

O`zbekiston Respublikasi Oliy va O`rta Maxsus Ta`lim Vazirligi

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**Mexanika - Matematika fakulteti
Matematik analiz kafedrası**

Xatamov Axtam

**Mexanika - Matematika fakulteti
5A130101-matematik tahlil mutaxassisligining magistr^{lar}
tayyorlash o`quv dasturi bo`yicha magistrantlar uchun
“Funksional fazolar va ularda yaqinlashtirish nazariyasi”
tanlov fanidan ma`ruzalar matni**

**SamDU mexanika-matematika fakulteti ilmiy kengashining
2013-yil 30-aprel 8-majlis bayonnomasi asosida
„Matematika“ magistr ixtisosligi bo'yicha 2-kurs
magistrantlar uchun**

Samarqand-2013

KIRISH

Nazariy va amaliy matematikaning ko'p masalalarida murakkab funksiyalarni nisbatan soddaroq funksiyalar bilan yuqori darajadagi aniqlikda almashtirish mumkin. Ko'p hollarda alohida funksiyalarni yoki funksiyanal sinflarni qandaydir chekli o'lchovli fazo elementlari bilan yaqinlashtirishga to'g'ri keladi. Bunda chekli o'lchovli fazolar vazifasini ma'lum darajali yoki tartibli algebraik ko'phadlar yoki trigonometrik ko'phadlar to'plamlari o'ynaydi.

Funksiyalarni algebraik ko'phadlar va trigonometrik ko'phadlar bilan yaqinlashtirish nazariyasining birinchi natijalari XIX asrning o'rtalarida P.L.Chebishev tomonidan isbotlangan. Uning fundamental ishlarida yaqinlashtirish nazariyasining asoslari o'z aksini topgan. 1853-1857 yillarda P.L.Chebishev tekis metrikada eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish algebraik ko'phadi tushunchalarini kiritdi. U tomonidan isbot qilingan chekli oraliqda tekis metrikada eng yaxshi yaqinlashtirish algebraik ko'phadining alomati funksiyalarni yaqinlashtirish nazariyasida olingan fundamental natijalardan biri hisoblanadi.

XX asrning boshida Sh.J.Valle-Pussen va A.Lebeq chekli $[a,b]$ oraliqda uzluksiz f funksiyaning darajasi n dan oshmaydigan algebraik ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlari $E_n(f)$ ning $n \rightarrow \infty$ da nolga intilish tartiblari va f funksiyaning silliqlik darajasi o'rtasida uzviy bog'liqlik borligini payqaganlar. Shu davrdan boshlab turli davlatlar olimlari bunday bog'liqlikni o'rganishni ikki yo'nalish bo'yicha olib bormoqdalar. Birinchi yo'nalish $n \rightarrow \infty$ da $E_n(f)$ ning nolga intilish tartibini f funksiyaning berilgan silliqlik darajasi asosida topishdan iborat bo'lib, bunday xilga taaluqli teoremlar yaqinlashtirish nazariyasining to'g'ri teoremlari deyiladi. Va ikkinchi yo'nalishdagi teoremlarda $n \rightarrow \infty$ da $E_n(f)$ ning nolga intilish tartibiga ko'ra f funksiyaning silliqlik darajasini aniqlash masalasi yechilib, bunday teoremlar yaqinlashtirish nazariyasining teskari teoremlari deyiladi.

1911-1912 yillarda D.Jekson va S.N.Bernshteyn olgan to'g'ri va teskari teoremlar funksiyalarni yaqinlashtirish nazariyasining keyingi rivojlanishida hal qiluvchi rol o'ynagan. Bu natijalar turli yo'nalishlarda aniqlangan va umumlashtirilgan bo'lib, natijada bir o'zgaruvchili haqiqiy funksiyalarni chekli oraliqda tekis metrikada algebraik ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlar nazariyasi to'laroq rivojlangan. Ushbu majmua funksiyalarni yaqinlashtirish nazariyasining aynan shu masalalarini yoritishga bag'ishlangan.

Ular ikki bobdan tashkil topgan. Har bir bob bir necha paragraflardan tuzilgan. Har bir ma'ruza reja, asosiy iboralar va mustaqil ishlash uchun savollar bilan ta'minlangan. Bundan tashqari, matnda mustaqil bajarish uchun savollar, har bir ma'ruzaning oxirida ham o'z-o'zini tekshirish savollari va muammoli savollar mavjud. Bu savollar talabalarning mustaqil fikrlash va tanlov fani materiallarini yaxshi o'zlashtirishga yordam beradi.

Mundarija.

1.	I bob. Uzluksiz funksiyalarni eng yaxshi yaqinlashtirish algebraik va trigonometrik ko'phadlarining alomati, yagonaligi haqidagi teoremlar. Ma'ruza 1: Chiziqli va normallashtirilgan fazolar. Normallashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi	4
2.	Ma'ruza 2: Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi tushunchalari. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar.....	8
3.	Ma'ruza 3: Metrik fazo tushunchasi. To'la metrik fazolar.....	12
4.	Ma'ruza 4: Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementining xossalari	15
5.	Ma'ruza 5: Chebishev teoremasi va uning uzluksiz funksiyalarning eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari alomatini olishda va ularni tuzishda qo'llanilishi.....	18
6.	Ma'ruza 6: Noldan eng kichik chetlanuvchi ko'phadlar. Chebishev ko'phadlari va ularning yaqinlashtirish tezligini ko'tarishda qo'llanilishi	23
7.	Ma'ruza 7: Izomorf chiziqli fazolar. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi	27
8.	Ma'ruza 8: $\tilde{C}$ fazo. Trigonometrik ko'phadlar va ularning xossalari	29
9.	Ma'ruza 9: Trigonometrik ko'phad noekvivalent nollarining soni haqidagi teorema. Eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadlarining yagonaligi va alomati haqidagi teoremlar.....	33
10.	II bob. Uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar va ularda algebraik va trigonometrik ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirish baholari. Ma'ruza 10: Funksiya uzluksizlik moduli va uning oddiy xossalari.....	37
11.	Ma'ruza 11: Qavariq funksiya va qavariq uzluksizlik moduli hamda ularga tegishli xossalari.....	40
12.	Ma'ruza 12: Uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflari va ular o'rtasidagi munosabatlar.....	
13.	Ma'ruza 13: Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning natija.....	48

14. Ma`ruza 14: Korneychik teoremasi va uning natijasi.....	52
15. Ma`ruza 15: Jeksonning 1- va 2- teoremalari. Korneychuk misoli.....	57
16. Ma`ruza 16: Bernshteynning birinchi tengsizligi. Uning natijasi va aniqligi.	61
17. Ma`ruza 17: $2\pi$ davrli ma`lum tartibli silliqlikka ega funksiyalarni trigonometrik ko`phadlar bilan yaqinlashtirish nazariyasining teskari teoremalari Stechkin teoremasi va Bernshteynning birinchi teoremasi.....	63
18. Ma`ruza18:Teskari teorema va Bernshteynning ikkinchi teoremasi. Natijalar... ..	67
19. Adabiyotlar.....	71

I bob. Uzluksiz funksiyalarni eng yaxshi yaqinlashtirish algebraik va trigonometrik ko'phadlarining alomati, yagonaligi haqidagi teoremlar

Ma'ruza 1 (2 soat)

Chiziqli va normallashtirilgan fazolar. Normallashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi

Reja:

1. Chiziqli fazolar;
2. Chiziqli bog'langanlik;
3. Qism-fazo;
4. Qavariq funksionallar;
5. Normalashtirilgan fazolar;
6. Normalashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi;

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* funksiyalar nazariyasi kursidan chiziqli fazolar, chiziqli bog'langanlik, qism-fazo, qavariq funksionallar, normalashtirilgan fazolar, normalashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalarini eslatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: chiziqli fazolar, chiziqli bog'langanlik, qism-fazo, qavariq funksionallar, normalashtirilgan fazolar, normalashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy

iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, qism-fazolar, chekli o'lchovli fazolar, normalashtirilgan fazolar yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

1.1. Chiziqli fazolar.

Ta'rif 1.1. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $x, y, z, \dots$ elementlarning bo'sh bo'lmagan L to'plami chiziqli yo'ki vector fazo deyiladi:

I. $\forall x, y \in L$ elementlar uchun ularning yig'indisi deb ataluvchi va $x + y$ belgilanuvchi bir qiymatli aniqlangan uchinchi shunaqa $z \in L$ element mavjudki,

1) $x + y = y + x$ (kommutativlik);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (assotsiativlik);

3) L da shunaqa 0 element mavjud bo'lib, $\forall x \in L$ uchun $x + 0 = x$ (nolning mavjudligi),

4) $\forall x \in L$ uchun shunaqa $-x$ element mavjudki, $x + (-x) = 0$ (teskari elementning mavjudligi).

II. Ixtiyoriy α son va ixtiyoriy $x \in L$ element uchun shunaqa $\alpha x \in L$ element aniqlangan (x elementning α songa ko'paytmasi) bo'lib,

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

2) $1 \cdot x = x$,

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

munosabatlar bajariladi.

Misollar. 1.1. To'g'ri chiziq $-R^1$ – barcha haqiqiy sonlar to'plami odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazoni hosil qiladi.

1.2. n ta sonlar (haqiqiy yo'ki kompleks) ning mumkin bo'lgan barcha sistemasi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ to'plami

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

kabi aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan ham chiziqli fazoni tashkil qiladi. Bu fazo n -o'lchovli arifmetik fazo deyiladi va R^n belgilanadi.

1.3. $[a, b]$ oraliqda uzluksiz (haqiqiy yo'ki kompleks) barcha funksiyalar to'plami odatdagi qo'shish va songa ko'paytirish amallari bo'yicha $C[a, b]$ – chiziqli fazoni tashkil qiladi. Bu fazo analizning eng muhim fazolaridan biri sifatida keyingi mavzularda tez-tez uchrab turadi.

1.2. Chiziqli bog'langanlik.

Ta'rif 1.2. L chiziqli fazoning $x, y, \dots, w$ elementlari uchun hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\alpha x + \beta y + \dots + \lambda w = 0 \quad (*)$$

tenglik bajarilsa, u holda bu elementlar chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni agar $(*)$ tenglikdan $\alpha = \beta = \dots = \lambda = 0$ munosabat kelib chiqsa, u holda bu elementlar chiziqli bog'lanmagan deyiladi.

Agar L fazoning chelsiz $x, y, \dots$ elementlari sistemasining ixtiyoriy chekli qism-sistemi chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, u holda bu elementlar sistemi chiziqli bog'lanmagan deyiladi.

Agar L fazoda n ta chiziqli bog'lanmagan elementlar sistemi topilib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementlari chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L fazo n -o'lchovli deyiladi. Agar L fazoda ixtiyoriy chekli sondagi chiziqli bog'lanmagan elementlar sistemi topilsa, u holda L fazo cheksiz o'lchovli deyiladi. n -o'lchovli L fazoning *bazisi* deb ixtiyoriy n ta chiziqli bog'lanmagan elementlari sistemasiga aytiladi. Oson ko'rsatish mumkinki, R^n ning o'lchovi n ga teng. Haqiqatan, n ta chiziqli bog'lanmagan elementlar sistemi sifatida $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ni olish mumkin. Agar ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar sistemasini olib, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ tenglikni tuzsak, u holda uning bajarilishi ushbu

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 1 = 0$$

n ta tengliklar sistemasining bajarilishiga tengkuchlidir. Bu sistema esa yagona $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ yechimga ega bo'lganligi uchun $e_1, e_2, \dots, e_n \in R^n$ sistema chiziqli bog'lanmagandir. U R^n fazoning bazisi bo'ladi, chunki $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ elementni

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ifodalash uchun quyidagi teoremdan foydalanamiz ([3], 53-54).

Teorema 1.1. Agar chiziqli fazo bazisga ega bo'lsa, u holda uning o'lchovi bazis elementlari soniga teng bo'ladi.

Demak, R^n fazoning o'lchovi n ga teng.

$C[a, b]$ fazoning o'lchovi esa cheksizga teng ekanligini ko'rsating.

1.3. Qism-fazo.

Ta'rif 1.3. L chiziqli fazoning bo'ch bo'lmagan qism-to'plami L' unda aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etsa, u holda u L fazoning qism-fazosi deyiladi. Boshqacha aytganda, $L' \subset L$ bo'lib, $x \in L', y \in L'$ dan ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L'$ kelib chiqsa, u holda L' L ning qism-fazosi deyiladi.

Misol. 1.4. $C[a,b]$ – $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar fazosida $P[a,b]$ – barcha algebraik ko'phadlar to'plami cheksiz o'lchovli qism-fazoni hosil qiladi (isbotlang).

1.4. Qavariq funksionallar.

Ta'rif 1.4. Agar haqiqiy chiziqli L fazoda aniqlangan manfiymas p funksional quyidagi

- 1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in L$;
- 2) $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha > 0$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda u qavariq deyiladi.

1.5. Normalashtirilgan fazolar.

Ta'rif 1.5. Faraz qilaylik, L – chiziqli fazo bo'lsin. L da aniqlangan chekli qavariq p funksional quyidagi

- 1) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \forall \alpha$

qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsa, u norma deyiladi.

Ta'rif 1.6. Biror norma berilgan L chiziqli fazo normalashtirilgan fazo deb aytiladi.

Agar istalgan normalashtirilgan fazoda $\rho(x, y) = \|x - y\|$ masofa kiritilsa, u holda u metric fazoga aylanadi.

Misollar:

1.5. Elementlari $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan iborat haqiqiy n -o'lchovli R^n fazo uchun $\|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ deb olsak, u normalashtirilgan fazoga aylanadi.

1.6. Uzluksiz funksiyalarning $C[a,b]$ fazosida normani $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ formula orqali aniqlaymiz. Norma shartlari bajarilishini ko'rsating. Unda metrika qanday aniqlanadi?

1.6. Normalashtirilgan fazoning chekli o'lchovli qism-fazosi.

Normalashtirilgan fazolarda yopiq qism-fazolar (ya'ni barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlaydigan) asosiy qiziqish uyg'otadi. Chekli o'lchovli normalashtirilgan fazolarda har qanday qism-fazo avtomatik ravishda yopiqdir (buni isbotlang). Cheksiz o'lchovli holda bu unaqa emas.

Masalan, $C[a,b]$ fazoda barcha algebraik ko'phadlar fazosi qism-fazoni tashkil etadi. Lekin u yopiq emas. Nima uchun? Shu sababli, normalashtirilgan fazoning qism-fazosi deb endi faqat yopiq qism-fazoni atashga kelishib olamiz.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

1-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Chiziqli fazoning ta'rifini ayting va misol keltiring;
2. Chiziqli bog'langanlik va bog'lanmaganlikni misollar yordamida tushuntiring;
3. Qism-fazo nima? Misol keltiring;
4. Qavariq funksional nima? Unga misol keltiring;
5. Normalashtirilgan fazolar qanday aniqlanadi? Unga misol keltiring;
6. Normalashtirilgan fazoga, uning chekli o'lchovli qism-fazosiga misollar toping.

1-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

To'la normalashtirilgan fazo Banax fazosi yo'ki B -fazo deyiladi.

1. Banax fazosiga мисоллар келтиринг.

Ma'ruza 2 (2 soat)

Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi tushunchalari. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar.

Reja:

1. Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi tushunchalari. Ularning geometrik ma'nosi;
2. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi haqidagi teorema va uning isboti;
3. Banax fazosining qavariq sferaga egaligi tushunchasi va uning geometrik ma'nosi;
4. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining yagonaligi haqidagi teorema va uning isboti;
5. Qavariq sferaga ega va ega bo'lmagan fazolarga misollar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* funksiyalar nazariyasi kursidan Banax fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosini tushunchalarini eslatish, ular asosida kursning muhim tushunchalari—eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementini

kiritish va ularni geometrik nuqtai nazardan tushuntirish. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar va ularning isbotlarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad*: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad*: talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Banax fazosi, chekli o'lchovli qism-fazo, eng yaxshi yaqinlashtirish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, Banax fazosining qavariq sferaga egaligi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, qism-fazolar, chekli o'lchovli fazolar, normalashtirilgan fazolar, to'la fazolar yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

2.1. Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi tushunchalari. Ularning geometrik ma'nosi.

Faraz qilaylik, F – qandaydir Banax fazosi, $\bar{F}$ – uning chekli o'lchovli qism-fazosi bo'lsin.

Ta'rif 2.1. Element $f \in F$ ning $\bar{F}$ qism-fazo elementlari bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlari deb

$$E_{\bar{F}}(f) = \inf_{\varphi \in \bar{F}} \|f - \varphi\|$$

songa, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi deb shunaqa $\varphi \in \bar{F}$ elementga aytiladiki,

$$\|f - \varphi\| = E_{\bar{F}}(f).$$

Geometrik nuqtai nazardan f elementning eng yaxshi yaqinlashtirishi shu elementdan $\bar{F}$ qism-fazogacha bo'lgan masofani, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi esa $\bar{F}$ qism-fazoning f elementga eng yaqin elementiga aytiladi.

2.2. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi haqidagi teorema va uning isboti.

Teorema 2.1. *Ixtiyoriy $f \in F$ uchun uning eng yaxshi yaqinlashtirish elementi mavjud.*

Isbot. Aniq quyi chegaraning ta'rifiga ko'ra $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – natural sonlar to'plami)

son uchun shunaqa $\varphi_n \in \bar{F}$ element mavjudki, $\|f - \varphi_n\| \leq E_{\bar{F}}(f) + \frac{1}{n}$.

U holda $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Haqiqattan ham,

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f\| \leq E_{\bar{F}}(f) + \frac{1}{n} + \|f\| \leq E_{\bar{F}}(f) + \|f\| + 1$$

Shunday qilib, bu ketma-ketlikning hadlari birgalikda chegaralangan va chekli o'lchovli fazoning elementlari hisoblanadi. Ma'lumki, chekli o'lchovli fazoda chegaralangan to'plam kompaktdir. Demak, $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik $\bar{F}$ da kompakt. Shuning uchun undan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikni ajratish mumkin:

$$\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi \in \bar{F}.$$

Ushbu $\|f - \varphi_{n_k}\| \leq E_{\bar{F}}(f) + \frac{1}{n_k}$ tengsizlikda limitga o'tib, $\|f - \varphi\| \leq E_{\bar{F}}(f)$ ni olamiz va teskari tengsizlik $\|f - \varphi\| \geq E_{\bar{F}}(f)$ ravshanligi 1-ta'rifdan kelib chiqqanligidan φ ning eng yaxshi yaqinlashtirish elementi ekanligini olamiz.

Eng yaxshi yaqinlashtirish elementi yagona bo'lmasligi ham mumkin. Ammo Banax fazolarining keng sinfini ko'rsatish mumkinki, ularda bunday element yagona bo'ladi.

2.3. Banax fasosining qavariq sferaga egaligi tushunchasi va uning geometrik ma'nosi.

Ta'rif 2.2. Agar $\forall f, g \in F: \|f\| = \|g\|$ va $f \neq g$ dan $\|f + g\| < \|f\| + \|g\|$ kelib chiqsa, u holda F fazo qavariq sferaga ega deyiladi.

Geometrik jihatdan bu shuni bildiradiki, agar $\forall f, g \in F, f \neq g$ biror sferaga qarashli bo'lsa ($\|f\| = \|g\| = R$), u holda ularni tutashtiruvchi kesmaning o'rtasi sferaning qat'iy ichkarisida yotadi, ya'ni:

$$\left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\| < R.$$

2.4. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining yagonaligi haqidagi teorema va uning isboti.

Teorema 2.2. Agar F fazo qavariq sferaga ega bo'lsa, u holda $\forall f \in F$ elementning eng yaxshi yaqinlashtirish elementi yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: φ_1, φ_2 – turli eng yaxshi yaqinlashtirish elementlari bo'lsin. U holda $\|f - \varphi_1\| = \|f - \varphi_2\| = E_{\bar{F}}(f)$ tengliklarni nazarda tutib,

$$\left\| f - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right\| = \frac{1}{2} \|(f - \varphi_1) + (f - \varphi_2)\| < \\ < \frac{1}{2}(\|f - \varphi_1\| + \|f - \varphi_2\|) = E_{\bar{F}}(f),$$

ya'ni $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \in \bar{F}$ element uchun $\|f - \varphi\| < E_{\bar{F}}(f)$

munosabatlarni olamiz. Bu esa eng yaxshi yaqinlashtirish ta'rifiga ziddir. Bundan teorema 2 ning isbotini olamiz. $\square$

2.5. Qavariq sferaga ega va ega bo'lmagan fazolarga misollar.

Izoh. Ma'lum funksional fazolar ichida

$$\|f\|_{p,[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normali $L_p[a,b]$ fazo parametrning $1 < p < +\infty$ qiymatlarida qavariq sferaga ega. Bu esa Minkovskiyning integral tengsizligida tenglik belgisi faqat mos funksiyalar proporsional bo'lgan taqdirdagina bajarilishidan kelib chiqadi. Demak, $L_p[a,b]$, $1 < p < +\infty$, fazolarda ularning chekli o'lchovli $\bar{F}$ qism-fazolaridagi eng yaxshi yaqinlashtirish elementi yagona bo'ladi. $C[a,b]$ va $L[a,b]$ fazolarning sferalari qavariq emas.

Haqiqattan, $\|f + g\|_c = \|f\|_c + \|g\|_c$ doim f, g funksiyalar bitta nuqtada bir xil ishorali va modul jihatdan maksimum qiymatga erishadigan holda bajariladi. Quyidagi $\|f + g\|_L = \|f\|_L + \|g\|_L$ tenglikning bajarilishi uchun f, g funksiyalar ikkalasining ham manfiy bo'lmasligi kifoya. Bunday tengliklarni qanoatlantiruvchi sferaning turli f, g funksiyalariga misollar keltiring.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

2-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi tushunchalari qanday aniqlanadi? Ularning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
2. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi haqidagi teorema qanday isbotlanadi?

3. Banax fasosining qavariq sferaga egaligi tushunchasi va uning geometrik ma'nosi nima?
4. Eng yaxshi yaqinlashtirish elementining yagonaligi haqidagi teorema va uning isbotini keltiring;
5. Qavariq sferaga ega va ega bo'lmagan fazolarga qanday misollar keltira olasiz?

2-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Chiziqli fazoning ta'rifini ayting va misol keltiring;
2. Chiziqli bog'langanlik va bog'lanmaganlikni misollar yordamida tushuntiring;
3. Qism-fazo nima? Misol keltiring;
4. Qavariq funksional nima? Unga misol keltiring;
5. Normalashtirilgan fazolar qanday aniqlanadi? Unga misol keltiring;
6. Normalashtirilgan fazoga, uning chekli o'lchovli qism-fazosiga misollar toping.

Maruza 3 (2 soat)

Metrik fazo tushunchasi . To'la metrik fazolar. Misollar

Reja:

1. Metrik fazo tushunchasi;
2. To'la metrik fazolar. Misollar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [2].

Dars maqsadlari:

- a). *Ta'limiy maqsad*: funksiyalar nazariyasi kursidan metrik fazo tushunchasi, to'la metrik fazolarni, уларга доир misollarni o'rgatish.
- b). *Tarbiyaviy maqsad*: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.
- c). *Rivojlantiruvchi maqsad*: talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, matiqiy va ijodiy qobiliyatni, mulqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: metrik fazo tushunchasi, to'la metrik fazo, Banax fazosi, fundamental ketma-ketlik, Koshi alomati.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli

topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarini bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarining darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarining Banax fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalarini o'rganish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlardan foydalanish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali va muammoli topshiriqlarni bajarishni tekshirish orqali talabalarining bilim darajasini aniqlash (bunda har bir talabaning o'z varianti bo'yicha yozma javob berishi ko'zda tutiladi).

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

3.1. Metrik fazo tushunchasi.

Ta'rif 3.1. Elementlar (nuqtalar) ning biror X to'plami (fazosi) va masofa, ya'ni bir qiymatli, manfiymas, haqiqiy, $\forall x, y \in X$ uchun aniqlangan va quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi funksiyadan tuzilgan (X, ρ) juft metrik fazo deyiladi, agar quyidagi aksiomalar bajarilsa:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriya aksiomasi),
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak aksiomasi).

Metrik fazoni biz odatda bitta harf bilan belgilaymiz: $R = (X, \rho)$.

Misollar. 3.1. Haqiqiy sonlar to'plami $\rho(x, y) = |x - y|$ metrik funksiyasi bilan R^1 metrik fazoni tashkil qiladi.

3.2. n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlarini $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ to'plami R^n $\rho(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \right]^{1/2}$ metric funksiya bilan n -o'lchovli arifmetik Evklid fazosi deyiladi.

Bu metrik funksiyaning 1) va 2) aksiomalarni qanoatlantirishi ravshan. U uchun 3) aksiomaning ham bajarilishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ bo'lsin. U holda uchburchak aksiomasi quyidagicha yoziladi:

$$[\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2]^{1/2} \leq [\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2]^{1/2} + [\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2]^{1/2}. \quad (1)$$

$y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, belgilab, $z_k - x_k = a_k + b_k$ ni olamiz va (1) tengsizlik

$$[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2]^{1/2} \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{1/2} \quad (2)$$

Bu tengsizlik esa $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$ ma'lum Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan oson kelib chiqadi. Haqiqatan ham, oxirgi tengsizlikka ko'ra

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2)^{1/2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = [(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{1/2}]^2.$$

Shunday qilib, (2) tengsizlik, u bilan birga (1) tengsizlik ham isbotlandi. Demak, R^n fazo metrik fazodir.

3.3. $C[a, b] - [a, b]$ oraliqda uzluksiz haqiqiy funksiyalar fazosi $\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$ masofa bilan metrik fazoni tashkil etadi. 1)-3) aksiomalar bajarilishini tekshirish talabaga havola qilinadi. Bu fazoni ham biz $C[a, b]$ simvol bilan belgilaymiz.

3.2. To'la metrik fazolar. Misollar. Matematik analizda son o'qining to'laligi, ya'ni har qanday haqiqiy sonlarning fundamental ketma-ketligining biror limitga intilishi qay darajada muhim ekanligi ta'kidlanadi. Sonlar to'g'ri chizig'i to'la metrik fazolarga eng oddiy misol bo'la oladi

Ta'rif 3.2. Agar $\{x_k\}$ qandaydir R metrik fazo nuqtalari ketma-ketligi Koshi alomatini qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunaqa natural N_ε son topilib, barcha $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$ uchun $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ bajarilsa, u holda $\{x_k\}$ ketma-ketlik fundamental deyiladi.

Ta'rif 3.3. Agar R metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bunday fazo *to'la* deyiladi.

Misollar. 3.4. R^1 ning to'laligi Koshi alomati haqidagi teoremdan kelib chiqadi.

3.5. R^n ning to'laligi R^1 ning to'laligidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, $\{x^{(p)}\} - R^n$ fazoning fundamental nuqtalari ketma-ketligi bo'lsin. Buning ma'nosi shuki, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunaqa $N = N_\varepsilon$ son topilib, $\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$ barcha $p, q > N$, bu yerda ulou holda bundan har bir $k = 1, 2, \dots, n$ qiymatlarda $x_k^{(p)}$ koordinatlar va barcha $p, q > N$ uchun $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$, ya'ni $\{x_k^{(p)}\} -$ fundamental sonli ketma-ketlik. U holda $x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}$ va $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

deb olsak, tushunarlik, $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = x$, ya'ni R^n – to'la metrik fazodir. Bu fazo haqida to'plangan oldingi ma'lumotlarni ham nazarga olib, u Banax fazosi ekan degan xulosaga kelamiz.

3.6. $C[a,b]$ fazoning to'laligini ko'rsatamiz. $\{x_n(t)\} - C[a,b]$ fazoning qandaydir fundamental ketma-ketligi bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ shunaqa N son topilib, barcha $n, m > N, t, a \leq t \leq b$ uchun $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Bu yerdan Koshi teoremasiga muvofiq $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. U holda ma'lumki, uning limitik funksiyasi $x(t)$ $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiyadan iborat. Yuqoridagi tengsizlikda m ni cheksizga intiltirib, barcha $n > N, t \in [a,b]$ uchun $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Buning ma'nosi shuki, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a,b]$ fazo metrikasi bo'yicha uning $x(t)$ elementiga yaqinlashadi. Demak, $C[a,b]$ – to'la fazo, Bundan oldingi xulosalarga asoslanib, $C[a,b]$ fazo Banax fazosi ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan metrik fazo tushunchasi, to'la metrik fazo, Banax fazosi, fundamental ketma-ketlik, Koshi alomati bo'yicha savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

3-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Metrik fazo ta'rifini ayting va misollar keltiring;
2. To'la metrik fazo ta'rifini ayting va misollar keltiring;
3. Banax fasosining ta'rifini ayting va misollar keltiring.

3-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. $C[a,b]$ fazoning Banax fazosi ekanligini isbotlang.

Maruza 4 (2 soat)

Eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementining xossalari

Reja:

1. $1^\circ - 4^\circ$ xossalar va ularning isbotlari;
2. $5^\circ - 6^\circ$ xossalar va ularning isbotlari;
3. $7^\circ - 8^\circ$ xossalar va ularning isbotlari;
4. 9° xossa va uning isboti.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad*: funksiyalar nazariyasi kursidan Banax fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalarini eslatish, eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementining asosiy xossalarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad*: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad*: talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, matiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Banax fazosi, chekli o'lchovli qism-fazo, eng yaxshi yaqinlashtirish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, chekli o'lchovli fazoda kompakt to'plam.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarini bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, qism-fazolar, chekli o'lchovli fazolar, normalashtirilgan fazolar, to'la fazolar yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali va muammoli topshiriqlarni bajarishni tekshirish orqali darajasini aniqlash (bunda har bir talabaning o'z varianti bo'yicha yozma javob berishi ko'zda tutiladi).

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

4.1. $1^\circ - 4^\circ$ xossalar va ularning isbotlari.

Faraz qilaylik, $f, g \in F$, $\varphi, \psi \in \overline{F}$ ularning eng yaxshi yaqinlashtirish elementlari bo'lsin. U holda quyidagi xossalar o'rinli:

1°. $E_{\overline{F}}(f) \leq \|f\|$, chunki yaqinlashtirish elementi sifatida doim 0 ni olish mumkin.

2°. Agar $g = cf$, c – doimiy bo'lsa, u holda $E_{\overline{F}}(g) = |c|E_{\overline{F}}(f)$ va $\psi = c\varphi$.

Isbot. $E_{\bar{F}}(g) = \|cf - \psi\| = |c| \left\| f - \frac{\psi}{c} \right\| \geq |c| E_{\bar{F}}(f) = |c| \|f - \varphi\| = \|g - c\varphi\| \geq E_{\bar{F}}(g).$

Bu yerdan $E_{\bar{F}}(g) = |c| E_{\bar{F}}(f)$ va $\psi = c\varphi$. $\square$

3°. Agar $\chi \in \bar{F}$ va $g = f + \chi$ bo'lsa, u holda $E_{\bar{F}}(g) = E_{\bar{F}}(f)$ va $\psi = \varphi + \chi$ bo'ladi.

Isbot.

$$E_{\bar{F}}(g) = \|g - \psi\| = \|f + \chi - \psi\| \geq \|f - (\psi - \chi)\| \geq E_{\bar{F}}(f) = \|f - \varphi\| = \|g - (\varphi + \chi)\| \geq E_{\bar{F}}(g).$$

Bu yerdan $E_{\bar{F}}(g) = E_{\bar{F}}(f)$ va $\psi = \varphi + \chi$. $\square$

4°. $E_{\bar{F}}(f + g) \leq E_{\bar{F}}(f) + E_{\bar{F}}(g).$

Isbot. $\|(f + g) - (\varphi + \psi)\| \leq \|f - \varphi\| + \|g - \psi\| = E_{\bar{F}}(f) + E_{\bar{F}}(g)$. Bu yerdan va eng yaxshi yaqinlashtirish ta'rifidan 4° xossa kelib chiqadi. $\square$

4.2. 5° – 6° xossalar va ularning isbotlari. 1°, 2° va 4° xossalarning natijasi sifatida.

5°. $|E_{\bar{F}}(f) - E_{\bar{F}}(g)| \leq E_{\bar{F}}(f - g) \leq \|f - g\|$ xossa kelib chiqadi (isbotlang).

6°. Umuman olganda, $\varphi + \psi$ $f + g$ ning eng yaxshi yaqinlashtirish elementi bo'la olmaydi. Buni tasdiqlovchi misol 3-ma'ruzaning oxirida keltiriladi.

4.3. 7° – 8° xossalar va ularning isbotlari.

7°. Faraz qilaylik, $f_n \in F$ elementlar ketma-ketligi, $\varphi_n \in \bar{F}$ mos eng yaxshi yaqinlashtirish elementlari bo'lsin. Agar $f_n \rightarrow f$ bo'lsa, u holda $E_{\bar{F}}(f_n) \rightarrow E_{\bar{F}}(f)$. Agar qo'shimcha ravishda eng yaxshi yaqinlashtirish elementi φ yagona bo'lsa, u holda $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

Isbot. $E_{\bar{F}}(f_n) \rightarrow E_{\bar{F}}(f)$ 5°-xossadan bevosita kelib chiqadi. $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan:

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_n - f_n\| + \|f_n - f\| + \|f\| = E_{\bar{F}}(f_n) + \|f_n - f\| + \|f\| < M$$

Shuning uchun u $\bar{F}$ da kompakt. Faraz qilaylik, $\{\varphi_{n_k}\}$ – yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik va χ uning limiti bo'lsin. U holda $\|f_{n_k} - \varphi_{n_k}\| = E_{\bar{F}}(f_{n_k})$ tenglikda limitga o'tib, $\|f - \chi\| = E_{\bar{F}}(f)$, ya'ni χ ning f uchun eng yaxshi yaqinlashtirish elementi ekanligini olamiz. Bunday elementning yagonaligidan esa $\chi = \varphi$. Demak, $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik kompakt va uning ixtiyoriy limitik elementi φ dan iborat. Demak, $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik ham φ ga yaqinlashadi. $\square$

Endi F fazoning $\{F_n\}$ chekli n -o'lchovli qism-fazolari bo'lib, $F_{n+1} \supset F_n$ holni qaraymiz va $E_{F_n}(f) = E_n(f)$ belgilashni kiritamiz. U holda quyidagi xossalar o'rinlidir:

8°. $E_{n+1}(f) \leq E_n(f)$.

4.4. 9° xossa va uning isboti.

9°. Ixtiyoriy $f \in F$ element uchun $E_n(f) \rightarrow 0$ munosabatning bajarilishi uchun $\bigcup_n F_n$ ning F da zich bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. $\forall f \in F$ uchun $E_n(f) \rightarrow 0$ bajarilsin. U holda $\forall f \in F, \forall \varepsilon > 0$ son uchun shunaqa eng yaxshi yaqinlashtirish elementi $\varphi \in F_n$ mavjudki, $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. U holda $\bigcup_n F_n$ to'plam F da zichdir. Endi faraz qilamizki, $\bigcup_n F_n$ to'plam F da zich bo'lsin. U holda $\forall f \in F$ va $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists F_{n_0}$ to'plam va uning shunaqa eng yaxshi yaqinlashtirish elementi $\varphi \in F_{n_0}$ mavjudki, $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ o'rinlidir. $E_n(f)$ ning 8^o xossasiga ko'ra bundan $\forall n \geq n_0$ uchun $E_n(f) < \varepsilon$ ni olamiz, ya'ni $E_n(f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. $\square$

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

4-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. 1° – 4° xossalar nimalardan iborat va ular qanday isbotlanadi?
2. 5° – 6° xossalar nimalardan iborat va ular qanday isbotlanadi?
3. 7° – 8° xossalar nimalardan iborat va ular qanday isbotlanadi?
4. 9° xossa nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?

4-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. 1°, 2° va 4° xossalarning natijasi sifatida 5° xossani isbotlang.
2. 7° xossaning isbotida qo'llanilgan eng yaxshi yaqinlashtirish elementining yagonaligi qayerdan kelib chiqadi?

Ma'ruza 5 (2 soat)

Chebishev teoremasi va uning uzluksiz funksiyalarning eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari alomatini olishda va ularni tuzishda qo'llanilishi

Reja:

1. $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi tushunchasi;
2. $C[a, b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi;
3. Xaar teoremasi;
4. Eng yaxshi o'zgarmasni yasash;

5. Eng yaxshi chiziqli funktsiyani yasash;
6. Ikki funktsiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmasligini tasdiqlovchi misol.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* funktsiyalar nazariyasi kursidan Banax fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalarini eslatish, eng yaxshi yaqinlashtirish va eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi tushunchasi, $C[a,b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi, Xaar teoremasi, eng yaxshi o'zgarmasni yasash, eng yaxshi chiziqli funktsiyani yasash, ikki funktsiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmasligini tasdiqlovchi misolni o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, matiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Banax fazosi, eng yaxshi yaqinlashtirish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, metrik fazo, metrik fazoda kompakt to'plam. $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi, $C[a,b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi, Xaar teoremasi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida soda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalgam oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy

iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, qism-fazolar, chekli o'lchovli fazolar, normalashtirilgan fazolar, to'la fazolar, metrik fazolar, metrik kompakt, $C(K)$ ning Banax fazosi bo'lishi yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

5.1. $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi tushunchasi.

K - biror metric kompakt, ρ uning metrik funksiyasi. $C(K)$ - K kompaktda uzluksiz haqiqiy funksiyalarning $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in K\}$ norma bo'yicha Banax fazosi, $C_n - C(K)$ fazoning chekli n -o'lchovli qism fazosi bo'lsin.

Ta'rif 5.1. Agar $C_n \subset C(K)$ chekli n -o'lchovli qism fazo bo'lib, uning ixtiyoriy aynan noldan farqli elementi K kompaktning $n-1$ dan oshmaydigan nuqtalarida nolga aylansa, u holda u Chebishev qism fazosi deyiladi.

5.2. $C[a,b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi.

$C[a,b]$ fazo uchun bunday qism fazo sifatida darajasi $n-1$ dan oshmaydigan barcha algebraik ko'phadlar fazosini ($\mathcal{P}_{n-1}$ ni) olishimiz mumkin. Bunga ishonch hosil qiling!

Teorema 5.1. (Chebishev). Faraz qilaylik, $C_n - C[a,b]$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism fazosi bo'lsin. $\varphi \in C_n$ ko'phadning $[a,b]$ da uzluksiz $f \in C_n$ funksiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lishi uchun $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ day $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqtalar sistemasi mavjud bo'lib,

1) $|f(x_i) - \varphi(x_i)| = \|f - \varphi\| \ (i = \overline{1, n+1});$

2) $f(x_i) - \varphi(x_i)$ ishora almashinuvchi qiymatlar qabul qilishi zarur va yetarlidir.

Yuqorida keltirilgan xossalarga ega $\{x_i\} (i = \overline{1, n+1})$ nuqtalar to'plami Chebishev alternansi deyiladi.

Faraz qilaylik, $\mathcal{P}_n$ darajasi n dan oshmaydigan barcha algebraik ko'phadlar fazosi bo'lsin. Ravshanki, uning o'lchovi $n + 1$ ga teng. f funksiyaning $g \in \mathcal{P}_n$ ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlarini $E_n(f)$ kabi belgilaymiz, ya'ni

$$E_n(f) = \inf \{ \|f - g\|_{C[a,b]} : g \in \mathcal{P}_n \}.$$

5.3. Xaar teoremasi.

Teorema 5.2. (Xaar). *Ixtiyoriy $f \in C(K)$ funksiya uchun uning C_n qism-fazodagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining yagona bo'lishi uchun C_n ning Chebishev qism-fazosi bo'lishi zarur va yetarlidir.*

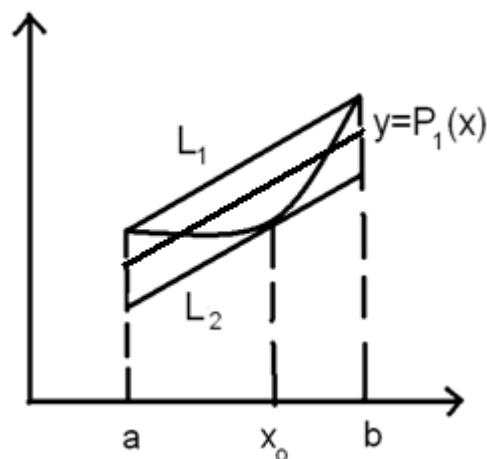
3.1-3.2-teoremlardan $[a, b]$ oraliqda ixtiyoriy uzluksiz funksiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish algebraik ko'phadi yagona va uning darajasi n dan iborat eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati $n + 2$ ta nuqtalardan iborat Chebishev alternansining mavjudligidir. Buni tushuntiring.

5.4. Eng yaxshi o'zgarmasni yasash.

Misol 5.1. (eng yaxshi o'zgarmas). $f \in C[a, b]$ funksiya uchun 0-chi darajali eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadini tuzish lozim bo'lsin. Agar $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ bo'lsa, u holda $P_0 = \frac{M+m}{2}$ izlanayotgan eng yaxshi o'zgarmas bo'ladi va $E_0(f) = \frac{M-m}{2}$. Chunki, bu holda $x_1, x_2 : f(x_1) = M, f(x_2) = m$ mos ravishda maksimum va minimum nuqtalar Chebishev alternansini tashkil qiladi.

5.5. Eng yaxshi chiziqli funksiyaning yasash.

Misol 5.2. (eng yaxshi chiziqli funksiya) f funksiya $[a, b]$ oraliqda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $f''(x)$ $[a, b]$ da ishorasini saqlasin. Aniqlik uchun $f''(x) > 0$ deb olamiz. Shu funksiyaning birinchi darajali (chiziqli) eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadini yasash talab qilinsin. Bunday ko'phadni grafik usulda yasashni ko'rsatamiz(1- chizma):

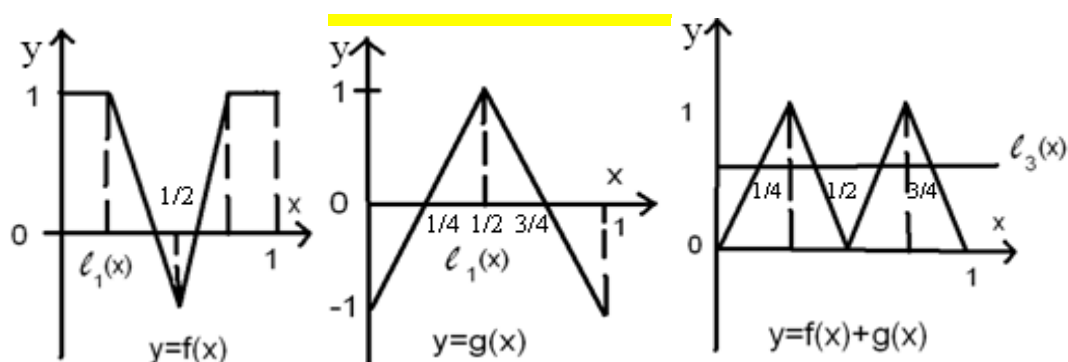


1-chizma

f funksiya grafigining $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalarini L_1 kesma, ya'ni $l_1(x)$ chiziqli funksiya grafigi bilan tutashtiramiz. (a, b) intervalda yagona x_0 nuqta topiladiki, unga mos funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $L_2 - l_2(x)$ chiziqli funksiyaning grafigi L_1 ga paralleldir. $f''(x) > 0$ shartni nazarga olsak, $l_2(x) \leq f(x) \leq l_1(x)$. Demak, $P_1(x) = \frac{l_1(x) + l_2(x)}{2}$ f uchun eng yaxshi yaqinlashtirish chiziqli funksiyasi bo'ladi, chunki a, x_0, b Chebishev alternansini tashkil qiladi.

5.6. Ikki funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmisligini tasdiqlovchi misol.

Misol 5.3. Endi ikki funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmisligini tasdiqlovchi misol ko'rsatamiz.



2-chizma .

Chizmada ifodalangan funksiyalarning eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari $f(x)$ uchun $l_1(x) = 0$, $g(x)$ uchun $l_2(x) = 0$, $f(x) + g(x)$ uchun $l_3(x) = \frac{1}{2}$,

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

5-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi nima? Unga misol ko'rsating.
2. $C[a,b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasini bayon qiling.
3. Xaar teoremasini keltiring.
4. Eng yaxshi o'zgaras qanday yasaladi?
5. Eng yaxshi chiziqli funksiya qanday yasaladi?
6. Ikki funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmasligini tasdiqlovchi misol keltiring.

5-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Darajasi n dan oshmaydigan barcha algebraik ko'phadlar fazosining $C[a,b]$ fazoning $n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi ekanligini isbotlang.
2. 2-misolda eng yaxshi chiziqli funksiyaning f funksiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish kattaligi $E_1(f) = \frac{l_1(x) - l_2(x)}{2} = \frac{l_1(a) - l_2(a)}{2}$ ga tengligini isbotlang.

Ma'ruza 6 (2 soat)

Noldan eng kichik chetlanuvchi ko'phadlar. Chebishev ko'phadlari va ularning yaqinlashtirish tezligini ko'tarishda qo'llanilishi.

Reja:

1. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phadlar;
2. Chebishevning 1-jins ko'phadlari va ularning xossalari;
3. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phad haqidagi teorema va uning natijasi;
4. Chebishev ko'phadlarining yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llanilishi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni qo'llash orqali noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phadlar alomatini keltirib chiqarish, Chebishevning 1-jins ko'phadlarini kiritish va ularning xossalarini o'rgatish. Bu ko'phadlarning funksiyalarni yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llanilishini misol orqali tushuntirish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalaridagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, matiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: eng yaxshi yaqinlashtirish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phadlar, Chebishevning 1-jins ko'phadlari, Chebishevning 1-jins ko'phadlarining yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llanilishi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, qism-fazolar, chekli o'lchovli fazolar, $C[-1,1]$ ning Banach fazosi bo'lishi, noldan eng kichik chetlanuvchi ko'phadlar va ularning alomati, Chebishevning 1-jins ko'phadlarini va ularning xossalari yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

6.1. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phadlar.

Misol 6.1. (noldan eng kichik chetlanuvchi ko'phadlar). Faraz qilaylik, barcha darajasi $n - 1$ dan oshmaydigan ko'phadlar ichida $f(x) = x^n$ funksiyani $[-1,1]$

oraliqda tekis metrikada eng yaxshi yaqinlashtiradiganini topish talab qilinsin. Agar $Q_{n-1}(x)$ izlanayotgan eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lsa, u holda, ravshanki, $P_n(x) = x^n - Q_{n-1}(x)$ ko'phad quyidagi masalani yechadi: barcha bosh koeffitsiyenti 1 bo'lgan darajasi n dan iborat ko'phadlar ichida $C[-1,1]$ fazodagi normasi minimali topilsin. Bu masalani yechadigan ko'phad noldan eng kichik chetlanuvchi ko'phad deyiladi. Bu yerdan va 1-teorema (Chebishev teoremasi) dan quyidagi teorema kelib chiqadi: $P_n(x)$

Teorema 6.1. Bosh koeffitsiyenti 1ga teng n -darajali $P_n(x)$ ko'phadning noldan eng kichik chetlanuvchi bo'lishi uchun $n+1$ ta nuqtalar $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq 1$ sistemasi mavjud bo'lib, $P_n(x_i) = \|P_n\|$ va $P_n(x_i)$ sonlarning ishora almashinuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu masalani Chebishevning 1-jins ko'phadlari hal qiladi.

6.2. Chebishevning 1-jins ko'phadlari va ularning xossalari.

Ta'rif 6.1. n -darajali Chebishev ko'phadi deb

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), |x| \leq 1,$$

ga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra, $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. Bundan tashqari,

$$\cos(n+2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$$

formuladan $\theta = \arccos x$ deb olsak, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ rekurrent formula kelib chiqadi. Formulaning isboti:

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2 \cos \frac{(2n+2)\theta}{2} \cos \frac{(n+2-n)\theta}{2} = 2 \cos(n+1)\theta \cos \theta.$$

Induksiya uslubi yordamida bu formuladan keltirib chiqarish mumkinki, $T_n(x)$ darajasi n va bosh koeffitsiyenti $2^{n-1} (n \geq 1)$ bo'lgan algebraik ko'phaddan iborat. Ravshanki, juft n lar uchun $T_n(x)$ faqat x ning juft darajalaridan, toq n lar uchun esa toq darajalaridan tashkil topgan. Faqat o'zgaras ko'paytuvchi bilan yuqoridagi $T_n(x)$ ko'phaddan farq qiladigan barcha ko'phadlarni ham keng ma'noda Chebishev (1-jins) ko'phadlari deb ataymiz. Bosh koeffitsiyenti 1 ga teng $\tilde{T}_n(x) = 2^{-(n-1)} T_n(x)$ Chebishev ko'phadi uchun quyidagi teorema o'rinli.

6.3. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phad haqidagi teorema va uning natijasi.

Teorema 6.2. Noldan eng kichik chetlashadigan ko'phad $\tilde{T}_n(x)$ bo'lib, $\|\tilde{T}_n\| = 2^{-(n-1)}$.

Isbot. Ravshanki, $\|T_n\| = 1$ va shuning uchun $\|\tilde{T}_n\| = 2^{-(n-1)}$. Faraz qilamizki,

$$x_k = 2^{-(n-1)} \cos \frac{n-k+1}{n} \pi \quad (k = \overline{1, n+1}). \quad \text{U holda} \quad -1 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = 1 \quad \text{va}$$

$$\tilde{T}_n(x_k) = 2^{-(n-1)} \cos(n-k+1)\pi = (-1)^{n-k+1} 2^{-(n-1)} = (-1)^{n-k+1} \|\tilde{T}_n\|. \quad \text{Demak, } \tilde{T}_n(x) \text{ ko'phad 3-}$$

teorema shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni u noldan eng kichik chetlashadigan ko'phaddir. $\square$

Natija 6.1. $[-1; 1]$ oraliq uchun quyidagi

$$E_{n-1}(x^n) = 2^{-n+1}$$

tenglik o'rinli.

6.4. Chebishev ko'phadlarining yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llanilishi.

Chebishev ko'phadlari noldan eng kichik chetlashuvchi ko'phadlar sifatida yaqinlashtiruvchi ko'phadlar darajasini kichraytirishda yoki yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llaniladi. Buni misolda tushuntiramiz. Faraz qilaylik, $f(x) = \cos x$ funksiyani $[-1; 1]$ oraliqda 6-darajali ko'phad bilan yaqinlashtirish talab qilinsin. Teylor qatorining kesmasi

$$Q_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

f funksiyaga

$$0,000025 > 1/8! > \|f - \theta_6\| \geq |f(1) - Q_6(1)| > 1/8! - 1/10! > 0,000024$$

yaqinlashtirishni ta'minlaydi. Endi yaqinlashtiruvchi ko'phad sifatida Teylor qatorining keyingi kesmasidan uning bosh hadiga aynan teng Chebishev ko'phadini ayirishdan hosil bo'lgan

$$P_6(x) = Q_6(x) - \frac{1}{8!} \tilde{T}_8(x)$$

ko'phadni tuzamiz. U holda $P_6(x)$ darajasi 6 dan oshmaydigan juft ko'phad bo'lib,

$$\|f - P_6\| \leq \|f - Q_6\| + \frac{1}{8!} \|\tilde{T}_8\| \leq \frac{1}{10!} + \frac{1}{2^7 \cdot 8!} < 0,00000047.$$

Shunday qilib, $P_6(x)$ ko'phad f funksiyani $[-1; 1]$ oraliqda $Q_6(x)$ ga nisbatan taxminan 50 marta yaxshiroq yaqinlashtiradi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

6-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phad deb qanaqa ko'phadga aytamiz?
2. Chebishevning 1-jins ko'phadlari qanday aniqlanadi va ularning asosiy xossalari nimadan iborat?
3. Noldan eng kichik chetlanuvchi algebraik ko'phad haqidagi teorema va uning natijasi qanday isbotlanadi?
4. Chebishev ko'phadlarining yaqinlashtirish sur'atini ko'tarishda qo'llanilishiga misol korsating.

6-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

Misol 6.2. $f(x) = (x - a)^{-1} (a > 1)$ funksiyaning $[-1; 1]$ oraliqda darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlari va eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi topilsin ([1] ning 31-33 betlariga qarang).

Ma'ruza 7 (2 soat)

Izomorf chiziqli fazolar. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi

Reja:

1. Izomorf chiziqli fazolar;
2. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi.
Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* izomorf chiziqli fazolar tushunchasini, 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosini $C[a, a + 2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a + 2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqin qilish mumkinligini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: izomorf chiziqli fazolar, 2π -davrlı son o'qida uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi, S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi, trigonometrik ko'phadlar, trigonometrik ko'phadning noekvivalentildizlari.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarining darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarining chiziqli fazolar, Banach fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalari, $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi tushunchasi, $C[a, b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi, Xaar teoremasi, eng yaxshi o'zgarmasni yasash, eng yaxshi chiziqli funksiyani yasash, ikki funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmashligini tasdiqlovchi misol yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

7.1. Izomorf chiziqli fazolar.

Ta'rif 1. Agar ikki chiziqli L, L^* fazo elementlari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib, bu moslik shu fazolarda aniqlangan amallar bilan muvofiqlashtirilgan bo'lsa, u holda ular izomorf deyiladi. Buning ma'nosi shuki, $x \leftrightarrow x^*$ va $y \leftrightarrow y^*$ ($x, y \in L, x^*, y^* \in L^*$) dan $x + y \leftrightarrow x^* + y^*$ va $\forall \alpha$ son uchun $\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$ munosabat kelib chiqadi.

Izomorf fazolarni bitta va faqat bitta fazoning turli xil amalga oshirilishi deb qarash mumkin. Izomorf chiziqli fazolarga misol sifatida (haqiqiy yo'ki kompleks) n -o'lchovli arifmetik fazo va ko'phadlarni odatdagi qo'shish va songa ko'paytirish amallari bilan darajasi $n-1$ dan oshmaydigan (mos ravishda haqiqiy yo'ki kompleks koeffitsientli) barcha algebraik ko'phadlar fazosini olish mumkin (isbotlang).

7.2. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi.

Bu paragrafda 2π davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosini qaraymiz. Unda norma quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = \max_{x \in [a, a+2\pi]} |f(x)|,$$

bu yerda a -ixtiyoriy haqiqiy son.

Chiziqli izometriya ma'nosida $\tilde{C}$ fazoni $C[a, a+2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a+2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqin qilish mumkin. Darhaqiqat, agar

$s = e^{i(t-a)}$ bo'lsa, u holda $t \in [a, a+2\pi] \xrightarrow{s=e^{i(t-a)}} S = \{s : |s|=1\} \ni s = s(t)$ va s ga teskari $t = (1/i) \ln s + a$ funksiya teskari akslantirishni amalga oshiradi: $s \in S \xrightarrow{t=(1/i) \ln s + a} [a, a+2\pi] \ni t$. Shuning uchun,

$\tilde{C} \ni f(t) = f\left(\frac{1}{i} \ln s + a\right) = f^*(s) \in C(S), C(S) \ni f^*(s) = f^*(e^{i(t-a)}) = f(t) \in \tilde{C}$ va haqiqiy

funksiyalarni odatdagi qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan

$$f \rightarrow f^*, \quad g \rightarrow g^* \quad \text{dan} \quad \alpha f + \beta g \rightarrow \alpha f^* + \beta g^* \quad \text{va} \quad \|\alpha f + \beta g\|_{\tilde{C}} = \|\alpha f^* + \beta g^*\|_{C(S)}$$

kelib chiqqanligi uchun, yuqoridagi tasdiq o'rinlidir.

$\tilde{C}$ fazoning keyingi talqini uni yuqorida qaralgan $C(K) - K$ metrik kompaktda uzluksiz funksiyalar fazosining xususiy holi sifatida ko'rilishi bilan qulaydir.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

7-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Izomorf chiziqli fazolar qanday aniqlanadi?
2. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi nimadan iborat?
3. $\tilde{C}$ fazoni qanday fazolar sifatida talqin qilish mumkin?

7-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. $\tilde{C}$ fazoni chiziqli izometriya ma'nosida $C[a, a + 2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a + 2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqin qilish mumkinligini isbotlang.

Ma'ruza 8 (2 soat)

$\tilde{C}$ fazo. Trigonometrik ko'phadlar va ularning xossalari

Reja:

1. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi;
2. Trigonometrik ko'phadlar va ularning xossalari;
3. Trigonometrik ko'phadning noekvivalent ildizlari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosini $C[a, a + 2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a + 2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqin qilish mumkinligi, trigonometrik ko'phadlar va ularning asosiy xossalarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish,

atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad*: talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: 2π -davrlı son o'qida uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi, S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi, trigonometrik ko'phadlar, trigonometrik ko'phadning noekvivalent ildizlari.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning chiziqli fazolar, Banax fazosi, uning chekli o'lchovli qism-fazosi tushunchalari, $C(K)$ fazoning n -o'lchovli Chebishev qism-fazosi tushunchasi, $C[a,b]$ fazoning elementlari uchun n -o'lchovli Chebishev qism-fazosidagi eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadining alomati haqidagi Chebishev teoremasi, Xaar teoremasi, eng yaxshi o'zgarmasni yasash, eng yaxshi chiziqli funksiyani yasash, ikki funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlari yig'indisi ular yig'indisining eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lmasligini tasdiqlovchi misol yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

8.1. 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi.

Bu ma'ruzada 2π davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosini qaraymiz. Unda norma quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = \max_{x \in [a, a+2\pi]} |f(x)|,$$

bu yerda a -ixtiyoriy haqiqiy son.

Chiziqli izometriya ma'nosida $\tilde{C}$ fazoni $C[a, a+2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a+2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada

uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqin qilish mumkin (6- ma'ruzaga qarang). $\tilde{C}$ fazoning keyingi talqini uni yuqorida 5-ma'ruzada qaralgan $C(K) - K$ metrik kompaktda uzluksiz funksiyalar fazosining xususiy holi sifatida talqin qilinishi bilan qulaydir.

8.2. Trigonometrik ko'phadlar va ularning xossalari.

Ta'rif 8.1. n -tartibli trigonometrik ko'phad deb a_n yoki b_n haqiqiy sonlardan iborat koeffitsiyentlarning hech bo'lmaganda biri noldan farqli bo'lgan

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

funksiyaga aytiladi.

Trigonometrik ko'phadlarning bir nechta oddiy va ravshan xossalarini ta'kidlaymiz.

1^o. Tartiblari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikkita trigonometrik ko'phadlarning ko'paytmasi tartibi $n_1 + n_2$ dan iborat trigonometrik ko'phaddir.

Isbot. Bizga tartiblari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikki trigonometrik ko'phadlar

$$T_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n_1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad T_2(x) = b_0 + \sum_{l=1}^{n_2} (a_l \cos lx + b_l \sin lx)$$

berilgan bo'lsin. Ularning ko'paytmasi

$$T_1(x)T_2(x) = a_0b_0 + a_0 \sum_{l=1}^{n_2} a_l \cos lx + b_l \sin lx + b_0 \sum_{k=1}^{n_1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \left[\sum_{k=1}^{n_1} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \cdot$$

$\left[\sum_{l=1}^{n_2} a_l \cos lx + b_l \sin lx \right]$ dan iborat bo'lib, uning yuqori tartibli hadlari

$a_{n_1} a_{n_2} \cos n_1 x \cos n_2 x$, $a_{n_1} b_{n_2} \cos n_1 x \sin n_2 x$, $b_{n_1} b_{n_2} \sin n_1 x \sin n_2 x$ ko'paytma tarkibida qo'shiluvchi sifatida hosil bo'ladigan, hej bo'lmaganda biri noldan farqli hadlarning yig'indisidan vujudga keladi. U holda

$$\cos n_1 x \cos n_2 x = \frac{1}{2} [\cos(n_1 + n_2)x + \cos(n_1 - n_2)x],$$

$$\cos n_1 x \sin n_2 x = \frac{1}{2} [\sin(n_2 - n_1)x + \sin(n_2 + n_1)x], \quad \sin n_1 x \sin n_2 x = \frac{1}{2} [\cos(n_1 - n_2)x - \cos(n_1 + n_2)x]$$

formulalarga asoslanib, ko'paytma tartibi $n_1 + n_2$ dan iborat trigonometrik ko'phad ekanligiga ishonch hosil qilamiz. 1^o-xossa isbotlandi. $\square$

2^o. Agar $T_n(x)$ n -tartibli trigonometrik ko'phad, y -ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsa, u holda $U_n(x) = T_n(x + y)$ ham n -tartibli trigonometrik ko'phaddir.

3^c. Agar $T_n(x)$ trigonometrik ko'phad juft funksiya bo'lsa, u holda uning barcha $b_k (k = 1, 2, \dots, n)$ koeffitsiyentlari nolga teng; agar toq funksiya bo'lsa, u holda barcha $a_k (k = 0, 1, \dots, n)$ koeffitsiyentlari nolga tengdir.

4^c. n -tartibli $T_n(x), n \geq 1$, trigonometrik ko'phadning hosilasi ham n -tartibli trigonometrik ko'phaddir.

$\tilde{C}$ fazoning tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlardan tashkil topgan $\tilde{C}_n$ qism-fazosini qaraymiz.

5^c. $\tilde{C}_n$ qism-fazoning o'lchovi $2n + 1$ ga tengdir. Uning bazisi sifatida $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ sistemani olish mumkin.

Trigonometrik ko'phadlarning bu oddiy va ravshan xossalarining isboti talabalarga havola qilinadi. **5^c** xossani Lemma 4.1 ning isbotidan foydalanib isbotlang.

8.3. Trigonometrik ko'phadning noekvivalent ildizlari.

Endi biz trigonometrik ko'phadning mumkin bo'lgan nollarining soni bilan shug'ullanamiz. Agar x_1 $T_n(x)$ trigonometrik ko'phadning noli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{Z}$ uchun $x_1 + 2k\pi$ ham nol bo'ladi. Bu nollar (ildizlar) x_1 ga ekvivalent hisoblanadi. Umuman, son o'qining ikki x_1 va x_2 nuqtalari biror butun k uchun $x_2 - x_1 = 2\pi k$ munosabatni qanoatlantirsa, ular ekvivalent deyiladi.

Ta'rif 8.2. Agar $f(x)$ funksiya x_1 nuqtada k -tartibgacha hosilalarga ega va $f(x_1) = f'(x_1) = \dots = f^{(k-1)}(x_1) = 0$, $f^{(k)}(x_1) \neq 0$ bo'lsa, u holda x_1 nuqta $f(x)$ funksiyaning k -tartibli noli (ildizi) deyiladi,

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

8-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. 2π -davrli uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi qanaqa fazo va unda norma nimadan iborat ?
2. Trigonometrik ko'phadlar nima va ularning asosiy xossalari nimadan iborat ?
3. Trigonometrik ko'phadning noekvivalent ildizlari qanday ta'riflanadi ?

8-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli qism-fazosi bo'lishi isbotlansin.

Ma`ruza 9 (2 soat)

Trigonometrik ko'phad noekvivalent nollarining soni haqidagi teorema.

Eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadlarining yagonaligi va alomati haqidagi teoremlar.

Reja:

1. Trigonometrik ko'phadlar noekvivalent nollarining soni haqidagi teorema va uning isboti;
2. $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi ekanligi;
3. Xaar va Chebishev teoremlarining $\tilde{C}$ fazo va $\tilde{C}_n$ qism-fazolarga qo'llashdan hosil bo'ladigan teoremlar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* eng yaxshi yaqinlashtirish elementining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni qo'llashni, trigonometrik ko'phadlar noekvivalent nollarining soni haqidagi teorema va uning isbotini o'rgatish.

$\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi ekanligini, Xaar va Chebishev teoremlarining $\tilde{C}$ fazo va uning $\tilde{C}_n$ qism-fazosiga qo'llashdan hosil bo'ladigan teoremlarni o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, matiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: eng yaxshi yaqinlashtirish, eng yaxshi yaqinlashtirish elementi, trigonometrik ko'phadlar noekvivalent nollarining soni

haqidagi teorema, tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosi, $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi, trigonometrik ko'phadlar uchun Xaar va Chebishev teoremlari.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalarning 2π -davrlı uzluksiz funksiyalarning $\tilde{C}$ fazosi, $\tilde{C}$ fazoni $C[a, a + 2\pi]$ fazoning $f(a) = f(a + 2\pi)$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiyalarning qism-fazosi yoki S birlik aylanada uzluksiz funksiyalarning $C(S)$ fazosi sifatida talqini, trigonometrik ko'phadlar va ularning asosiy xossalari, trigonometrik ko'phadning noekvivalent ildizlari soni haqidagi teorema yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

9.1. Trigonometrik ko'phadlar noekvivalent nollarining soni haqidagi teorema va uning isboti.

Teorema 9.1. n -tartibli $T_n(x)$ trigonometrik ko'phad har bir ildizi karrasi qancha bo'lsa, o'shancha deb hisoblagan taqdirda ham, $2n$ dan oshmaydigan noekvivalent ildizlarga ega bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik,

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

n -tartibli trigonometrik ko'phad bo'lsin. Eyler formulalari

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad \text{dan foydalanib, } T_n(x) \text{ ni}$$

$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, c_k - qandaydir kompleks sonlar, ko'rinishda yozamiz. Bundan,

$$T_n(x) = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} d_k e^{ikx} = e^{-inx} P_{2n}(e^{ix}),$$

(1)

bu yerda $P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k$ tartibi $2n$ -dan oshmaydigan algebraik ko'phaddir. e^{-inx} nolga aylanmaganligi sababli (1) ifodadan kelib chiqadiki, agar x_1 $T_n(x)$ ning ildizi bo'lsa, u holda $z_1 = e^{ix_1}$ $P_{2n}(z)$ ko'phadning ildizi bo'ladi va agar x_1 va x_2 T_n ning noekvivalent ildizlari bo'lsa, u holda $z_1 = e^{ix_1}$ va $z_2 = e^{ix_2}$ P_{2n} ning turli xil ildizlari bo'ladi. $\square$

$$P_{2n}(e^{ix}) = e^{inx} T_n(x) \text{ tenglikni differensiallab,}$$

$$ie^{ix} P'_{2n}(e^{ix}) = e^{inx} T'_n(x) + in e^{inx} T_n(x)$$

yoki

$$P'_{2n}(e^{ix}) = -ie^{i(n-1)x} T'_n(x) + ne^{i(n-1)x} T_n(x)$$

ga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikni differensiallab, $P''_{2n}(e^{ix})$, $P'''_{2n}(e^{ix})$ va hokazolar uchun mos tasvirlarni hosil qilamiz. Induksiya uslubi yordamida esa

$$P_{2n}^{(j)}(e^{ix}) = \sum_{j=0}^j F_{vj}(x) T_n^{(j)}(x),$$

$F_{vj}(x)$ – qandaydir uzluksiz funksiyalar, tasvirni olish mumkin. Bu yerdan kelib chiqadiki, agar x_1 $T_n(x)$ ning k karrali ildizi bo'lsa, u holda $z_1 = e^{ix_1}$ P_{2n} ko'phadning karrasi k dan kam bo'lmagan ildizi bo'ladi. Shunday qilib, ko'rsatildiki, $T_n(x)$ trigonometrik ko'phadning x_1 ildiziga $P_{2n}(z)$ ko'phadning karrasi unikidan kam bo'lmagan z_1 ildizi, T_n ning noekvivalent ildizlariga esa P_{2n} ning turli ildizlari mos keladi. Shuning uchun ham T_n ning karrasi hisobga olingan taqdirdagi o'zaro noekvivalent ildizlarining soni P_{2n} ko'phad ildizlarining soni $2n$ dan oshmaydi. 1- teorema isbot bo'ldi. $\square$

9.2 $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi ekanligi.

Teorema 9.1 dan quyidagi natija bevosita kelib chiqadi.

Natija 9.1. *Tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlarning $\tilde{C}_n$ qism-fazosi $C(S)$ fazoning Chebishev qism-fazosidan iboratdir.*

9.3. Xaar va Chebishev teoremlarining $\tilde{C}$ fazo va $\tilde{C}_n$ qism-fazolarga qo'llashdan hosil bo'ladigan teoremlar.

Bu natija, Xaar teoremasi va Chebishev teoremasi (alternans haqidagi) ga muvofiq quyidagi teoremlar bevosita kelib chiqadi.

Teorema 9.2. Ixtiyoriy $f \in \tilde{C}$ funksiya uchun uning $\tilde{C}_n$ sinfdagi eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadi yagonadir.

Teorema 9.3. Faraz qilaylik, $f \in \tilde{C}$, $f \notin \tilde{C}_n$ va $T_n \in \tilde{C}_n$ – qandaydir trigonometrik ko'phad bo'lsin. T_n ning f funksiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadi bo'lishi uchun $2n+2$ ta shunaqa $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+2} < 2\pi$ nuqtalar mavjud bo'lib,

- 1) $|f(x_k) - T_n(x_k)| = \|f - T_n\|_{\tilde{C}} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n+2);$
- 2) $f(x_k) - T_n(x_k)$ sonlarning ishora almashinuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremlarning isbotlarini bajarish talabalarga tavsiya qilinadi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

9-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Trigonometrik ko'phadlar noekvivalent nollarining soni haqidagi teoremani ayting va isbotlang.

2. $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli qism-fazosi ekanligi qanday isbotlanadi?

3. $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning Chebishev qism-fazosi ekanligi qanday isbotlanadi?

4. Xaar va Chebishev teoremlarining $\tilde{C}$ fazo va $\tilde{C}_n$ qism-fazolarga qo'llashdan hosil bo'ladigan teoremlar qanday bayon qilinadi va nima uchun o'rinli?

9-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. $\tilde{C}$ va $C(S)$ (S – birlik aylana) fazolar o'rtasida chiziqli izometriyani qanday o'rnatish mumkin?

II bob. Uzlüksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar va ularda algebraik va trigonometrik ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirish baholari.

Maruza 10 (2 soat)

Funksiya uzluksizlik moduli va uning oddiy xossalari

Reja:

1. Funksiyaning uzluksizlik moduli tushunchasi;
2. Funksiya uzluksizlik modulining $1^\circ - 4^\circ$ xossalari;
3. Uzlüksizlik moduli va uning $5^\circ - 6^\circ$ xossalari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* funksiyaning uzluksizlik modulini kiritish, funksiya uzluksizlik modulining $1^\circ - 4^\circ$ xossalarini, ya'ni kamaymovchiligini, tekis uzluksiz funksiyalar uchun uning nolda uzluksizligi, yarim additiv bo'lishi, oxirgi ikki xossalarning natijasi sifatida tekis uzluksiz funksiyalar uchun uning butun musbat yarim o'qda uzluksizligini, uzluksizlik modulining o'ziga o'zi uzluksizlik moduli bo'lishi va uning ta'rifidagi yarim additivlik shartini $\omega(t)/t$ ning o'smovchiligi bilan almashtirish mumkinligini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: metrik fazo, metrik funksiya, funksiyaning uzluksizlik moduli, funksiya uzluksizlik modulining kamaymovchiligi, funksiya uzluksizlik modulining yarim additivligi, tekis uzluksiz funksiyalar uchun funksiya uzluksizlik modulining butun musbat yarim o'qda uzluksizligi, uzluksizlik modulining o'ziga o'zi uzluksizlik moduli bo'lishi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida

fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlarga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarining darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): trigonometrik ko'phadlar noekivalent nollarining soni haqidagi teorema va uning isbotini o'rganish, $\tilde{C}_n$ – tartibi n dan oshmaydigan barcha trigonometrik ko'phadlar fazosining $\tilde{C}$ fazoning $2n+1$ -o'lchovli Chebishev qism-fazosi ekanligini, Xaar va Chebishev teoremlarining $\tilde{C}$ fazo va uning $\tilde{C}_n$ qism-fazosiga qo'llashdan hosil bo'ladigan teoremlarni o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

10.1. Funksiyaning uzluksizlik moduli tushunchasi.

Faraz qilaylik, M – metrik funksiyasi ρ dan iborat metrik fazo (kompakt bo'lishi shart emas) bo'l in. Quyidagi barcha xollarda bajarilishi lozim bo'lgan A shartni M ga yuklaymiz.

A shart: Aytaylik, $t_1, t_2 \geq 0$ va $x_1, x_2 \in M$ nuqtalar shunaqaki, $\rho(x_1, x_2) \leq t_1 + t_2$. U holda shunaqa $x_0 \in M$ nuqta topiladiki, $\rho(x_1, x_0) \leq t_1$, $\rho(x_2, x_0) \leq t_2$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Ravshanki, M odatdagi metrika bilan m -o'lchovli Evklid fazosining qavariq to'plami bo'lsa, xususiy holda son o'qining (chekli yoki cheksiz) kesmasi bo'lsa, A shart bajariladi. Umuman bu shartni Banax fazosidagi ixtiyoriy qavariq to'plam qanoatlantiradi. Ravshanki, bu shart metrik funksiya sifatida nuqtalarini tutashtiruvchi uning qisqa yoyi uzunligi olingan S birlik aylana uchun ham bajariladi.

M fazoda aniqlangan haqiqiy $f(x)$ funksiyalarni qaraymiz.

Ta'rif 10.1. $f(x)$ ($x \in M$) funksiyaning uzluksizlik moduli deb quyidagi tenglik orqali $[0, +\infty)$ intervalda aniqlangan haqiqiy $\omega(f; t)$ funksiyaga aytiladi:

$$\omega(f; t) = \sup_{g(x_1, x_2) \leq t} |f(x_1) - f(x_2)|$$

10.2. Funksiya uzluksizlik modulining $1^\circ - 4^\circ$ xossalari.

1^o. $\omega(f; t)$ $[0, +\infty)$ intervalda kamaymovchi funksiya.

2⁰. $\omega(f; t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ bajarilishi uchun $f(x)$ funksiyaning M da tekis uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir. Xususiylashtirishda, M kompakt bo'lsa, $\omega(f; t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ ixtiyoriy $f \in C(M)$ uchun bajariladi (isbotlang).

3⁰. $\omega(f; t)$ – yarim additiv funksiya, ya'ni $\forall t_1, t_2 > 0$ uchun

$$\omega(f; t_1 + t_2) \leq \omega(f; t_1) + \omega(f; t_2)$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\forall x_1, x_2 \in M: g(x_1, x_2) \leq t_1 + t_2$

A shartga muvofiq x_0 nuqtani tanlab,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| \leq \omega(f; t_1) + \omega(f; t_2)$$

Bu yerdan $\omega(f; t_1 + t_2) \leq \omega(f; t_1) + \omega(f; t_2)$.

Bundan $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun ravshan $\omega(f, nt) \leq n\omega(f, t)$ tengsizlik kelib chiqadi. $\square$

4⁰. Agar $f(x)$ funksiya M ga tekis uzluksiz bo'lsa, u holda $\omega(f, t) [0, \infty)$ intervalda uzluksiz funksiya.

Isbot. $\omega(f, t)$ ning yarim additivlik xossasidan

$$|\omega(f, t_2) - \omega(f, t_1)| \leq \omega(f, |t_2 - t_1|)$$

tengsizlik kelib chiqadi (isbotlang). Uzluksizlik modulining **2⁰** xossasiga ko'ra bu yerdan **4⁰** xossasining o'rinli ekanligi kelib chiqadi. $\square$

10.3 Uzluksizlik moduli va uning 5^o – 6^o xossalari.

Ta'rif 10.2. $[0, +\infty)$ intervalda aniqlangan, $\omega(0) = 0$ bo'lgan uzluksiz kamaymovchi va yari m additiv $\omega(t)$ funksiyaning uzluksizlik moduli deb ataymiz.

5⁰. Agar $\omega(t)$ uzluksizlik moduli bo'lsa, u holda $\omega(\omega, t) = \omega(t)$, ya'ni har bir uzluksizlik modulining o'zi o'zi uchun uzluksizlik moduli bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $|t_1 - t_2| \leq t (t_1, t_2 \geq 0)$. U holda $\omega(t)$ ning yarim additiv va kamaymovchi ekanligidan

$$|\omega(t_2) - \omega(t_1)| \leq \omega(|t_2 - t_1|) \leq \omega(t)$$

ga ega bo'lamiz, bu yerdan esa $\omega(\omega, t) \leq \omega(t)$ ni olamiz. Ammo $\omega(t) - \omega(0) = \omega(t)$ bo'lganligidan $\omega(\omega, t) \geq \omega(t)$. Xossa isbotlandi. $\square$

6⁰. Agar kamaymovchi $\omega(t) (t \in [0, +\infty))$ funksiya $t = 0$ nuqtada uzluksiz va $\omega(0) = 0$ bo'lsa, hamda $\omega(t)/t$ o'smovchi bo'lsa, u holda $\omega(f)$ – uzluksizlik modulidir.

Isbot. $\omega(t)$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksizligi va **4⁰** xossadan uning $[0, +\infty)$ da uzluksizligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\omega(t)$ funksiyaning yarim additivligini isbotlash xossa isboti uchun yetarli. Buning uchun $\omega(t)/t$ ning o'smovchiligidan foydalansak, ixtiyoriy $t_1, t_2 > 0$ uchun

$$\omega(t_1 + t_2) = t_1 \frac{\omega(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} + t_2 \frac{\omega(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} \leq t_1 \frac{\omega(t_1)}{t_1} + t_2 \frac{\omega(t_2)}{t_2} = \omega(t_1) + \omega(t_2).$$

Xossa isbot bo'ldi. $\square$

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash,

tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

10-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Funksiyaning uzluksizlik moduli nima?
2. Funksiya uzluksizlik modulining 1°, 2° xossalarini isbotlang.
3. Funksiya uzluksizlik modulining 3°, 4° xossalarini isbotlang.
4. Uzluksizlik modulining 5° – 6° xossalarini isbotlang.

10-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Funksiya uzluksizlik modulining uning silliqlik darajasini ifodalashini tushuntiring.

Ma'ruza 11 (2 soat)

Qavariq funksiya va qavariq uzluksizlik moduli hamda ularga tegishli xossalar.

Reja:

1. Qavariq funksiya ta'rifi. Qavariq funksiyaga misol;
 2. Qavariq uzluksizlik moduli;
 3. Qavariq uzluksizlik modulining 7° xossasi;
 4. Qavariq uzluksizlik modulining 8° xossasi;
 5. Qavariq uzluksizlik moduliga oddiy misol.
- Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* funksiyaning uzluksizlik modulini, qavariq funksiyani, qavariq uzluksizlik modulini geometrik nuqtai nazardan, misollar orqali tushuntirish, qavariq funksiyaning uzluksizlik moduli bo'lishi, oddiy va qavariq uzluksizlik modullari o'rtasidagi munosabat haqidagi xossalarni bayon qilish va ularning isbotlarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: funksiyaning uzluksizlik moduli, qavariq funksiya, qavariq uzluksizlik moduli, qavariq funksiyaning uzluksizlik moduli bo'lishi haqidagi xossa, oddiy va qavariq uzluksizlik modullari o'rtasidagi munosabat haqidagi xossa.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi:

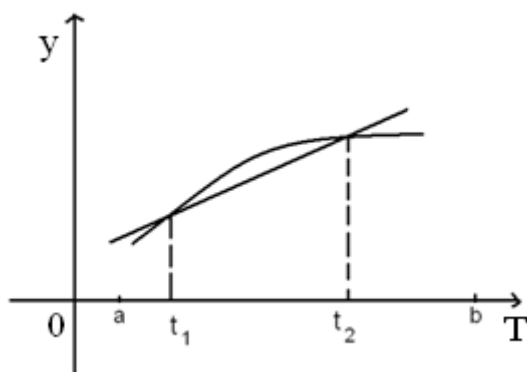
Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): funksiyaning uzluksizlik modulini kiritish, funksiya uzluksizlik modulining kamaymovchiligini, tekis uzluksiz funksiyalar uchun uning nolda uzluksizligi, yarim additiv bo'lishi, oxirgi ikki xossalarning natijasi sifatida tekis uzluksiz funksiyalar uchun uning butun musbat yarim o'qda uzluksizligini, uzluksizlik modulining o'ziga o'zi uzluksizlik moduli bo'lishi va uning ta'rifidagi yarim additivlik shartini $\omega(t)/t$ ning o'smovchiligi bilan almashtirish mumkinligini o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

11.1. Qavariq funksiya ta'rif. Qavariq funksiya misol.

Ta'rif 11.1. Agar $\langle a, b \rangle$ da aniqlangan $g(t)$ funksiya $\forall t_1 < t < t_2$, $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ uchun $g(t) \geq \frac{t_2-t}{t_2-t_1} g(t_1) + \frac{t-t_1}{t_2-t_1} g(t_2)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $g(t)$ funksiya $\langle a, b \rangle$ da qavariq deyiladi.



3-chizma

11.2. Qavariq uzluksizlik moduli.

Ta'rif 11.2. Qavariq funksiyadan iborat uzluksizlik moduliga qavariq uzluksizlik moduli deyiladi.

Masalan, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi g funksiyaning qavariqligi $g''(t) \leq 0$ shartni bajarilishini taqazo qiladi.

11.3. Qavariq uzluksizlik modulining 7° xossasi.

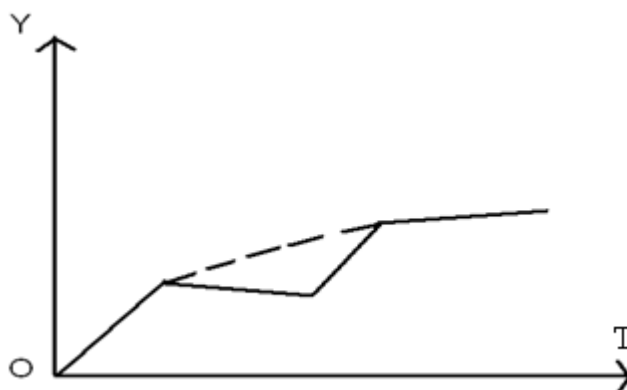
7°. Agar $\omega(t)$ ($t \in [0, +\infty)$) qavariq, kamaymovchi, nolda uzluksiz va $\omega(0) = 0$ funksiya bo'lsa, u holda u uzluksizlik modulidir.

Isbot. 6° ga binoan $\omega(t)/t$ funksiyaning o'smovchiligini ko'rsatish kifoya. Buning uchun ixtiyoriy $0 < u < v$ sonlarni olib, $\omega(t)$ ning qavariqligini nazarda tutsak, $\omega(u) \geq \frac{u}{v} \omega(v) + \frac{v-u}{v} \omega(0) = \frac{u}{v} \omega(v)$, ya'ni $\frac{\omega(u)}{u} \geq \frac{\omega(v)}{v}$, ya'ni xossa isbotlandi. $\square$

11.4. Qavariq uzluksizlik modulining 8° xossasi.

8°. Agar $\omega(t)$ ixtiyoriy uzluksizlik moduli bo'lsa, u holda shunaqa qavariq uzluksizlik moduli $\omega^*(t)$ mavjudki, barcha $t \in [0, \infty)$ lar uchun $\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$ bajariladi.

Bunday qavariq uzluksizlik moduli $\omega^*(t)$ ning mavjudligi va uning yuqoridagi tengsizlikni qanoatlantirishi quyidagi chizmadan ko'rinib turibdi.



4-chizma

Bu xossaning qat'iy isboti quyidagi lemmaga asoslanadi.

Lemma 11.1. Faraz qilaylik $f_\alpha(t)$ ($t \in \langle a, b \rangle$) α biror A to'plamda o'zgargan taqdirda hosil bo'ladigan funksiyalar oilasi berilgan bo'lsin. Agar har bir α uchun $f_\alpha(t)$ funksiya kamaymovchi va qavariq bo'lsa, u holda $f(t) = \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(t)$ funksiya ham kamaymovchi va qavariq bo'ladi.

Isbot. $f(t)$ funksiyaning kamaymovchiligi ravshan. Ixtiyoriy α va $t_1 < t < t_2$ uchun

$$f_\alpha(t) \geq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} f_\alpha(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} f_\alpha(t_2) \geq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} f(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} f(t_2)$$

Shuning uchun $\inf_{\alpha} f_\alpha(t) = f(t) \geq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} f(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} f(t_2)$,

ya'ni $f(t)$ qavariq funksiya. $\square$

8^o xossaning isboti. $\omega(t) \equiv 0$ emas deb hisoblaymiz. Shuning uchun $\omega(t) > 0$, $t > 0$ bo'lganda, $\alpha > 0$ deb hisoblab,

$$K_\alpha = \min \frac{2\omega(\alpha) - \omega(t)}{\alpha - t} = \frac{2\omega(\alpha) - \omega(t_\alpha)}{\alpha - t_\alpha} > 0$$

Bu yerda minimum barcha $t \in [0, \alpha)$ bo'yicha olinib, t_α minimum erishiladigan nuqtadir.

$t \rightarrow \alpha - 0$ $(2\omega(\alpha) - \omega(t))/(\alpha - t) \rightarrow +\infty$ bo'lganligi uchun bunday nuqta mavjuddir. Quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\omega(\alpha) = K_\alpha(\alpha - t_\alpha) - [\omega(\alpha) - \omega(t_\alpha)] \leq K_\alpha \alpha.$$

Endi agar $l_\alpha(t) = 2\omega(\alpha) + K_\alpha(t - \alpha)$ bo'lsa, u holda barcha t lar uchun $\omega(t) \leq l_\alpha(t)$ tengsizlik qanoatlantirilishini ko'rsatamiz. Haqiqattan ham, $t = \alpha$ uchun bu tengsizlik o'rinli, $t < \alpha$ uchun bu tengsizlik $(2\omega(\alpha) - \omega(t))/(\alpha - t) \geq K_\alpha$ dan kelib chiqadi. Agar $t > \alpha$ bo'lsa u holda $t = (n + \theta)\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta < 1$ va

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leq n\omega(\alpha) + \omega(\theta\alpha) \leq nK_\alpha\alpha + l_\alpha(\theta\alpha) = \\ 2\omega(\alpha) + K_\alpha\theta\alpha - K_\alpha\alpha + nK_\alpha\alpha &= 2\omega(\alpha) + K_\alpha[(n + \theta)\alpha - \alpha] = l_\alpha(t) \end{aligned}$$

Endi $(0, +\infty)$ intervalda $\omega^*(t) = \inf_{\alpha > 0} l_\alpha(t)$ funksiyani aniqlaymiz. Lemmaga ko'ra $\omega^*(t)$, $(0, +\infty)$ da kamaymovchi va qavariqdir. Barcha α lar uchun $\omega(t) \leq l_\alpha(t)$ bo'lganligidan $\forall t > 0 \quad \omega(t) \leq \omega^*(t)$. Lekin $l_\epsilon(t) = 2\omega(t)$ dan $\omega^*(t) \leq 2\omega(t)$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $\forall t > 0 \quad \omega(t) < \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$. Bu funksiyani 0 nuqtada $\omega^*(0) = 0$ day aniqlab, natijada uni so'nggi tengsizlikka muvofiq 0 nuqtada uzluksiz va $[0, +\infty)$ da qavariq ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu yerdan 7^o xossaga asosan $\omega^*(t)$ –qavariq uzluksizlik moduli va 8^o xossa isbot bo'ldi. $\square$

11.5. Qavariq uzluksizlik moduliga oddiy misol.

9^o. Ushbu $\omega(t) = Kt^\alpha$ funksiya $K > 0, 0 < \alpha \leq 1$ uchun qavariq uzluksizlik modulidir.

Bu xossa 7^o-xossaning bevosita natijasidir. Isbotni amalga oshirish talabalarga havola qilinadi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

11-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Funksiyaning uzluksizlik moduli nima?
2. Qavariq funksiyaning ta'rifi qanday?. Qavariq funksiya misol keltiring.
3. Qavariq uzluksizlik moduli qanaqa?
4. Qavariq uzluksizlik modulining 7^o xossasi qanday isbotlanadi?
5. Qavariq uzluksizlik modulining 8^o xossasi qanday isbotlanadi?
6. Qavariq uzluksizlik moduliga oddiy misol keltiring.

11-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Qavariq uzluksizlik moduli 8^o xossasining geometrik isboti qanday ?

Ma'ruza 12 (2 soat)

Mavzu: Uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar va ular o'rtasidagi munosbatlar

Reja:

1. Uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar;
2. Uzluksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning 10^o –12^o xossalari;

3. Uzlüksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning $13^{\circ}, 14^{\circ}$ xossalari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad*: funksiyaning uzluksizlik modulini, qavariq funksiyani, qavariq uzluksizlik modulini, uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflarni kiritish va ular o'rtasidagi munosabatlarni ifodalaydigan xossalarni o'rgatish hamda ularning asosiy qismini isbotlash.

b). *Tarbiyaviy maqsad*: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad*: talabalaridagi izl anuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: funksiyaning uzluksizlik moduli, qavariq uzluksizlik moduli, uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar, funksional sinflar o'rtasidagi munosabatlarni ifodalaydigan xossalar, Lipshits-Gyo'lder sinfi, Dini-Lipshits sinfi, Bernshteyn sinfi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): funksiyaning uzluksizlik modulini, qavariq funksiyani, qavariq uzluksizlik modulini geometrik nuqtai nazardan, misollar orqali tushuntirish, qavariq funksiyaning uzluksizlik moduli bo'lishi, oddiy va qavariq uzluksizlik modullari o'rtasidagi munosabat haqidagi xossalarni bayon qilish va ularning isbotlarini o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

12.1. Uzlüksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflar.

Ta'rif 12.1. Agar biror o'zgarmaslar $K > 0, 0 < \alpha \leq 1$ va ixtiyoriy $x_1, x_2 \in M$ uchun $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K(\rho(x_1, x_2))^\alpha$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ ($x \in M$) funksiya α ko'rsatkichli K o'zgarmasli Lipshits-Gyolder shartini qanoatlantiradi deb aytmiz va $f \in KH^{(\alpha)}(M)$ yozamiz.

Funksiya uzluksizlik moduli ta'rifiga muvofiq uning $KH^{(\alpha)}(M)$ sinfga qarashliligi $\omega(f; t) \leq Kt^\alpha$ tengsizlik bajarilishini bildiradi.

Ta'kidlash lozimki, agar $M = \langle a, b \rangle$ – chekli yoki cheksiz interval bo'lib, $\alpha > 1$ bo'lsa, u holda mos $KH^{(\alpha)}(M)$ sinf faqat o'zgarmaslardan iborat bo'ladi.

Haqiqattan ham, $\frac{|f(x+\Delta x) - f(x)|}{|\Delta x|} \leq K|\Delta x|^{\alpha-1}$ tengsizlikda $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tib, barcha $x \in \langle a, b \rangle$ uchun $f'(x) = 0$ yoki $f(x) = \text{const}$ ga ega bo'lamiz.

Belgilashlar: Aytaylik, $\omega(t)$ – qandaydir uzluksizlik moduli bo'lsin. $\omega(f; t) \leq \omega(t)$ shartni qanoatlantiruvchi M da uzluksiz f funksiyalar sinfini $H_\omega(M)$ bilan belgilaymiz. Yuqoridagi belgilashlarni nazarda tutsak, u holda $KH^{(\alpha)}(M) = H_\omega(M)$ bo'lib, $\omega(t) = Kt^\alpha$ dir. $H^{(\alpha)}(M)$ ($0 < \alpha \leq 1$) orqali α ko'rsatkichli biror o'zgarmasli Lipshits-Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz: $H^{(\alpha)}(M) = \bigcup_K KH^{(\alpha)}(M)$. Kelgusida, agar $M = [a, b]$ – son o'qining qayd qilingan yopiq chekli kesmasi bo'lsa, M simvolni yozmaslikka kelishib olamiz. Shu tariqa biz $H_\omega, KH^{(\alpha)}, H^{(\alpha)}$ sinflarga ega bo'lamiz. Agar biz 2π - davrli funksiyalar ni butun son o'qida qarasak, u holda M simvolni to'liq belgisi bilan almashtiramiz. Masalan, $\tilde{H}_\omega = H_\omega((-\infty, \infty)) \cap \tilde{C}$, yoki $\tilde{H}_\omega = H_\omega(S)$. $C^{(r)}([a, b])$ (yoki $C^{(r)}$) bilan $[a, b]$ oraliqda r marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini, $KC^{(r)}$ bilan $|f^{(r)}(x)| \leq K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $C^{(r)}$ ning qism-to'plamini belgilaymiz. 2π -davrli funksiyalar sinflari $\tilde{C}^{(r)}$ va $K\tilde{C}^{(r)}$ shunga o'xshash ma'noga ega.

Nihoyat, agar $V \subset C([a, b])$ (yoki $V \subset \tilde{C}$) bo'lsa, u holda $C^{(k)}V$ (mos ravishda $\tilde{C}^{(k)}V$) bilan shunaqa $f \in C^{(k)}([a, b])$ ($\tilde{C}^{(k)}$) funksiyalar to'plamini belgilaymizki, $f^{(k)} \in V$ ($f^{(k)} \in V$). Shu tariqa biz $C^{(1)}KH^{(\alpha)}, \tilde{C}^{(3)}H_\omega$ va hokazo funksional sinflarga ega bo'lamiz.

12.2. Uzlüksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning 10°–12° xossalari.

10°. Agar $M = \langle a, b \rangle \subset R$ (bu yerda R – barcha haqiqiy sonlar to'plami yoki son o'qi) bo'lib, $f(x)$ M da uzluksiz differensiallanuvchi va $|f'(x)| \leq K$ bajarilsa, u holda $f \in KH^{(1)}(\langle a, b \rangle)$.

Isbot. Buning isboti chekli orttirma formulasi $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ ($\xi \in (x_1, x_2)$) dan kelib chiqadi. $\square$

11°. Aytaylik, $\omega(t)$ – uzluksizlik moduli, $f(x)$ ($x \in M$) M da chegaralangan funksiya va shunaqa $t_0 > 0$ son mavjud bo`lib, $\forall t \leq t_0$ uchun $\omega(f; t) \leq \omega(t)$ bajarilsin. U holda shunaqa $K > 0$ son topiladiki, $f \in H_{K\omega}$.

Isbot. Faraz qilaylik, $L = \sup |f(x)|$. Agar $\rho(x_1, x_2) \leq t \leq t_0$ bo`lsa, u holda shartga ko`ra $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(t)$ bo`ladi. Agar  $\rho(x_1, x_2) \leq t$ ,  $t > t_0$  bo`lsa, u holda $K = \max(1, \frac{2L}{\omega(t_0)})$ deb olamiz. U holda $\forall x_1, x_2: \rho(x_1, x_2) \leq t$ uchun $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\omega(t)$, ya`ni $\omega(f; t) \leq K\omega(t)$ bajariladi. $\square$

12°. Agar M metrik fazo kompakt va $0 < \beta < \alpha \leq 1$ bo`lsa, u holda $H^{(\alpha)}(M) \subset H^{(\beta)}(M)$.

Bu xossa 11°-xossa asosida oson isbotlanadi (uni amalga oshiring).

12.3. Uzluksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning

13°, 14° xossalari.

Ta`rif 12.2. Agar f funksiya M ga $\omega(f; t) \ln \frac{1}{t} \rightarrow 0$ munosabatni qanoatlantirsa, u holda u Dini–Lipshits shartini qanoatlantiradi deb aytamiz va $f \in DL(M)$ yozamiz.

13°. Barcha $\alpha \in (0, 1]$ uchun $DL(M) \supset H^{(\alpha)}(M)$.

Bu xossani isbotlang.

Endi W – Bernshteyn sinfini aniqlaymiz.

Ta`rif 12.3. Agar biror $K > 0$ uchun $f(x)$ ($x \in M$) funksiyaning uzluksizlik moduli $\omega(f; t) \leq Kt(1 + |\ln t|)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $W(M)$ sinfga qarashli deymiz.

12° xossadagiga o`xshash mulohaza yuritish orqali quyidagi xossa isbot qilinadi.

14°. Agar M fazo kompakt bo`lsa, u holda ixtiyoriy  $\alpha \in (0, 1)$  uchun  $H^{(\alpha)}(M) \supset W(M) \supset H^{(1)}(M)$  munosabatlar o`rinli bo`ladi. (Isbotlang).

Masala. Ravshanki, $\forall f \in H^{(1)}$ fuksiya absolyut uzliksizdir. $\alpha < 1$ bo`lganda  $H^{(\alpha)}$  sinfning absolyut uzluksiz bo`lmagan funksiyalarni saqlashi isbotlansin.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o`tkazish, oson yechiladigan misollar so`rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o`qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma`nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta`kidlash va yanada faolroq bo`lishga chorlash. Qo`yilgan ballarni e`lon qilish.

12-ma`ruza bo`yicha o`z-o`zini tekshirish savollari

1. Funksiyaning uzluksizlik moduli nima?

2. Qavariq funksiyaning ta'rifi qanday?. Qavariq funksiyaga misol keltiring.
3. Qavariq uzluksizlik moduli qanaqa?
4. Uzluksizlik moduli asosida qanaqa funksional sinflarni aniqlash mumkin?
5. Lipshits-Gyo'lder, Dini-Lipshits, Bernshteyn sinfilari qanday aniqlanadi?
6. Uzluksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning $10^\circ - 12^\circ$ xossalari qanday isbotlanadi?

12-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Uzluksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning 13° xossasini isbotlang.
2. Uzluksizlik moduli asosida aniqlangan funksional sinflarning 14° xossasini isbotlang.

Ma'ruza 13 (2 soat)

Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning natijalari.

Reja:

1. Yordamchi 1- – 4-lemmalar;
2. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning isboti;
3. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari va ularning isbotlari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Yordamchi 1- –4-lemmalar, Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning isboti, Axiezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari va ularning isbotlarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Lipshits-Gyo'lder sinfi, yordamchi lemmalar, Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi, Axiezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari, Favar doimiysi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga

oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): funktsiyaning uzluksizlik modulini, qavariq funktsiyani, qavariq uzluksizlik modulini, uzluksizlik moduli asosida aniqlanadigan funksional sinflarni kiritish va ular o'rtasidagi munosabatlarni ifodalaydigan xossalarni o'rganish hamda ularning asosiy qismini isbotlash yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

Ma'ruza $\tilde{C}^{(r)}, K\tilde{C}^{(r)}, K\tilde{H}^{(1)}$ sinflarga mansub funktsiyalarni tartibi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'pxadlar bilan tekis metrikada eng yaxshi yaqinlashtirish nazariyasining to'g'ri teoremlariga, ya'ni $E_n^T(f)$ ning nolga intilish tartibi f funktsiyaning silliqlik darajasidan qanday bog'liqligi haqidagi tasdiqlarga bag'ishlangan.

Teorema 13.1. (Axiezer_Kreyn_Favar). Agar $f \in \tilde{C}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) bo'lsa, u holda

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{(n+1)^r} E_n^T(f^{(r)})$$

tengsizlik o'rinlidir. Bu yerda $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)v}}{(2v+1)^{r+1}}$ – Favar doimiysi.

13.1 Yordamchi 13.1- – 13.4- lemmalar.

Teoremaning isboti quyidagi 4 ta lemmalarga asoslangan .

Lemma 13.1. Agar $f \in \tilde{C}^{(r)}$ bo'lsa, u holda f

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_r(t) f^{(r)}(t+x) dt$$

day ifodalanadi, bu yerda $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ – funktsiyaning nolinchisi Furye koeffitsienti,

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^r}, & r = 2m \\ (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^r}, & r = 2m + 1 \end{cases}.$$

Lemma 13.2. Quyidagi tenglik o'rinli:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{t-\pi}{2}, & 0 < t \leq \pi \\ \frac{t+\pi}{2}, & -\pi \leq t < 0 \end{cases}.$$

Lemma 13.3. *Haqiqiy C_v sonlar qanday bo'lsin ,*

$$R_r(t) = \begin{cases} \varphi_r(t) - \sum_{v=0}^n C_v \cos vt, & \text{agar } r = 2m \text{ bo'lsa,} \\ \varphi_r(t) - \sum_{v=1}^n C_v \sin vt, & \text{agar } r = 2m + 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}.$$

ayirma $(0, \pi)$ intervalga karrasini ham hisobga olganda $n + 1$ ta ($r = 2m$ uchun) yoki n ta ($r = 2m + 1$ uchun) ildizlarga ega bo'ladi.

Lemma 13.4. *Agar $E_{\tilde{L}_n}(f) - f \in \tilde{L}$ funktsiyaning $\tilde{L}$ fazo metrikasida tartibi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashtirishlari bo'lsa, u holda*

$$E_{\tilde{L}_n}(\varphi_r) = \frac{4}{(n+1)^r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)v}}{(2v+1)^{r+1}}.$$

13.2. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning isboti.

Teorema 13.1. (Axiezer-Kreyn-Favar). *Agar $f \in \tilde{C}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) bo'lsa, u holda*

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{(n+1)^r} E_n^T(f^{(r)})$$

tengsizlik o'rinlidir. Bu yerda $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)v}}{(2v+1)^{r+1}}$ – Favar doimiysi.

Teorema 13.1 ning isboti. $T_n(x)$ orqali $f^{(r)}(x)$ funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadini belgilaymiz, ya'ni

$$\|f^{(r)} - T_n\|_{\tilde{C}} = E_n^T(f^{(r)}).$$

$U_n(t)$ orqali esa $\varphi_r(t)$ funktsiyani $\tilde{L}$ metrikasida eng yaxshi yaqinlashtiruvchi tartibi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phadni belgilaymiz:

$$\|\varphi_r - U_n\|_{\tilde{L}} = E_{\tilde{L}_n}(\varphi_r).$$

Ushbu

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_r(t) - U_n(t)] [f^{(r)}(t+x) - T_n(t+x)] dt$$

funktsiyani qaraymiz. Ravshanki, $\forall x \in (-\infty, \infty)$ uchun

$$|F(x)| \leq \frac{1}{\pi} \|f^{(r)} - T_n\|_{\tilde{C}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_r(t) - U_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} E_n^T(f^{(r)}) E_{\tilde{L}_n}(\varphi_r).$$

Bu yerdan

$$\|F\|_{\tilde{C}} \leq \frac{1}{\pi} E_n^T(f^{(r)}) E_{\tilde{L}_n}(\varphi_r) \quad (1)$$

ni olamiz. Birinchi lemmaga asosanib, $F(x)$ funktsiyani $F(x) = f(x) - a_0 - F_1(x) - F_2(x)$ ifodalaymiz, bu yerda

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(t) f^{(r)}(t+x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(t-x) f^{(r)}(t) dt,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_r(t) - U_n(t)] T_n(t+x) dt$$

funktsiyalar darajasi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phadlardir, chunki $U_n(t-x)$ va $T_n(t+x)$ x bo'yicha darajasi n dan oshmaydigan koefitsientlari t dan uzluksiz bog'liq bo'lgan trigonometrik ko'phadlardir. Demak, $F(x) = f(x) - V_n(x)$, bu yerda $V_n(x) = a_0 + F_1(x) + F_2(x)$ – darajasi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phaddir. Shuning uchun (1) dan

$$E_n^T(f) \leq \|f - V_n\|_{\mathcal{C}} = \|F\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{\pi} E_{\tilde{L}_n}(\varphi_r) E_n^T(f^{(r)})$$

ni olamiz. Bu yerdan 4-lemmaga ko'ra teoremaning isboti kelib chiqadi.

13.3. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari va ularning isbotlari.

Natija 13.1. Ixtiyoriy $f \in K\tilde{C}^{(r)}$ uchun

$$E_n^T(f) \leq \mathcal{K}_r K(n+1)^{-r}$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Tushunarliki, $E_n^T(f^{(r)}) \leq \|f^{(r)}\|_{\mathcal{C}} \leq K$.

U holda Axiezer-Kreyn-Favar teoremasidan $E_n^T(f) \leq \mathcal{K}_r K(n+1)^{-r}$ tengsizlik kelib chiqadi. $\square$

Natija 13.2. Agar $f \in K\tilde{H}^{(1)}$ bo'lsa, u holda $E_n^T(f) \leq \pi K \frac{1}{2(n+1)}$ baho o'rinli.

Isbot. Ixtiyoriy $h > 0$ sonni olib, f funktsiya uchun Steklovning o'rta funktsiyasini tuzamiz:

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Ravshanki, $f_h(x)$ 2π davrli uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya bo'lib,

$$f'_h(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]$$

$f \in K\tilde{H}^{(1)}$ bo'lganidan oxirgi tenglikdan $|f'_h(x)| \leq K$ tengsizlikni olamiz. Demak, $f_h \in K\tilde{C}^{(1)}$ va natija 1 ga ko'ra

$$E_n^T(f_h) \leq \mathcal{K}_1 K \frac{1}{(n+1)} = \frac{\pi K}{2} \cdot \frac{1}{n+1}. \quad (2)$$

Ikkinchi tomondan,

$$|f(x) - f_h(x)| = \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^h |f(x+t) - f(x)| dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x+t) - f(x)| \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h K|t| dt = \frac{1}{2} Kh.$$

Shuning uchun,

$$E_n^T(f - f_h) \leq \|f - f_h\|_C \leq \frac{Kh}{2}. \quad (3)$$

Nihoyat, (2) va (3) dan

$$E_n^T(f) \leq E_n^T(f_h) + E_n^T(f - f_h) \leq \frac{\pi K}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{Kh}{2}$$

Bu yerdan $h > 0$ sonning ixtiyoriy ekanligidan

$$E_n^T(f) \leq \frac{\pi K}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Natija 2 isbot bo'ldi. $\square$

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

13-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Yordamchi 1-4-lemmalar qanday bayon qilinadi?
2. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi qanday bayon qilinadi va isbot qilinadi?
3. Axiezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari nimadan iborat va ular qanday isbotlanadi?

13-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Favar doimiysi uchun integral tasvirdan foydalanib, $K_1 = \pi/2$ tenglikni isbotlang.
2. Favar doimiysi uchun integral tasvirdan foydalanib, $K_2 = \pi/8$ tenglikni isbotlang.

Maruza 14 (2 soat).

Korneychik teoremasi va uning natijasi.

Reja:

1. Yordamchi lemma va uning isboti;
2. Korneychuk teoremasi va uning isboti;
3. Korneychuk teoremasining natijasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Yordamchi lemma va uning isboti, Korneychuk teoremasi va uning isboti, Korneychuk teoremasining natijasini va uning isbotini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izl anuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Lipshits-Gyo'lder sinfi, Axiyezer-Kreyn-Favar teoremasi, Axiyezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari, qavariq uzluksizlik moduli, Korneychuk teoremasi, Korneychuk teoremasining natijasi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Yordamchi 13.1- –13.4-lemmalar, Axiyezer-Kreyn-Favar teoremasi va uning isboti, Axiyezer-Kreyn-Favar teoremasining natijalari va ularning isbotlarini o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

Bundan oldingi 13- ma'ruzadagi Axiyezer-Kreyn-Favar teoremasi to'g'ri teoremlar sirasiga kirib, unda funksiya sillqlik xossalari asoslangan holda eng yaxshi yaqinlashtirishlar baholanadi. Ammo bu teoremda funktsiya sillqlik xossalari yuzakiroq, ya'ni uzluksiz hosilalar mavjudligi shaklida hisobga olingan. Mazkur ma'ruzada isbot qilinadigan to'g'ri teoremlarda sillqlikning nozikroq xossalari hisobga olinadi.

14.1 Yordamchi lemma va uning isboti.

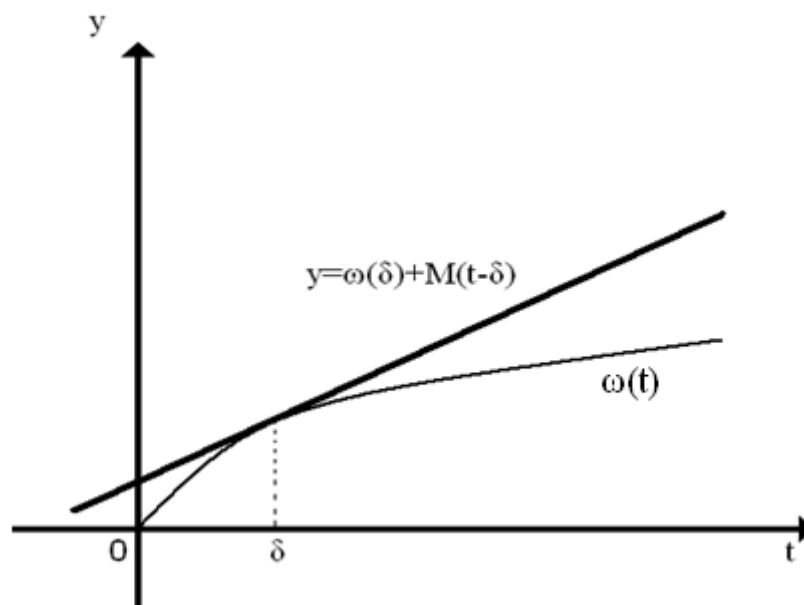
Lemma 14.1. Faraz qilaylik, ω —qavariq uzluksizlik moduli bo'lsin. U holda $\forall \delta > 0$ uchun shunaqa $M = M_\omega(\delta)$ son topiladiki, barcha $t > 0$ uchun

$$\omega(t) \leq \omega(\delta) + M(t - \delta)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Lemma quyidagi oddiy geometrik kuzatishdan kelib chiqadi. Yuqoridagi tengsizlikning o'ng tomonidagi fuksiya grafigi $\omega(t)$ funktsiya frafig ostisining $t = \delta$ ga mos nuq tasiga o'tkazilgan tayanch to'g'ri chiziqdan iborat, $\omega(t)$ qavariq bo'lganligi uchun lemmadagi tengsizlikning bajarilishi shart. Bu erda

$$M = \inf_{0 \leq x < \delta} \frac{\omega(x) - \omega(\delta)}{x - \delta} \quad \square$$



5-chizma

14.2. Korneychuk teoremasi va uning isboti.

Teorema 14.1 (N.P.Korneychuk). Faraz qilaylik, ω —qavariq uzluksizlik moduli bo'lsin. U holda

$$E_n^T(\tilde{H}_\omega) = \sup_{f \in \tilde{H}_\omega} E_n^T(f) = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Isbot. Avval ixtiyoriy $f \in \tilde{H}_\omega$ uchun $E_n^T(f) \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ tengsizlikning bajarilishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\delta > 0$ son olib, lemmaga muvofiq shunaqa $M = M_\omega(\delta)$ sonni tuzamizki, $\omega(t) \leq \omega(\delta) + M(t - \delta)$ tengsizlik bajarilsin. Endi $\psi(t) = Mt$ uchun $M\tilde{H}^{(1)} = \tilde{H}_\psi$ sinfni qaraymiz. Barcha $t \geq 0$ uchun $\omega(t) - \psi(t) \leq \omega(\delta) - M\delta$. Keyingi mulohaza yuritishda quyidagi teoremadan foydalanamiz. $\square$

Teorema 14.2 (A. F. Timan). Istalgan $f \in H_\omega(K)$ funktsiya uchun shunaqa $g \in H_\psi(K)$ funktsiya topiladiki,

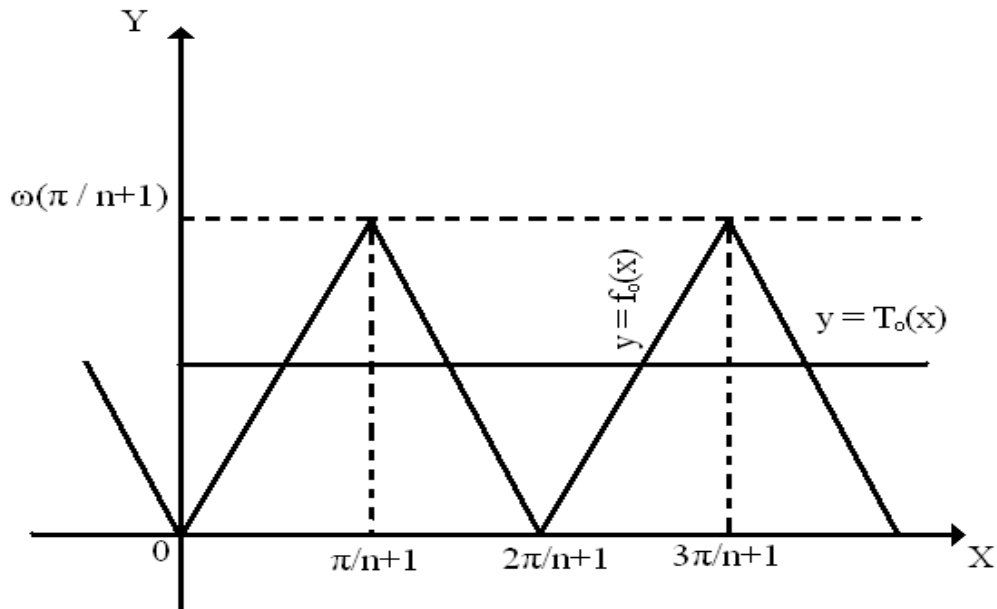
$$\|f - g\|_{C(K)} \leq \frac{1}{2} \sup |\omega(t) - \psi(t)|$$

tengsizlik o'rinli, bu yerda $K-A$ shartni qanoatlantiruvchi metrik kompakt, $\omega(t), \psi(t)$ uzluksizlik modullaridir.

Timan teoremasiga ko'ra $\|f - g\|_c \leq \frac{[\omega(\delta) - M\delta]}{2}$. Ahiezer–Kreyn–Favar teoremasining 2-natijasini qo'llab, $g \in M\tilde{H}^{(1)}$ funktsiya uchun $E_n^T(g) \leq \left(\frac{\pi M}{2}\right)(n+1)^{-1}$ tengsizlik o'rili. Shuning uchun $\forall \delta > 0$ uchun

$$E_n^T(f) \leq E_n^T(g) + \|f - g\|_c \leq \frac{\pi M}{2(n+1)} + \frac{1}{2}[\omega(\delta) - M\delta]$$

Bu yerda $\delta = \frac{\pi}{(n+1)}$ deb olib, kerakli tengsizlikni hosil qilamiz. Endi shunaqa $f_0(x) \in \tilde{H}_\omega$ funktsiya mavjudligini ko'rsatamizki, $E_n^T(f_0) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ bajarilsin. Shunaqa juft, $\frac{2\pi}{n+1}$ davrli, $f_0(0) = 0$, $f_0\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ va $\left[0, \frac{\pi}{n+1}\right]$ oraliqda chiziqli $f_0(x)$ funktsiyani yasaymiz.



6-chizma

Ravshanki, bu funktsiya uchun:

$$\omega(f_0; t) = \begin{cases} \frac{n+1}{\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right) t, & t \leq \frac{\pi}{n+1} \text{ uchun,} \\ \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right), & t \geq \frac{\pi}{n+1} \text{ uchun} \end{cases}$$

Shuning uchun $\omega\left(f_0; \frac{\pi}{n+1}\right) = \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, $t < \frac{\pi}{n+1}$ bo'lganda $\omega(t)$ ning qavariqligidan $\omega(f_0; t) \leq \omega(t)$ va $\omega(t)$ ning kamaymasligidan $t > \frac{\pi}{n+1}$ uchun $\omega(f_0; t) \leq \omega(t)$ tengsizlikni olamiz. Shunday qilib, $f_0 \in \tilde{H}_\omega$. Endi $T_n(x) \equiv \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ ni aniqlaymiz.

Barcha x lar uchun $|f_0(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Shu bilan birga $x_k = \frac{k\pi}{n+1} \in [0, 2\pi)$ ($k = \overline{0, 2n+1}$) nuqtalarda

$$f_0(x_k) - T_n(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

ya'ni shu nuqtalarda $f_0 - T_n$ ayirma abasolyut qiymat ma'nosida maksimal va ishora almashinuvchi qiymatlarni qabul qiladi. 3-ma'ruzada bayon qilingan 2.1-Chebishev teoremasining natijasi sifatida keltirib chiqarilgan 6-ma'ruzaning 3.3-teoremasiga asosan $T_n f_0$ uchun eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadi bo'lib, $E_n^T(f_0) = \|f_0 - T_n\| = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ tenglik o'rinlidir. Teorema isbot bo'ldi.

Korneychik teoremasini $\omega(t) = Kt^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) qavariq uzluksizlik moduli uchun qo'llasak, quyidagi natija kelib chiqadi.

14.3. Korneychuk teoremasining natijasi.

Natija 14.1. $E_n^T(K H^{(\alpha)}) = \sup_{K H^{(\alpha)}} E_n^T(f) = \frac{K\pi^\alpha}{2} (n+1)^{-\alpha}$ tenglik o'rinli.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

14-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Yordamchi lemmani keltiring va uni isbotlang.
2. Korneychuk teoremasini bayon qiling va isbotlang.
3. Korneychuk teoremasining natijasini isbotlang.

14-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Yordamchi lemmadagi M soni nimaga teng?

Ma'ruza 15 (2 soat)

Jeksonning 1- va 2- teoremlari. Korneychik misoli.

Reja:

1. Jeksonning 1-teoremasi va uning isboti;
2. Jeksonning 2-teoremasi va uning isboti;

3. Korneychuk misoli;

4. Valle-Pussen teoremasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Korneychuk teoremasi va Korneychuk teoremasining natijasini qo'llashni, Jeksonning 1-teoremasi va uning isboti, Jeksonning 2-teoremasi va uning isboti, Valle-Pussen teoremasi, Korneychuk misoli va undan kelib chiqadigan xulosani o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izl anuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Axiezer-Kreyn-Favar teoremasi, qavariq uzluksizlik moduli, Korneychuk teoremasi, Korneychuk teoremasining natijasi. Jeksonning 1-teoremasi, Jeksonning 2-teoremasi, Korneychuk misoli, Valle-Pussen teoremasi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Axiezer-Kreyn-Favar teoremasini qo'llash, yordamchi lemma va uning isboti, Korneychuk teoremasi va uning isboti, Korneychuk teoremasining natijasini va uning isbotini o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

15.1. Jeksonning 1-teoremasi va uning isboti.

Teorema 15.1 (Jeksonning 1-teoremasi). *Istalgan $f \in \tilde{C}$ funksiya uchun*

$$E_n^T(f) \leq \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Uzluksizlik modulining 8°-xossasidan (11-ma'ruzaga qarang) foydalanib, shunaqa qavariq uzluksizlik moduli $\omega^*(t)$ ni tuzamizki, $\omega(f; t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(f; t)$ munosabat bajarilsin. U holda $f \in \tilde{H}_\omega$ va Korneychik teoremasiga ko'ra:

$$E_n^T(f) \leq \frac{1}{2} \omega^*\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leq \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \quad \square$$

15.2. Jeksonning 2-teoremasi va uning isboti.

Teorma 15.2 (Jeksonning 2-teoremasi). *Har bir $f \in \tilde{C}^{(r)}$ funksiya uchun*

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{(n+1)^r} \omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n+1}\right)$$

tengsizlik o'rinli. Aytaylik, $f \in \tilde{C}^{(r)} H_\omega$ bo'lib, ω – qavariq uzluksizlik moduli bo'lsin. U holda

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2(n+1)^r} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Axiezer–Kreyn–Favar teoremasida qatnashuvchi $E_n^T(f^{(r)})$ ni Djeksonning 1-teoremasi bo'yicha baholasak, ya'ni $E_n^T(f^{(r)}) \leq \omega\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n+1}\right)$, u holda teoremaning birinchi tengsizligi, Korneychik teoremasi bo'yicha baholasak, ya'ni $E_n^T(f^{(r)}) \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, u holda teorema 4 ning ikkinchi tengsizligini olamiz. $\square$

15.3 Korneychuk misoli.

Korneychik misoli. Korneychik teoremasidan $\omega(f, t)$ qavariq bolganda $E_n^T(f) \leq \frac{1}{2} \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)$ tengsizlik kelib chiqadi. $\omega(f; t)$ qavariq bo'lmagan umumiy holda ham yuqoridagi baho $\frac{1}{2}$ koeffisient bilan bajariladimi? Yo'q, buni quyidagi misol ko'rsatadi: har bir n va $\varepsilon > 0$ uchun shunaqa $f \in \tilde{C}$ funksiya topiladiki,

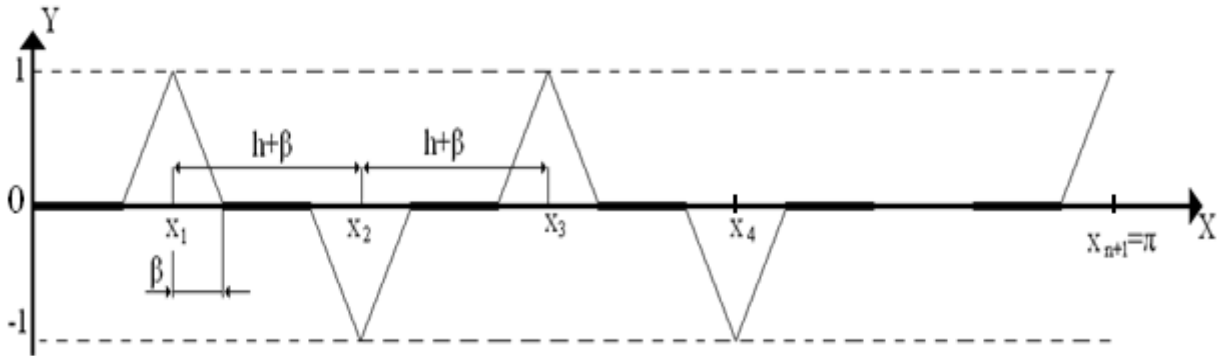
$$E_n^T(f) \geq \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon\right) \omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Bunday funktsiyani qurish uchun $\varepsilon < \frac{1}{2}$ deb olamiz, $h = \frac{\pi}{n+1}$, $x_0 = 0$, $x_k = kh - (n-k+1)\beta$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) bo'lsin, bu yerda $0 < \beta < \frac{2\varepsilon}{(n+1)^2}$, $x_{-k} = -x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$). Endi juft 2π davrli f funktsiyani $[0, \pi]$ oraliqda

- 1) $f(x_0) = 0$, $f(x_k) = (-1)^{k+1}$ ($k = \overline{1, n+1}$);
- 2) $f(x) = 0$, $0 \leq x \leq x_1 - \beta$, $x_k + \beta \leq x \leq x_{k+1} - \beta$ ($k = \overline{1, n}$);

3) $f(x)$ funktsiya har bir $[x_k - \beta, x_k]$ va $[x_k, x_k + \beta]$ ($k = \overline{1, n+1}$)

4)



7-chizma

oraliqlarda chiziqli qilib (6-chizmaga qarang, unda n —juft son), kabi quramiz.

Tushunarliki, $\omega\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) = \omega(f, h) = 1$.

Endi

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \right) = \frac{\sin\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right]}{2(n+1)\sin\frac{x}{2}}$$

trigonometrik ko'phadni qaraymiz (ayniyatni isbotlang). Undan

$$T_n(x_0) = \frac{2n+1}{2n+2}, T_n(kh) = \frac{\sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{2(n+1)\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2n+2}$$

ni olamiz. $T_n(x)$ ko'phad hosilasini baholaymiz:

$$|T_n'(x)| = \frac{1}{n+1} |\sin x + 2\sin 2x + \dots + n\sin nx| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}.$$

Olingan bahodan foydalanib va chekli orttirma uchun Lagranj formulasini qo'llab,

$|T_n(x_k) - T_n(kh)| \leq \frac{n}{2} |x_k - kh| = \frac{n}{2} (n - k + 1)\beta < \varepsilon$ bahoni olamiz. Bu yerdan

$$f(x_k) - T_n(x_k) = [f(x_k) - T_n(kh)] + [T_n(kh) - T_n(x_k)] = (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) + \mathcal{M}_k = (-1)^{k+1} \frac{2n+1}{2n+2} + \mathcal{M}_k,$$

(*)

bu yerda $|\mathcal{M}_k| < \varepsilon < \frac{1}{2}$. (*) formulada $k = \overline{1, n+1}$, lekin (*) $k = 0$ ($\mathcal{M}_0 = 0$ bilan)

uchun va f va T_n funksiyalarning juftligi tufayli $k = -1, -2, \dots, -n$ ($\mathcal{M}_{-k} = \mathcal{M}_k$ deb aniqlaganda) uchun ham o'rinlidir.

Shunday qilib, $-\pi < x_{-n} < x_{-n+1} < \dots < x_{n+1} = \pi$ nuqtalar sistemasi mavjudki, ularda $f(x) - T_n(x)$ farq ishora almashinuvchi qiymatlar qabul qiladi. Endi quyidagi Valle–Pussen teoremasini keltiramiz.

15.4. Valle–Pussen teoremasi.

Teorema 15.3 (Valle–Pussen teoremasi). Faraz qilaylik, $f \in \tilde{C}, T_n \in \tilde{C}_n$. Agar qandaydir $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+2} < 2\pi$ nuqtalar sistemasi uchun $f(x_k) - T_n(x_k) = A_k$, $\min |A_k| = A > 0$ va A_k ishora almashinuvchi qiymatlar bo'lsa, u holda

$$E_n^T(f) \geq A \quad \text{tengsizlik o'rinli bo'ladi.}$$

Shu teoremani qo'llasak, (*) dan

$$\begin{aligned} E_n^T(f) &\geq \min |f(x_k) - T_n(x_k)| \geq \frac{2n+1}{2n+2} - \max |\mathcal{M}_k| \geq \frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon \right) \omega \left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) \end{aligned}$$

bahoni olamiz. Korneychuk misolining xulosasi isbot bo'ldi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

15-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Jeksonning 1-teoremasini keltiring va uni isbotlang.
2. Jeksonning 2-teoremasini keltiring va uni isbotlang.
3. Korneychuk misoli nima haqida va u qanday quriladi?
4. Valle-Pussen teoremasini bayon qiling.

15-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Korneychuk misolidan qanaqa xulosa chiqadi?

Ma'ruza 16 (2 soat).

Bernshteynning birinchi tengsizligi. Uning natijasi va aniqligi.

Reja:

1. Bernshteynning birinchi tengsizligi va uning isboti;
2. Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Bernshteynning birinchi tengsizligi va uning isbotini, Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Teskari teorema, funksiyaning silliqlik darajasi, Bernshteynning birinchi tengsizligi, Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi, Bernshteynning birinchi tengsizligi natijasining aniqligi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Korneychuk teoremasi va Korneychuk teoremasining natijasini qo'llashni, Jeksonning 1-teoremasi va uning isboti, Jeksonning 2-teoremasi va uning isboti, Valle-Pussen teoremasi, Korneychuk misoli va undan kelib chiqadigan xulosani o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

16.1. Bernshteynning birinchi tengsizligi va uning isboti.

Teskari teoremlarda funksiya eng yahshi yaqinlashtirish xususiyatlaridan foydalanib, uning silliqlik darajasi aniqlanadi. Bunday teoremlarning isboti trigonometrik ko'phadlar hosilalarining quyidagi bahosiga asoslangan.

Teorema 16.1 (Bernshteynning birinchi tengsizligi). Darajasi n dan oshmaydigan har bir $T_n(x)$ trigonometrik ko'phad uchun quyidagi baho o'rinlidir:

$$\|T_n'\|_{\tilde{C}} \leq n \|T_n\|_{\tilde{C}}$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\|T_n'\|_{\tilde{C}} = |T_n'(x_0)| = Mn$ bo'lsin. Isbotlash kerakki, $\|T_n\|_{\tilde{C}} \geq M$. Teskarisini faraz qilamiz: $\|T_n\|_{\tilde{C}} < M$. Umumiylikni kamaytirmasdan $T_n'(x_0) = Mn$ deb olamiz. Aks holda T_n o'rniga $-T_n$ funktsiyani qarash kifoya bo'lardi. x_0 T_n' ning maksimum nuqtasi bo'lgani uchun $T_n''(x_0) = 0$. Quyidagi trigonometric ko'phadni qaraymiz: $V_n(x) = M \sin n(x - x_0) - T_n(x)$. $y_k = x_0 + \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ ($k = \overline{0, 2n}$) nuqtalarda $V_n(y_k) = (-1)^k M - T_n(y_k)$ va $|T_n(y_k)| < M$ bo'lganligi uchun $V_n(y_k)$ va $V_n(y_{k+1})$ har xil ishorali qiymatlar qabul qiladi. Shuning uchun har bir (y_k, y_{k+1}) interval ($k = \overline{0, 2n-1}$) $V_n(x)$ ko'phadning hech bo'lmaganda bitta ildizini saqlaydi. Faraz qilaylik, bu ildizlar $z_k \in (y_k, y_{k+1})$ bo'lsin. Barcha bu ildizlar uzunligi 2π ga teng ochiq intervalga qarashli, chunki $y_{2n} - y_0 = 2\pi$. Bundan tashqari, $z_{2n} = z_0 + 2\pi$ nuqta ham V_n ko'phadning ildizidan iborat. Roll teoremasiga ko'ra V_n ning har ikki ildizi orasida V_n' ning hech bo'lmaganda bitta ildizi mavjud. Shuning uchun $(z_0, z_0 + 2\pi)$ intervalga V_n' ning hech bo'lmaganda $2n$ ta turli ildizlari yotadi. Yana $V_n'(x) = Mn \cos n(x - x_0) - T_n'(x)$ va $V_n'(x_0) = Mn - Mn = 0$. Bundan tashqari, $V_n(x) = -Mn^2 \sin n(x - x_0) - T_n(x)$ va $V_n(x_0) = 0$. Shunday qilib, $V_n'(x)$ trigonometrik ko'phad o'zaro noekvivalent $2n$ dan kam bo'lmagan ildizlarga ega bo'lib, ulardan x_0 tartibi (karrasi) ikkidan kam bo'lmagan ildizdir. Demak, bu ko'phadning noekvivalent ildizlarining soni karrasini ham hisobga olganda $2n + 1$ dan kam emas. Shuning uchun $V_n'(x) \equiv 0$. Bu yerdan $V_n(x) = \text{const}$. Bu esa V_n ning y_k nuqtalarda ishora almashuvchi qiymatlar qabul qilishiga ziddir. Teorema isbot bo'ldi.

16.2. Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligi.

Natija 16.1. Darajasi n dan oshmaydigan ixtiyoriy $T_n(x)$ trigonometrik ko'phad va ixtiyoriy natural k uchun

$$\|T_n^{(k)}\|_{\tilde{C}} \leq n^k \|T_n\|_{\tilde{C}}$$

tengsizlik bajariladi.

Izoh. Bernshteynning birinchi tengsizligi va uning natijasidan iborat tengsizliklar aniqdir, chunki, masalan, $T_n(x) = \cos n(x - a)$ ko'phad uchun bu tengsizliklar tengliklarga aylanadi. Bu esa k marta differentsiallashtirish operat

normasining darajasi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phadlarning $\tilde{C}$ normali fazosida n^k ga tengligini ko'rsatadi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

16-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Bernshteynning birinchi tengsizligi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
2. Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligi qanday isbotlanadi?.

16-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligini ko'rsatuvchi trigonometrik ko'phadga 16-ma'ruza matnidagidan farqli misol toping.

Ma'ruza 17 (2 soat)

Stechkin teoremasi va Bernshteynning birinchi teoremasi.

Reja:

1. Stechkin teoremasi va uning isboti;
2. Bernshteynning birinchi teoremasi va uning isboti;
3. $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinfnining konstruktiv xarakteristikasi.
Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Stechkin teoremasi va uning isboti, Bernshteynning birinchi teoremasi va uning isboti, $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinfnining konstruktiv xarakteristikasi haqidagi teoremani keltirib chiqarishni o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofda jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izl anuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Teskari teorema, funksiyaning silliqlik darajasi, Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi, Stechkin teoremasi, Bernshteynning birinchi teoremasi.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Bernshteynning birinchi tengsizligi va uning isboti, Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi va uning aniqligini o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

17.1. Stechkin teoremasi va uning isboti.

Teorema 17.1 (S. B. Stechkin). Ixtiyoriy $f \in \tilde{C}$ funksiya uchun

$$\omega(f, t) \leq 8t \sum_{n=0}^{[1/t]} E_n^T(f) \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. f funksiya eng yaxshi yaqinlashtirish ko'phadlarini $T_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) bilan belgilaymiz, ya'ni $\|f - T_n\|_C = E_n^T(f)$. Qo'yilgan masala ixtiyoriy $t > 0$ uchun $|x_1 - x_2| \leq t$ shart bajarilishini talab qilgan holda $|f(x_1) - f(x_2)|$ ni baholashdan kelib chiqadi. Agar $t \geq \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $T_0(x)$ doimiy bo'lganligi uchun $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - T_0(x_1)| + |f(x_2) - T_0(x_2)| \leq 2E_0^T(f) \leq 4tE_0^T(f)$ ni hosil qilamizki, bu (1) ning $t \geq \frac{1}{2}$ hol uchun o'rinli bo'lishini anglatadi. Endi $t < \frac{1}{2}$ bo'lsin. Natural k sonni $2^k \leq \frac{1}{t} < 2^{k+1}$ shartdan tanlaymiz. U holda

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - T_{2^k}(x_1)| + |T_{2^k}(x_1) - T_{2^k}(x_2)| + |T_{2^k}(x_2) - f(x_2)| \leq 2E_{2^k}^T(f) + \\ &|T_{2^k}(x_1) - T_{2^k}(x_2)| \leq t[2^{k+2}E_{2^k}^T(f) + \|T_{2^k}'\|_C]. \end{aligned} \quad (2)$$

T_{2^k} ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$T_{2^k}^1(x) = T_0^1(x) + [T_2(x) - T_0(x)]' + \sum_{\gamma=2}^k [T_{2^\gamma}(x) - T_{2^{\gamma-1}}(x)]'$$

va har bir qo'shiluvchining normasini baholaymiz. Bunga $T_0'(x) \equiv 0$ dan va

$$\|T_{2^\gamma} - T_{2^{\gamma-1}}\|_C \leq \|T_{2^\gamma} - f\|_C + \|f - T_{2^{\gamma-1}}\|_C \leq E_{2^\gamma}^T(f) + E_{2^{\gamma-1}}^T(f) \leq 2E_{2^{\gamma-1}}^T(f)$$

tengsizlikdan foydalangan holda Bernshteyn tengsizligini qo'llab erishamiz:

$$\|[T_{2^\gamma} - T_{2^{\gamma-1}}]'\|_C \leq 2^{\gamma+1} E_{2^{\gamma-1}}^T(f)$$

va xuddi shu kabi $\|[T_2 - T_0]'\|_C \leq 4E_0^T(f)$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizliklar va $T_{2^k}^1$ funktsiyaning yuqoridagi chekli qatorga yoyilmasiga asosan

$$\|T_{2^k}^1\|_C \leq 4 \left[E_0^T(f) + \sum_{\gamma=2}^k 2^{\gamma-1} E_{2^{\gamma-1}}^T(f) \right] = 4 \left[E_0^T(f) + \sum_{\gamma=1}^{k-1} 2^\gamma E_{2^\gamma}^T(f) \right]$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu bahoni (2) ga qo'yib, x_1, x_2 lar faqat $|x_1 - x_2| \leq t$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar ekanligini nazarga olsak,

$$\omega(f; t) \leq 4t \left[E_0^T(f) + \sum_{\gamma=1}^k 2^\gamma E_{2^\gamma}^T(f) \right] \quad (3)$$

bahoga ega bo'lamiz. Bu bahoni boshqacha ko'rinishda yozish maqsadida $[0; +\infty)$ intervalga $\varphi(y)$ funktsiyani $\varphi(n) = E_n^T(f)$ va har bir $[n, n+1]$ oraliqda ($n = 0, 1, 2, \dots$) chiziqli qilib aniqlaymiz. Tushunarliki, $\varphi(y)$ o'smovchi va $E_{2^\gamma}^T(f) \leq \varphi(y)$, $y \leq 2^\gamma$ bo'lganda va $\varphi(y) \leq E_n^T(f)$, $y \geq n$ bo'lganda. Bu tengsizliklarning birinchisini y bo'yicha

$2^{\gamma-1}$ dan 2^γ gacha, ikkinchisini esa n dan $n+1$ gacha intervallab, $2^{\gamma-1} E_{2^\gamma}^T(f) \leq \int_{2^{\gamma-1}}^{2^\gamma} \varphi(y) dy$; $\int_n^{n+1} \varphi(y) dy \leq E_n^T(f)$ tengsizliklarni hosil qilamiz.

Ular asosida

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^k 2^\gamma E_{2^\gamma}^T(f) &= 2 \sum_{\gamma=1}^k 2^{\gamma-1} E_{2^\gamma}^T(f) \leq 2 \sum_{\gamma=1}^k \int_{2^{\gamma-1}}^{2^\gamma} \varphi(y) dy = 2 \int_1^{2^k} \varphi(y) dy = 2 \sum_{n=1}^{2^k-1} \int_n^{n+1} \varphi(y) dy \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{2^k-1} E_n^T(f) \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Olingan bahoni (3) ga qo'yib, k ning tanlanishiga ko'ra $2^k - 1 < \left[\frac{1}{t} \right]$ bo'lishidan foydalansak, (1) tengsizlikni hosil qilamiz. $\square$

Stechkin teoremasidan quyidagi teoremani isbotlashda foydalanamiz.

17.2. Bernshteynning birinchi teoremasi va uning isboti.

Teorema 17.2 (Bernshteynning 1-teoramas). Faraz qilaylik, $0 < \alpha \leq 1$. Agar $f \in \tilde{C}$, ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun $E_n^T(f) \leq \frac{A}{n^\alpha}$ bajarilsa, bu yerda A —qandaydir o'zgarmas, u holda $\alpha < 1$ bo'lganda $f \in \tilde{H}^{(\alpha)}$ va $\alpha = 1$ bo'lganda $f \in \tilde{W}$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shartlari bajarilganda (1) tengsizlikni qo'llab,

$$\omega(f; t) \leq 8t \left[E_0^T(f) + A \sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n^\alpha} \right] \quad (4)$$

bahoni olamiz. Agar $\alpha < 1$ bo'lsa, u holda $\forall n$ uchun τ ni $n-1 < \tau \leq n$ deb olsak, u holda

$$\sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_0^{1/t} \tau^{-\alpha} d\tau = \frac{1}{1-\alpha} t^{\alpha-1} \quad (5)$$

tengsizlikni olamiz. (5) ni (4) ga qo'yib, $t \leq 1$ uchun $\omega(f; t) \leq Kt^\alpha$ munosabatni hosil qilamiz, bu yerda $K = 8 \left[E_0^T(f) + \frac{A}{1-\alpha} \right]$. Shuning uchun $\alpha < 1$ bo'lganda uzluksizlik modulining 11° -xossasiga asosan $f \in \tilde{H}^{(\alpha)}$ kelib chiqadi. Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $t \leq 1$ uchun

$$\sum_{n=1}^{[1/t]} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{1/t} \frac{d\tau}{\tau} = 1 + \ln \frac{1}{t} = 1 + |\ln t|$$

o'rinli va shuning uchun $\omega(f; t) \leq Kt(1 + |\ln t|)$ tengsizlik bajariladi, bu yerda $K = 8(E_0^T(f) + A)$, yani $f \in \tilde{W}$. Teorema 17.2 isbotlandi. $\square$

17.3. $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinfnining konstruktiv xarakteristikasi.

Izoh 1. Bernshteynning birinchi teoremasini shu yo'nalishdagi to'g'ri teoremlar (masalan Korneychik teoremasining natijasi) bilan solishtirib, quyidagi konstruktiv xarakteristikaga ega bo'lamiz.

Teorema 17.3. $f \in \tilde{C}$ funksiyaning $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($0 < \alpha < 1$) sinfga qarashli bo'lishining zaruriy va yetarli sharti biror o'zgarmas A son uchun $E^T(f) \leq An^{-\alpha}$ tengsizlikning qanoatlantirilishidan iborat.

Lekin $\alpha = 1$ uchun xuddi shu kabi teorema o'rinli emas

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

17-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Stechkin teoremasi qanday bayon qilinadi va isbotlanadi?
2. Bernshteynning birinchi teoremasi qanday bayon qilinadi va isbotlanadi?
3. $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinfnining konstruktiv xarakteristikasi nima va u qayerdan kelib chiqadi?

17-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

1. $\tilde{H}^{(1)}$ sinf uchun $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinf kabi konstruktiv xarakteristika o'rinli emasligi isbotlansin.

Ma`ruza 18 (2 soat)

Teskari teorema va Bernshteynning ikkinchi teoremasi. Natijalar.

Reja:

1. Teskari teorema va uning isboti;
2. Bernshteynning ikkinchi teoremasi va uning isboti;
3. Bernshteynning ikkinchi teoremasining natijalari va ularning isbotlari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1].

Dars maqsadlari:

a). *Ta'limiy maqsad:* Teskari teorema va uning isboti, Bernshteynning ikkinchi teoremasi va uning isboti, Bernshteynning ikkinchi teoremasining natijalari va ularning isbotlarini o'rgatish.

b). *Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb qilish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, atrofdagi jarayonlarni idrok etish va ularni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

c). *Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izl anuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: Teskari teorema, funksiyaning silliqlik darajasi, Bernshteynning birinchi tengsizligining natijasi, Stechkin teoremasi, Bernshteynning birinchi teoremasi, Bernshteynning ikkinchi teoremasi, Bernshteynning ikkinchi teoremasining natijalari.

Darsning jihozlari: sinf doskasi va bo'r, darsliklar, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruzalar matni, ko'rgazmali stendlar, tarixiy ma'lumotlar, izohli lug'atlar, atamalar, o'tilgan dars mavzusi bo'yicha savollar va muammoli topshiriqlar majmuasi, testlar, tarqatma materiallar va kartochkalar, shax siy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o'tish usuli: avval o'tilgan dars mavzusi qay darajada o'zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar olish uchun munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, talabalarni yangi mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr-mulohazalarni bayon qilishga o'rgatish, jonli muloqot, kichik guruhlariga bo'lish va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o'zlashtirishga erishish, asosiy iboralarga alohida izoh berish, o'tilgan mavzudan tug'ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

Mashg'ulotning xronologik xaritasi va darsning borishi

Tashkiliy qism (5 minut): dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomat va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash (10 minut): Stechkin teoremasi va uning isboti, Bernshteynning birinchi teoremasi va uning isboti, $\tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$) sinfning konstruktiv xarakteristikasi haqidagi teoremani keltirib chiqarishni o'rganish yuzasidan olgan bilimlarini o'z-o'zini tekshirish savollariga javoblar orqali aniqlash. Yetishmagan bilimlarni to'ldirish.

Yangi mavzu bayoni (50 minut)

18.1. Teskari teorema va uning isboti.

Teorema 18.1. $f \in \tilde{C}$ bo'lsin. Agar biror natural p uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} E_n^T(f)$$

yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda f p marta uzluksiz differentsiyallanuvchi va

$$E_n^T(f^{(p)}) \leq 2^{2p+1} \sum_{k=[n/2]}^{\infty} k^{p-1} E_k^T(f) \quad (6)$$

baho o'rinli.

Isbot. Ravshanki, $f(x)$ funksiya tekis yaqinlashuvchi quyidagi qator

$$f(x) = T_n(x) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} (T_{n2^\gamma}(x) - T_{n2^{\gamma-1}}(x)) \quad (7)$$

shaklida ifodalanishi mumkin, bu yerda $T_n(x) - f$ funktsiyaning tartibi n dan iborat eng yaxshi yaqinlashtirish trigonometrik ko'phadlari. U holda

$$\|T_{n2^\gamma} - T_{n2^{\gamma-1}}\|_{\tilde{C}} \leq \|T_{n2^\gamma} - f\|_{\tilde{C}} + \|f - T_{n2^{\gamma-1}}\|_{\tilde{C}} = E_{n2^\gamma}^T(f) + E_{n2^{\gamma-1}}^T(f) \leq 2E_{n2^{\gamma-1}}^T(f)$$

va shuning uchun Bernshteynning 1-chi tengsizligi natijasiga ko'ra

$$\|T_{n2^\gamma}^{(p)} + T_{n2^{\gamma-1}}^{(p)}\|_{\tilde{C}} \leq 2n^p 2^{\gamma p} E_{n2^{\gamma-1}}^T(f)$$

Shunday qilib, (7) ning o'ng tomonida joylashgan p marta differentsiyallangan qator quyidagi sonli qator bilan yuqoridan baholanadi:

$$S = 2n^p \sum_{\gamma=1}^{\infty} 2^{\gamma p} E_{n2^{\gamma-1}}^T(f) = 2n^p \sum_{\gamma=1}^{\infty} 2^{\gamma p} \varphi(n2^{\gamma-1}),$$

bu yerda xuddi Stechkin teoremasi isbotidagi kabi, $\varphi(y)$ orqali $\varphi(k) = E_k^T(f)$ va har bir $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}$) oraliqda chiziqli funksiya iborat bo'laklari chiziqli funksiya belgilaymiz. Ushbu

$$\int_{n2^{\gamma-2}}^{n2^{\gamma-1}} y^{p-1} dy = \frac{1}{p} n^p 2^{\gamma p - 2p} (2^p - 1)$$

tenglikni nazarda tutib, S ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$S = \frac{p2^{2p+1}}{2^p - 1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \int_{n2^{\gamma-2}}^{n2^{\gamma-1}} y^{p-1} \varphi(n2^{\gamma-1}) dy$$

Agar $\varphi(y)$ funksiyaning o'smovchi ekanligidan foydalansak, u holda

$$S \leq \frac{p2^{2p+1}}{2^p - 1} \int_{\frac{n}{2}}^{\infty} y^{p-1} \varphi(y) dy$$

bahoni va yozilgan integralning yaqinlashishidan S qatorning yaqinlashishini olamiz. Endi integralning yaqinlashishini ko'rsatamiz. Buning uchun avval

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{n}{2}}^{\infty} y^{p-1} \varphi(y) dy \leq \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} y^{p-1} \varphi(y) dy \leq \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} \varphi(k) \int_k^{k+1} y^{p-1} \varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} ((k+1)^p - k^p) E_k^T(f) \end{aligned}$$

bahoni va keyin esa

$$(k+1)^p - k^p = \sum_{l=0}^{p-1} C_p^l k^l \leq k^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} C_p^l = k^{p-1} (2^p - 1)$$

bahoni hosil qilamiz. Keyingi baholardan

$$I \leq \frac{1}{p} (2^p - 1) \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} k^{p-1} E_k^T(f)$$

kelib chiqadi. Teorema shartiga ko'ra keyingi qator va shu bilan birga I integral va u bilan birgalikda S qatorning yaqinlashishini olamiz hamda

$$S \leq 2^{2p+1} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} k^{p-1} E_k^T(f)$$

bahoni xosil qilamiz. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya ifodalangan (1) qatorni p marta differentsiyallash natijasida hosil bo'lgan qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Demak, bu yerdan f funksiyaning p marta uzluksiz differentsiyallanuvchi funksiya ekanligi va $f^{(p)}$ funksiyaning

$$f^{(p)}(x) = T_n^{(p)}(x) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left(T_{n2^{\gamma}}^{(p)}(x) - T_{n2^{\gamma-1}}^{(p)}(x) \right)$$

ifodalanishi kelib chiqadi. S ning yuqoridagi bahosidan barcha x lar uchun

$$\left| f^{(p)}(x) - T_n^{(p)}(x) \right| \leq S \leq 2^{2p+1} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} k^{p-1} E_k^T(f)$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Bu yerda $T_n^{(p)}(x)$ ning tartibi n dan oshmaydigan trigonometrik ko'phad ekanligidan

$$E_n^T(f^{(p)}) \leq 2^{2p+1} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} k^{p-1} E_k^T(f)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Teorema 18.1 isbot bo'ldi. $\square$

18.2. Bernshteynning ikkinchi teoremasi va uning isboti.

Teorema 18.2 (Bernshteynning 2-teoremasi). Faraz qilaylik, funksiya $f \in \tilde{C}$ shunaqaki, uning eng yaxshi yaqinlashtirishlari uchun $E_n^T(f) \leq An^{-(p+\alpha)}$, bu yerda $p \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$, A —qandaydir o'zgarmas, tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $\alpha < 1$ bo'lsa, $f \in \tilde{C}^{(p)}H^{(\alpha)}$, va agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $f \in \tilde{C}^{(p)}W$.

Isbot. Teorema-15.1 dan foydalanish natijasida f funksiya ning p marta uzluksiz differentsiallanuvchi ekanligini va

$$E_n^T(f^{(p)}) \leq 2^{2p+1}A \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leq CAn^{-\alpha}$$

tengsizlikni olamiz, bu yerda C —qandaydir o'zgarmas. Endi Bernshteynning 1-teoremasini oxirgi tengsizlik uchun qo'llab, $f^{(p)} \in \tilde{H}^{(\alpha)}$ ($\alpha < 1$ bo'lsa) va $f^{(p)} \in W$ ($\alpha = 1$ bo'lsa) munosabatlarni olamiz. Teorema 18.2 isbotlandi.

18.3. Bernshteynning ikkinchi teoremasining natijalari va ularning isbotlari.

Bernshteyn va Jeksonlarning 2-teoremlarini bir-biri bilan taqqoslab, quyidagi natijalarni olamiz.

Natija 18.1. 2π -davrlı uzluksiz f funksiyaning $\tilde{C}^{(p)}H^{(\alpha)}$ sinfga qarashli bo'lishi uchun (bu yerda $p \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1$) uning eng yaxshi yaqinlashtirishlari $E_n^T(f) \leq An^{-(p+\alpha)}$ bahoni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

Natija 18.2. $f \in \tilde{C}$ funksiyaning cheksiz differentsiallanuvchi (ya'ni barcha tartibli hosilalarga ega) bo'lishi uchun istalgan natural p uchun $E_n^T(f)n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ munosabatning bajarilishi, ya'ni uning eng yaxshi yaqinlashtirishlari 0 ga $\frac{1}{n}$ ning istalgan darajasidan tezroq intilishi zarur va yetarlidir.

Bu natijalarning isboti talabalarga tavsiya qilinadi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushunilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, tayanch iboralarni yodlash hamda ma'nosini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

18-ma'ruza bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Teskari teorema va uning isbotini bayon qiling.
2. Bernshteynning ikkinchi teoremasi qanday bayon qilinadi va isbotlanadi?
3. Bernshteynning ikkinchi teoremasining natijalari nimadan iborat va ular qanday isbotlanadi?

18-ma'ruzaga doir muammoli topshiriqlar

Masala. Agar $E_n^T(f) \leq \frac{A}{n}$ bo'lsa, u holda bu funksiya uchun $|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq ch$, bu yerda c — x va h dan bog'liq bo'lmagan o'zgarmas haqiqiy son, tengsizlik o'rinli bo'lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

Asosiy

1. И.К.Даугавет. Введение в теорию приближения функций. Ленинград, Из-во Ленинградского ун-та, 1977. 184 стр.
2. А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин . Элементы теории функций и функционального анализа. М. Из-во, “Наука “ , 1972. 496 стр.

Qo'shimcha

3. Г.Е. Шилов . Математический анализ. Конечномерные линейные пространства . М. Из-во, “ Наука” , 1969. 432 стр.
4. В.К.Дзядык. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. Из-во, “Наука “ , 1977. 512 стр.
5. Н.И.Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965. 408 бет.
6. Н.П.Корнейчук. О наилучшем приближении непрерывных функций. — “Изв. АН СССР сер.мат”, 1963. т.27, №1, с.29-44.
7. Н.П.Корнейчук. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций. — “Докл. АН СССР”, 1962. т.145, №3, с.514-515.