

O'zbekiston Respublikasi

Xalq ta'limi vazirligi

Navoiy davlat pedagogika instituti

Fizika-matematika fakulteti

**“Matematika-informatika” ta'lim yo'nalishi
3-“D” guruh talabasi Berdiyeva Dinaraning
“Algebra va sonlar nazariyasi” fanidan
yozgan**

REFERATI

Mavzu: Kompleks sonlar va ular ustida amallar

Navoiy shahri-2010

Reja:

- 1. Kompleks sonlar haqida tushuncha**
- 2. Algebraik ko'rinishdagi kompleks sonlar ustida to'rt amal**
- 3. Kompleks sonning geometrik tasviri va uning trigonometrik shakli**
- 4. Trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlar ustida amallar bajarish**
- 5. Muavr formulasi. Darajaga oshirish va ildizdan chiqarish**
- 6. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli**
- 7. Kompleks sonlar haqida tarixiy ma'lumotlar**

1. Kompleks sonlar haqida tushuncha

Kompleks son deb $a+bi$ ifodaga aytiladi, bu yerda a va b haqiqiy sonlar, i – mavhum birlik bo'lib, u $i = \sqrt{-1}$ yoki $i^2 = -1$ tengliklar bilan aniqlanadi; a – kompleks sonning haqiqiy qismi, bi – mavhum qismi deyiladi. Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son: $a+bi$ va $a-bi$ o'zaro qo'shma deyiladi. Ko'pincha $a+bi$ kompleks son bitta α harfi bilan belgilanadi: $\alpha = a+bi$. $a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi $a = \operatorname{Re} \alpha$ bilan, mavhum qismining koeffitsientini $b = \operatorname{Im} \alpha$ bilan belgilaydilar. α kompleks sonning $a+bi$ ko'rinishidagi yozuviga uning algebraik shakli deyiladi.

Agar ikkita $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ va $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonda $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bu ikki son teng deyiladi ($\alpha_1 = \alpha_2$). Agar $\alpha = a+bi$ kompleks sonda $a=0$, $b=0$ bo'lsa, bu kompleks son 0 ga ($\alpha=0$) teng bo'ladi. Agar $\alpha = a+bi$ kompleks sonda $b=0$ bo'lsa, haqiqiy son hosil bo'ladi; agar $a=0$ bo'lsa, $0+bi=bi$ sof mavhum son deyiladi.

2. Algebraik ko'rinishdagi kompleks sonlar ustida to'rt amal.

Kompleks sonlar ustidagi amallar ko'phadlar ustidagi amallarni bajarish qoidalarini bo'yicha o'tkaziladi, bunda i^2 har safar -1 ga almashtiriladi.

1. Qo'shish amali. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ va $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb haqiqiy qismi qo'shiluvchi kompleks sonlar haqiqiy qismlarining yig'indisiga, mavhum qismi ularning mavhum qismlarining yig'indisiga teng bo'lgan α kompleks songa aytiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\alpha = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Misol: $(5-3i) + (3+3i) = (5+3) + (3-3)i = 8$

$$(2+5i) + (-2+5i) = (2-2) + (5+5)i = 10i$$

2. Ayirish amali. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ kompleks sondan $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonning ayirmasi deb α_1 va α_2 ga qarama-qarshi bo'lgan $-\alpha_2$ sonlarning yig'indisidan iborat bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$$\alpha = \alpha_1 + (-\alpha_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Misol: $(10+2i) - (3-4i) = (10-3) - (2-4)i = 7+6i$

$$(4+5i) - (3+5i) = (4-3) - (5-5)i = 1$$

3. Ko'paytirish amali. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ va $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb

$$\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

kompleks songa aytiladi. Kompleks sonlarni ko'paytirganda $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$, $i^5 = i$ va hokazo, umuman k butun bo'lganda $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ ekanligini e'tiboga olish kerak.

Misol: $(5+2i)(3-4i) = 23-14i$

$$(2+i)(2-i) = 4+1=5$$

4. Bo'lish amali. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ kompleks sonning $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks songa bo'linmasi deb $\alpha_1 = \alpha \times \alpha_2$ tenglikni qanoatlantiradigan α kompleks songa aytiladi va u quyidagi formula bilan topiladi:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$$

Misol:
$$\frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$$

O'rin almashtirish, gruppalash qonuni kompleks sonlarda ham to'g'ri:

$$(a+bi) + (c+di) = (c+di) + (a+bi)$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (c+di) \cdot (a+bi)$$

$$(a+bi) + (c+di) + (e+fi) = (a+bi) + [(c+di) + (e+fi)]$$

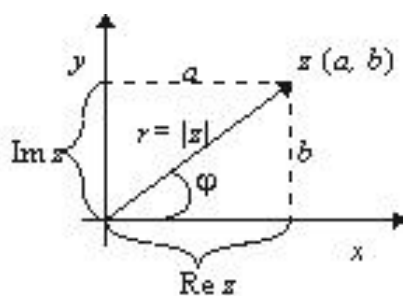
3. Kompleks sonning geometrik tasviri

va uning trigonometrik shakli

Har qanday kompleks son $a+bi$ ni Oxy tekislikda koordinatalari a va b bo'lgan $z(a;b)$ nuqta shaklida tasvirlash mumkin va, aksincha, Oxy tekislikdagi har qanday $z(a;b)$ nuqtani $a+bi$ kompleks sonning geometrik obrazi deb qarash mumkin. Kompleks sonlarni tekislikda tasvirlaganda Oy o'q mavhum, Ox o'q esa haqiqiy o'q deb olinadi. Koordinatalar boshini qutb, Ox o'qining musbat yo'nalishini qutb o'qi deb olib, $z(a;b)$ nuqtaning qutb koordinatalarini φ va r ($r \geq 0$) bilan belgilaymiz, u holda

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

formulaga ega bo'lamiz, bunda $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ bo'lib, r ga $a+bi$ kompleks



sonning moduli, φ ga esa kompleks sonning argumenti deyiladi,

$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ga $a+bi$ sonning trigonometrik shakli deyiladi. Burchak

$$\varphi \left\{ \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \right\} \text{ shartlardan}$$

topiladi. Odatda burchak φ ning

$[-2\pi; 0]$ yoki $[0; 2\pi]$ dagi qiymati olinadi.

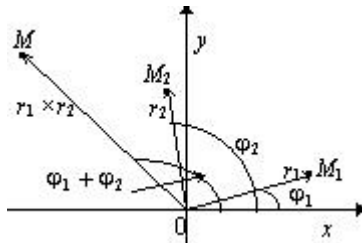
Misol: Algebraik ko'rinishdagi kompleks sonni trigonometrik ko'rinishga o'tkazish. $\alpha = 1+i$

$$r = |1+i| = \sqrt{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{demak, } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\alpha=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

4. Trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlar

ustida amallar bajarish.



1. Trigonometrik ko'rinishda berilgan ikki kompleks son ko'paytmasi shunday kompleks sonki, uning moduli ko'paytiruvchilar modullarining ko'paymasiga, argumenti esa ko'paytiruvchilar argumentlarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

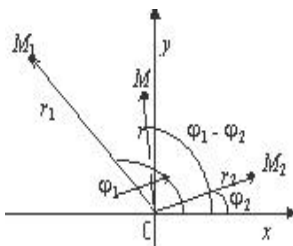
$$= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\text{Misol: } 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) \cdot 7(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ) =$$

$$= 14(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = -7 + 7\sqrt{3}i$$

$$4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right) = 24(\cos\pi + i\sin\pi) = -24$$

2. Trigonometrik ko'rinishda berilgan ikki kompleks son bo'linmasining moduli bo'linuvchi va bo'luvchi modullarining bo'linmasiga teng bo'lib, bo'linmaning argumenti bo'linuvchi va bo'luvchi argumentlarining ayirmasiga teng, ya'ni



$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\text{Misol: } \frac{2(\cos 107^\circ + i\sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ)} = \frac{2}{5} (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}i$$

$$\frac{\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ} = (\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = i$$

5. Muavr formulasi. Darajaga oshirish va ildizdan chiqarish.

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini n -chi darajaga oshirish uchun moduli n -chi darajaga oshiriladi, argumentiga n soni ko'paytiriladi. Agar n natural son bo'lib, $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trigonometric ko'rinishdagi son bo'lsa, u holda

$$\alpha^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

o'rinli bo'ladi. Bu formulaga Muavr formulasi deyiladi.

$$\text{Misol: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100} = (\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ)^{100} = (\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))^{100} =$$

$$= \cos(-3000^\circ) + i\sin(-3000^\circ) = \cos 120^\circ - i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kompleks sonni n -chi ildizdan chiqarish uchun moduli n -chi darajali ildizdan chiqariladi, argumenti esa n soniga bo'linadi.

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ ildiz quyidagi formula bilan topiladi:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

bunda n – natural son, $k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

$$\text{Misol: } W = \sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right);$$

$$1. \ k=0 \quad W_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$$

$$2. \ k=1 \quad W_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i\sin \frac{11\pi}{12} \right) \approx -1,08 + 0,3i$$

$$3. \ k=2 \quad W_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i\sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

6. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli.

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \quad (1)$$

ga Eyler formulasi deyiladi, bunda $e=2,71828\dots$, y – haqiqiy, i – mavhum sonlar. (1) da y ni $-y$ bilan almashtirsak,

$$e^{-iy} = \text{Cos}y - i\text{Siny} \quad (2)$$

(1) va (2) dan:

$$\text{Cos}y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \text{Siny} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}$$

hosil bo'ladi.

Kompleks sonni ko'rsatkichli shaklda yozish uchun uni avval trigonometrik shaklda yozib olamiz, so'ngra Eyler formulasidan foydalanamiz:

$$z = r(\text{Cos}\varphi + i\text{Sin}\varphi) = re^{i\varphi}$$

Misol: $i = \text{Cos}\frac{\pi}{2} + i\text{Sin}\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i};$

$$1 + i = \sqrt{2}(\text{Cos}\frac{\pi}{4} + i\text{Sin}\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

7. Kompleks sonlar haqida tarixiy ma'lumotlar.

Qadimgi Yunon matematiklari faqat natural sonlarni "haqiqiy" deb hisoblashgan, ammo Qadimgi Misr va Qadimgi Bobilda yangi eradan ikki ming yillar muqaddam amaliy hisob-kitoblarda kasrlarni qo'llay boshlashgan. Son haqidagi tushuncha taraqqiyotidagi navbatdagi muhim bosqich – manfiy sonlar bo'ldi. Ularni xitoy matematiklari yangi eradan ikki asr oldinroq kiritishgan edi. Yangi erting III a. da qadimgi yunon matematigi Diofant manfiy sonlarni ishlatgan. U bu sonlar ustidagi amallar qoidalarini ham bilgan. Hing olimlari VIII a. da manfiy sonlarni mufassal o'rganishdi, ular bu sonlarni "qarz" deb talqin qilishgan. Manfiy sonlar yordamida miqdorlarning o'zgarishini yagona usulda bayon qilish mumkin edi. Eramizning VIII a. dayoq musbat sonning kvadrat ildizi ikkita – musbat va manfiy qiymatga ega ekanligi, manfiy sonlardan esa kvadrat ildiz chiqarish mumkin emasligi, masalan. $x^2 = -9$ bo'lgan x sonini topib bo'lmasligini aniqlagan edi.

XVI a. da kub tenglamalarni o'rganish munosabati bilan manfiy sonlardan ham kvadrat ildiz chiqarish zarurati tug'ildi. Kub tenglamani yechish formulasida kub va kvadrat ildizlar qatnashadi. Bu formula tenglama bitta haqiqiy ildizga ega bo'lsa, (masalan, $x^3 + 3x - 4 = 0$ tenglama uchun) bekam-ko'st yaraydi, tenglama uchta haqiqiy ildizga ega bo'lgan holda esa (masalan, $x^3 - 7x + 4 = 0$) kvadrat ildiz ostida manfiy son hosil bo'laveradi. Natijada tenglamaning bu uchta ildizini to-pish yo'li taqiqlangan amal – manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish amali orqali o'tardi. Hosil bo'lgan paradoksni tushuntirish uchun italyan algebrachisi J. Kardano 1545 y. da yangi tabiatli sonlarni kiritishni taklif qildi. U haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega

bo'lmagan $x + y = 10, \quad xy = 40$ tenglamalar sistemasi $x = 5 \pm \sqrt{-15}, \quad y = 5 \pm \sqrt{-15}$

ko'rinishidagi yechimlarga egaligini ko'rsatdi, faqat bunday ifodalar bilan odatdagi algebraning qoidolari bo'yicha $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$ deb hisoblab ishlashni kelishib olish (shartlashib olish) kerak. Kardano bunday miqdorlarni "sof manfiy" va hattoki "g'ayri-mantiqiy manfiy" deb atadi, ularni foydasiz deb hisobladi va tatbiq qilmaslikka intildi. Biroq 1572 y. dayoq italyan algebrachisi R. Bombellining bunday sonlar ustida arifmetik amallarning dastlabki qoidalari berilgan kitobi chiqdi. Kitobda bunday sonlardan kub ildiz chiqarish qoidasi ham keltirilgan edi. "Mavhum sonlar" nomini 1637 y. da fransuz matematigi va filosofi R. Dekart kiritdi, 1777 y. da esa XVIII a. ning yirik matematiklaridan biri L. Eyler -1 sonni ("mavhum" birlikni) belgilash uchun frabsuzcha "*imaginaire*" ("mavhum") so'zining birinchi harfidan foydalanishni taklif etdi; bu simvol K. Gauss tufayli keng tarqaldi (1831). XVII a. davomida mavhumlikning arifmetik tabiati, ularga geometrik talqin berish imkoniyatining muhokamasi davom ettirildi.

Kompleks sonlar ustida amallar bajarish texnilasi asta-sekin rivojlana bordi. XVII va XVIII a. chegarasida, avval, manfiy sonlardan n -chi darajali ildizlarning umumiy nazariyasi, keyinchalik esa ingliz matematigi A. Muavrning $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ formulasiga asoslanib ixtiyoriy kompleks sonlardan n -chi darajali ildiz nazariyasi yaratildi (1707). Bu formuladan foydalanib karrali yoylarning kosinus va sinuslari uchun ham tengliklar keltirib chiqarish mumkin.

XVIII a. oxirida fransuz matematigi J. Lagranj mavhum miqdorlar endi matematik analizni qiynamay qo'ydi, deb ayta olgan. Matematiklar o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar yechimlarini kompleks sonlar yordamida ifodalashni o'rganib olishdi. Bunday tenglamalar, masalan, moddiy nuqtaning qarshilik ko'rsatuvchi muhitdagi tebranish nazariyasida uchraydi. Undan avvalroq shvetsariyalik matematik Ya. Bernulli kompleks sonlarni integrallari hisoblashga tatbiq qildi.

XVIII a. davomida kopleks sonlar yordamida ko'plab muammolar, jumladan, kartografiya, gidrodinamika va рюлю lar bilan bog'liq amaliy masalalar ham haletilgan bo'lsa-da, bu sonlar nazariyasi hali qat'iy mantiqiy asoslanmagan edi. Shuning uchun ham fransuz matematigi P. Laplas mavhum sonlar yordamida olinadigan natijalar – faqat yo'llanma, ular bevosita qat'iy isbotlar bilan tasdiqlangandan keyingina chin haqiqat xarakterini oladi, deb hisoblagan.

Kompleks sonlarning geometrik talqini kompleks o'zgaruvchining funksiyalari bilan bog'liq ko'pgina tushunchalarni aniqlash imkonini beradi, ularning qo'llanish sohasini kengaytiradi. Kompleks sonlar tekislikda vektorlar yordamida tasvirlangan kattaliklar bilan ish ko'riladiganko'pgina muammolarda: ыгнғдшл oqimini o'rganishda, elastiklik nazariyasi masalalarida foydalanish mumkinligi ravshan bo'ldi.

Kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi taraqqiyotiga sovet olimlari katta xissa qo'shdilar. N. I. Musxelishvili ularni elastiklik nazariyasiga, M. V. Keldish, M. A. Lavrentyev

aero- va gidrodinamikaga, N. N. Bogolyubov va V. S. Vladimirov maydonning kvant nazariyasi muammolariga tatbiqlari bilan shug'ullandilar. O'zbekistonlik matematik I. S. Arjanix kompleks sonlarni maydonlar nazariyasiga qo'lladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. T. Sharifova, E. Yo'ldoshev. Matematik analizdan misol va masalalar yechish, "O'qituvchi", T., 1996.
2. A. Abdurahmonov, A. M. Abramov, A. A'zamov, M. Mirzaaxmedov va boshqalar. Yosh matematik qomusiy lug'ati, "Qomuslar bosh tahririyati", T., 1991.
3. A. Abduhamedov. Algebra va matematik analiz asoslari I qism, "O'qituvchi", T., 2001.