text{curvR}[\Gamma, \{t, r, \theta, \phi\}]//\text{Simplify};$$

Енди метриканы ҳәм қыйсайыў (майысыў) қураўшыларын есапқа алып жоқарыдағы einstein функциясын пайдаланып Эйнштейн тензорын есаплай аламыз.

$$\text{G}\mu\nu = \text{einstein}[R, \text{g}\mu\nu]$$

Улыўма жағдайларда Gμν шамасының 16 қураўшысы болады. Бирақ биз қабыл еткен болжаўларға сәйкес тек диагоналлық қураўшылар ғана нолге тең болмайды. Вообще, у G*pv* есть 16 компонентов, но с нашим упрощением предположений на форме метрики, только диагональные компоненты являются отличными от нуля.

Компьютер Эйнштейн тензоры ушын мынадай шамаларды береди:

$$\left\{\left\{\frac{g00[r]\ (g11[r]+g11[r]^2-r\,g11'[r])}{r^2\,g11[r]^2},\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{0,\ \frac{g00[r]+g00[r]\ g11[r]+r\,g00'[r]}{r^2\,g00[r]},\ 0,\ 0\right\},\right.$$

$$\left\{0,\ 0,\ \frac{r\ (r\,g11[r]\ g00'[r]^2+2\,g00[r]^2\,g11'[r]+g00[r]\ (r\,g00'[r]\ g11'[r]-2\,g11[r]\ (g00'[r]+r\,g00''[r])))}{4\,g00[r]^2\,g11[r]^2},\ 0\right\},$$

$$\left.\left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{r\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\ (r\,g11[r]\ g00'[r]^2+2\,g00[r]^2\,g11'[r]+g00[r]\ (r\,g00'[r]\ g11'[r]-2\,g11[r]\ (g00'[r]+r\,g00''[r])))}{4\,g00[r]^2\,g11[r]^2}\right\}\right\}$$

Вакуумлық теңлемени алыў ушын $G_{\mu\nu}$ тензорын нолге теңлестириў керек. $G_{\mu\nu} = 0$ шәртинен келип шығатуғын теңлеме былайынша жазылады:

```
{eqGtt,eqGrr,eqGθθ,eqGϕϕ}= MapAt[Flatten,Gμν==0,1]//Thread//Select[#1,FreeQ[#,True]&]&
//Simplify ;
    {eqGtt,eqGrr,eqGθθ,eqGϕϕ} //ColumnForm
```

Шешими:

$$\frac{g00[r]\ \left(g11[r]+g11[r]^2-r\,g11'[r]\right)}{r\,g11[r]} == 0$$

$$\frac{1}{r}+\frac{g11[r]}{r}+\frac{g00'[r]}{g00[r]} == 0$$

$$\frac{r\left(r\,g11[r]\ g00'[r]^2+2\,g00[r]^2\ g11'[r]+g00[r]\ (r\,g00'[r]\ g11'[r]-2\,g11[r]\ (g00'[r]+r\,g00''[r]))\right)}{4\,g00[r]^2\,g11[r]^2} == 0$$

$$\frac{r\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(-r\,g11[r]\ g00'[r]^2-2\,g00[r]^2\ g11'[r]+g00[r]\ (-r\,g00'[r]\ g11'[r]+2\,g11[r]\ (g00'[r]+r\,g00''[r]))\right)}{g00[r]\ g11[r]} == 0$$

Бул аңлатпада Select қурамалы емес теңлемелерди сайлап алыў ушын қолланылды. Бул төрт теңлеме $G_{\mu\nu}$ тензорының диагоналлық қураўшыларын табыўға сәйкес келеди ҳәм {eqGtt, eqGrr, eqGθθ, eqGϕϕ} деп аталған.

Тек биринши еки eqGtt ҳәм eqGrr теңлемелери g00 ҳәм g11 функцияларын табыў ушын зәрүрли. Усы жағдайға сәйкес келетуғын еки вакуумлық теңлеме былайынша жазылады

```
vacuumeq=( { eqGtt,eqGrr}//Solve[#,{g11'[r],g00'[r]}]&//Flatten)/.Rule→Equal;
    vacuumeq//ColumnForm
```

Бул қатардың шешими төмендегидей түрге ийе болады:

$$g11'[r] == \frac{g11[r]\ (1+g11[r])}{r}$$

$$g00'[r] == -\frac{g00[r]\ (1+g11[r])}{r}$$

vacuumeq ушын Dsolve командасын пайдаланамыз ҳәм gll[r] и g00 [r] ушын төмендегидей аңлатпаны жазамыз

```
sol=DSolve[vacuumeq,{g11[r],g00[r]},r]// Simplify//Flatten
```

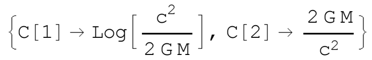
Бул қатар төмендегидей шешимлерди береди:

$$\left\{g11[r]\to\frac{e^{C[1]}\,r}{1-e^{C[1]}\,r},\ g00[r]\to\frac{(-1+e^{C[1]}\,r)\ C[2]}{r}\right\}$$

C [1] менен C [2] турақлыларының мәнислерин былайынша анықлаймыз: g00[r] → 1 – 2GMr/c^2 шегинде r шексизликке умтылады. Сонлықтан

$$\text{bdcond} = \{C[1] \to \text{Log}[\frac{c^2}{2GM}], C[2] \to \frac{2GM}{c^2}\}$$

Шешими:

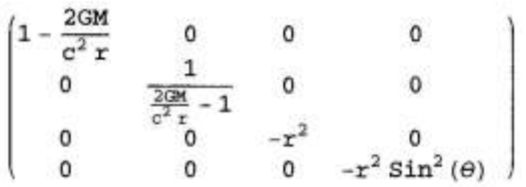


$$\left\{C[1] \to \text{Log}\left[\frac{c^2}{2\,G\,M}\right],\ C[2] \to \frac{2\,G\,M}{c^2}\right\}$$

Бул аңлатпаларда G арқалы гравитациялық турақлы, M арқалы масса, ал c арқалы жақтылықтың вакуумдағы тезлиги белгиленген. Шварцшильд метрикасы болса

$$(\text{gμν}/.\,\text{sol}/.\,\text{bdcond}/.\,G \to \text{temp}c^2r//\text{Simplify})/.\,\text{temp} \to \frac{G}{rc^2}//\text{MatrixForm}$$

Шешими:



$$\begin{pmatrix} 1-\frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{2GM}{c^2 r}-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\,\text{Sin}^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Массадан алыслаған сайын гравитациялық эффектлер жоқ бола баслайды, ал метрика болса сфералық координаталарда жазылған Минковский метрикасына айланады.

b. Критикалық радиус rs = 2 m = 2GM/c^2 шамасын Шварцшильд радиусы деп атайды. Оның шамасы Айдың, планеталардың ямаса жулдызлардың өлшемлерине салыстырғанда оғада киши. Енди Ай, Жер, Қуяш, ақ иргежейли ҳәм нейтрон жулдызы ушын rs тиң шамасын анықлайық.

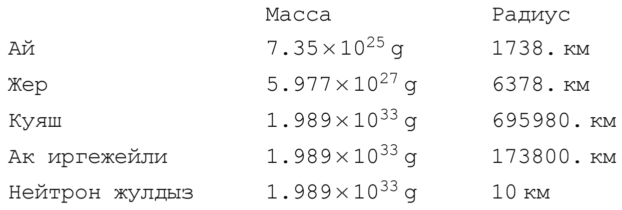
Ай, Жер, Куяш, ақ иргежейли ҳәм нейтрон жулдыз ушын массалар ҳәм радиуслар былайынша бериледи

$$\text{data} = \{\{7.35 * 10^{25}g, 1.738 * 10^{8}\text{cm}\}, \{5.977 * 10^{27}g, 6.378 * 10^{8}\text{cm}\}, \{\text{Mo}, 6.9598 * 10^{10}\text{cm}\}, \{\text{Mo}, 1.738 * 10^{10}\text{cm}\}, \{\text{Mo}, 10^{6}\text{cm}\}\}/.\,\text{Mo} \to 1.989 * 10^{33}g;$$

Бул мағлыўматларды кестелер түринде көрсетиў ушын

names={Ай, Жер, Куяш,"ак: иргежейли" , "нейтрон жулдыз"};
TableForm[data,TableHeadings{names, { Масса, Радиус}}]/.cm→10^{-5} km

қатарларын жазамыз. Нәтийже төмендегидей кесте түринде бериледи:



```
                Масса             Радиус
Ай              7.35×10^25 g      1738. км
Жер             5.977×10^27 g     6378. км
Куяш            1.989×10^33 g     695980. км
Ак иргежейли    1.989×10^33 g     173800. км
Нейтрон жулдыз  1.989×10^33 g     10 км
```

Есаплаўларды жүргизиў ушын зәрүр болған санлық турақлы шамалар былайынша бериледи:

$$\text{constants} = \{c \to 3.* 10^{10}\,\text{cm}\ \ \text{sec}\,, G \to 7.425 * 10^{-29}\frac{c^2\text{cm}}{g}\};$$

Егер биз өзимиз

$$\text{Ratio}[\{\text{M\_}, \text{r\_}\}] := \frac{2GM}{c^2 r} //. \text{constants}$$

процедурасын анықлап алатуғын болсақ, онда бул шамаларды rs/r шамасын есаплаў ушын пайдаланамыз. Буның ушын rs = 2GM/c^2 екенлигин еске аламыз:

$$\text{Transpose}[\{\text{names}, \text{Ratio}[\#]\&/@\text{data}\}]//\text{TableForm}$$

Есаплаўлар

```
Ай                6.28006×10^-11
Жер               1.39163×10^-9
Куяш              4.24389×10^-6
Ак иргежейли      0.0000169946
Нейтрон жулдыз    0.295367
```

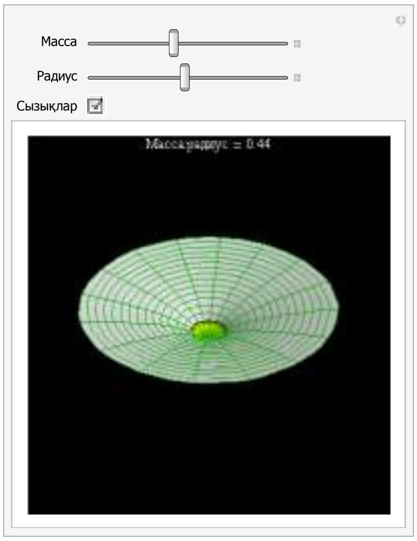
түриндеги кестени береди. Бул шама гравитациялық энергияның жоқарыда атлары аталған космослық денелердиң тынышлықтығы E = mc^2 энергиясына қатнасының еки еселенген мәниси болып табылады. Бул қатнастың мәниси жүдә киши. Сонлықтан улыўмалық салыстырмалық теориясының эффектлерин тек нейтрон жулдыз ушын ғана есапқа алыўдың мүмкин екенлигине ийе боламыз.

Енди биз Шварцшильд шешимлерин демонстрациялаўшы программаларды келтиремиз.

Шварцшильд кеңислигин сәўлелендиретуғын компактлы программа төмендегидей түрге ийе:

```
zInt[M_,R_,r_]:=-r*Sqrt[R^3/(2M r^2)-1]+R*Sqrt[R/(2M)-1];
zExt[M_,R_,r_]:=If[r<2M,None,Sqrt[8M(r-2M)]-If[R≤2M,0,
Sqrt[8M(R-2M)]]];
zTot[M_,R_,r_]:=Piecewise[{{(R*(-(Sqrt[M^(-1)]*Sqrt[R])
+Sqrt[-2+R/M]))/Sqrt[2],r⩵0&&R>0&&2*M<R&&M≠0},
{0,R⩵0||M⩵0},{zExt[M,R,r],R≤2M},{zInt[M,R,r],r≤R},
{zExt[M,R,r],True}}];
rMax=65;
Manipulate[RevolutionPlot3D[zTot[M,R,r]-
zTot[M,R,rMax],{r,If[R≤2M,2M,0],rMax},
Exclusions→Automatic,Boxed→False,Axes→False,
PlotRange→{{-rMax,rMax},{-rMax,rMax},{-
80,0}},ColorFunction→Function[{x,y,z},
If[M≠0&&R>2M&&z≤zExt[M,R,R]-
zTot[M,R,rMax],Darker[Yellow],Lighter[Gray]]],
ColorFunctionScaling→False,MeshStyle→Darker[Green],
Mesh→If[mesh,True,None],SphericalRegion→True,
```

```
Background→Black,ImageSize→Medium,
PlotLabel→Text[Style[Row[{"Масса:радиус =
",NumberForm[N[M/R],2]}],14,
White]]],{{M,4,"Масса"},0,9.5,0.1},{{R,9,"Радиус"},
0.5,18,0.1},{{mesh,True,"Сызықлар"},{False,True}},
SaveDefinitions→True]
```



2-сүўрет.

Шварцшильд кеңислик-ўақыты. Сүўретте келтирилген жағдай ушын массаның радиусыққа қатнасы 0,44 ке тең.

Енди Шварцшильд қара қурдымы әтирапындағы орбиталарды есаплаймыз.

Manipulate[$G = 1; M = 1;$ orbitEnergy $= -\frac{1}{\mathrm{r0}} + \frac{L^2}{2\mathrm{r0}^2} - \frac{L^2}{\mathrm{r0}^3}$;

anOrbitSolution = Quiet@NDSolve[{$r''[\tau] == -(GM/r\ \tau\ ^2) + (L^2/r\ \tau\ ^3) -$

$3GM\,L^2\ \ r\ \tau\ ^4\ \ , r\ 0\ \ == \mathrm{r0}, r'\ 0\ \ == 0, \phi'\ \tau\ \ == \frac{L}{r\ \tau\ ^2}, \phi\ 0\ \ == 0,$

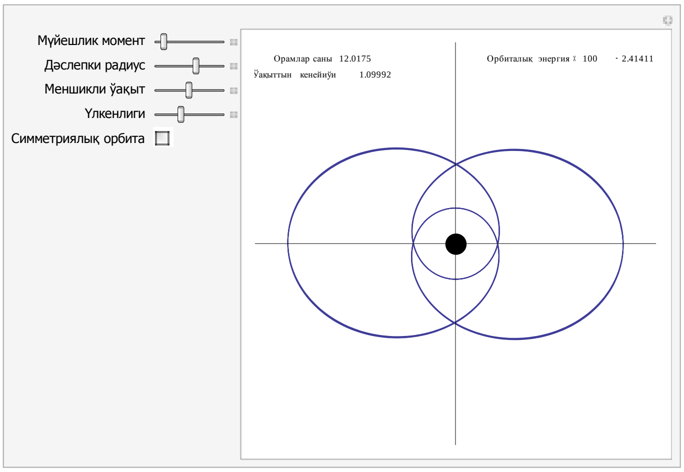
$t'[\tau] == \sqrt{}((r[\tau]/(r[\tau] - 2GM)) + (r'\ \tau\ ^2 r\ \tau\ ^2\quad r\ \tau\ - 2GM\ ^2) +$

$(r[\tau]^3\phi'[\tau]^2/(r[\tau] - 2GM))), t[0] == 0\}, \{r, \phi, t\}, \{\tau, 0, \mathrm{pT}\}];$

```
domain=
                    (r/.anOrbitSolution[[1,1]])["Domain"];
{begin,end} =
                     domain[[1]];
angleList =
                     [end]/.anOrbitSolution ;
If[symmetricOrbit0,
  windingNumber = angleList[[1]]/(2);  ,
  windingNumber = angleList[[1]]/;  ];
timeDilation  =(t[end]/.anOrbitSolution)[[1]]/end ;
anOrbitPlot = ParametricPlot[Evaluate[r[τ]{Cos[ϕ[τ]], Sin[ϕ[τ]]}
/. anOrbitSolution], {τ, begin, end},
(*PlotPoints → 1000,*)
AspectRatio → 1, AxesOrigin → {0,0}, PlotRange → scale];
anOrbitPlotReversed
```

```
= ParametricPlot[Evaluate[r[τ]{Cos[ϕ[τ]], −Sin[ϕ[τ]]}
/. anOrbitSolution], {τ, begin, end},
(*PlotPoints → 1000,*)
AspectRatio → 1, AxesOrigin → {0,0}, PlotRange → scale];
sRadius =
  Graphics[Disk[{0,0},2]];
If[symmetricOrbit =
= 1, Show[{anOrbitPlot, anOrbitPlotReversed, sRadius, Graphics[{Inset[ToString[StringForm
["winding number ``", windingNumber]], {−25,35} scale  38],
Inset  ToString  StringForm  time dilation ``, timeDilation   ,  −25,32  scale  38 ,
Inset[ToString[StringForm["orbit energy  ×  100 ``", 100orbitEnergy]], {22,35} scale  38]}]},
Ticks → None, ImageSize → {400,400}],
Show[{anOrbitPlot, sRadius, Graphics[{Inset[ToString[StringForm
["winding number ``", windingNumber]],
{−25,35} scale  38], Inset[ToString[StringForm["time dilation ``", timeDilation]],
{−25,32} scale  38], Inset[ToString[StringForm["orbit energy
                    ×  100 ``", 100orbitEnergy]], {22,35} scale  38]}]
}, Ticks → None, ImageSize → {400,400}]],
{{L, 4, "angular momentum"}, 1   10 , 100,
ImageSize → Tiny}, {{r0,31.6, "initial radius"},2.5,50,
ImageSize → Tiny}, {{pT, 4850, "proper time"},1,10000,
ImageSize → Tiny}, {{scale, 37.8, "view"},5,100,
ImageSize → Tiny}, {{symmetricOrbit, 0, "symmetric orbit"},
{0,1}, ControlType → Checkbox},
SynchronousUpdating → False, ControlPlacement → Left,
TrackedSymbols → Manipulate]
```

Есаплаўлар төмендегидей сүўретти береди



Орамлар саны 12.0175
Ўақыттын кенейиўи 1.09992
Орбиталық энергия × 100 - 2.41411

3-сүўрет.
Қара қурдым әтирапындағы Шварцшильд кеңислигиндеги бөлекшениң орбитасын есаплаўда алынған сүўрет.

Жоқарыда келтирилген мағлыўматлардың барлығы да улыўмалық салыстырмалық теориясының теңлемелерин шешиўде ҳәм бул теңлемелердиң шешимлерин көргизбели түрде графикалық усылда сәўлелендириўде Mathematica универсаллық программалаў тилин (5-8 версиялар) табыслы түрде пайдаланыўға болатуғынлығын айқын көрсетеди.

7-§. Геодезиялық сызықлардың теңлемелери

Улыўмалық салыстырмалық теориясы бойынша массасы есапқа алмастай киши болған денелер кеңислик-ўақыттың геодезиялық сызықлары бойлап қозғалады [16]. Майыспаған кеңисликте ямаса гравитация майданын пайда ететуғын денелерден үлкен қашықлықларда геодезиялық сызықлар туўры сызықлар болып табылады. Гравитация майданының дереклери бар болатуғын болса геодезиялық сызықлар майысады (қыйсаяды) ҳәм бундай сызықлардың теңлемеси былайынша жазылады:

$$\frac{d^2x^\mu}{dq^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dq}\frac{dx^\lambda}{dq} = 0.$$

Бул аңлатпада Г арқалы Кристоффел символлары белгиленген. Теңлемедеги q шамасы кеңислик-ўақыт арқалы бөлекшениң жолын – бөлекшениң дүньялық сызығын параметрлестиреди. Бул шамаларды геодезиялық сызықлардың каноникалық параметри деп атайды. Кристоффел символлары тек $g_{\mu\nu}$ метрлик тензордан ғәрезли, яғный ол ноқаттан-ноқатқа өзгереди. Ўақытқа мегзес геодезиялық сызықлар ушын (үлкен массаға ийе бөлекшелер ўақытқа мегзес геодезиялық сызықлар бойынша қозғалады) q параметри τ меншикли ўақытына сәйкес келеди (турақлы көбейтиўши дәллигинде, әдетте оны 1 ге тең етип алады). Массасы жоқ бөлекшелердиң (мысалы фотонлардың) жақтылыққа мегзес дүньялық сызықлары ушын q параметрин меншикли ўақытқа тең етип алыўға болмайды. Себеби оның шамасы нолге тең (фотонлар ушын ўақыт өтпейди). бирақ геодезиялық сызықлардың формасы жоқарыдағы теңлемениң жәрдеминде тәрийиплене береди. Соның менен бирге жақтылыққа мегзес геодезиялық сызықларды ўақытқа мегзес геодезиялық сызықлардың шеклик дара жағдайы деп қараўға болады. Себеби қозғалыўшы денениң массасы нолге умтылғанда ҳәм бөлекшениң энергиясын турақлы деп қабыл етсек, онда ўақытқа мегзес геодезиялық сызықлар ўақытқа мегзес геодезиялық сызықларға айланады.

Симметрияны қолланыў арқалы машқаланы әпиўайыластырыўға болады. Усындай жоллар менен биз бир өзгериўшиден қутыламыз. Қәлеген сфералық симметрияға ийе жағдайда қозғалыс тегисликте жүзеге келеди. Бул тегисликти θ = π/2 тегислиги деп қараўға болады. Бундай тегисликтиң метрикасы былайынша жазылады

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\varphi^2.$$

Бул метрика φ ҳәм t шамаларынан ғәрезсиз болғанлықтан қозғалыстың тек еки интегралы ғана болады (бул ҳаққында төмениректе де гәп етиледи)

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m},$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2}.$$

Бул интегралларды метрикаға қойыў томендегилерди береди:

$$c^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 .$$

Усының салдарынан бөлекшениң қозгалыс теңлемеси мына түрге енеди:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right).$$

Биз егер

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{mr^2}{L}\right)^2$$

интегралын пайдаланатуғын болсақ, онда ўақыттан ғәрезликти жоқ етиўге болады. Усының нәтийжесинде орбиталардың теңлемеси

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{r^4}{a^2} + r^2\right)$$

түрине енеди. Бул анлатпада узынлықтың еки характеристикасы сыпатында a ҳәм b характерли узынлықлары киргизилген.

$$a = \frac{L}{mc},$$

$$b = \frac{cL}{E}.$$

Усындай теңлемени Лагранж бойынша да ямаса Гамильтон-Якоби теңлемесин пайдаланып та алыўға болады (бул ҳаққында төменде толығырақ гәп етемиз) [18-19]. Орбиталар теңлемесиниң шешими былайынша жазылады

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2}\right)}}.$$

Қуяштың гравитациялық майданында жақтылық нурларының бағытының өзгериўи (бул қубылыс Англия астрономы ҳәм физиги Артур Эддингтон басқарған астрономиялық экспедиция тәрепинен 1919-жылы тастыйықланды), Меркурий планетасының перигелийиниң әсирлик аўысыўының түсиндирилиўи Эйнштейнниң улыўмалық салыстырмалық теориясының кең түрде мойынланыўына алып келди.

Енди Швацшильд метрикасы ушын геодезиялық сызықларды табамыз.

Жоқарыда айтканымыздай Шварцшильд метрикасы ушын геодезиялық сызықлар

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\beta}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial(g_{\alpha\beta})}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

теңлемесинен келип шығады.

Төрт геодезиялық теңлемени табыў ушын геодезиялық теңлемелер ушын процедураны пайдаланамыз.

Биз төменде келтирилген мынадай айқын мәселелерди Mathematica тлинде шешемиз:

a. Қозгалысты θ[s] = π/2 тегислиги менен шеклеймиз. Буннан кейин Шварцшильд метрикасы ушын геодезиялық сызықлардың теңлемелерин анық түрде жазамыз ҳәм

$$t''[s] = \frac{2mr'[s]t'[s]}{2mr[s] - r[s]^2}.$$

$$r''[s] = \frac{\left(-1 + \frac{2m}{r[s]}\right)\left(-\frac{mr'[s]^2}{\left(1 - \frac{2m}{r[s]}\right)^2} + mt'[s]^2 - r[s]^3\phi'[s]^2\right)}{r[s]^2}.$$

$$\phi''[s] = -\frac{2r'[s]\phi'[s]}{r[s]}$$

екенлигин көрсетемиз.

b. t''[s] ҳәм ф''[s] теңлемелерин бирлестиремиз ҳәм теңлемелерди

$$t'[s] = \frac{En}{1 - \frac{2m}{r}},$$

$$r''[s] = \frac{-4h^2m^2 + 4h^2mr[s] - h^2r[s]^2 + mr[s]^3(En^2 - r'[s]^2)}{(2m - r[s])r[s]^4},$$

$$\phi'[s] = \frac{h}{r^2}.$$

түрине алып келемиз.

c. $r'[s]^2$ ушын аңлатпа табамыз. Бул аңлатпа ўақытқа мегзес $1 = g_{\mu\nu}\nu^{\nu}\nu^{\mu}$ шәртинен келип шығады. $r'[s]^2$ диң

$$r'[s]^2 = (En^2 - 1) + \frac{2h^2m}{r[s]^3} - \frac{h^2}{r[s]^2} + \frac{2m}{r[s]}$$

түринде жазылатуғынлығын көрсетемиз.

```
Clear["Global` * "];
```

Ескертиўлер ҳәм есаплаў схемасы (процедуралар схемасы):

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\beta}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial(g_{\alpha\beta})}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

теңлемесин шешиў

```
geodesic[met_, var_,parameter_:s] ≔ Module[{met1, temp1, vel1, var1}, vel1
= D Through var parameter  , parameter ; var1 =
Through var parameter  ; met1 = met/. Thread[var →
Through[var[parameter]]]; temp1 = (D[met1. vel1, parameter] −
(1  2 D[met1, #]. vel1. vel1&/@var1) == {0,0,0,0})//Thread]
```

процедурасы жәрдеминде жүргизиледи.

Егер метрика менен координаталар геодезиялық операторға киргизилген болса, онда төрт геодезиялық теңлеме табылған болып есапланады.

Шешими:

a. Швацшильд метрикасының формасы

gμν = DiagonalMatrix[{g00(r), g11(r), $-r^2$, $-r^2\sin^2(\theta)$}] //MatrixForm

Биз буннан

$$\begin{matrix} g00[r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g11[r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2[\theta] \end{matrix}$$

матрицасын аламыз. Бул аңлатпада метрлик қураўшылар

$$\text{comp} = \{\text{g00} \to (1 - \frac{2m}{\#1}\&), \text{g11} \to (-\frac{1}{1 - \frac{2m}{\#1}}\&)\};$$

ҳәм $m = GM/c^2$ қағыйдалары бойынша анықланған.

Биз тәрепинен анықланған geodesic операторын пайдаланып улыўма метрика ушын төрт теңлеме аламыз.

eq1 = geodesic[gμν, {t, r, θ, ϕ}]//Simplify;

Егер биз теңлемени {t"[s], r''[s], θ"[s] ϕ"[s]} ке қарата шешсек теңлемелер эпиўайыласады ҳәм метрлик қураўшыларды аламыз. биз θ = π/2 тегислигинде шекленемиз:

eq2 = (Solve[eq1, {$t''[s], r''[s], \theta''[s], \phi''[s]$}]//Flatten)/. comp/. $\theta \to (\pi\ \ 2\,\&)$/. Rule
→ Equal//Simplify;

eq2//ColumnForm

Бул қатарлардың шешими мына түрге ийе болады:

$$t''[s] == \frac{2mr'[s]t'[s]}{2mr[s]-r[s]^2}$$

$$r''[s] == \frac{(-1+\frac{2m}{r[s]})(-\frac{mr'[s]^2}{(1-\frac{2m}{r[s]})^2}+mt'[s]^2-r[s]^3\sin^2[\frac{\pi}{2}]\phi'[s]^2)}{r[s]^2}$$

$$(\sin^2)'[\frac{\pi}{2}]\phi'[s] == 0$$

$$\phi''\ s\ \ == -\frac{2r'\ s\ \phi'\ s}{r\ s}$$

Биз мәселени θ → (π/2&) тегислигине шештик. Олар биз излеп атырған теңлемелер болып табылады.

b. t''[s] ҳәм ϕ''[s] шамалары ушын жазылған теңлемелерди бириктириў мүмкин. Бул мынадай операцияның нәтийжесинде әмелге асырылады:

eq3 = DSolve[eq2[[1]], $r[s], s$][[1,1]]/. Rule → Equal

Шешими:

$$r[s] == \frac{2e^{2mC[1]}mt'[s]}{-1+e^{2mC[1]}t'[s]}$$

t' [s] ушын теңлемени шешимиз ҳәм константа ушын сәйкес мәнисти сайлап аламыз. Усының нәтийжесинде мыналарға ийе боламыз

trule = Solve[eq3, $t'[s]$][[1,1]]/. $C[1] \to -\frac{1}{2m}$Log[En]//Flatten

Бул қатардың шешими:

$$t'[s] \to \frac{\mathrm{En}r[s]}{-2m+r[s]}$$

Бул биз жоқарыда (мәселениң b бөлиминде) айтып өткен теңлемелердиң бири болып табылады.

Биз бул усылды ϕ''[s] ти табыў ушын да қоллана аламыз:

ϕrule = (DSolve[eq2[[4]], $r[s], s$][[1,1]]/. Rule →

$\text{Equal//Solve}[\#,\phi'[s]][[1,1]]\&)/.\,C[1] \rightarrow \ \ \bar{h}$

Бул қатар бизге

$$\phi'[s] \rightarrow \frac{h}{r[s]^2}$$

функциясын береди ҳәм бул мәселениң b бөлиминдеги екинши шәрттиң жуўабы болып табылады.

Егер биз $\phi'[s]$ ҳәм $t'[s]$ шамаларын жоқ етсек, онда eq2 [[2]] деги r''[s] ушын жазылған теңлеме әпиўайыласады.

$\text{eq4} = \text{eq2}[[2]]/.\,\text{trule}/.\,\text{фrule//Simplify}$

Бул теңлемени шешсек

$$r''[s] == \frac{(-1+\frac{2m}{r[s]})(\frac{\text{En}^2 m r[s]^2}{(-2m+r[s])^2}-\frac{h^2\sin^2[\frac{\pi}{2}]}{r[s]}-\frac{m r'[s]^2}{(1-\frac{2m}{r[s]})^2})}{r[s]^2}$$

аңлатпасын аламыз.

c. Енди r'[s]^2 ушын теңлеме табыў менен шуғылланамыз. Бул жағдайда да ν^{ν} дың төрт өлшемли тезлик, ўақытқа мегзесликтиң критерийиниң l = $g_{\mu\nu}\nu^{\nu}\nu^{\mu}$, ал $g_{\mu\nu}$ шамасының метрлик тензор екенлигин есапқа аламыз. Есаплаўларды θ = π/2 тегислигинде шеклеймиз.

$\text{vel} = \ t'\ \ s\ \ ,r'\ \ s\ \ ,0,\phi'\ \ s\ \ \ ;$

$\text{met} = (\text{g}\mu\nu/.\,\text{comp}/.\,\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}/.\,r \rightarrow r[s]/.\,\theta \rightarrow \theta[s])$

Бундай жағдайда метрлик тензор ушын

$$\begin{matrix} 1-\frac{2m}{r[s]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2m}{r[s]}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r[s]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r[s]^2\sin^2[\frac{\pi}{2}] \end{matrix}$$

түриндеги аңлатпа аламыз.

$\text{eq5} = 1 == \text{vel.met.vel}$

Бул теңлемениң шешими ретинде

$$1 == -\frac{r'[s]^2}{1-\frac{2m}{r[s]}}+(1-\frac{2m}{r[s]})t'[s]^2-r[s]^2\sin^2[\frac{\pi}{2}]\phi'[s]^2$$

түринеги аңлатпа алынады.

$\text{eq6} = \text{eq5}/.\,\text{trule}/.\,\text{фrule//Simplify}$

$$\frac{-2h^2m\sin^2[\frac{\pi}{2}]+h^2r[s]\sin^2[\frac{\pi}{2}]+r[s]^3(-\mathrm{En}^2+r'[s]^2)}{(2m-r[s])r[s]^2}==1$$

r'[s]^2 ке қарата шешиў төмендегини береди:

$r'[s]^2/.\,\mathrm{Solve}[\mathrm{eq6},r'[s]][[1]]//\mathrm{Simplify}$

$$-1+\mathrm{En}^2+\frac{2m}{r[s]}+\frac{2h^2m\sin^2[\frac{\pi}{2}]}{r[s]^3}-\frac{h^2\sin^2[\frac{\pi}{2}]}{r[s]^2}$$

Бул жағдайлар да Mathematica универсаллық программалаў тилиниң улыўмалық салыстырмалық теориясы теңлемелерин шешкенде жумысларды кескин аңсатластыратуғынлығын айқын көрсетеди.

Жақтылық нурының бағытының өзгериў муйеши ушын жуўық формула. Қозғалыўшы бөлекшениң массасы нолге умтылғанда (бундай жағдайда $a \to \infty$ орын алады) орбита теңлемеси

$$\varphi=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{b^2}-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r^2}}}$$

теңлемесине өтеди. Бул аңлатпаны r$_s$/r қатнасының дәрежеси бойынша қатарға жайсақ массаға ийе емес бөлекшениң гравитация пайда етиўши орай қасынан өткенде аyысыў муйеши δφ ушын мынадай формула аламыз:

$$\delta\varphi\approx\frac{2r_s}{b}=\frac{4GM}{c^2b}.$$

Бул формуладағы b турақлысын нышана параметри сыпатында интерпретациялаў мүмкин. Нышана параметри деп ең жақын келиў кашықлыгына айтамыз. Егер бул формулағы Куяштың радиусын ҳәм массасын қоятуғын болсақ, онда 1,75 мүйешлик секунд аўысыўын аламыз.

8-§. Классикалық механика менен байланыс ҳәм эллипс тәризли орбиталардың прецессиясы

L импульс моментиниң ҳәр қыйлы мәнислерин ушын эффективлик потенциал. r шамасының киши мәнислеринде потенциал кишірейеди ҳәм бөлекшениң орайға қулап түсиўи орын алады (классикалық Кеплер мәселесинде жағдайдың басқаша екенлигин есапқа аламыз). Бирақ усы жағдайға қарамастан a/r$_s$ = L/mcr$_s$ > 3$^{1/2}$ шәрти орынланғанада сыртта туўылған бөлекше потенциал барьер арқалы өтиўи ҳәм қулап тусиўден қутылыўы мүмкин. a/r$_s$ = 3$^{1/2}$ шәрти орынланғанда (бул шекли нормировкаланған мүйешлик моментте деген сөз) метастабилли дөңгелек орбита жүзеге келеди (4-сүўретте жасыл рең менен белгиленген). Соның менен бирге усы орбитаға келип жалғасатуғын ҳәм усы орбитадан шығатуғын шексиз көп орбиталар бар болады. a/r_s шамасы киши болғанда бөлекше гравитация майданын пайда етип турған орайлық дене тәрепинен тутып алынады ҳәм оған (орайға) қулап түседи.

Шварцшильд майданындағы бөлекшениң қозғалыс теңлемеси болған

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=\frac{E^2}{m^2c^2}-c^2+\frac{r_sc^2}{r}-\frac{L^2}{m^2r^2}+\frac{r_sL^2}{m^2r^3}$$

теңлемесин r_s гравитациялық радиустың анықламасын пайдаланып қайтадан басқа түрде көширип жазыўға болады:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=\left[\frac{E^2}{2mc^2}-\frac{1}{2}mc^2\right]+\frac{GMm}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{GML^2}{c^2mr^3}$$

Бул аңлатпа бир өлшемли

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GML^2}{c^2mr^3}$$

эффективлик потенциалдағы энергиясы $\frac{E^2}{mc^2}-\frac{1}{2}mc^2$ болған релятивистлик емес бөлекшениң қозғалыс теңлемесине эквивалент.

Жоқарыдағы теңлемедеги биринши еки ағза классикалық физикада орын алған жағдайларға сәйкес келеди: биринשиси Ньютон тартылысына сәйкес келиўши гравитациялық потенциал ҳәм екиншиси орайдан қашыўшы ийтерисиў потенциалы. Ал үшинши ағза болса Кеплердиң классикалық мәселесинде аналогқа ийе емес. Усы ағза эллипс тәризли орбиталардың прециессиясына алып келеди ҳәм ҳәр бир айланып шығыўдағы прецессия $\delta\varphi$ шамасына тең:

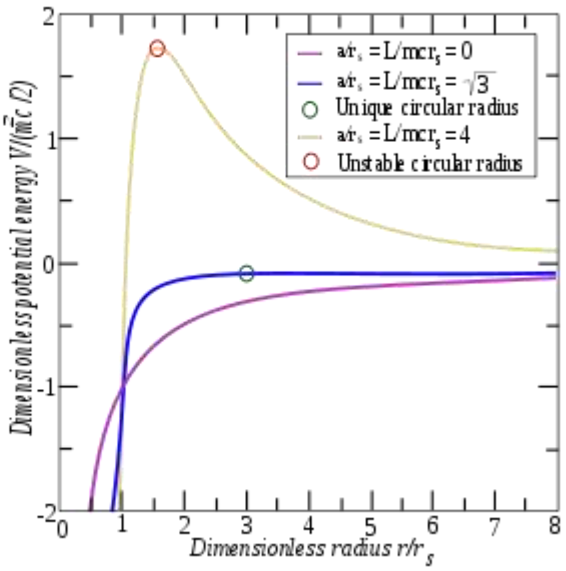
$$\delta\varphi\approx\frac{6\pi GM}{c^2A\left(1-e^2\right)}.$$

Бул формулада A арқалы орбитаның үлкен ярым көшери белгиленген, ал e болса оның эксцентриситети.

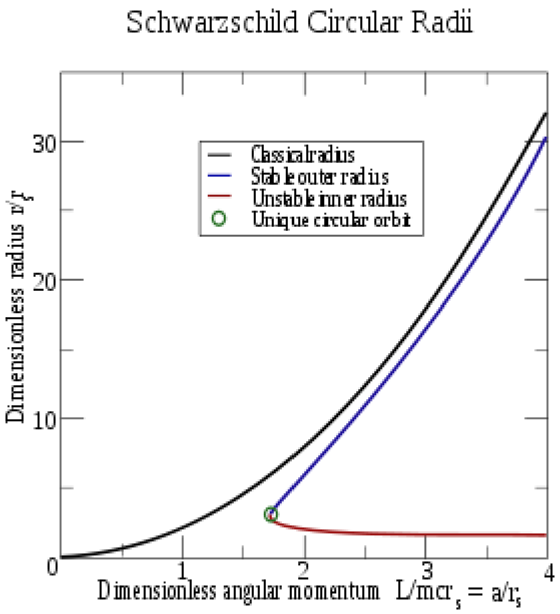
Үшинши ағза тартысыў характерине ийе ҳәм r диң киши мәнислеринде потенциалдың қәсийетлерин тәрийиплейди. Бул потенциал бөлекшениң шексизликке кетиўине де, бөлекшениң орайғы кулып түсиўине де тыйым салады

Дөңгелек орбиталар ҳәм олардың орнықлығы. $a/r_s = L/mcr_s$ нормировкаланған мүйешлик моментке байланыслы жүзеге келетуғын орнықлы (көк иймеклик) ҳәм орнықлы емес (қызыл иймеклик орбиталардың радиуслары 5-сүўретте келтирилген. Графиклер (иймекликлер) бир ноқатта кесилиседи (жасыл дөңгелек пенен көрсетилген). Бул ноқатта $a/r_s = L/mcr_s = 3^{1/2}$. Салыстырыў ушын

Кеплердиң классикалық мәселесиндеги барлық ўақытта орнықлы болатуғын орбиталардың радиуслары да келтирилген (қара иймеклик).



4-сүўрет.
Ортықлы болған орбиталардың параметрлерин есаплаўға арналған сүўрет (потенциал энергияның r/r_s шамасынан ғәрезлиги).



5-сүўрет. $a/r_s = L/mcr_s$ нормировкаланған мүйешлик моментке байланыслы жүзеге келетуғын орнықлы (көк иймеклик) ҳәм орнықлы емес (қызыл иймеклик орбиталардың радиусы.

V эффективли потенциалын a ҳәм b узынлық параметрлери арқалы да анықлаўға болады:

$$V(r) = \frac{mc^2}{2}\left[-\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3}\right].$$

Дөңгелек орбиталардың пайда болыўы ушын эффективлик күштиң нолге тең болыўы керек:

$$F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{mc^2}{2r^4}\left[r_s r^2 - 2a^2 r + 3r_s a^2\right] = 0,$$

яғный еки тартасыў күши [Ньютон гравитациясы (биринши ағза) ҳәм оған қосылатуғын релятивистлик дүзетиўдиң (үшинши ағза) қосындысы орайдан қашыўшы күш (екинши ағза) пенен компенсацияланыўы керек]. Усындай компенсация орын алатуғын еки радиус бар

$$r_{\text{outer}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1+\sqrt{1-\frac{3r_s^2}{a^2}}\right),$$

$$r_{\text{inner}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}\right) = \frac{3a^2}{r_{\text{outer}}}.$$

Mathematica 8.0 тилинде жоқарыда келтирилген квадрат теңлемени шешиў ушын

$$\text{Solve}[\frac{mc^2}{2r^4}(\text{rs}r^2 - 2a^2r + \text{rs}a^2) == 0, r]$$

түриндеги аңлатпа жазылады. Бул аңлатпа $r \to \frac{a^2 - \ \overline{a^4 - a^2\text{rs}^2}}{\text{rs}}$ ҳәм $r \to \frac{a^2 + \ \overline{a^4 - a^2\text{rs}^2}}{\text{rs}}$ түриндеги шешимлерди береди.

Бул формулалар жоқарыда келтирилген квадрат теңлемеден келип шығады. Ишки радиус $\mathrm{r_{inner}}$ параметр *a* ның қәлеген мәнислеринде орнықлы емес болып шығады. Себеби тартылыс күшлери ийтерилис күшлерине салыстырғанда тезирек өседи. Сонлықтан қәлеген сыртқы тәсир бөлекшениң орайға қулап түсиўине алып келеди. Сыртқы радиус орбиталары орнықлы. Бул жағдайда релятивистлик тартысыўлардың шамасы үлкен емес ҳәм олардың характери Кеплердиң классикалық мәселесиндеги траекторияларға сәйкес келеди.

Параметр *a* ның шамасы $\mathrm{r_s}$ тен әдеўир үлкен болса (классикалық жағдай), орбиталардың өлшемлери

$$r_{\text{outer}} \approx \frac{2a^2}{r_s},$$

$$r_{\text{inner}} \approx \frac{3}{2}r_s$$

шамаларына умтылады. *a* менен $\mathrm{r_s}$ тиң мәнислерин $\mathrm{r_{outer}}$ ушын алынған аңлатпаға қойсақ массасы M болған гравитация пайда етиўши орайдың дөгерегинде дөңгелек орбита бойынша қозғалатуғын бөлекше ушын классикалық формуланы аламыз

$$r_{\text{outer}}^3 \approx \frac{GM}{\omega_\varphi^2}.$$

Бул аңлатпада ω_φ арқалы бөлекшениң орбиталық мүйешлик тезлиги белгиленген.

a^3 шамасы $3\mathrm{r_s}^2$ шамасына умтылғанда (жоқарыдан умтылғанда) ишки ҳәм сыртқы радиуслар

$$r_{\text{outer}} \to r_{\text{inner}} \to 3r_s$$

шамасына умтылады.

Квадрат теңлемениң шешими $\mathrm{r_{outer}}$ шамасының $3\mathrm{r_s}$ шамасынан барлық ўақытта үлкен болатуғынлығын, ал $\mathrm{r_{inner}}$ шамасының $^3/_2\,\mathrm{r_s}$ ҳәм $3\mathrm{r_s}$ аралығындағы интервалда жайласатуғынлығын тәмийинлейди. $\mathrm{r_{inner}} = {}^3/_2\,\mathrm{r_s}$ орбитасының өзи массасы жоқ бөлекшелер ушын шекли жағдай болып табылады. Бул жағдайда $a \to \infty$. Сонлықтан усындай радиуслы сфераны фотонлық сфера деп атайды.

9-§. Эллипс тәризли орбиталардың прецессиясы

Релятивистлик емес Кеплер мәселесинде бөлекше барлық ўақытта да бир эллипс тәризли орбита бойынша қозғалады (6-сүўреттеги қызыл реңли орбита). Улыўмалық салыстырмалық теориясы бөлекшеге тәсир етиўши күштиң шамасын өзгертеди (Шварцшильд координаталарында). Бул жағдайда тартысыў Ньютон теориясына салыстырғанда тезирек өседи. Бундай тәсир дерлик эллипс тәризли орбитаның прецессиясына алып келеди (көк реңли орбиталар). Прецессия қубылысы платенатның Қуяштың дөгерегинде айланыў бағытында болады. Бул эффект Меркурий, Венера ҳәм Жер ушын исенимли түрде өлшенген. Сары ноқат тартасыў орайына (мысалы Қуяшқа сәйкес келеди).

Орбитаның прецессиясының тезлигин V эффективли потенциалынан келтирип шығарыў мүмкин. Дөңгелек орбитаның радиусы ($r = r_{\text{outer}}$) бойынша киши аўысыў

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{d^2V}{dr^2}\right]_{r=r_{\text{outer}}} = \left(\frac{c^2 r_s}{2r_{\text{outer}}^4}\right)\left(r_{\text{outer}} - r_{\text{inner}}\right) = \omega_\varphi^2\sqrt{1-\frac{3r_s^2}{a^2}}$$

жийилигиндеги осцилляцияның пайда болыўына алып келеди. ω^r бойынша қатарға жайыў

$$\omega_r = \omega_\varphi\left(1 - \frac{3r_s^2}{4a^2} + \cdots\right)$$

формуласын береди.

Айланыў дәўири болған T шамасына көбейтиў бир айланғандағы

$$\delta\varphi = T\left(\omega_\varphi - \omega_r\right) \approx 2\pi\left(\frac{3r_s^2}{4a^2}\right) = \frac{3\pi m^2 c^2}{2L^2} r_s^2$$

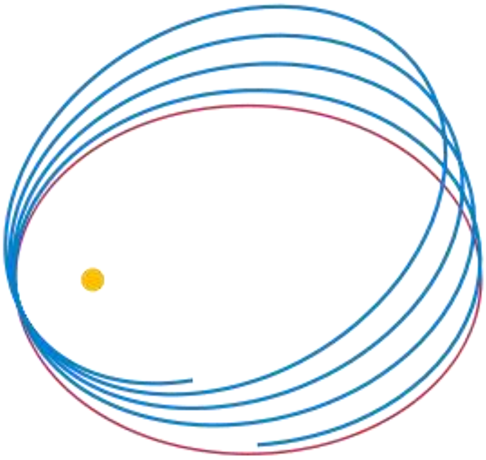
прецессиясына алып келеди. Бул аңлатпада $\omega_\varphi T = 2\pi$ ҳәм a шамасының анықламасы қолланылған. r_s ти қойып

$$\delta\varphi \approx \frac{3\pi m^2 c^2}{2L^2}\left(\frac{4G^2M^2}{c^4}\right) = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{c^2 L^2}$$

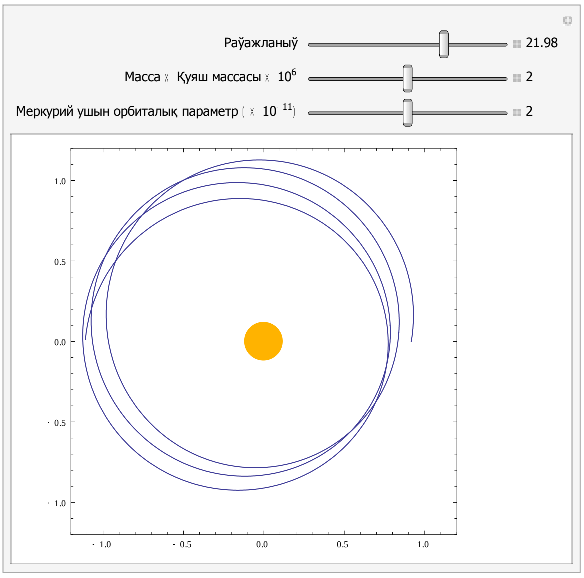
аңлатпасына ийе боламыз. Орбитаның үлкен ярым көшери A ны ҳәм e эксцентриситетин пайдалансақ (олар $\frac{L^2}{GMm^2} = A\left(1-e^2\right)$ аңлатпасы арқалы байланысқан) биз прецессия ушын ең көбирек белгили болған

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 A\left(1-e^2\right)}.$$

формуласына ийе боламыз.



6-сүўрет.
Релятивистлик емес Кеплер мәселесинде бөлекше барлық ўақытта да бир эллипс тәризли орбита бойынша қозғалады. Орбитаның прецессиясы планетаның қозғалыс бағытында болады.
Сары ноқат тартасыў орайына (мысалы Қуяшқа сәйкес келеди)



Раўажланыў 21.98

Масса × Қуяш массасы × 10^6 2

Меркурий ушын орбиталық параметр (× 10^{-11}) 2

7-сүўрет.
Mathematica 8.0 универсаллық компьютерлик пакетиниң жәрдеминде Меркурий планетасының орбитасының прецессиясының көрсетилиўи.

Енди Меркурий планетасының прецессиясы ушын дүзилген программаны ҳәм оның нәтийжесин беремиз.

$$\mathrm{Manipulate[Module[\{rad\}, rad[\theta\_, M\_, a\_] := With[\{}b = \frac{3GM}{c^2a}\mathrm{\}, With[\{}x$$

$$= (1 - a^2b)\theta\}, \frac{1}{1 - e\mathrm{Sin}[x] + ba^2(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6}e^2\mathrm{Cos}[2x])}]];$$

$$\mathrm{ParametricPlot[Evaluate[rad[}\theta, M10^{36}, \frac{a}{10^{11}}]\{\mathrm{Cos}[\theta], \mathrm{Sin}[\theta]\}], \{\theta, 0, t\}, \mathrm{PlotRange}$$

$$\rightarrow \{\{-1.2,1.2\}, \{-1.2,1.2\}\}, \mathrm{Frame} \rightarrow \mathrm{True}, \mathrm{Axes} \rightarrow \mathrm{False}, \mathrm{Epilog}$$

$$\rightarrow \{\mathrm{RGBColor}[1,0.7,0], \mathrm{PointSize}[.1], \mathrm{Point}[\{0,0\}]\}, \mathrm{ImageSize} \rightarrow \{450,400\}]],$$

$$\{\{t, 73.14, \text{"Раўажланыў"}\}, 0.1, 10\pi, \mathrm{Appearance}$$

$$\rightarrow \text{"Labeled"}\}, \{\{M, 2, \text{"Масса } \times \text{ Қуяш массасы } \times \text{"}10^6\}, 1,3, \mathrm{Appearance}$$

$$\rightarrow \text{"Labeled"}\}, \{\{a, 2, \text{"Меркурий ушын орбиталық параметр ("}$$

$$\times \text{"}10^{\text{"}-\text{""}11\text{"}}\text{")"}\}, 1,3, \mathrm{Appearance} \rightarrow \text{"Labeled"}\}, \mathrm{SaveDefinitions} \rightarrow \mathrm{True}]$$

Бул программа бойынша алынған нәтийжелер 7-сүўретте келтирилген.

Эллипслик функциялардағы орбита ушын дәл шешим. Орбитаның теңлемеси болған

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{r^4}{a^2} + r^2\right)$$

теңлемесине

$$\zeta = \frac{r_s}{4r} - \frac{1}{12}$$

бирлиги жоқ шаманы киргизсек оны әдеўир әпиўайыластырыў мүмкин:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\varphi}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3.$$

Бул аңлатпадағы g_2 ҳәм g_3 турақлылары

$$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{r_s^2}{4a^2},$$

$$g_3 = \frac{1}{216} + \frac{r_s^2}{24a^2} - \frac{r_s^2}{16b^2}$$

түринде анықланған. Орбита ушын жазылған бул теңлемениң шешими анық емес интеграл түринде көрсетиледи

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}.$$

Бул интегралда $\zeta = \wp(\varphi - \varphi_0)$ ҳәм $\wp$ болса g_2 ҳәм g_3 параметрлерине ийе Вейерштрастың эллипслик функциясы болып табылады. φ_0 шамасы интеграллаў турақлысы болып оның мәниси комплекслик шама болыўы мүмкин.

Питкериў қәнигелик жумысы бойынша улыўмалық жуўмақлар

1. Питкериў қәнигелик жумысында улыўмалық салыстырмалық теориясындағы Кеплер мәселеси, бул мәселеге байланыслы болған тарийхий мағлыўматлар, мәселени шешкенде пайдаланылатуғын сынап көрилиўши дене жақынласыўы, Шварцшильд метрикасы, Шварцшильд шешиминиң алыныў тарийхы ҳәм интерпретациясы, гравитация майданы бар жағдайлардағы геодезиялық сызықлардың теңлемелери, классикалық механика менен байланыс ҳәм эллипс тәризли орбиталардың прецессиясы мәселелери теориялық жақтан қарап шығылды.

2. Питкериў қәнигелик жумысында келтирилген барлық есаплаў жумысларының барлығының Wolfram Research компаниясының Mathematica компьютерлик алгебра системасы жәрдеминде (Mathematica универсаллық пакетиниң жәрдеминде) аңсат түрде есапланатуғынлығы көрсетилген. Жумыста Mathematica тилиниң 5-8 версияларының физикалық қубылыслар ушын есаплаў жумысларын жүргизгенде, соның менен бирге физикалық қубылысларды демонстрациялаўда мүмкиншиликлериниң жоқары екенлиги айқын мысалларда (Шварцшильд метрикасы, Шварцшильд метрикасы ушын геодезиялық сызықларды есаплаў, эллипс тәризли орбиталардың прецессиясы сыяқлы мысаллар) дәлилленди.

3. Питкериў қәнигелик жумысында келтирилген мағлыўматлар улыўмалық салыстырмалық теориясының физикалық мәнисин ҳәм теорияға тийисли есаплаў жумысларының мазмунын, есаплаў жумысларын компьютерлестириўди студентлердиң терең түсиниўи ушын жәрдем береди.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Einstein A The Meaning of Relativity. — 5th. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956. — P. pp. 92–97.

2. Adler R Introduction to General Relativity. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1965. — P. pp. 177–193.

3. Einstein A The Meaning of Relativity. — 5th. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956. — P. pp. 92–97.

4. Hagihara, Y (1931). «Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild». Japanese Journal of Astronomy and Geophysics 8: 67–176.

5. Lanczos C The Variational Principles of Mechanics. — 4th. — New York: Dover Publications, 1986. — P. pp. 330–338.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля — 8-е изд., стереот. Москва. Издательство ФИЗМАТЛИТ, 2003. 536 с.

7. Роузвер Н. Т. Перигелий Меркеурия. От Леверье до Эйнштейна. Roseveare N. T. Mercury's perigelion from Le Verrier to Einstein / Пер. с англ. А. С. Расторгуева под ред. В. К. Абалакина. — Москва: Мир, 1985. 246 с.

8. Le Verrier, U. J. J. (1859). «Sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète». Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 49: 379–383.

9. Мари-Антуанетт Тоннела Основы электромагнетизма и теории относительности. Издательство иностранной литературы. Москва. 1962. Глава II, § 1.2.

10. Карл Шварцшильддиң өзиниң мақалалары: K. Schwarzschild «Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit». *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1** (1916) 424.

K. Schwarzschild «Zur Quantenhypothese». *Sitzungberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **1916** (1916) 548–568.

Шварцшильд шешимин әпиўайы түрде келтирип шығарыў: Ll. Bel. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstenschen Theorie. arXiv:0709.2257.

11. P. S. Laplace Mecanique celeste, 4, livre X Paris, 1805.

12 Тредер Г.-Ю. Глава I // Относительность инерции = Hans-Jürgen Treder. Die Relativität der Trägheit. Berlin, 1972. / Пер. с нем. К. А. Бронникова. Под редакцией проф. К. П. Станюковича. Москва: Атомиздат, 1975. 128 с.

13. Weinberg S Gravitation and Cosmology. — New York: John Wiley and Sons, 1972. — P. pp. 185–201. С.Вейнберг. Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. Издательство "Мир" Москва. 1975. 696 с.

14. Визгин В. П. Глава I, раздел 2. // Релятивистская теория тяготения (истоки ҳәм формирование. 1900—1915 гг.). — Москва: Наука, 1981. — 352 с. — 2000 экз.

15. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 1. Издательство Мир. Москва. 1977. 471 с. Misner CW Gravitation. — San Francisco: W. H. Freeman, 1973. — P. Chapter 25 (pp. 636–687), §33.5 (pp. 897–901), and §40.5 (pp. 1110–1116).

16. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Издательство Мир. Москва. 1977. 526. с.

17. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 3. Издательство Мир. Москва. 1977. 510. с.

18. К.А.Бронников, С.Г.Рубин Лекции по гравитации и космологии. Москва. МИФИ. 2008. 460 с.

19. Г.С.Бисноватый-Коган. Релятивистская астрофизика и физическая космология. Москва. КРАСНАД. 2011. 376 с.

20. Pais A. Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein. — Oxford University Press, 1982. — P. pp. 253–256.

21. Pauli W Theory of Relativity. — New York: Dover Publications, 1958. — P. pp. 40–41, 166–169.

22. Rindler W Essential Relativity: Special, General, and Cosmological. — revised 2nd. New York: Springer Verlag, 1977. P. pp. 143–149.

23. Synge JL Relativity: The General Theory. — Amsterdam: North-Holland Publishing, 1960. — P. pp. 289–298.

24. Wald RM General Relativity. — Chicago: The University of Chicago Press, 1984. — P. pp. 136–146.

25. Walter, S. Breaking in the 4-vectors: the four-dimensional movement in gravitation, 1905–1910 // The Genesis of General Relativity / Renn, J. — Berlin: Springer, 2007. — Vol. 3. — P. 193–252.