

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚЎЛЁЗМА ХУҚУҚИДА

УДК. 517.946

ХЎЖАХОНОВ ЗАЙЛОБИДДИН ЗОКИРОВИЧ

«Алмаштириш операторлари ва уларнинг татбиқлари»

5A460101 – Математик таҳлил

мутахассислиги бўйича магистр

академик даражасини олиш учун

**МАГИСТРЛИК
ДИССЕРТАЦИЯСИ**

**Илмий раҳбар: физ.-мат. фанлари номзоди,
доцент Ш.Т.Каримов**

Фарғона – 2012 й.

МУНДАРИЖА

Кириш	3
I-БОБ.Алмаштириш операторлари	9
1.1-§. Штурм-Лиувил операторлари учун алмаштириш операторлари.....	13
1.2-§. Векуа- Эрдейи- Лаундес алмаштириш операторлари.....	21
1.3-§. Ўзгарувчи коэффициентли умумий дифференциал операторлар учун алмаштириш операторлари.....	25
1.4-§. Сонин ва Пуассон типдаги алмаштириш операторлари.....	32
1.5-§.Алмаштириш операторларининг каср интегралдифференциаллаш операторлари билан боғланиши.....	38
II- БОБ. Бессел функциялари.	
2.1-§. Биринчи турдаги Бессел функциялари.....	45
2.2-§. Иккинчи турдаги Бессел функциялари.....	50
2.3-§. Турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар.....	53
2.4-§. Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари.....	56
III- БОБ $A_{kx}^{S,\lambda}$, $B_{kx}^{S,\lambda}$ ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ операторлар ва уларнинг хоссалари ...	59
3.1-§. $A_{kx}^{S,\lambda}$ ва $B_{kx}^{S,\lambda}$ - операторларни Векуа-Эрдейи-Лаундес алмаштириш операторлари шартларини қаноатлантириши ҳақида.	66
3.2-§. Ядросида Бессел функцияси қатнашган интеграл операторларнинг ярим группа ташкил этиши ҳақида.....	70
Хулоса	72
Фойдаланилган адабиётлар	74

КИРИШ

Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислом Абдуганиевич Каримов кадрлар тайёрлаш бўйича Миллий дастур ҳақида гапирганларида «... ҳар томонлама етук *юқори малакали кадрлар тайёрлаш* Дастуримизнинг асосий шарти бўлиши керак» деган эдилар. Фақат шундай кадрлар таълим, илм-фан ва ишлаб-чиқаришнинг, умуман иқтисодиётнинг рақобатдошлигини ойдинлаштирадилар, белгилайдилар.

Интеллектуал ҳамда саноати тараққий этган мамлакатларда таълим тизимининг бош мақсади-бу рақобатбардош товарлар етиштириш ва юқори малакали кадрлар тайёрлаш орқали рақобатга қодир хизматларни кўрсатишдир. Бу мамлакатларда касбий жамият тараққиётида тобора катта аҳамият касб этмоқда. Юқори малакали кадр тайёрлашда таълим, илм-фан ва ишлаб-чиқаришнинг қай даражада ўзаро боғланган, ўзаро ҳамкорликка эришган бўлса, профессионал таълимдан фойда шунчалик кўп бўлади.¹

Президентимиз И.А.Каримовнинг «Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида» китобида 80 йиллар охири 90 йиллар бошларида Ўзбекистондаги сиёсий, иқтисодий, маданий-маънавий аҳвол чуқур таҳлил этилиб, мавжуд муаммолар билан бирга бу борада қилиниши лозим бўлган ишлар мантиқий изчилликда акс эттирилган. Ўша мураккаб бир даврда республика раҳбари жамият ҳаётига комплекс ёндашиб, бошқа ўткир масалалар сингари соғлиқни сақлаш, таълим, илм-фан, маданиятнинг муҳим соҳасидаги муаммоларга ҳам алоҳида эътибор қаратган, уларни самарали ҳал этиш учун долзарб ғоя ва фикрларни ўртага ташлагани унинг узоқни кўра билиш қобилиятли, билими, метиндек иродаси ва жасурлигидан далолат беради.

Давлатимиз раҳбари республикага раҳбар бўлиб тайинланган кунданок аҳоли саломатлиги, илм-фан, таълим-тарбия, маданият ва спорт ишларига

¹ Кадрлар тайёрлаш бўйича Миллий дастур (махсус курс) Т:1997.31-бет.

муҳим эътибор қаратди. Чунки, республикада ижтимоий инфратузилма тармоқлари: соғлиқни сақлаш, халқ таълими, мактабгача болалар муассасалари жуда оғир аҳволга тушиб қолган эди. Мактаб ва касалхоналарнинг 60 фоизи нобоп биноларда жойлаштирилган эди. Инсоннинг ҳар томонлама уйғун камол топиши, унинг шахс сифатида маънавий ривожланиши у ёқда турсин, кўпинча яшаш учун керак бўлган энг оддий нарсалар ҳам етишматган эди.

Фанга истедодли ёшларнинг кириб келишини таъминлаш учун оддий мактабнинг, ҳатто, умум таълим мактабларининг фаолияти такомиллаштирилиши режалаштирилди. Бу режалаштирилган вазифалардан куйидагиларига мувофиқ:

- истедодли ва иқтидорли ёшларни излаб топиш, қўллаб-қувватлаш ҳамда уларнинг қобилиятини ривожлантириш учун барча шарт-шароитлар яратишдан;
- республикада узоғи билан 2010 йилгача илмий сиёсат концепсиясини ҳамда Ўзбекистон Фан ва техникани ривожлантиришнинг тегишли дастурини ишлаб чиқиш.²

Тарихга назар солсак, юртимиз заминидан етишиб чиққан, Бағдоддаги «Байтул-ҳикма» ва Хоразм Маъмун академиясидаги фаолият олиб борган, илм-фансоҳасидаги тенгсиз кашфиётлари, маънавий жасорати билан тарихда ўчмас из қолдирган буюк мутафаккир аجدодларимиз ҳақида ҳам гапириб ўтиш мақсадга мувофиқдир.

Хусусан, Хоразм Маъмун академияси фаолиятини оладиган бўлсак, бу мўтабар илмий масканда Шарқ ва Ғарб ўлкаларидан келган, турли миллат ва динга мансуб бўлган олимлар фаолият кўрсатган бўлса-да, унинг негизини Абу Наср ибн Ироқ, Абу Райҳон Беруний ва Абу Али ибн Сино, Маҳмуд

² Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислам Каримовнинг «Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида» китобини ўрганиш бўйича ўқув-услубий қўлланма.Т.:«Ўзбекистон»НМИУ, 2011.106,108,109-бетлар.

Хўжандий, Аҳмад ибн Муҳаммад Хоразмий ва Аҳмад ибн Ҳамид Найсабурий каби мана шу бизнинг минтақамизда туғилиб, камол топган етук алломалар ташкил этгани барчамизга ғурур ва ифтиҳор бағишлайди.³

Аждодларимизга муносиб издош, юртимиз тараққиётига муносиб хизмат қилиш менинг асосий мақсадим. Шунинг учун ушбу магистрлик диссертациямда мужассам эттиришга ҳаракат қилдим ва келажакда ушбу ишларимни давом эттириш менинг мақсадим. Магистрлик диссертациямнинг мавзуси “Алмаштириш операторлари ва уларнинг татбиқлари” деб номланади.

Алмаштириш операторлари муҳим татбиқий аҳамиятга ега. Алмаштириш операторлари назарияси усуллари ва у билан боғлиқ барча масалалар у ёки бу даражада кўпгина математиклар ишларида қўлланилган. Бир нечталарини қайд етамиз: А. Боуменир, Ҳ. Бегеҳр, Ж. Бетансор, Б. Брааксма, Л.Брагг, Р. сарролл, М. Чао, Ҳ.Чебли, И. димовски, С. Дункл, Ж. Делсарте, Р. Гилберт, В. Ҳуцон, Ж.С.Пйм, Ф. сантоса, Ж. Сиерсма, Ҳ. деСноо, К. Стемпак, В. Тҳйссен, К. Тримече, Ву Ким Туан, Агранович З.С., Андрошук А.А., Бритвина Л.Е., Буслаев В.С., Валицкий Ю.Н., Волк В.Я., Глушак А.В., Горбачук М.Л., Гаджиев А.Д., Гринив Р.О., Гулиев В.С., Житомирский Я. И., Иванов Л.А., Ерёмин М.С., Карп Д.Б., Катрахов В.В., Качалов А.П., Килбас А.А., Киприянов И.А., Ключанцев М.И., Кононенко В.И., Коробейник Ю.Ф., Кулиш П.П., Курилёв Я.В., Лаптев Г.И., Левин Б.Я., Левитан Б.М., Ляхов Л.Н., Ляховецкий Г.В., Маламуд М.М., Марченко В.А., Мацаев В.И., Микитюк Я.В., Муравник А.Б., Наймарк М.А., Нагнибида Н.И., Олевский М.Н., Платонов С.С., Повзнер А.Я., Поляцкий В.Т., Сахнович Л.А., Ситник С.М., Сохин А.С., Сташевская В.В., Фаддев Л.Д., Фаге Д.К., Фомин В.Л., Хачатрян И.Г., Хромов А.П., Шмлевич С.Д., Ярославцева В.Я. Бу рўйхат яна ҳам тўлиқ эмас ва кенгайтиши мумкин.

³ Каримов И.А. Юксак манавият-енгилмас куч.Т.:«Манавият» 2008. 161-бет.

Ўзбекистонда бу йўналишда М.С.Салоҳиддинов, А.Қ.Ўриновларнинг қилган илмий ишларини ва олинган натижаларини келтириш мумкин.

Мавзунинг долзарблиги. Атрофимизда юз бераётган воқеа ва ҳодисалар, юз бераётган жараёнлар бирон-бир шаклда дифференциал тенгламалар билан таснифланадиган жараёнларнинг мураккаб даражага қараб, хусусий ҳосилали тенгламалар ҳам мураккаблашиб боради. Уларни ечишда алмаштириш операторларининг аҳамияти катта ўринни эгаллайди.

Хусусан, агар A операторли $Au = f$ тенглама кўрилатган бўлса, u ҳолда унга (1) хусусиятли алмаштириш операторлари T ни қўллаб, $Bv = g$ кўринишдаги B операторли тенгламага эга бўламиз, бу ерда $v = Tu$, $g = Tf$ белгиланган. Шунинг учун агар B операторли иккинчи тенглама анча сода бўлса ва унинг учун ечим формулалари маълум бўлса, u ҳолда биз биринчи $u = T^{-1}v$ тенгламани ечиш учун кўрсатмаларга ҳам эга бўламиз. Албатта, бунда алмаштиришнинг тескари оператори кўрилатган фазоларда мавжуд бўлиши ва аниқланиши керак. Ечимнинг аниқ хоссаларини олиш учун эса ушбу тескари операторнинг аниқ хоссалари маълум бўлиши керак. Алмаштириш операторлари техникасининг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида қўлланилишининг асосий кўринишларидан бири ана шу.

Ишнинг мақсади. Гиперболик ва аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни қўйиш ва тадқиқ қилишда муҳим аҳамиятга эга бўлган алмаштириш операторларини ўрганиш ва ундан фойдаланиш.

Текшириш усуллари. Қўйилган муаммоларни текширишда Вольтера типдаги ядросида Бессел функцияси қатнашган чизикли алмаштириш операторлардан фойдаланилган.

Илмий янгилиги, назарий ва амалий аҳамияти. Алмаштириш операторлари назарияси спектрал операторлар назариясида, псевдодифференциал операторлар назариясида, Штурм-Лиувилл ва Дирак

операторлари учун тескари масалаларни ўрганишда, хусусий хосилали сингуляр коэффициентли (ёки бузиладиган) дифференциал тенгламаларни ўрганишда ва бошқа кўп масалалари тадқиқ этишда қўлланилмоқда.

Ядросида Бессел функцияси қатнашган интеграл операторларнинг алмаштириш операторлари бўлиши ва бу операторларнинг ярим группа хоссалари ушбу ишда биринчи марта исботланди.

Ишнинг муҳокамаси. Ишда олинган натижалар Фарғона давлат университети дифференциал тенгламалар кафедраси илмий семинари, ФарДУ профессор-ўқитувчилари ва талабаларининг илмий-амалий анжуманида, “Математика Фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари” Республика илмий-амалий анжуманида, “Ўзлуксиз таълим тизимида математика ва информатика фанларини ўқитишни такомиллаштириш масалалари” номли Республика миқёсидаги илмий-техник анжуманида маъруза қилиниб, муҳокамадан ўтказилган.

Чоп этилган ишлар. Диссертацияда олинган натижалар [7-9] илмий мақолалар сифатида чоп қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Магистрлик диссертацияси кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборот бўлиб, 79 бетни ташкил қилади.

Кириш қисмида мавзунинг қисқача тарихи, унинг долзарблиги ва диссертацияда қилинган ишларнинг қисқа баёни келтирилган.

Биринчи бобда оператор тушунчаси, унинг бази хоссалари, алмаштириш операторини таърифи ва унинг баъзи тадбиқлари ҳақида сўз юритилган.

Биринчи бобнинг биринчи парагрифида Штурм-Лиувил операторлари учун алмаштириш операторлари, иккинчи парагрифида Векуа- Эрдейи- Лаундес алмаштириш операторлари, учинчи парагрифида ўзгарувчи коэффициентли умумий дифференциал операторлар учун алмаштириш операторлари, тўртинчи парагрифида Сонин ва Пуассон типдаги алмаштириш

операторлари, бешинчи парагрифида алмаштириш операторларининг каср интагроидифференциаллаш билан боғланиши келтирилган.

Иккинчи бобда Бессел функциялари ҳақида сўз юритилган. Иккинчи бобнинг биринчи парагрифида биринчи турдаги Бессел функциялари, иккинчи парагрифида иккинчи турдаги Бессел функциялари, учинчи парагрифида турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар, тўртинчи парагрифида Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари, бешинчи парагрифида Бессел функцияларининг ортогоналлиги ва уларнинг илдизлари, охирги олтинчи парагрифида ихтиёрий функцияни Бессел функциялари бўйича қаторга ёйиш бўйича сўз борган.

Учинчи бобда М.С.Салоҳиддинов, А.Қ.Ўриновларнинг $A_{kx}^{S,\lambda}$, $B_{kx}^{S,\lambda}$ ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ операторлар ва уларнинг хоссалари ҳақида сўз юритилган. Учинчи бобнинг биринчи парагрифида ядросида Бессел функцияси қатнашган алмаштириш операторлари ҳақида, иккинчи парагрифида ядросида Бессел функцияси қатнашган интеграл операторларнинг ярим группа ташкил этиши ҳақида олинган натижалар ҳақида сўз борган.

I-БОБ. Алмаштириш операторлари.

Тўпламлар назариясида тўпламлар орасидаги муносабат асосан акслантириш орқали аниқланади. Бирор X тўпламни (ёки бирор $E \subset X$ қисмини) иккинчи Y тўпламга акслантириш учун X нинг ҳар бир элементини Y тўпламнинг бирор тайин элементига мос келтириш керак. Хусусий ҳолда X ни X га (яъни тўпламни ўзини ўзига) акслантириш ҳам мумкин. Тўпламлар орасидаги акс эттириш жараёнини шартли равишда $y = Ax$ ($x \in X, y \in Y$) кўринишида ёзиш мумкин.

Таъриф. Агар X ва Y ихтиёрий тўпламлар бўлса (яъни сонли бўлмаслиги ҳам мумкин), акслантириш қоидаси A **оператор** деб юритилади.

Демак, агар X тўламининг ҳар бир x элементига тайин A қоида асосида Y тўламининг биттагина y элементи мос келтирилган бўлса, X тўламда A оператор берилган дейилади. X тўлам A операторнинг аниқланиш соҳаси, x эса A операторнинг аргументи дейилади. $y = Ax$ кўринишида тасвирланган ҳар бир $y \in Y$ элемент A операторнинг қиймати ёки $x \in X$ элементнинг Y даги тасвири деб аталади.

Шунга этибор бериш керакки, $y = Ax$ тенглик маънога эга бўлиши учун ундаги A символ X тўпламни Y тўпламга акс эттириш қоидаларига таалукли барча информацияларни қабул қила олиши керак.

Маълумки, дифференциал тенгламалар функционал тўпламларни бири-бирига акс еттиради. Масалан,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2p(t) \frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = y(t) \quad (1.1)$$

дифференциал тенгламада $p(t), q(t)$ узлуксиз функциялар, $x(t)$ ни эса иккинчи тартибли ҳосиллагача узлуксиз функция деб фараз қилинса, у ҳолда (1.1) дифференциал тенглама иккинчи тартибли ҳосиллагача узлуксиз бўлган функциялар синфи $C^{(2)}$ ни узлуксиз функциялар синфи C га акс эттиради. Операторни

$$A = \frac{d^2}{dt^2} + 2p \frac{d}{dt} + q \quad (1.2)$$

ифода ёрдамида киритсак, (1.1) тенглама ушбу

$$Ax = y$$

кўринишга келтирилади.

Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Фақат ҳамма ҳолларда операторли тенгликдан аслига ўтиш қоидаси, яъни операторнинг маъноси формулалар ёки таърифлар орқали аниқ берилиши керак.

Демак, $y = Ax$ оператор берилиши учун: а) иккита X ва Y ; б) A операторнинг аниқ маъноси берилиши керак.

Яна шуни таъкидлаш керакки, оператор орқали учрайдиган деярли ҳамма тенгламаларни ягона усул билан ифодалаш мумкин, бу ҳар хил масалаларни умумий нуқтайи назардан қараб, уларни текшириш имконини беради.

Оператор тенгламаларни ўрганилаётганда энг аввал шу операторларнинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳасига этибор қилинади. Шу тўпламларнинг берилишига қараб операторли тенгламаларнинг ечиш усули ҳам ҳар хил бўлади.

Таъриф 1. (A, B) операторлар жуфти берилган бўлсин. Агар

$$TA = BT \quad (1.3)$$

муносабат бажарилса, T оператор алмаштириш оператори (АО-transmutation) деб аталади.

(1.3) муносабат бошқача айтганда, ўрам хусусиятга эга бўлади, у ҳолда T АО A ва B операторларни ўрайди. (1.3) муносабатнинг қатъий таърифга айланиши учун A ва B операторлар аниқланган қилаётган фазоларни ёки функциялар тўпламларини кўрсатиши лозим. Баъзан АО таърифига тескарилик шартини ҳам келтиралади, бу эса зарур хусусият бўлади. Аниқ ишларда A ва B операторлар одатда дифференциал бўлади, T - стандарт фазолардаги чизиқли оператор. Маълумки, АО тушунчаси алгебрадаги

матрицалар ўхшашлиги тушунчасининг умумлашганидир. Аммо АО лар ўхшаш (ёки эквивалент) операторларга келтирилмайди, чунки боғлам операторлар қоидага кўра табиий фазоларда чегараланмаган бўлади. АО га тескари оператор, худди ўша фазода мавжуд ва аниқланган бўлиши мумкин эмас. АО боғлам операторлар спекторлари мос тушмаслиги мумкин. Одатда алмаштириш операторлари қандай қўлланилади? Масалан, биз қандайдир етарлича мураккаб тузилган А операторни ўрганайлик. Бунда керакли хусусиятлар модели яна ҳам сода В оператор учун маълумдир. У ҳолда, АО (1.3) мавжуд бўлса, кўпинча В оператор хусусиятларини А га кўчиришга эришилади. АО ни аниқ масалаларда қўллашга келтирилган схема ана шундай бўлади.

АО назариясининг берилиши ва тадбиқларига [10-15] монографияларнинг ҳақиқий қисмлари бағишланган, бундан ташқари, АО нинг турли хил масалалари шу каби [16-23] ишларда ҳам кўриб чиқилади. Афсуски, АО га тўлиқ бағишланган ўзбек тилида ёзилган китоблар йўқ. Масалан, худди Роберт Керролнинг инглиз тилидаги китоблари каби. Берилаётган маълумот АО назариясининг ўзбек тилидаги биринчи кўрсатмаси бўлса керак.

Битта терминологик изох қиламиз. Ғарб адабиётларида АО учун “transmutation” деган атама қабул қилинган. Бу атама Ж.Делсарт исми билан боғлиқдир. Р.Керол кўрсатишича шунга ўхшаш “transformation” деган атама Фурье, Лаплас, Меллинларнинг ва шунга ўхшаш бошқа классик интеграл алмаштиришларга бириктирилади. Бундан ташқари, “transmutation” деган атама румин тилларида қўшимча ном “сеҳрли айланиш” номини олган. Бу АО аҳамиятини аниқ билдиради.

АО назариясининг зарурлиги унинг кўп сонли тадбиқлари билан исботланган АО усуллари Фурьенинг умумлашган алмаштиришларини, спектрал функцияни ва Гелфанда-Левитаннинг машҳур тенгламасининг ечимини аниқлаган ҳолда тескари масалалар назариясида кенг қўлланилади;

АО орқали тарқалиш назариясида Марченконинг ҳам машҳур тенгламаси олинади; спектрал назарияда изларнинг маълум бўлган формулалари ва спектрал функция асимптотикаси олинади; АО ядросини баҳолаш тескари масалалар ва тарқалиш масалаларининг корректлигига жавоб беради; чизикли бўлмаган дифференциал тенгламалар назариясида Ласа усули АО ни ечимлар мавжудлигини исботлаш ва солитонларни куришга қўлланилади. АО нинг аниқ турлари бу- умумлашган аналитик функциялар назариясининг ва умумлашган силжиш операторларининг қисмларидан иборат. Хусусий ҳосилали тенгламалар назариясида АО усуллари баъзи масалаларнинг аниқ ечимларини куриш, сингуляр ва бузиладиган чегаравий масалаларни ўрганиш, псевдо дифференциал операторларни ўрганиш, чегара қисмида ажойиб ечимли масалаларни ўрганиш, баъзи эллиптик ва ултра эллиптик тенгламалар ечимлари камайиш тезлигини баҳолашни ўрганишда қўлланилади. АО назарияси хос функциялар ва ядродаги хос функцияли интеграл операторлар қандайдир янги классификациясини бериш имконини яратади, шунингдек, каср интегродифференциаллашнинг турли хил операторларини тузиш имконини беради. Функциялар назариясида АО нинг функционал фазолар ва Харди операторларини умумлаштириш, Пели- Винер назариясини кенгайтиришга тадбиқлари топилган. АО усуллари катта мувоффақият билан кўпгина татбиқий масалаларда қўлланилмоқда: масалан, ёт ечимларини баҳолаш ва квант тарқалиш назариясида, еҳтимоллар назарияси ва тасодифий жараёнларда, чизикли стохастик баҳолашда, филтрацияда, стохастик тасодифий тенгламаларда, геофизика ва транстовимли газодинамиканинг тескари масалаларида.

Кейинги параграфда АО ни Штурм-Лиувил масалаларига татбиқини қисқача кўриб чиқамиз.

1.1 §. Штурм-Лиувил операторлари учун алмаштириш операторлари.

Штурм-Лиувилнинг содда операторини ўровчи турли хил АО ларни ясаш масаласини кўриб чиқамиз

$$y''(x) + \lambda y(x) = (L_0 y)(x) \quad (1.4)$$

Штурм-Лиувил операторининг умумий кўриниши билан

$$y''(x) + q(x)y(x) + \lambda y(x) = (Ly)(x) \quad (1.5)$$

(1.5) даги $q(x)$ функция потенциал функция деб аталади. Бу функция комплекс функция бўлиши мумкин. $\lambda \in \mathbb{C}$, ўзгарувчи $x \in \mathbb{R}$. Биз мос келувчи $f(x)$ функцияда ва берилган $q(x)$ ва λ ларда

$$SLf = L_0 Sf \quad (1.6)$$

айниятни қаноатлантирувчи S АО ни излаймиз.

АО га берилган табиий талаблар: C- чизиқли ва стандарт фазоларда айланади. C нинг чизиқли боғланишини талаб қилиш λ га боғлиқ бўлмаган муносабатга олиб келади:

$$S(D^2 + q(x))f = D^2 Sf, \quad (1.7)$$

бу ерда $D = \frac{d}{dx}$ деб белгиланган. Айланишни талаб қилиш табиий ҳолатда АО

S ни интеграл оператор

$$(Sf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)f(t)dt \quad (1.8)$$

кўринишида излашга олиб келади. Бунда $K(x,t)$ ядро умумий ҳолда тақсимот (умумлашган функция) бўлиши мумкин (масалан, $K(x,t) = \delta(x-t) + G(x,t)$, G - силлиқ функция, бу ерда $\delta(x)$ - умумлашган Дирак функцияси).

АО ни қуришга иккита турлича ёндашув мавжуддир.

Биринчидан улар фақат операторлар билан $L_0 y = 0$, $Ly = 0$

тенгламаларни ечишда қурилади. Бундай усул АО бўйича классик ишларда

қабул қилинган, ҳамма китобларда худди шу усул берилмоқда. Лекин, иккинчи ёндашиш ҳам бор. Бу усул янада табиий ва умумийдир. Биз қисқача айнан шу ёндашишни кўриб чиқамиз. У умумий қабул қилинган деб ҳисобланмайди. Бу ёндашувдаги ўрганилаётган АО лар синфи анча бойлиги аниқ. Бошқа томондан, $\forall \lambda$ ларда хос функцияларга қурилган оператор, ҳамма асосий фазоларда хос функциялар системасининг тўпламига кўра етарлича кенг синфларга тарқалиши мумкин. Шунинг учун, кўриб чиқиляётган АО лар тўпламининг торайишидан ташқари, биринчи умумий қабул қилинган ёндашиш тадбиқ этиляётган ортиқча чекланганликни келтириб чиқармайди.

Биз қисқалик учун қандайдир еркинлик билан дифференциал ва интеграл ифодадарни операторлар деб аташимизни изохлаймиз. Бунда операторлар аниқланган фазоларни ҳар доим ҳам белгилаймиз. АО яшашда $K(x,t)$ ядролар иккала ўзгарувчи бўйича аниқ силлиқликка эга бўлади.

Юқорида кўриб чиқилгандан маълумки, АО ларни иккинчи тур Волтерр интеграл операторлари кўринишида излаш янада мақсадга мувофиқдир:

$$(Sf)(x) = f(x) + \int_c^x K(x,t)f(t)dt, \quad (1.9)$$

Бу ерда $K(x,t)$ - силлиқ функция, c сони $\bar{R}$ кенгайтирилган сонлар ўқиға тегишли. Шу билан бирға [23] да мумкин бўлган бошқа операторлар ҳам кўриб чиқилган. (1.9) Волтерр операторлари стандарт фазоларда осон айланади. Интеграллаш лимитини танлашнинг еркинлиги ҳар бир конкрет ҳолларда берилган. Масалаға енг яхши мос келувчи ўша АО ларни қўллаш имконини беради. Хусусий ҳолда, $c=0$ да биринчи марта А.Й.Повзнер ва Б.М.Левин томонидан қурилган АО лар ҳосил бўлади([24]) (шунингдек, [25]ға ҳам қаранг). $c=+\infty$ да эса биринчи марта Б.Й.Левин [26] томонидан қурилган АО лар ҳосил бўлди, охиргилари чексизликда асимптотикани сақлайди ва тарқалиш квант назариясининг тескари масалаларини ечишда

қўлланилади. АО нинг (1.9) ядроси учун мураккаб бўлмаган ҳисоблашлар натижасида

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + q(t)K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K, \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{1}{2} q(x), \quad (x, t) \in \Omega \subset R^2, \quad (1.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow c} W_t(f, K(x, t)) = \lim_{t \rightarrow c} W(x) = 0. \quad (1.12)$$

(Ω - орқали $K(x, t)$ функциянинг аниқланиш соҳаси берилган, унинг охири $t = x$ диаганалнинг қисмини ўз ичига олади. W_t - t бўйича олинган ҳосилали Вронский дитерминанти).

(1.10) тенглама биз кўриб чиқаётган масалага стандарт бўлади. (1.12) шарт c нуқтанинг ажралганлигини кўрсатади. У $f(x)$ функцияга ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи $f'(x)$ га нисбатан $x \rightarrow c$ да чегаравий шартга келтирилади ва Φ функциялар синфни танлаш имконини беради. Енг муҳим (1.11) тенглик шуни кўрсатадики, АО $K(x, t)$ ядронинг $t = x$ диаганалдаги қиймати $q(x)$ потенциални тиклаш имконини беради. Бу факт тескари масалалар назариясида асосий ҳисобланади. Шунинг учун, тескари масалаларни ечишнинг кўп тарқалган усуллари АО ядросини айнан спектрал функция бўйича топишга келтирилади (худди Б.Й.Левин томонидан топилган Гелфанд – Левитан тенгламаси каби) ёки тарқалишнинг берилганлари бўйича (Марченко тенгламасидаги каби) (1.10-1.12) система ечимини топиш учун Φ синфни шундай белгилаш керакки, (1.12) шарт бажарилсин, масалан, $f(x) \in C^2$, $f(c) = f'(c) = 0$. Сўнгра, ҳаракатларнинг қуйидаги режаси амалга оширилади. Биринчи кадамда, хусусий ҳосилала тенгламалардан интеграл тенгламаларга ўтилади. Бу тенгламалар эквивалент эмас, лекин интеграл тенгламаларнинг ҳар бир ечими келиб чиқувчи гиперболик тенгламани қаноатлантиради. Бу кадам АО нинг қандайдир ядросининг мавжудлигини ва унинг аниқланган силлиқлиги исботланади. Иккинчи кадамда ядро учун

қўшимча шартлар текширилади ва Φ функцияларнинг мос келувчи синфига танланади.

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + q(t)K, \quad (1.13)$$

тенгламани $t = x$ диагоналда ((1.11) га қаранг) қўшимча шарт билан ечишга ўтамиз.

$$K(x, x) = \frac{1}{2} q(x), \quad (1.14)$$

$$U = \frac{1}{2}(x+t), \quad V = \frac{1}{2}(x-t) \quad (1.15)$$

формулалар бўйича ўзгарувчиларни стандарт алмаштиришни бажарамиз.

Бунда $t = x$ диаганалнинг янги ўзгарувчиларда тенгламаси $V = 0$ кўринишга эга бўлади.

Янги ўзгарувчиларда ядро учун белгиланишни киритамиз:

$$H(u, v) = K(u+v, u-v) = K(x, t) \quad (1.16)$$

H функция учун (1.11), (1.12) муносабатлардан янги

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = q(u-v)H, \quad (1.17)$$

$$H(u, 0) = \frac{1}{2} \int_c^u q(s) ds \quad (1.18)$$

ларга ўтамиз. Бу ерда $q(u-v)$ функция берилган бўлиши керак, c ихтиёрий сон, $c = \pm\infty$ бўлиши мумкин.

Муҳим изохни қилиш зарур. (1.15) алмаштириш формулаларидан $U > 0, V > 0$ бўлгани каби $U < 0, V < 0$ ҳам бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

(1.17)-(1.18) система бу битта бошланғич шартли Коши масаласидир. Шунинг учун бу система $q(q(x) \in C^1)$ да табиий фаразларда чексиз кўп ечимга эга бўлади. Демак, ҳар бир $q(x)$ потенциалда чексиз кўп АО мавжуддир, масалан (1.9) кўринишдаги каби. Бу эса бир потенциалда ҳар бир аниқ масала

учун мос келувчи турли хил АО ларни танлаш мимкин бўлган татбиқларда янада қулай бўлади. (1.17)-(1.18) системани қаноатлантирувчи ядроларнинг қандайдир синфини тузишнинг йўлини келтирамиз. Бунинг учун

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_c^u q(s) ds + \int_d^u d\alpha \int_0^v q(\alpha - \beta) H(\alpha, \beta) d\beta \quad (1.19)$$

интеграл тенгламанинг C^2 - ечими (1.17)-(1.18) систамани $c, d \in \bar{R}$ ихтиёрий сонлар учун қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш етарли. (1.19) тенгламанинг “рост” хулосаси Риман функциясини қўллаган ҳолда маълум стандарт схема бўйича ўтказилади. Шунинг учун, АО назарияси учун Риман функциясини [27-30] аниқ кўринишдаги аниқ тенгламаларда топиш муҳим аҳамиятга эга. Бу йўналшда Куйбишев-Самара математика мактабининг С.П.Пулкин ва В.Ф.Волкодавлов [29-30] ишларини кўрсатиш мумкин. (1.19) тенгламани турлича c, d лар билан ўрганишнинг муҳумлиги шундаки, биз бир вақтнинг ўзида Повзнер- Левитан турида АО ни яшадан пайдо бўладиган $c = d = 0$ ҳолатни ҳам ва Ленитан турида АО ни яшадан пайдо бўладиган $c = d = +\infty$ ҳолатни ҳам, шунингдек турли хил $c, d \in \bar{R}$ лар ҳолатини ҳам ўрганиш имкониятига эга бўламиз. Одатда АО нинг бу турлари алоҳида ўрганилган, ихтиёрий $c, d (c, d \neq 0, c, d \neq +\infty)$ ҳолати эса кўриб чиқилмаган.

(1.19) интеграл тенглама учун ечимнинг мавжудлиги исботлаш қийинчилик туғдирмайди, у кетма- кет яқинлашиш усули орқали ўрганилади. Бунда ечим Нейман [31] қатори билан келтирилади. Масалан, $c = d = 0$ ҳолат ва йиғинди потенциал учун қуйидаги типик натижа [10-15, 17, 18] ҳосил бўлади.

Теорема 1. $q(x) \in C^k$ функция ва $c = d = 0$ берилган бўлсин. У ҳолда (1.19) тенглама

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right) - \sigma_1\left(\frac{x-t}{2}\right)\right), \quad (1.20)$$

баҳолашни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлади, бу ерда

$$\omega(u) = \max_{0 \leq s \leq u} \left| \int_0^s q(y) dy \right|, \sigma_0(x) = \int_0^x |q(t)| dt, \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt. \quad (1.21)$$

белгилашлар киритилган.

Агар $q(x)$ функция $k \geq 0$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, АО $K(x, t)$ ядро иккала ўзгарувчи бўйича $k+1$ узлуксиз ҳосилага эга бўлади. Бу ҳолатда АО (1.9) га тескари бўлган операторнинг C^2 ёки L^2 фазоларда мавжудлиги ва ягоналиги шунга ўхшаш исботланади. Тескари операторни ядроси учун 1 теорема ўхшаш баҳолар, ядро силлиқлиги, тўғри ва тескари операторлар ядролари орасидаги муносабатлар исботланади. (1.9) $P = S^{-1}$ га тескари бўлган АО мавжудлигини етиборга оламиз ва у $PL_0f = KPf$ қоида бўйича ҳаракат қилади. [17,18] га қаранг. Ихтиёрий c, d ларнинг умумий ҳолати [23] да кўриб чиқилган. У ерда шунингдек, баъзи бир оддий потенциаллар учун ядролар ясалган, асосан, Бессел ва Макдоналд функциялари орқали ифодаланган. Турли хил текис ўлчамли тенгсизликларни қаноатлантирувчи потенциаллар учун ядролар баҳолари олинган.

(1.20) баҳони, потенциалга бўлган шартларни кучсизлантирган ҳолда, турли хил усуллар билан аниқлаштириш мумкин. [10-15, 17,18] га қаранг. Ушбу йўналишда потенциалга нисбатан кам талабларда яна ҳам кучли натижаларни [32] китобнинг жуда қизиқарли усуллари қўллаб олиш мумкин. Бу китобда В.А.Чернятин томонидан (1.10) гиперболик тенглама учун аралаш масалани ечишда потенциалга нисбатан охириги зарур ва етарли шартлар олинган, бу эса бу масала бўйича В.А.Стеклов, В.А.Илвинларнинг тадқиқотларини тугаллади, бунда Фурье усули А.Н.Криловга тегишли бўлган қарордан афзалликларни ажратиш фикри қўлланилган. [32] шу усули АО назарияси усулларига фикран жуда яқиндир, худди шу усул [23] даги унча яхши бўлмаган потенциалли АО нинг мавжудлигини исботлашга мослаштирилган эди. Бундан ташқари, [23] да муносабатдаги $SLf - L_0Sf$ боғланмаганлигининг АО S хатолик билан берилган ҳолдаги баҳоси

олинган, масалан, Нейман қаторини чекли йигинди орқали ечиган интеграл тенглама билан алмаштиришда ҳосил бўлган ҳатоликда В.А.Чернятин натижалари бошқача сода усул билан кейинчалик В.Л.Прядиев [67] томонидан олинган.

Шу билан бирга назария учун қизиқ бўлганидек, амалий тадбиқлар учун ҳам қизиқ бўлган ҳол бу- Штурм-Лиувил операторларини жуда ёмон бўлган потенциаллар билан кўриб чиқиш ҳолидир, хаттоки тақсимотларгача ҳам. Ушбу йўналишда натижалар спектр назарияси формулаларини тадбиқ етишда [33,34] ишларда А.А.Шкаликов ва унинг ўқувчилари томонидан ечилган. Шунга ўхшаш АО лар учун баъзи бир бошқа натижаларни [35,36] да кўринг. Албатта, бу йўналиш шунингдек, шундай ишларни ичига олганки, уларда ҳақиқатан ҳам АО назарияси усуллари қўлланилади; масалан, [68,69] ишларда Гринив ва Микитюкларни АО ларини ёмон потенциаллар учун яшаш ва уларни кейинчалик тескари масалаларни ечишга қўллашни ўрганиб чиқишган.

Шу билан бирга аниқ кўринишдаги АО лар ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермайди. Қатор манфий натижалар [23] да олинган. Масалан, силлик нол бўлмаган потенциалли АО мавжуд эмас. Худди шу каби, иккинчи тартибли ҳосилали $D^2y + y^2$ чизиқли бўлмаган операторни боғлайдиган чизиқли АО ҳам мавжуд эмас. $q(x) = x^2, \cos x$ оддий потенциаллар ҳолатидаги АО (9) учун ядролар аналитик функциялар бўла олмайди. Бу билан масалан, шу нарса тушунтириладики, Матй функциялари учун $(D^2y + \cos(x)y = \lambda y$ тенгламасининг ечими учун) тригонометрик ёки экспоненциал функциялар орқали ифодаланган оддий интеграл ифодалар йўқ.

Бу пунктнинг охирида шундай ажойиб фактни кўрсатамиз: АО лар назариясининг пайдо бўлишидан бошлаб, ҳамма машҳур китоблар ва ишларда АО лар энг аввало, иккинчи тартибли дифференциал операторлар учун кўриб чиқилган ва қурилган. Аммо АО назарияси қурилишини $D - q(x)$

кўринишдаги биринчи тартибли операторларни кўриб чиқишдан бошлаш мантиққа мос келади.

Бу ҳолда мос келувчи АО лар

$$T_1(D - q(x)) = DT_1, \quad T_2D = (D - q(x))T_2$$

боғлов муносабатларини қаноатлантириши керак. Адабиётдаги бу бўшлик [23] да олиб ташланган, бу ерда мос келадиган АО лар қурилган. Шундай савол очик қолмоқда: биринчи тартибли дифференциал операторлар учун ана шундай АО лардан иккинчи тартибли дифференциал операторлар учун АО ни конструкция қилиш мумкинми?

Ушбу савол ҳаттоки $q(x) = a^2$ енг содда потенциал ҳолат учун ҳам очик қолмоқда, ваҳоланки Штурм-Лиувил операторлари маълум бўлган алмаштиришлар ёрдамида биринчи тартибли ҳосилаларга бўлинади.

1.2 §. Векуа- Эрдейи- Лаундес алмаштириш операторлари.

Штурм-Лиувил оператори учун АО нинг хусусий ҳоли, ўзгармас потенциални танлаш орқали ҳосил бўлади. Бунда спектрал параметр бўйича силжишни амалгам оширадиган АО ларнинг Векуа-Эрдейи-Лаундес деб аталувчи муҳим синфи ҳосил бўлади.

Таръиф 2. Векуа-Эрдейи-Лаундес (ВЕЛ) нинг умумлашган алмаштириш оператори деб, $(A + \lambda_1, A + \lambda_2)$ жуфтлик учун ўрам операторига айтилади, бу ерда A -қандайдир базали оператор, λ_1, λ_2 -лар комплекс сонлар. Бошқача айтганда,

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T \quad (1.22)$$

бўлади.

ВЕК АО лари турли хил сабабларга кўра И.Н.Векуа, А.Эрдейи ва Д.С.Лаундес ишларига киритилган ва ўрганилган. Уларнинг ишларида шундай асосий дифференциал операторлар кўриб чиқилган:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, \quad A = x^\beta B_\nu \quad (1.23)$$

ВЕЛ нинг биринчи АО и Иля Несторович Векуа томонидан

$$J_\lambda f(x) = f(x) - \int_0^x t \frac{J_1(\lambda \sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(x) dt, \quad J_\lambda(D^2 + \lambda) = D^2 J_\lambda, \quad (1.24)$$

кўринишда қурилган, бу ерда $J_1(\cdot)$ - Бессел функцияси. Бундай АО, масалан, тўлқин тенглама ечими орқали Телеграф тенгламаси ечимини кўрсатиш учун қўлланилиши мумкин. Бунда ВЕЛ АО ларнинг хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламалар назариясида ўйнайдиган асосий рўли келиб чиқади- улар спектрал параметр бўйича силжишни амалгам оширади. Шунинг учун уларнинг ёрдамида “лямбдали” масалалар ечимларини “лямбдасиз” масалалар ечимлари орқали кўрсатиш мумкинлиги ҳосил бўлади, кўп сонли мисолларни [20] энциклопедик монографияда топиш мумкин. А.Эрдейи учун (1.24) кўринишга эга бўлган операторларнинг

хусусиятини, уларнинг композицияси ва нормалар баҳосини ўрганиш асосий ҳисобланар эди. Д.Лаундес эса асосан ўхшаш операторлар ёрдамида хусусий ҳосилали тенгламалар учун турли хил масалаларни ечиш кўрсатмаларини ўрганиб чиқди. И.Н.Векуанинг АО ни киритиш учун сабаби $\Delta U + \lambda U = 0$ тенглама ечимини Лаплас оператори орқали ифодалаш эди, бу тенглама гармоник функциялар орқали қаттиқлик назариясининг энг содда масаласи келтирилади. Сўнгра у асосан механикада учрайдиган янада мураккаб тенгламаларни кўриб чиқди. Аналитик функцияларни гармоник функцияларга ўтказадиган ўхшаш содда интеграл оператор ушбу вақтга келиб аллақачон маълум бўлган эди, уни Е.Уиттиккер исмли олим киритган эди.

Шундай қилиб, аналитик ёки гармоник функциялар орқали турли хил мураккаб тенгламалар ечимларини ифодаловчи операторларни яшадан бошланадиган умумлашган аналитик функциялар таърифи АО тилида берилиши мумкин: ҳақиқий ҳолда улар хусусий ҳосилали қандайдир дифференциал операторни Лаплас оператори ёки унинг даражалари билан ўрайдиган АО ларни кўриб чиқишдан ҳосил бўлади; комплекс ҳолда эса улар Коши-Риман (Ейлер-Даланбер) (операторини) тенгламаларини унинг умумлашган ўхшашликлари билан ўрайдиган АО ларни кўриб чиқишдан ҳосил бўлади. Векуа, Эрдейи ва Лаундеслардан кейин айнан алмаштириш операторларин яшашнинг аниқ кесимида умумлашган аналитик функциялар назарияси машҳур америкалик математик Стефан Бергман ва унинг ўқувчиларининг (Бергман-Гилберт операторлари) [13,16] ишларида кўриш мумкин. Бунда учта ва ундан кўпроқ ўзгарувчилар учун ҳамма нарса янада мураккаброқ ва қизиқарлироқ бўлади. Шунинг назарда тутамизки, Бергманнинг ишларида ҳақиқий ҳоларда махсус функциялар назарияси қўлланилади, хусусан, гипергеометрик функциялар. Физик масалаларга татбиқи Л.Берс, А.Гилбарт, А.Вайнштейнлар томонидан қориб чиқилган (ГАСПТ-умумлашган осесимметрик потенциал назарияси) [37,38]. Шу каби [39,21]

ишларни ҳам таъкидлаш мумкин. Уларда Г.Н.Положий ечимлари p -аналитик ва (p, q) -аналитик функциялар деб аталган Коши-Риман тенгламаларини умумлашганларини кўриб чиққан. Умумлашган аналитик функцияларнинг турли фазоларга тегишлилиги (Харди, Смирнов, ВМО) С.Б.Климинтов [40] ишларида ўрганилган. Умумлашган аналитик функциялар назарияси учун ҳақиқий натижалар шунингдек, Б.Боярский, Н.К.Блиев, Л.Г.Михайлова, А.П.Солдатова ва бошқаларишларида ҳам олинган. ВЕЛ АО лар шунингдек, [99-100] ишларда ҳам ўрганилган. У ерда олинган баъзи натижаларни санаб ўтамиз. Аввало, ВЕЛ нинг асосий саккизта оператори синфи ажратилади. Ушбу операторларнинг факторизацияси янада соддалари орқали ўрганилди: Фурье, Ханкел, Риман-Лиувил, Эрдейи-Кобер ва бошқаларнинг каср интеграллари [20]. Параметр бўйича келтирилган ВЕЛ операторларининг ярим группа хоссалари ўрганилди. Маълум бўлганлардан ВЕЛ АО ларни қуришнинг умумий усуллари ёзиб чиқилди. Бу йўлда ядролари бир нечта ўзгарувчи гипергеометрик функциялар орқали ифодаланадиган янги ВЕЛ операторлари олинди. [23,41,42] да ихтиёрий параметрларга боғлиқ бўлган АО ларнинг янги синфлари топилди.

Шунингдек, турли хил

$$T(x^2 B_\nu) = (x^2 B_\nu)T, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D \quad (1.25)$$

индекслар билан Бессел операторларини ўрайдиган АО лар билан ВЕЛ АО лари орасида ўзаро бир қийматли мослик қурилди. Бундай АО лар [43] ишда ўрганилган, бу ерда ўхшаш операторларнинг битта синфи олинган. [41] ишда АО умумий кўринишда (1.25) даги хусусияти билан таърифловчи масалани ечиш формуллари топилган. Аниқланишича, ҳар бир (1.22) хоссали ВЕЛ АО бўйича (1.25) хоссали АО ни аниқ ажратиб ёзиб олиш мумкин экан.

Шундай қилиб, Векуа-Эрдейи-Лаундесларнинг алмаштириш операторлари назарияси бу – АО умумий назариясининг муҳим битта бўлими сифатида кўрсатилади. Унда кенг маънода хусусий ҳосилали тенгламалар

назарияси, функциялар назарияси, комплекс анализ, махсус функциялар назариясидаги етарлича катта натижалар ва муҳим тадбиқлар ўз ўрнини топган. Ушбу кўп қиррали тематикага академик Иля Несторович Векуанинг ишларида асос солинган, унинг 100 йиллиги 2007 йилда нишонланган.

1.3 §. Ўзгарувчи коэффициентли умумий дифференциал операторлар учун алмаштириш операторлари

Энди, иккита ихтиёрий

$$\begin{aligned} T(a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y + a_0(x)) &= \\ = (b_m(x)y^{(m)} + \dots + b_1(x)y + b_0(x))T \end{aligned} \quad (1.26)$$

чизиқли дифференциал операторни ўрайдиган АО T нинг мавжудлиги ҳақидаги масалани кўриб чиқамиз.

Бу ҳолатда, масала мураккаблашади, ҳамма яшашлар ҳам назарий жиҳатдан мумкин бўлмайдиган бўлиб қолади, бу- юқори тартибли алгебраик тенгламаларни ечиш назариясини эслатади.

Бизнингча, (1.26) кўринишдаги АО ни n -тартибли дифференциал оператори (1.26) да ўнг томонда тургандаги ҳолатда, яшаш ҳақидаги масалани умумий ҳолда Жон Делсарт 1938-йилда [44] ифодалаб берган. Сўнгра Ж.Л.Лионс билан биргаликда бўлган умумий мунозараларда бу давом этган [45,46]. Бунда бу иккала француз математикларининг АО назариясидаги роли умуман турлича. Делсартнинг ишларида кўп сонли янги қизиқарли натижалар мавжуд.

Маълум бўлдики, АО ни қуришда иккитадан ортиқ тартибли дифференциал операторлар ҳолатида, бўлинмаган ҳолда, коэффициентларининг аналитик бўлиши кўринарли рол ўйнай бошлади. Шунини такидлашимиз зарурки, иккинчи тартибли дифференциал операторлар ҳолати учун АО ни қуриш масалаларида функцияларнинг аналитик бўлиши ҳеч қандай рол ўйнамайди. Бундан ташқари, (1.26) кўринишдаги АО ларни яшашга иккита турли хил ёндашув мавжудлигига диққат қилиш керак. *Биринчи ёндашиш*да аниқланиш соҳасининг турли нуқталарда ҳар хил ифодалар орқали бериладиган *локал АО*ларни яшаш кўриб чиқилади, улар локал аниқланган ва нуқтадан нуқтагача ўзгаради. *Иккинчи ёндашиш*да бутун аниқланиш соҳаси битта ифода орқали бериладиган глобал АО ларни яшаш

кўриб чиқилади. Булар иккита турли хил масалалар эканлигини тушуниб етиш керак, улар ечиш усуллари орқали турлича, фақат шаклан ўхшашдир. Масалан, глобал ёки локал АО ларнинг мавжудлиги ҳақидаги саволга жавоб принципиал равишда фарқ қилади. Берилган факт кўпинча яхши баҳоланмайди ёки бузиб кўрсатилади, бу эса принципиал ҳатоларга олиб келади. (1.26) кўринишдаги локал АО ларнинг мавжудлиги ҳақидаги масала биринчи марта М.К.Фаге томонидан 1957-1958-йилларда тўлиқ ечилган ([47], [15] манаграфияларда берилган). Адабиётларда кўпинча ушбу натижанинг автори деб Делсарт ва Леонслар кўрсатилади, аммо уларнинг натижаси нотўғридир ва принциал тўғрилаб бўлмайдиган ҳатоларга эга. Асосий хулоса шундай: (1.26) кўринишидаги биринчи тартибли узликсиз коэффициентли бирламчи катта коэффициентли дифференциал операторлар аналитик функциялар тўпламида локал эквивалентдир. Эквивалентлик шуни билдирадики, функцияларнинг аналитик фазоларида фақатгина локал АО ларни мавжудлиги эмас, балки уларнинг узлуксиз айланиши ҳам исботланган.

Асосий натижалар М.К.Фаге томонидан тузилган. Унинг томонидан тузилган (м,л)-аналитик функциялар назарияси ичида шакллантирилган ва исботланган. Шуни таъкидлаш қизиқки, бунда тўғрилиқ учун ҳам хусусий ҳосилали тенгламалар назарияси усуллари қўлланилмади ҳам. Берилган йўналишда тўғри натижалар Б.А.Марченко томонидан олинган.

Энди қандайдир ядроли

$$(Tf)(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)f(t)dt \quad (1.27)$$

Вольтернинг иккинчи тур интеграл оператори кўринишидаги глобал АО ларни кўриши ҳақидаги бошқа масалаларни кўриб чиқамиз.

Биринчи марта Л.А.Сахнович ва В.И.Мацаевлар кўрсатганидек, бу ҳар доим ҳам учинчи тартибли оддий дифференциал операторлар учун мумкин бўлмайди [48,49].

Теорема 2. Агар

$$T(D^3 - q(x))f = (D^3)T, \quad f \in C^2(0, a), \quad f'(0) = f''(0) = 0 \quad (1.28)$$

формула бўйича учинчи тартибли операторларни ўрайдиган (1.27) кўринишдаги АО мавжуд бўлса, у ҳолда $q(x)$ -функция $(0, a)$ да аналитик потенциаллар бўлади. Ушбу натижада аналитик қатъиян тўғридир. Бир томондан, Л.А.Сахнович томонидан $q(x)$ аналитик потенциаллар учун изланаётган АО ни кўриш ҳақидаги масаланинг ечилиши кўрсатилган. Бошқа томондан, озгина ёмонроқ чексиз бўлмаган ҳолда дифференциалланувчи $q(x)$ лар, $T(D^4 - q(x))f = (D^4)Tf$ тўртинчи тартибли операторлар учун изланаётган АО мавжуд бўлмаслиги мумкин; учинчи тартибли қисман ўзгармас потенциалли оператор учун ўхшаш мисол [22] да келтирилган. Шундай қилиб шу нарса ҳосил бўладики АО ларнинг ўхшашлик хоссаси коэффициентлар назарияси оз силжиши орқали олиб ташланиши ёки қўшимча қилиниши мумкин, бу В.Б.Лидско саволига жавоб беради. АО мавжудлигининг зарурий шартлари кўрилган.

Ушбу йўналишда умумий кўринишдаги дифференциал операторлар учун охирги натижалар М.М.Маламуд [50,51] ишларида олинган. Уларда АО мавжудлиги ҳақидаги масала коэффициентининг оддий

$$u^{(n)}(x, \lambda) - \lambda^n u(x, \lambda) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (1.29)$$

масаласи ечимида ва Кошининг

$$\begin{aligned} \nu^{(n)} + q_1(x)\nu^{(n-2)} + \dots + q_{n-1}(x)\nu - \lambda^n \nu &= 0, \\ \nu^{(k)}(0, \lambda) &= b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

ўзгарувчи коэффициентли масаласида кўриб чиқилган.

(1.30) тенглама учун АО мавжуд бўлади, агар унинг ечимлари учун (1.31) ечимлари орқали (1.27) кўринишдаги кўрсатма мавжуд бўлса, аввало, М.М.Маламуднинг икки ҳадли тенглама учун натижаларни келтирамиз, сўнгра умумий ҳоли учун

Теорема 3. Агар $\nu^{(n)} + q(x)\nu - \lambda^n \nu = 0$ тенглама учун $n \geq 3$ да АО мавжуд бўлса, у ҳолда $q(x)$ функция аналитик бўлади.

Теорема 4. $a \leq \infty$ ва $q_k(x) \in C^k(0, a)$ да $1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ бўлганда аналитик бўлса, у ҳолда агар (30) тенглама учун АО мавжуд бўлса, $q_k(x)$ функциялар $\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq k \leq n-1$ да ҳам аналитик бўлади.

Бу натижаларни хусусий ҳосилали тенгламалар назариясининг кўп фактларида қўлланилмоқда: Риман функциялар усули, Лопатинский бўйича қатъий эллиптик бўлган тенгламаларни ечиш, бош қисмида эллиптик оператор бўлган чизиқли бўлмаган тенгламаларни ечиш бўйича Агмон натижалари Коши-Ковалевский теоремасининг аниқлаштирилган шаклини ечиш (Коши можаранти ўрнига Розенблум леммасини қўллаб) ва ҳаказо. 4-теореманинг маноси шуки, бунда АО нинг турларида коэффицентларнинг иккинчи группаси биринчиси билан ифодаланади. (1.27) га ўхшаш кўрсатма кўриб чиқилган, аммо фақат (x, ∞) оралиқ бўйича интегралланган ҳолда. Аналитик коэффицентларнинг аниқланиш соҳаларида юқори тартибли АО ларни кўриш бўйича тўғри натижалар И.Т.Хачатрян томонидан олинган.

Энди ажойиб [15] монографиядаги натижаларни янада кенгроқ ўрганиб чиқишга ўтамиз. Улар эса жуда кўп. Ушбу монографияга L аналитик функциялар бу (L, M) аналитик функцияларнинг умумлаштирилгани киритилган ва ўрганилган, бу еса, шунингдек, аввал олинган натижаларни бирлаштириш имконини берди. Бундай функциялар учун аввал Делсарт томонидан хусусий бир ҳолда киритилган Тейлор қаторлари назарияси қурилган. Янада принципиал натижа бўлиб аналитик функциялар фазосида аналитик коэффицентларнинг ўзгарувчилари ҳолати учун глобал АО ни топиш кўрсатилади.

Теорема 5. P, Q дифференциал операторларнинг ҳамма коэффицентлари аналитик функциялар бўлсин, у ҳолда аналитик

функцияларнинг қандайдир фазосида интеграл кўринишда бўлган ([15] га қаранг) ва P, Q ларни ўрайдиган АО мавжуд:

$$\begin{aligned} P &= D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + p_1(x)D + p_0(x), \\ Q &= D^n + q_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + q_1(x)D + q_0(x), \quad D = \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Аниқ ва тўғри натижалар [15] да олинган ва АО ни интеграл кўринишда (1.31) да кўрсатиш учун ҳам олинган. Бу ҳолда АО ядроси учун икки ўлчамли стандарт (1.10) гиперболик тенглама ўрнига Бианка тенгламаси деб аталувчи тенглама ҳосил бўлади. Куриш Риман усули билан характеристик пирамидаларни қўллаб ўтказилган формулалар қандайдир этапда етарлича мураккаб бўлади, масалан, уларнинг ичигача етти қаррали йиғиндилар киради. Шунинг учун (1.31) умумий ҳолат учун улар сифатли характерга эга ва АО ни қандайдир интеграл кўринишда ишлатишга имкониятни кўрсатади. $Q = D^n$ ҳолат учун эса интеграл кўринишлар тўғридан-тўғри қисқартирилган ва аниқ кўринишда олинган. Хусусан, шу нарса кўрсатилдики, Штурм-Лиувил операторларининг модел ҳолатлари учун бу кўринишлар АО назариясида маълум бўлганларига келтирилади. Шунингдек, аналитик функциялар фазоларида ҳосила ёки унинг даражаси билан коммутатив бўлган операторлар ҳақидаги муҳим масала ҳам муҳокама этилган. Коммутатив бўлган операторлар бу АО нинг хусусий ҳолидир. АО назарияси унинг муҳимлиги қуйидагича: фараз қилайлик, биз $TA = BT$ хоссали АО га эгамиз, шунингдек, B билан коммутатив бўлган қандайдир K операторга ҳам эгамиз. У ҳолда, худди ўша хоссали АО ни куриш мумкин:

$$T_1 = KT, KB = BK, T_1A = KTA = KBT = BKT = BT_1. \quad (1.32)$$

Ёки A билан коммутатив бўлган K операторга ўхшашларини:

$$T_2 = TK, KA = AK, T_2A = TKA = TAKBTK = BT_2. \quad (1.33)$$

Шундай қилиб, ҳамма АО ларни кўрсатиш ҳақидаги масала иккита ўрайдиганларнинг ихтиёрийси билан коммутатив бўлган операторларнинг ҳаммасини кўрсатиш масаласига эквивалентдир, чунки ушбу иккита синф ўртасида ўзаро бир қийматли мослик бор. Шунини айтиш мумкинки, A ва B ларни ўрайдиган ҳамма АО ларни кўрсатиш учун фақат битта шундай ихтиёрий АО T_1 ни ва $B(A)$ билан коммутатив бўлган ҳамма K операторларнинг тўпламини билиш етарлидир. Бу ҳолатда ҳамма АО лар $T = KT_1$ ($T = T_1K$) формула бўйича ҳосил бўлади бошқа томондан, $B(A)$ билан коммутатив бўлган ҳамма операторларни кўрсатиш учун A ва B ларни ўрайдиган АО T лар ҳаммасининг тўпламини билиш етарлидир. Бу ҳолда, $B(A)$ билан коммутатив бўлган ҳаммаси АО айланишининг қўшимча шартида $K = T_1T_2^{-1}$ ($K = T_1^{-1}T_2$) формула бўйича ҳосил бўлади. Шундай қилиб бу иккита масала амалий жиҳатдан эквивалентдир. Мана шунинг учун АО назариясида муҳим ролни турли хил кўринишдаги касрли интегродифференциал операторлар ўйнайди- табиий шароитларда улар “ўларининг яқин” ҳосиласи билан коммутатив бўлади ва АО конструктив материал бўлиб хизмат қилади.

Ҳосила билан коммутатив бўлган операторларни кўрсатиш масаласи аллақачон Лионс ва Делсартнинг юқорида келтирилган ишларида ечилган деб ҳисобланган, шунинг учун, аналитик коэффициентли дифференциал операторлар учун ҳамма АО ларни кўрсатиш масаласи ҳам ечилган деб ҳисобланган. Аммо, [15] да кўрсатилгандек, мос ҳолдаги ишлар қўпол ҳатоларга эга, ҳақиқатда эса у ерда коммутатив операторларнинг ҳамма тўплами келтирилмаган, фақатгина унинг қандайдир хос қисми кўрсатилган холос. Тўғри натижа шунингдек, М.К.Фаге томонидан олинган ва [15] да келтирилган, унинг ёрдамида ўша тартибли ҳосилали дифференциал операторни ўрайдиган ҳамма мумкин бўлган АО ларни ёзиб кўрсатиш мумкин. Шунини таъкидлашимиз керакки, функциялар аналитик фазоларидаги

операторлар назарияси АО татбиқларида ҳам муҳим бўлган, Ю.Ф.Коробейников томонидан унинг [52,53] монографияларида кўриб чиқилган. Янада кенгроқ фазолардаги интеграл операторлар назарияси кўриб чиқилган.

Дифференциал операторлар катта коэффициентларнинг бирига тегишлигини санаб ўтилган натижалар учун тўғрилигини кўрсатамиз. Шундай, [54] да D ва $\exp(-z)D$ операторларнинг бутун аналитик функциялар фазосида эквивалент эмаслиги исботланган. Турли хил аналитик фазолардаги дифференциал операторлар учун эквивалентлик ва унинг йўқлиги ҳақида кўп сонли мисоллар [15] монографиянинг иккинчи қисмида кўриб чиқилган. Шунини таъкидлаймизки, умумий АО лар назариясида муҳим ролни В.А.Марченконинг [55] натижалари ўйнайди. Ушбу йўналишнинг бошқа баъзи натижалари ҳақида [56] ишда ўқинг.

Шундай қилиб, менга (26) хоссали АО ни, яъни Делсарт-Фаге (ёки Делсарт-Марченко-Фаге) нинг АО ни аташ янада ҳақиқий бўлиб туюлади, лекин Ғарбда қабул қилинганидек, Лионс-Делсарт АО ини эмас албатта. Буюк математикларнинг АО назариясига қўшган ҳиссалари ҳақида америкалик олим, АО назарияси бўйича мутахассис Роберт Кероллдан яхшироқ гапириб бўлмайди: “50-йиллар бошида келиб чиққан АО назарияси Гелфанд, Левитан, Марченко, Наймарк ва бошқаларга бориб тақалади. Сўнгра бу назарияни Делсарт ва Лионслар [57] да давом эттиришган.

1.4 §. Сонин ва Пуассон типдаги алмаштириш операторлари

Иккинчи тартибли Бессел дифференциал операторини ўрайдиган, масалан, энг машхур АО лар синфини кўриб чиқишга ўтамиз:

$$T(B_\nu)f = (D^2)Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (1.34)$$

АО ни қуриш усулларида бири бу- мос келувчи дифференциал тенгламалар ечимлари орасидаги мосликларни қўйишдир. $B_\nu f = \lambda f$ кўринишдаги тенгламалар ечимлари Бессел функцияларидир, $D^2 f = \lambda f$ коринишдаги тенгламалар эса тригонометрик функциялар ёки экспонента. Шунинг учун, (1.34) кўринишдаги АО ларнинг асли бўлиб Пуассон ва Сонин формулалари хизмат қилади:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)2^{\nu-1}x^\nu} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2} \quad (1.35)$$

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \sin(t) dt, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2} \quad (1.36)$$

Одатда, формулалар атама номлари шартли характерга эга. Ихтиёрий индекс учун Бессел функциялари буюк Леонард Эйлер томонидан киритилган, унда Бессел хали туғилмаган ҳам эди. Умуман, бу функциялар Рикати номи билан аталадиган дифференциал тенгламани ечиш учун пайдо бўлган ва секин аста 1690-1770- йиллари оралиғида киритилган. Бунда Бернули оиласи аъзолари, Венециялик граф Жакколо Франческо Рикатти ва Эйлерлар қатнашган[58,59]. Шу билан бирга, Фридрих Бесселнинг ўзининг номи билан аталувчи функцияларни ўганишга қўшган хиссаси бекиёс улкандир. (1.35) интегрални Эйлер 1769-йида ўрганишини бошлаган. Сўнгра Парсевал интегралини $\nu = 0$ да 1805-йилда ҳисоблади; бутун ν лар учун (1.35) формулани Плана 1821-йилда олган; Пуассон уни 1823-йилда ярим бутун бўлган ν лар учун келтириб чиқарди. Унинг усули бутун ν лар учун

ҳам қўлланилади, лекин буни ўзи сезмади. Кейинчалик, ушбу интеграл Куммер, Лоббато ва Дюамел ишларида учради. Умуман, биз Пуассонга ёпиштираётган (1.35) формулани келтириб чиқарган. Мавжудлигига ҳамма ишониб АО (1.38) нинг асли деб ҳаёблаётган Сонин формуласини мен адабиётларда топа олмадим. У Бессел функциясидан бўлган чекли оралик бўйича интеграл орқали ифодаланган тригонометрик функцияларни ёки экспонентани ифодалаш керак эди.

Таъриф 3. Пуассоннинг АО деб қуйидаги ифодага аталади:

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu x^\nu} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \quad (1.37)$$

Сонин АО и деб қуйидаги ифодага айтилади:

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}} x^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}. \quad (1.38)$$

(1.37)-(1.38) операторлар АО каби

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu \quad (1.39)$$

формулалар бўйича хизмат қилади. Уларни $\nu \in \mathbb{C}$ нинг ҳамма қийматлари учун аниқлаш мумкин.

(1.37)-(1.38) операторларга ўхшаш операторларни ўрганиш ғоясини Лиувил айтиб ўтган эди, уларни Бесселнинг функциялари назарияси контекстида реал қўллаш Николай Яковлевич Сонин [60] бошлаган. АО каби бу операторлар Делсарт ишларида киритилган ва сўнгра Делсарт ва Лионс ишларида [45,46] ўрганилган. Шунинг учун, биз (1.37)-(1.38) ларни Сонин-Пуассон-Делсарт (СПД) АО и деб атаймиз. Бизнинг мамлакатимизда СПД операторлари ҳақида асосан Б.М.Левитаннинг [61] ажойиб ёзилган мақоласидан билиб олинган.

СПД (1.37)-(1.38) операторлари бутун АО назариясининг энг машҳур объектлари десак, муболаға бўлмайди, уларни ўрганиш, тадбиқ қилиш ва

умумлаштиришга юзлаб ишлар бағишланган. Қисқача фақат асосий йўналишларни санаб ўтамыз.

Делсарт томонидан АО СПД базасида умумлашган силжишнинг фундаментал тушунчаси келтирилган.

Таъриф 4. Умумлашган силжиш оператори (УСО) деб,

$$(B_\nu)_y u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu + 1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (1.40)$$

масаланинг $u(x, y) = T_x^\nu f(x)$ ечимига айтилади.

Таъриф шу билан тушунтириладики, хусусий ҳолда $\nu = -1/2$ (УСО)

$T_x^\nu f(x) = \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y))$ оддий силжишга келтирилади. (1.38) (УСО) учун

Делсарт томонидан аниқ

$$T_x^\nu f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos(t)}\right) \sin^{2\nu} t dt \quad (1.41)$$

Формула олинган. (1.40) таърифда дифференциал операторларнинг ихтиёрий жуфтликларини ҳам кўриб чиқиш мумкин. Масалан, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u(x, 0) = f(x)$ таърифда одатда $T_x^\nu f(x) = f(x+y)$ силжишга эга бўламиз. (УСО) (1.40)-(1.41) ларнинг АО СПД (1.37)-(1.38) [10-12,17,18,61] орқали ифодаланишини такидлаймиз.

Энди, янги силжиш борлиги учун, одатдаги силжишга асосланган аввало назарияларни умумлаштириш мумкин бўлади. Шундай қилиб, умумлашган даврий бўлган функциялар назарияси, (шунини белгилаймизки, даврий бўлган функцияларнинг таърифи ва асосий хоссалари биринчи марта Юревский (Тартусский (Дерпский)) университети профессори Пирс Георгиевич Бол томонидан, Т. Боргача берилган эди, шунингдек, Бол Брауергача сферанинг ўзига узлуксиз аксланган силжимайдиган нуқталари

ҳақидаги машҳур топологик теоремани ҳам ҳосил қилади; революция ва уруш вақтида эвакуация қилинган Юевский университет ходимларидан 1918 йилда Воронеж университети тузула бошлаган эди), ҳақиқатда, Тейлор-Делсарт [15] қаторлари деб аталган Тейлорнинг умумлашган қаторлари бўйича тақсимланиш, умумлашган айланиш ва унинг тадбиқлари келиб чиққан.

Хусусий ҳосилали тенгламалар назариясида АО ва УСО конструкциялари катта рўл ўйнайди. АО лар анча мураккаб тенгламаларни анчагина соддаларига айлантиришга имкон беради, УСО лар эса сингуляр тенгламаларда максимумли координаталар бошидан ихтиёрий нуқтага кўчиришдага ёрдам беради, шунингдек, умумлашган айлама ёрдамида фундаментал ечимларни топишга ёрдам беради.

$$\sum_{k=1}^n B_{v,x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f \quad (1.42)$$

кўринишдаги ҳар бир ўзгарувчи бўйича Бессел операторлари билан В-эллиптик тенглама бўлган хусусий ҳосилали тенгламаларнинг битта синфни алоҳида белгилаб ўтамиз, В-гиперболик ва В-параболик тенгламалар шунга ўхшаш кўриб чиқилади. Ушбу синф тенгламаларини ўрганиш Ейлер, Пуассон, Дарбу ишларида бошланган эди, А.Вайнштейннинг умумлашган ўқсимметрик потенциали назариясида давом эттирилди ва И.Й.Егоров, Я.И.Житомирский, Л.Д.Кудревцев, П.И.Лизоркин, М.И.Матийчук, Л.Г.Михайлов, М.Н.Олевский, М.М.Смирнов, С.А.Терсенов, Хе Кан Чер, А.И.Янушаускас ва бошқа рус математиклар учун ҳамма масалалар янада тўлиғича Воронеж математиги Иван Александрович Киприянов ва унинг ўқувчилари томонидан ўрганиб чиқилган эди; ушбу йўналиш бўйича асосий натижалар [19] ишда келтирилган. Мос тенгламалар ечимларининг синфни аниқлаш учун И.А.Киприянов томонидан функционал фазолар киритилган ва ўрганилган, кейинчалик, унинг номи билан аталган.

Ушбу йўналишда В.В.Катрахов иш олиб борган. Ҳозир Бессел операторли тенгламалар ва улар билан боғлиқ масалаларни А.В.Глушак, В.С.Гулиев, Л.Н.Лахов ўзларининг дўстлари ва ўқувчилари билан ўрганишмоқда. [15] машҳур монографияда бошланадиган (1.42) кўринишдаги операторли тенгламалар учун масалаларни А.В.Глушак, С.Б.Шмулевич, В.Д.Ферников ва бошқалар кўриб чиқишган.

Бу ерда шуни такидлаш керакки, ўзгарувчи коэффициентли хусусий ҳосилали сингуляр ва бузиладиган дифференциал тенгламаларни ўрганиш ҳисоби бошланган биринчи фундаментал иш бу М.В.Келдишнинг мақоласидир. Эллиптик типдаги бузиладиган тенгламаларнинг умумий назарияси кейинчалик Г.Фикера, О.А.Олейник, Е.А.Радкевич, В.Н.Врагов, В.П.Глушко ва бошқалар томонидан қайта ишлаб чиқилган.

СПД АО ларни ўрганиш бўйича қизиқарли натижалар В.В.Катрахов томонидан олинган, улар шунингдек Р.Керолл томонидан махсус қайта ишланган кўринишда [19] нинг алоҳида бўлимида берилган. АО лар шунингдек, Бессел операторларининг кўп сонли умумлашган кўринишлари учун ҳам кўриб чиқилган. Шу билан бирга, бошқа модел операторлар учун ҳам шунга ўхшаш назариялар қурилган, масалан, [10-12] лар учун:

$$A = \frac{1}{\nu(x)} \frac{d}{dx} \nu(x) \frac{d}{dx}, \nu(x) = \sin^{2\nu+1} x, sh^{2\nu+1} x, \quad (1.43)$$

$$(e^x - e^{-x})^{2\nu+1} (e^x + e^{-x})^{2\mu+1}$$

(1.43) кўринишдаги A операторларнинг назария учун муҳимлиги шундаки, улар Гелфанднинг машҳур формуласи бўйича симметрик фазоларда Лаплас операторларининг радиал қисмини кўрсатади [62]. Бунда Бессел оператори (1.43) да $\nu(x) = x^{2\nu+1}$ ни танлашда ҳосил бўлади. АО орқали ёндашиш ягона ҳолатларда (1.43) хос функциялар ифодаланган махсус функцияларининг кўп хоссаларини ўрганиш имконини беради, бу ёндашиш [10-12] да кетма кет амалга оширилади.

АО лар қурилган бошқа модел оператор- бу Эйрининг $D^2 + x$ операторидир. Квант механикасидаги Штарк эффекти билан бошланган унинг бузиладиган варианты ҳам кўриб чиқилган.

Сонин-Пуассон-Делсарт операторларининг муҳим умумлашгани бу гипербессел функциялари учун АО лардир, улар Иван Димовских ва унинг ўқувчилари ишларида ҳар томонлама ўрганилган. Мос келувчи АО лар адабиётларда Сонин-Димовски ва Пуассон-Димовски номларига уларнинг хизмати билан эга бўлган, улар шунингдек, Иван Димовскининг ўқувчиси-Виржиния Кирякова ишларида ҳам ўрганилган.

СПД операторларининг бошқа муҳим умумлашган синфи Дункл операторларини ўрганишда пайдо бўлди. Дункл операторлари АО ларнинг умумий схемасига махсус ҳол сифатида киритилади, ўраладиган операторларнинг бири дифференциал- турлича, иккинчиси эса аввалгидек, дифференциал бўлади. Дункл операторлари учун Сонин ва Пуассон типидagi АО ларни қўшишга охириги вақтларда жуда кўп ишлар бағишланган.

Бутун АО ларнинг хусусий холи учун мос тенгламаалрни ечишдаги АО ни қуришнинг қандайдир усули Крам- Крейн [17,18] услуби номи асосида адабиётларда эслатилади, аммо у мураккаблаштирилган чегирмаларнинг узун кетма-кетлигига олиб келади, натижавий АО эса аниқ кўринишда чиқарила олмайди. Ҳақиқатдан, Крам- Крейн чегирмалари ҳам АО ларнинг умумий схемасига киритилиши мумкин. Улар ўралувчи операторлар дифференциал бўлиб қолган ҳолда пайдо бўлади, АО эса ушбу жуфтлик учун интеграл тасвирда эмас, балки дифференциал тасвирда изланади. Янада умумий кўринишда бу назария Дарбу [Матвеев] алмаштириш усули сифатида маълумдир. Хусусий ҳолдаги Крам-Крейн чегирмалари шуларга киради. Бундай дифференциал АО ларга Муара алмаштиришлари типидagi кўп маълум бўлган ўзгарувчиларнинг алмашиши ҳам тегишли бўлиши мумкин. Улар линеаризация масаласини ечган ҳолда чизикли бўлмаган ва чизикли бўлган операторларни ўрайди.

1.5 §. Алмаштириш операторларининг каср интагродифференциаллаш операторлари билан боғланиши

Каср интагродифференциаллаш операторлари математиканинг жуда кўп замонавий бўлимларида муҳим рол ўйнайди: хусусий ҳосилалар тенгламаларда; функционал анализ ва функциялар назариясида; махсус функцияларда; кўп сонли тадбиқларда. Каср ҳисоб бўйича китоблар сони доимо ўсиб боради, уларнинг ўсиш жараёни эса яқинда график равишда махсус журнал-«Fractional Calculus and Applied Analysis»да чоп этилган чиройли рангли плакатда тасвирланган; ушбу халқаро журнал Болгария ФА томонидан чоп этилади, унинг бош муҳаррири Виржиния Киряковадир.

Махсус функциялар назарияси учун каср каср интагродифференциаллашнинг муҳимлиги Виржиния Кирякованинг [63] маълум мақоласи номланишида акс эттирилган: “ҳамма махсус функциялар элементар функцияларни каср интагродифференциаллашдан ҳосил бўлади”.

Каср интагродифференциаллашнинг асосий операторлари рўйхатини келтирамиз: Риман-Лиувил, Эрдейн-Кобер, ихтиёрий $g(x)$ функция бўйича каср интеграл

$$I_{0+,x}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.44)$$

$$I_{-,x}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

$$I_{0+,x^2}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} 2t f(t) dt, \quad (1.45)$$

$$I_{-,x^2}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{\alpha-1} 2t f(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
I_{0+,g}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (g(x) - g(t))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \\
I_{-,g}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (g(t) - g(x))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt,
\end{aligned}
\tag{1.46}$$

ҳамма ҳолатларда $\operatorname{Re} \alpha > 0$ деб фараз қилиниди, α нинг қолган қийматларида формулалар шунингдек қийинчиликсиз давом эттирилади [20]. Бунда оддий каср интеграллар (1.46) даги $g(x) = x$, $g(x) = x^2$ да Эрдейи-Коберни, $g(x) = \ln x$ да Адамар операторлари ҳосил бўлади. АО билан алоқа (1.37)-(1.38) да кўрсатилганидек амалгам оширилади, СПД АОлари кўпайтувчи аниқлигида Эрдейи-Кобер операторларининг худди ўзи бўлади., яъни $\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{-\alpha}$ каср даражалар бўлади. Худди АО каби (1.43) да санаб ўтилган модел операторлар учун $g(x) = \sin x, shx$ да $\left(\frac{d}{dg}\right)^{-\alpha}$ лар каср даража бўлади. Шунинг учун, бу АО ларнинг асосий хоссаларини каср интегродифференциаллаш операторлари назариясидан олиш мумкин.

Комплекс текисликдаги каср интеграллаш операторлари М.М.Джрбашян ишларида киритилган. Уларга (1.46) ихтиёрий функция учун каср интеграллаш тушунчаси киритилади. Қатор кўринишда таърифланган мос операторлар олдин Гелфонд-Леонтев операторлари деб аталган, ҳозир эса тез тез Джрбашян-Гелфонд-Леонтев [66] ларнинг каср интегродифференциаллаш операторлари деб аталади.

Каср интегродифференциаллаш операторларининг янада кенгрок умумлаштиришлари Виржиния Кирякова [66] томонидан қуйидаги кўриниш таклиф этилган:

$$x^{-\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} K\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \quad x^{-\alpha} \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} K\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt,$$

бу ерда $K\left(\frac{x}{t}\right)$ -мос келувчи ядро, $f(t)$ турлича ихтиёрий функция. Бундай

объектлар ўз-ўзидан янги бўлмайди, бу интеграл операторни бир жинсли – биринчи даражали ядро билан ёзиш шаклларида бириктириш

$$\int_0^{\infty} K(x,t)f(t)dt, \quad K(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} K(x, y)$$

ёки Миллен ўрамлири

$$\int_0^{\infty} K\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t}$$

қўшимча шартда, қайсики интеграл оператор ёки ўрам ядроси $t < x$ ёки $t > x$ да нолга айланади. [66] даги умумлашган интегридифференциаллашнинг ушбу шакли учун етарлича тўлиқ назария қурилган. Энди АО нинг (1.30)-(1.31) коммутативлик билан алоқасини эслаймиз. Керакли томондан каср интеграллашнинг турли хил шаклларида қўшимча қилиш янги АО ларга олиб келишга эгамиз. Векуа-Эрдейи-Лаундес АО и учун бу мулоҳаза [41,42] да турли хил экзотик ядроли янги алмаштиришларни қуриш учун ишлатилади, АО СПД учун пастроқда қаранг. Янги имконият- бу Бессел операторлари билан коммутатив бўлган каср даражали интегродифференциаллаш операторларини қўллашдир. Бунинг учун масалан, Бессел операторларининг каср даражаларини аниқ ёзиб чиқиш талаб этилади ва у, албатта бор.

Бу пунктда мос келувчи силлиқ функциялар берилган Бессел дифференциал операторларининг каср даражаларини аниқ интеграл кўринишда қурилган, уни биз қулайлик учун

$$B_{\nu} = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0$$

кўринишда белгилаймиз.

Сўзсиз, оддий ҳосилаларга ўхшаш ҳолда ярим ўқда табиий хосса ёрдамида шундай каср даражаларни аниқлаш мумкин, улар Ханкел алмаштиришлари образларида даражага кўтариш каби таъсир қилади. Бундай ёндашиш яхшиси йўқлиги туфайли оқланган ва қатор қизиқ натижаларни олишга имкон беради, лекин ушбу йўлда, кўриниб турибдики, каср

даражаларнинг аниқ кўринишларига эга бўлиш мумкин эмас. Аммо бир минутга фарз қиламизки, биз Риман-Лиувилл каср интеграллашнинг оддий операторларини фақат Лаплас ва Меллин алмаштиришлари кўринишларидаги ҳаракатланиш орқали аниқлашни биламиз, бу операторларнинг интеграл формулалари эса бизга ноъмалумдир. У ҳолда бу ўхшаш назария етарлича бой бўлмайди ва ўзининг янада керакли ва чиройли натижаларидан маҳрум бўлиши дарҳол аниқ бўлади. Масалан, Бессел операторлари каср даражаларининг назарияси ҳозир худди мана шу ҳолатга тушган, шунинг учун уларни аниқ интеграл кўринишида қуриш актуал ва қизиқарли масала бўлади. Бесселнинг каср интегродифференциаллаш операторлари юқорида санаб ўтилганларга нисбатан унча маълум бўлмаслигига қарамай, улар назариясининг асоси аллақачон тузилиб бўлинди. Формал таърифларда берилган.

Таъриф 5. $f(x) \in C^{2k}(0, b]$ бўлсин. Бессел каср интеграллашининг ўнг томонлама операторларини $f^{(i)}(b) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k-1, \quad k \in N$ шартда қуйидаги формула бўйича тарифлаймиз:

$$\begin{aligned} (B_{b-}^{\nu, k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1} \Gamma(k)} \int_x^b (y^2 - x^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Бессел каср операторларининг чап томонлама операторларини $f^{(i)}(a) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k-1, \quad k \in N$ шарт бўйича қуйидаги формула бўйича тарифлаймиз:

$$\begin{aligned} (B_{a+}^{\nu, k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1} \Gamma(k)} \int_a^x (x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (1.48)$$

бу ерда ${}_2F_1$ - Пуассоннинг гипергеометрик функцияси, $P_\nu''(z)$ -функция Лежандр функцияси.

Киритилган операторлар Бессел $(B_\nu)^{-k}$ операторининг манфий бутун даражаларининг интеграл қўлланилиши бўлади. Уларнинг k параметрнинг ихтиёрий комплекс қийматларидага ўхшаш ўтказилади. $\nu = 0$ да Бессел оператори иккинчи кўринишга киритилади, киритилган операторлар эса Риман-Лиувилнинг каср интегралларига келтирилади:

$$B_{b-}^{0,k} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{0,k} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Юқорида таърифланган (1.47-1.48) Бессел операторларининг каср даражалари аниқ кўринишда каср интегродифференциаллаш операторлари қандайдир бир тури сифатида С.М.Ситник [64] томонидан таърифланган. Бунда йўналтирувчи мулохазалар сифатида шунинг натижалари тўғри қўлланилган, у ишда Бессел операторлари бутун даражали оддий дифференциал тенгламаларнинг ечими аниқ кўринишида кўриб чиқилган. Бунда Гаус гипергеометрик функцияларининг (1.47-1.48) формулаларда Лежандр функциялари орқали ифодаланиши ҳисоблашларни мос ҳолда қисқартириш С.М.Ситник томонидан изохланган.

Лежандр функциялари айниятларга асосланган етарлича содда кўрсатмалар ёрдамида (1.47-1.48) операторлар содда хоссаларининг бирламчи олиниши ҳосил бўлади. Улар k параметр бўйича ярим группа хоссасига, Ханкел алмаштиришлари образидаги мос ҳолдаги даражага кўтаришлар ва Меер алмаштиришларлари киради. Риман-Лиувил каср интегродифференциаллаши операторларнинг кўп сонли тадбиқлари Тейлор формуласи қолдиқ ҳадига уларнинг киритилиши асосланган. Шунинг учун Бессел оператори каср даражаларини таърифлагандан кейин Тейлорнинг умумлашган формуласини куриш ҳақидаги масала дарҳол келиб чиқади. Ушбу формулада функция Бессел операторлари даражаларига ёйилади. Бу масала анча олдин пайдо бўлган ва қандайдир тарихга эга.

Биринчи марта Бессел оператори даражаларига ёйиш формулалари Жон Делсарт томонидан олинган. Уларни қуришнинг умумий усули [15] да оператор- аналитик функцияларнинг терминларида кўрсатилган. Аммо Тейлор-Делсарт қаторлари Бессел оператори даражалари бўйича оддий эмас, балки умумлашган силжишни бўлиш имконини беради. Асли бундай ёйишлар Бессел функцияси учун қаторларнинг оператор вариантлари бўлади. Худди шундай, Тейлорнинг оддий қаторлари экспонентани қаторга ёйишнинг операторли ҳолатидан иборат.

Тейлор-Делсарт қаторлари, албатта, ўзининг тадбиқлари соҳасига эга. Аммо хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни сонли ечимлари учун умумлашган формулалар ва ва бошқа бир табиатли Тейлор қаторлари керак бўлади. Масалан, тўрлар усули билан ечимни қатламдан қатламга ҳисоблаётганда умумлашган силжиш формулалари умуман фойдасиз, аммо, айнан олдинги қатламлардаги унинг қиймати орқали келгуси ҳисоб қилинаётган қатламда ечимни ифодаловчи оддий силжиш учун формулалар керак бўлади. Шу нарса маълум бўлдики, бундай формулаларни оддий силжиш учун қуриш умумлашган силжиш учун қуришдан анча қийиндир, чунки улар мос функциялар учун маълум бўлган айниятларнинг тўғридан-тўғри ўхшаши бўлмайди.

Биринчи марта берилганларни Бессел оператори орқали чекли элементлар усули билан тенгламаларни сонли ечишга қўллаш учун керакли турдаги Тейлор формуласи В.В.Катрахов [65] ишида кўриб чиқилган. Аммо у ерда олинган натижа аниқ кўринишдаги керакли формулалар учун биринчи яқинлашиш сифатида кўриб чиқилиши мумкин, чунки коэффицентлар рекурент муносабатлар системаси орқали бериладиган аниқ бўлмаган ўзгармаслар орқали ифодаланган, қолдиқ ҳаднинг ядроси эса қандайдир кўпкаррали интеграл сифатида берилган. Бу тасодиф эмас, бир вақтнинг ўзида ядроларнинг ва қолдиқ ҳадларнинг аниқ кўринишдаги қолдиғи учун керакли ифодалар маълум эмас. Биз бошқа вазиятамыз, бунда каср

даражалар учун керакли ифодалар аниқ кўринишда (1.47-1.48) да маълум, шунинг учун тейлорнинг умумлашган формуласини аниқ куриш ҳақидаги масаланинг тўлиқ ечимини оддий силжишнинг Бессел оператори даражалари бўйича қаторга ёйиш учун ёзиб чиқишга ўтамиз. Шунга ўхшаш формула содда ҳолда аввало [64] да кўрсатилган эди.

Теорема 7. Ихтиёрий етарлича силлиқ функцияни интеграл шаклда $x = b$ да қолдиқ ҳадли Бесселнинг дифференциал оператори даражалари бўйича ёйиш ҳақидаги Тейлор формуласи тўғридир:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-2} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (B^{i-1} f) \Big|_b - \right. \quad (1.49)$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (DB^{i-1} f) \Big|_b \right\} + B_{b-}^{\nu,k} (B^k f)$$

Бу ерда $B_{b-}^{\nu,k}$ - (1.47) Бессел чап томонлама каср интеграллашнинг операторларидир; ${}_2F_1$ - Гурсанинг гипергеометрик функцияси. Шунингдек,

$$C_\nu f = D^2 f - D \left(\frac{\nu}{y} f \right) = D^2 - \frac{\nu}{y} D f + \frac{\nu}{y^2}$$

кўшма операторни қўллайдиган иккиламчи формула ҳам тўғридир.

Теорема 8. Ихтиёрий етарлича силлиқ бўлган функцияни $x = a$ да қолдиқ ҳадли интеграл шаклда C_ν дифференциал операторнинг даражалари бўйича ёйиш ҳақидаги Тейлор формуласи тўғри:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-2} \left(\frac{a}{x} \right) {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) (C_\nu^{i-1} f) \Big|_a + \right. \quad (1.50)$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) a^\nu (Dx^{-\nu} C_\nu^{i-1} f) \Big|_a \right\} + B_{a+}^{\nu,k} (C_\nu^k f),$$

бу ерда $B_{a+}^{\nu,k}$ - (1.48) Бесселнинг ўнг томонлама каср интеграллаш оператори; ${}_2F_1$ - Гаусснинг гипергеометрик функцияси.

II-БОБ. Бессел функциялари

1.1 §. Биринчи турдаги Бессел функциялари.

Ушбу

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.1)$$

ёки

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

тенглама *Бессел тенгламаси* дейилади, бунда ν ўзгармас сон (2.1) тенгламанинг *индекси* деб аталади. (2.1) тенгламани гипергеометрик тенгламадан келтириб чиқариш қийин эмас. Бунинг учун

$$x = \frac{\xi^2}{4ab}, \quad dx = \frac{\xi d\xi}{2ab}, \quad dx^2 = \frac{\xi^2 d\xi^2}{4a^2 b^2}$$

алмаштириш бажарсак,

$$\left(1 - \frac{\xi^2}{4ab}\right) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left[c - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab}\right) \frac{\xi^2}{4}\right] \frac{dy}{d\xi} \frac{2}{\xi} + y = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. $a \rightarrow \infty$ ва $b \rightarrow \infty$ да

$$\xi y'' + 2cy' + \xi y = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламада $y = \xi^{-\nu} z$ алмаштириш бажариб,

$c = \nu + \frac{1}{2}$ десак,

$$\xi^2 z'' + \xi z' + (\xi^2 - \nu^2)z = 0$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенглама эса (2.1) Бессел тенгламасининг ўзгинасидир. $\nu \geq 0$ бўлсин. Кейинги ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида (2.1) тенгламада

$$y = x^\nu z$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда z функцияни аниқлаш учун

$$z'' + \frac{2\nu+1}{x}z' + z = 0 \quad (2.2)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг ечимини

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$z' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + (n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \dots$$

$$\frac{z'}{x} = \frac{c_1}{x} + 2c_2 + 3c_3x + \dots + (n+2)c_{n+2}x^n + \dots$$

$$z'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots + (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \dots$$

Ҳосил бўлган қаторларни (2.2) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & \frac{2\nu+1}{x} c_1 + [2c_2 + (2\nu+1)2c_2 + c_0] + [2 \cdot 3c_3 + (2\nu+1)3c_3 + c_1]x + \\ & + [3 \cdot 4c_4 + (2\nu+1)4c_4 + c_2]x^2 + \\ & + [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]x^n + \dots = 0 \end{aligned}$$

Аниқмас коэффициентлар усулига асосан, x нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаймиз:

$$c_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Бундан

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2\nu+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

(2.3) ва (2.4) га асосан

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = \dots = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2\nu+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2\nu+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)}$$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2 \cdot 4 \dots 2n(2\nu+2)(2\nu+4) \dots (2\nu+2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \dots n(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+n)}$$

Шундай қилиб, (2.2) тенгламанинг ечими ушбу

$$z = c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(v+1)(v+2) \cdot \dots \cdot (v+n)} \right] \quad (2.5)$$

қатор билан ифодаланади. Бунда c_0 - ўзгармасни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. Даламбер белгисига асосан, (2.5) қатор x нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлишини текшириб кўриш қийин эмас.

Даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш (яқинлашиш оралиғи ичида) ҳамма вақт қонуний бўлгани учун (2.5) қатор билан ифодаланган z ҳақиқатдан ҳам (2.2) тенгламанинг ечими бўлади.

Одатда c_0 ўзгармас

$$c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

деб танлаб олинади. Ушбу

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n &= n! = \Gamma(n+1), \\ (v+1)(v+2)\dots(v+n)\Gamma(v+1) &= (v+2)(v+3)\dots \\ (v+n)\Gamma(v+2) &= \dots = (v+n)\Gamma(v+n) = \Gamma(v+n+1) \end{aligned}$$

тенгликларни эътиборга олсак, z қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+v} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(v+1)(v+2) \cdot \dots \cdot (v+n)\Gamma(v+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+v} \Gamma(n+1)\Gamma(v+n+1)} \end{aligned}$$

(1) тенгламанинг ечими $y = x^v z$ функциядан иборатдир. Бу функцияни $J_v(x)$ орқали белгилаб оламиз. Демак,

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}}{\Gamma(n+1)\Gamma(v+n+1)} \quad (2.6)$$

$J_v(x)$ функция *биринчи турдаги v индексли ёки v тартибли Бессел функциялари* дейилади.

Айрим адабиётларда бу функциялар *цилиндрик функциялар* деб ҳам аталади.

$J_\nu(x)$ функция (2.1) Бессел тенгламасининг ечимларидан биридир. Хусусий $\nu = 0$ бўлган ҳолда

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma^2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \quad (2.7)$$

$\nu = 1$ да эса

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

Умуман бутун мусбат ν ларда

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!} \quad (2.8)$$

(2.6) ва (2.8) формулалардан кўринадикки, $\nu = 0$ ёки ихтиёрий бутун ва жуфт ν лар учун $J_\nu(x)$ функция жуфт функциядан иборатдир.

И з о ҳ. ν каср бўлганда $x < 0$ лар учун $J_\nu(x)$ функция, умуман айтганда, мавҳум қийматларни қабул қилади. ((6) га қаралсин). Мавҳум қийматлар билан иш кўрмаслик учун $J_\nu(x)$ ни (ν каср бўлганда) $x \geq 0$ лар учун текширамыз. (2.1) тенгламада ν^2 иштирок этаётганлиги туфайли юқоридаги мулоҳазалар ν ни $-\nu$ билан алмаштирганда ҳам (2.1) тенгламанинг ечимига олиб келади. (2.6) да ν ни $-\nu$ га алмаштирсак

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-v+n+1)} \quad (2.9)$$

функция ҳосил бўлади.

$J_{-v}(x)$ функция ҳам биринчи турдаги $-v$ индексли Бессел функцияси дейилади.

$J_v(x)$ ва $J_{-v}(x)$ функциялар v индекс бутун бўлмаганда чизиқли боғлиқ бўлмайди, чунки бу функцияларни ифодаловчи (2.6) ва (2.9) қаторларнинг бошланғич ҳадлари нолдан фарқли коэффицентларга эга бўлиб, x нинг турли даражаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, бутун бўлмаган индекс учун (2.1) тенгламанинг умумий ечими қуйидагидан иборат:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \quad (2.10)$$

бу ерда C_1 , C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

2.2 §. Иккинчи турдаги Бессел функциялари.

Агар ν бутун сон бўлса, $n = 0, 1, \dots, \nu - 1$ лар учун $-\nu + n + 1$ ифода нолр ёки манфий бутун қийматларга тенг бўлади. Демак, n нинг бу қийматларида $\Gamma(-\nu + n + 1) = \infty$ бўлади. Шунинг учун ҳам (2.9) қаторнинг мос ҳадларини нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, бутун ν лар учун

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)}$$

ёки, $n = \nu + k$ десак,

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = (-1)^\nu J_\nu(x) \quad (2.11)$$

Демак, $\nu \geq 0$ бутун сон бўлган ҳолда (2.11) га асосан $J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлади, яъни бу ҳолда, аслини олганда (2.1) тенглама битта хусусий ечимга эга бўлади. Шунинг учун (2.10) Бессел тенгламасининг умумий ечими бўла олмайди. (2.1) тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини аниқлаш учун каср ν лар учун (2.10)дан C_1 ва C_2 ўзгармасларни махсус танлаб, ушбу

$$Y_\nu(x) = \operatorname{ctg} \nu \pi J_\nu(x) - \operatorname{cosec} \nu \pi J_{-\nu}(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi} \quad (2.12)$$

функцияни тузамиз, ν бутун сон бўлганда (2.12) формуланинг сурати $J_\nu(x)(-1)^\nu - J_{-\nu}(x)$ га тенг бўлиб, бу ифода (2.11)га асосан нолга тенг; маҳражи ҳам нолга тенг бўлади, яъни (2.12) аниқмасликдан иборат бўлади, ν ни бутун сонга интиштириб, бу аниқмасликни очамиз. Лопитал қондасига асосан

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu \pi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos \nu \pi \frac{\partial}{\partial \nu} J_{\nu}(x) - \pi J_{\nu}(x) \sin \nu \pi - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)}{\pi \cos \nu \pi} = \\
&= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\nu}(x) (-1)^n - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=\pi}}{\pi (-1)^n}
\end{aligned}$$

Охирги ифодада $J_{\nu}(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ ўрнига уларни ифодаловчи (2.6), (2.9) қаторларни қўйиб, ν бўйича дифференциаллаб, сўнгра ν ўрнига бутун n сонни қўйсак, бир қатор ҳисоблашлардан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2k} - \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right)
\end{aligned} \quad (2.13)$$

бу ерда $C=0,577215664\dots$ - Эйлер ўзгармасидир. Хусусий $n=0$ бўлган ҳолда

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right)$$

$Y_0(x)$ функцияни $\nu=n$ бўлганда (1) тенглама қўйиб, ҳақиқатан ҳам бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шу билан бирга $J_n(x)$ ва $Y_n(x)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқ бўлиши мумкин эмас, чунки булардан биринчиси $x=0$ да чекли қийматга эга, иккинчиси эса чексизликка айланади. Демак, $Y_n(x)$ функция (1) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими бўлади.

(2.13) формула билан аниқланган $Y_n(x)$ функция *иккинчи турдаги n - тартибли Бессел функция ёки Вебер функцияси* дейилади.

Бессел тенгламасининг бутун $\nu = n$ бўлганда умумий ечими ушбу

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

формула билан аниқланади. Бунда, C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

1.3 §. Турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар.

Ихтиёрий ν учун ушбу

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^\nu J_{\nu+1}(x), \quad (2.15)$$

формулалар ўринлидир. Худди шунга ўхшаш формулалар иккинчи турдаги мос функциялар учун ҳам тўғри бўлади.

(2.14) формула $J_\nu(x)$ ўрнига унинг (2.6) ифодасини қўйиш натижасида дарҳол келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+\nu) x^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu)} = \\ &= x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\nu-1}}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu+1-1)} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш (15) формула исботланади. Агар формулада ν ни $-\nu$ билан алмаштириб,

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_{-\nu}(x)] = -x^\nu J_{-\nu+1}(x) \quad (2.16)$$

тенгликка эга бўламиз. Аввало ν ни каср сон ҳисоблаб, (2.14)ни $\operatorname{ctgv} \pi$ га, (2.16) ни эса $\operatorname{cos} \operatorname{ecv} \pi$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодаларни бирини

иккинчисидан айирамиз. У ҳолда $\cos(v-1)\pi = -\cos v\pi$, $\sin(v-1)\pi = -\sin v\pi$ формулаларни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dx} \left[x^v \frac{J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \right] = x^v \frac{J_{v-1} \cos(v-1)\pi - J_{-v+1}}{\sin(v-1)\pi}$$

ёки

$$\frac{d}{dx} [x^v Y_v(x)] = x^v Y_{v-1}(x) \quad (2.17)$$

тенглик ҳосил бўлади.

(2.14)да v ни $-v$ га алмаштирсак,

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} Y_{-v}(x)] = x^{-v} Y_{-v-1}(x) \quad (2.18)$$

формулага эга бўламиз.

Энди (2.16)ни $\operatorname{ctgv} \pi$ га (2.18) ни $\operatorname{cosec} v\pi$ га кўпайтириб, уларни айирсак, $\cos(v-1)\pi = -\cos v\pi$, $\sin(v-1)\pi = -\sin v\pi$ тенгликларга асосан, каср v лар учун

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} Y_v(x)] = -x^{-v} Y_{v+1}(x) \quad (2.19)$$

формулага эга бўламиз.

Бутун v лар учун (2.17), (2.19) формулалар v ни бутун сонга интиштириб, лимитга ўтиш натижасида ҳосил бўлади.

(2.14) ва (2.15) формулаларнинг натижаси сифатида қуйидаги формулалар келиб чиқади.

$$\begin{aligned} xJ'_v(x) + vJ_v(x) &= xJ_{v-1}(x), \\ xJ'_v(x) - vJ_v(x) &= -xJ_{v+1}(x), \\ J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) &= 2J_v(x), \\ J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) &= \frac{2v}{x} J_v(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Бу формулаларнинг биринчи иккитаси (2.14),(2.15)ни бевосита дифференци- аллаш натижасида, кейинги иккитаси эса аввалгиларини қўшиш ва айириш натижасида ҳосил бўлади.

Худди шундай формулалар иккинчи тур функциялар учун ҳам ўринли бўлади.

2.4 §. Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари.

Математик физикада ушбу

$$J_0(x), J_1(x), Y_0(x) \text{ ва } J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Бессел функциялари энг кўп учрайди.

(20) формулаларнинг охиргисидан кўриняптики, $J_2(x), J_3(x)$ ва х.к. функцияларни ҳисоблаш $J_0(x), J_1(x)$ функцияларнинг мос қийматларини ҳисоблашга келади. Энди $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, бунда n - бутун сон, функцияни қараймиз. Аввало, $J_{\frac{1}{2}}(x), J_{-\frac{1}{2}}(x)$ функцияларнинг қийматларини ҳисоблаймиз. (6) га асосан

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{2^{2n+1} n! \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}$$

Маълумки,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Шундай қилиб,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{2^{2n} n! \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Бу ерда охирги йиғинди $\sin x$ нинг даражали қаторга ёйилмасидан иборатдир. Демак.

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

Худди шунга ўхшаш, (9) дан

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(2.20) формулаларнинг охиригисига асосан

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right], \\ J_{\frac{5}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{-\sin x + \frac{3}{x} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin(x - \pi) + \frac{3}{x} \cos(x - \pi)\right]. \end{aligned}$$

Умуман, $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ Бессел функцияси бутун n да элементар функциялар

орқали ифодаланади, яъни қуйидаги қўринишга эга бўлади:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin x \left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

бу ерда $P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ га нисбатан n - даражали кўпхад, $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ эса, $n-1$ даражали кўпхад, шу билан бирга $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$. Бундан, x нинг катта қийматларида Бессел функциясининг асимптотик ифодаси келиб чиқади:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \right], \quad (2.21)$$

бу ерда $O(x^{-1})$ орқали тартиби $\frac{1}{x}$ бўлган миқдор белгиланган.

Эслатиб ўтамизки, (2.21) асимптотик формула фақат $\nu = n + \frac{1}{2}$ да эмас, балки ν нинг барча қийматларида ҳам ўринли бўлади.

III-боб. $A_{kx}^{s,\lambda}$, $B_{kx}^{s,\lambda}$ ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ операторлар

ва уларнинг хоссалари

Фараз қилайлик, $f(x) \in C(m, n) \cap L_1[m, n]$, $g(x) \in C^1(m, n) \cap L_1[m, n]$ ва $k \in [m, n]$, $x \in (m, n)$.

Қуйидаги операторларни киритайлик:

$$A_{kx}^{s,\lambda}[f(x)] = f(x) - \int_k^x f(t) \left(\frac{t-k}{x-k} \right)^s \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{(x-k)(x-t)}] dt, \quad (3.1)$$

$$B_{kx}^{s,\lambda}[f(x)] = f(x) + \int_k^x f(t) \left(\frac{x-k}{t-k} \right)^{1-s} \frac{\partial}{\partial x} J_0[\lambda \sqrt{(t-k)(t-x)}] dt, \quad (3.2)$$

$$C_{kx}^{0,\lambda}[g(x)] = \text{sign}(x-k) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_k^x g(t) \bar{J}_1[\lambda(x-t)] dt \right\}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} C_{mx}^{1,\lambda}[f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_m^x f(t) |x-t|^{2\beta-1} \bar{J}_\beta[\lambda(x-t)] dt + \\ &+ \frac{\lambda^2 \text{sign}(x-m)}{2(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)} \int_m^x f(t) |x-t|^{2\beta} \bar{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)] dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

бу ерда $s = 0, 1$.

Бу операторлар

$$\Delta_\lambda U = U_{xx} - U_{yy} + \lambda^2 U = 0$$

телеграф тенгламаси учун коррект масалалар қўйишда ва текширишда кенг фойдаланилади. Шунинг учун уларнинг хоссаларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

1-теорема. Ихтиёрий $f(x) \in C(m, n) \cap L_1[m, n]$ ва $k \in [m, n]$, $x \in (m, n)$ учун

$$A_{kx}^{s,\lambda} \{B_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]\} = f(x), \quad B_{kx}^{s,\lambda} \{A_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]\} = f(x), \quad s = 0, 1. \quad (3.5)$$

тенгликлар ўринли, яъни $C(m, n) \cap L_1[m, n]$ синфда $A_{kx}^{s, \lambda}$ ва $B_{kx}^{s, \lambda}$ ўзаро тескари операторлардир.

Исбот. Фараз қилайлик

$$B_{kx}^{s, \lambda} [f(x)] = \varphi(x). \quad (3.6)$$

$B_{kx}^{s, \lambda}$ оператор ифодасини (3.6) га қўйиб ва $x - k = y$, $t - k = z$, $\tilde{f}(y) = f(x)(x - k)^{s-1}$, $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)(x - k)^{s-1}$ белгилашларни киритиб, куйидагига эга бўламиз:

$$\tilde{f}(y) + \int_0^y \tilde{f}(z) \frac{\partial}{\partial y} J_0 [\lambda \sqrt{z(z - y)}] dz = \tilde{\varphi}(y). \quad (3.7)$$

(3.7) Волтерра типдаги интеграл тенглама бўлиб, ягона ечимга эга ва бу ечим

$$\tilde{f}(y) = \tilde{\varphi}(y) - \int_0^y \tilde{\varphi}(z) \frac{z}{y} \frac{\partial}{\partial z} J_0 [\lambda \sqrt{y(y - z)}] dz$$

формула билан аниқланади. Бундан x , t ўзгарувчиларга ва $f(x)$, $\varphi(x)$ функцияларга қайтиб,

$$f(x) = \varphi(x) - \int_k^x \varphi(t) \left(\frac{t - k}{x - k} \right)^s \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x - k)(x - t)}] dt,$$

яғони

$$f(x) = A_{kx}^{s, \lambda} [\varphi(x)] \quad (3.8)$$

эканлигини топамиз. (3.6) ва (3.8) дан $A_{kx}^{s, \lambda}$ нинг $B_{kx}^{s, \lambda}$ операторга тескари оператор эканлиги келиб чиқади, яъни (3.5) тенгликларнинг биринчиси тўғри.

Теореманинг иккинчи қисми ҳам худди шундай исботланади. Бунда

$$f(x) - \int_0^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{x(x-t)}] dt = \varphi(x)$$

тенгламанинг ечими

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) \frac{x}{t} \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{t(t-x)}] dt$$

формула билан берилишидан фойдаланилади.

2-теорема. Ихтиёрий $f(x) \in C(m, n) \cap L_1[m, n]$ функция ва $k \in [m, n]$, $x \in (m, n)$ учун

$$A_{kx}^{0,\lambda} \left\{ \int_k^x B_{kt}^{1,\lambda} [f(t)] dt \right\} = \int_k^x f(t) J_0[\lambda(x-t)] dt \quad (3.9)$$

тенглик ўринли.

Исбот. $B_{kt}^{1,\lambda} [f(t)]$ ифодани

$$B_{kt}^{1,\lambda} [f(t)] = \frac{d}{dt} \int_k^t f(z) J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-t)}] dz$$

кўринишида ёзиш мумкинлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Уни (3.9) нинг чап томонига қўямиз ва $A_{kx}^{1,\lambda}$ операторнинг ёйилмаси бўйича ёзамиз, сўнгра ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, топамиз:

$$\begin{aligned} A_{kx}^{0,\lambda} \left\{ \int_k^x B_{kt}^{1,\lambda} [f(t)] dt \right\} &= \int_k^x f(z) J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-x)}] dz - \\ &- \int_k^x f(z) \left\{ \int_z^x J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-t)}] \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(x-t)}] dt \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Агар ушбу

$$\int_z^x J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-t)}] \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(x-t)}] dt = J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-x)}] - J_0[\lambda(x-z)] \quad (3.11)$$

тенгликнинг тўғри эканлигини исботласак, (3.9) нинг тўғрилиги (3.10) дан келиб чиқади.

(3.11) тенгликнинг чап томонини Φ билан белгилаб $J_0(z)$ функция ёйилмасидан ва қаторларни кўпайтиришнинг Коши формуласидан фойдаланиб

$$\Phi = \int_z^x \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2j+2} \sum_{l=0}^j \frac{(z-k)^l (x-k)^{j+1-l}}{(l!)^2 (j-l)!(j+1-l)!} (z-t)^l (x-t)^{j-l} dt$$

тенгликка келимиз.

Бу ердан қаторни ҳадлаб интеграллаб (чунки қатор текис яқинлашади) ва

$$\Phi = \int_z^x (z-t)^l (x-t)^{j-l} dt = (-1)^l (x-z)^{j+1} B(l+1, j+1-l)$$

тенгликни эътиборга олиб, топамиз:

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2j+2} \frac{(x-z)^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l (z-k)^l (x-k)^{j+1-l}}{l! (j+1-l)!}.$$

Ички йиғиндига $\frac{(-1)^{j+1} (z-k)^{j+1}}{(j+1)!}$ ни қўшиб ва айириб, сўнгра

$$\sum_{l=0}^p \frac{(-1)^l (z-k)^l (x-k)^{p-l}}{l! (p-l)!} = \frac{1}{p!} (x-z)^p, \quad p \in \mathbb{N}$$

айниятни ва $J_0(z)$ функция ёйилмасини эътиборга олиб,

$$\Phi = J_0[\lambda \sqrt{(z-k)(z-x)}] - J_0[\lambda(x-t)]$$

тенгликка келамиз. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. Ихтиёрий $f(x) \in C^1(m, n) \cap L_1[m, n]$ функция ва $k \in [m, n]$, $x \in (m, n)$ учун

$$A_{kx}^{1,\lambda} \left\{ \frac{d}{dx} B_{kt}^{0,\lambda} [f(x)] \right\} = \text{sign}(x - k) C_{kx}^{0,\lambda} [f(x)] \quad (3.12)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Фараз қилайлик, $f(x) \in C^1(m, n) \cap L_1[m, n]$. У ҳолда (3.9) тенглик ўринли. Шунинг учун

$$\int_k^x f(t) J_0[\lambda \sqrt{x-t}] dt = \varphi(x), \quad (3.13)$$

$$A_{kx}^{0,\lambda} \left\{ \int_k^x B_{kx}^{1,\lambda} [f(t)] dt \right\} = \varphi(x) \quad (3.14)$$

белгилашлар киритиш мумкин ва бундан $\varphi(k) = 0$, $\varphi(x) \in C[m, n] \cap C^1(m, n)$ ва $\varphi'(x) \in L_1[m, n]$ бўлади.

(3.13) ва (3.14) тенгликларда $\varphi(x)$ ни маълум деб ҳисоблаб, $f(x)$ ни топайлик.

Аввал (3.13) ни қараймиз. У Волтерра типигаги интеграл тенглама бўлганлиги учун ягона ечимга эга. Ечимни топиш учун (3.13) нинг иккала қисмини $\frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}$ га кўпайтирамиз ва x бўйича (k, y) ораликда интеграллаймиз:

$$\int_k^y \frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x} dx \int_k^x f(t) J_0[\lambda(x-t)] dt = \int_k^y \varphi(x) \frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x} dx.$$

Бу тенгликнинг чап томонида интеграллаш тартибини ўзгартириб, сўнгра ҳосил бўлган такрорий интегралда $z = y - x$ алмаштириш бажариб ва

$$\int_0^u J_\alpha(C\xi)J_\alpha(CU - C\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{\alpha}J_{\alpha+\beta}(CU), \operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > -1$$

тенгликни эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_k^y f(t)J_1[\lambda(y-t)]dt = \int_k^y \varphi(x)\frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}dx. \quad (3.15)$$

(3.13) ни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$f(x) - \lambda \int_k^y f(t)J_1[\lambda(x-t)]dt = \varphi'(x). \quad (3.16)$$

(3.15) тенглик ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ оператор ёйилмасини эътиборга олиб, (3.16) дан топамиз:

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-k)C_{kx}^{0,\lambda}[\varphi(x)]. \quad (3.17)$$

Демак, (3.13) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва у (3.17) формула билан аниқланади.

Энди (3.14) тенгликдан $f(x)$ ни топамиз. Унинг иккала томонига $B_{kx}^{0,\lambda}$ оператор татбиқ қилиб ва (3.5) ни эътиборга олсак,

$$\int_k^x B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)]dt = B_{kx}^{0,\lambda}[\varphi(x)]$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликни аввал x бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликка $A_{kx}^{0,\lambda}$ оператор татбиқ этиб ва (3.5) га асосланиб топамиз:

$$f(x) = A_{kx}^{1,\lambda} \left\{ \frac{d}{dx} B_{kx}^{0,\lambda} [\varphi(x)] \right\}. \quad (3.18)$$

(3.17) ва (3.18) дан (3.12) тенглик келиб чиқади.

Эслатма. (3.12) тенглик $A_{kx}^{1,\lambda}$, $B_{kx}^{0,\lambda}$ ва Бессел функцияларининг ёйилмасидан фойдаланиб исботланган.

Теорема. Агар $\nu(x) \in C^{(0,\alpha)}(a,b)$, $\alpha > \beta$, $[(x-a)(b-x)]^{-2\beta} \nu(x) \in L_1[a,b]$ бўлса, у ҳолда $\forall m \in [a,b]$ ва $\forall x \in (a,b)$ учун

$$\begin{aligned} & A_{mx}^{1,\lambda} \left\{ |x-m|^{\beta-1} D_{mx}^{2\beta-1} |x-m|^\beta B_{mx}^{1,\lambda} [\nu(x)] |x-m|^{-\beta} \right\} = \\ & = \text{sign}(x-m) \Gamma^{-1}(1-2\beta) |x-m|^{\beta-1} \int_m^x \nu(t) |x-t|^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda(x-t)] dt \end{aligned}$$

тенглик ўринли, бу ерда $0 < \beta < H$.

Теорема. Агар $\tau(x) \in C[a,b]$ ва (a,b) да $1-\beta$ дан катта α кўрсаткичли Гёлрдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда $\forall m \in [a,b]$ ва $\forall x \in (a,b)$ учун

$$\begin{aligned} & A_{mx}^{1,\lambda} \left\{ |x-m|^{-\beta} D_{mx}^{1-2\beta} |x-m|^{1-\beta} B_{mx}^{1,\lambda} [\tau(x)] |x-m|^{\beta-1} \right\} = \\ & = |x-m|^{-\beta} C_{mx}^{1,\lambda} [\tau(x)] \end{aligned}$$

тенглик ўринли, бу ерда $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

3.1 §. $A_{ax}^{S,\lambda}$ ва $B_{ax}^{S,\lambda}$ - операторларни Векуа-Эрдейи-Лаундес алмаштириш операторлари шартларини қаноатлантириши ҳақида.

Агар бирор бир A оператор ва $\lambda_k \in C$, $k=1,2$ комплекс сонлар учун ушбу

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T \quad (3.19)$$

тенглик бажарилса, T оператор Векуа-Эрдейи-Лаундес (ВЭЛ) алмаштириш оператори деб аталади.

Бунда, агар T чизикли оператор бўлса, (3.19) шартни қуйидагича ёзиш мумкин

$$TA = (A + \lambda)T,$$

бу ерда $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Векуа, Эрдейн ва Лаундес ишларида A оператор сифатида ушбу

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad A = B_v = D^2 + \frac{2v+1}{x}D$$

дифференциал операторлар олинган. Бунда $B_v = D^2 + \frac{2v+1}{x}D$ оператор

Бессел оператори деб аталади. Биз ҳам ушбу операторларни қараймиз ва T оператор сифатида М.С.Салохитдинов ва А.К.Ўриновлар томонидан киритилган (3.1) ва (3.2) операторларнинг алмаштириш оператори бўлишини кўрсатамиз.

Биз олдин умумий ҳолда иккинчи тур Вольтерра типдаги ушбу

$$If(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)f(t)dt \quad (3.20)$$

интеграл операторни Векуа-Эрдейи-Лаундес типдаги алмаштириш оператори бўлиш шarti келтириб чиқарамиз.

Теорема. Агар $K(x, t)$ ядро ҳар бир ўзгарувчи бўйича узлуксиз иккинчи тартибни хусусий хосилаларга эга, $f(x)$ – эса икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, ҳамда ушбу

$$1) \omega + 2 \frac{d}{dx} K(x, x) = 0,$$

$$2) \left(\omega - \frac{2\nu+1}{t^2} \right) K(x, t) + \frac{2\nu+1}{x} \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) + \frac{2\nu+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} K(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} K(x, t) = 0,$$

$$3) \frac{2\nu+1}{a} K(x, a) f(a) - \frac{\partial}{\partial t} K(x, a) f(a) + K(x, a) Df(a) = 0$$

шартлар бажарилса, у ҳолда (3.20) интеграл оператор $A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x} D$

оператор билан Векуа-Эрдейи-Лаундес типигаги алмаштириш оператори бўлиб, охирги 3) шартда, агар $a=0$ ёки $a = \infty$ бўлса, бу шарт қуйидаги лимит маъносида тушунилади:

$$3') \frac{2\nu+1}{t} K(x, t) f(t) - \frac{\partial}{\partial t} K(x, t) f(t) + K(x, t) Df(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow a \text{ да}$$

$$VB_\nu f = (B_\nu + \omega) Vf$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Биз $K(x, t)$ ядро учун қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи

$$(B_\mu + \omega) Jf - JB_\nu f = 0$$

шартларни келтириб чиқарамиз.

Ифоданинг биринчи хади ушбуга тенг

$$\begin{aligned} (B_\nu + \omega) Jf(x) &= D^2 \int_a^x K(x, t) f(x) dt + \frac{2\mu+1}{x} D \int_a^x K(x, t) f(x) dt + \\ &+ \omega \int_a^x K(x, t) f(t) dt + (B_\mu + \omega) f(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} f(x) dt + \frac{2\mu+1}{x} \int_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} f(x) dt + \omega \int_a^x K(x,t) f(x) dt + \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} f(x) \right]_{|_{t=x}} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} f(x) + \\
&\quad + K(x,t) f'(x) + K(x,x) \frac{1}{x} f(x) (2\mu+1) + (B_\mu + \omega) f(x).
\end{aligned}$$

Иккинчи ҳади эса

$$\begin{aligned}
JB_\nu f(x) &= B_\nu f(x) + \int_a^x K(x,t) (B_\nu f)(t) dt = \\
&= B_\nu f(x) + K(x,t) f'(t) \Big|_a^x + (2\nu+1) \frac{1}{t} K(x,t) f(t) \Big|_a^x - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} f(t) \Big|_a^x + \\
&\quad + \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} f(t) dt - (2\nu+1) \int_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \frac{1}{t} f(x) dt + (2\nu+1) \int_a^x K(x,t) \frac{1}{t^2} f(t) dt
\end{aligned}$$

У ҳолда $0 < a < \infty$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
&(B_\mu + \omega)Jf - JB_\nu f = \\
&\quad \left(\omega + \frac{2(\mu-\nu)}{x} K(x,x) + 2 \frac{d}{dx} K(x,x) \right) f(x) + 2 \frac{\mu-\nu}{x} f'(x) + \\
&\quad + \int_a^x \left\{ \left(\omega - \frac{2\nu+1}{t^2} \right) K(x,t) + \frac{2\mu+1}{x} \frac{\partial}{\partial x} K(x,t) + \frac{2\nu+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} K(x,t) + \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} K(x,t) \right\} f(t) dt + \\
&\quad + \frac{2\nu+1}{a} K(x,a) f(a) - \frac{\partial}{\partial t} K(x,t) \Big|_{t=a} f(a) + K(x,a) f'(a) = 0
\end{aligned}$$

га эга бўламиз.

Тўртта қўшилувчидан ҳар бирини нолга тенглаштириб теорема шартига эга бўламиз. Кўриш қийин эмас, $a = 0$ ёки $a = \infty$ да келтирилган ҳисоблашлар 3') га олиб келади. Бир вақтнинг ўзида, шуни такидлаймизки «мос келувчи» функциялар қуйидагилар бўладик, улар учун ҳусусан

$$\int_a^x K(x,t)f(t)dt, \quad \int_a^x K(x,t)f''(t)dt, \quad \int_a^x \frac{1}{t} K(x,t)f'(t)dt$$

интеграллар мавжуд бўлади ва қуйидаги иккита интеграл интеграл белгиси остида дифференциалланади:

$$D \int_a^x K(x,t)f(t)dt, \quad D^2 \int_a^x K(x,t)f(t)dt.$$

Энди Салоҳитдинов-Ўриновнинг (3.1) ва (3.2) операторларини текширамиз. (3.1) операторда $n = 0$ бўлган ҳолда унинг ядросини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$K(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] = -\frac{\lambda^2}{4}(x-a) \bar{J}_1[\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}].$$

$\bar{J}_\nu(0) = 1$ га асосан $K(x,x) = -\frac{\lambda^2}{4}(x-a)$ бўлади, у ҳолда 1) шартдан $\omega = \frac{\lambda^2}{2}$

эканлиги келиб чиқади. Худди шундай 2) ва 3) шартларни ҳам текширганимизда, $2\nu + 1 = 0$ тенгдик келиб чиқади. Худди шундай $n = 1$ ҳолни ва $B_{ax}^{n,\lambda} f$ операторни текшириш мумкин.

Бундан кўринадики Салоҳитдинов-Ўриновнинг (3.1) ва (3.2) операторлари

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ оператор билан қуйидаги алмаштириш оператори ролини бажарар

экан.

$$A_{ax}^{n,\lambda} f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) A_{ax}^{n,\lambda} f(x),$$

$$B_{ax}^{n,\lambda} f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right) B_{ax}^{n,\lambda} f(x).$$

3.2 §. Ядросида Бессел функцияси қатнашган интеграл операторларнинг ярим группа ташкил этиши ҳақида

Ҳозиргача (3.1) ва (3.2) операторларнинг ўзаро тескари операторлар эканлиги, улар учун экстремум принципи, ҳамда ушбу операторлар билан каср тартибли Риман-Лиувиль маъносидаги операторларнинг композициялари ҳисобланган ва улар спектрал параметрли бузиладиган гиперболик ва аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалани тадқиқ этишда қўлланилган. Бундан ташқари ушбу $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ операторлар билан алмаштириш операторлари вазифасини бажариш ҳоли ҳам исботланган.

Ушбу параграфда (3.1) ва (3.2) операторларнинг λ параметр бўйича яримгруппа хоссасига эга эканлигини кўрсатамиз, бу ерда λ - комплекс сон, $n = 0, 1$.

Агар $A_{ax}^{n,\lambda} A_{ax}^{n,\mu} = A_{ax}^{n,\lambda+\mu}$ тенглик бажарилса, $A_{ax}^{n,\lambda}$ оператор λ параметр бўйича яримгруппа ташкил этади дейилади.

Теорема. $f(x) \in L_1(a, +\infty)$ бўлсин, у ҳолда $x > a$ бўлганда

$$A_{ax}^{n,\lambda} A_{ax}^{n,\mu} f(x) = A_{ax}^{n,\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} f(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Олдин $n = 0$ ҳолни кўриб чиқамиз

$$\begin{aligned} A_{ax}^{0,\lambda} A_{ax}^{0,\mu} f(x) &\equiv A_{ax}^{0,\mu} f(x) - \int_a^x \left\{ A_{ax}^{0,\mu} f(t) \right\} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)} \right] dt = \\ &= f(x) - \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\mu \sqrt{(x-a)(x-t)} \right] dt - \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)} \right] dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_a^x \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt \int_a^t f(s) \frac{\partial}{\partial s} J_0 [\mu \sqrt{(t-a)(t-s)}] ds = \\
& = f(x) - \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\mu \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt - \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt - \\
& - \int_0^x f(s) ds \int_s^x \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] \frac{\partial}{\partial s} J_0 [\mu \sqrt{(t-a)(t-s)}] dt.
\end{aligned}$$

Ички интегрални хисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
I &= \int_s^x \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] \frac{\partial}{\partial s} J_0 [\mu \sqrt{(t-a)(t-s)}] dt = \\
&= J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-x)}] - J_0 [\lambda \sqrt{(s-s)}] = 0 \\
& \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\mu \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt + \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt = \\
&= \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} \{ J_0 [\lambda \sqrt{(x-a)(x-t)}] + J_0 [\mu \sqrt{(x-a)(x-t)}] \} dt = \\
&= \int_a^x f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0 [\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{(x-a)(x-t)}] dt,
\end{aligned}$$

юқоридаги тенгликлардан теорема исботланди. Демак, $n = 0$ да

$$A_{ax}^{0,\lambda} A_{ax}^{0,\mu} f(x) = A_{ax}^{0,\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} f(x)$$

га тенг, $n = 1$ бўлган ҳолда ҳам теорема ўринли.

Шундай қилиб, $A_{ax}^{n,\lambda}$ операторга тескари $B_{ax}^{n,\lambda}$ оператор учун ҳам қуйидаги теорема ўринли экани келиб чиқади.

Теорема. $f(x) \in L_1(a, +\infty)$ бўлсин, у ҳолда $x > a$ бўлганда

$$B_{ax}^{n,\lambda} B_{ax}^{n,\mu} f(x) = B_{ax}^{n,\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} f(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теорема ҳам юқоридаги каби исботланади.

Хулоса

Кириш қисмида мавзунинг ўрганилганлик даражаси келтирилган.

1. Биринчи бобда Штурм-Лиувил операторлари учун алмаштириш операторлари, Векуа-Эрдейи-Лаундес алмаштириш операторлари, ўзгарувчи коэффициентли умумий дифференциал операторлар учун алмаштириш операторлари, Сонин ва Пуассон типигаги алмаштириш операторлари, алмаштириш операторларининг каср интагродифференциаллаш оператори билан боғланиши келтирилган. АО назариясининг зарурлиги унинг кўп сонли тадбиқлари билан исботланган АО усуллари Фуръенинг умумлашган алмаштиришларини, спектрал функцияни ва Гелфанда-Левитаннинг машҳур тенгламасининг ечимини аниқлаган ҳолда тескари масалалар назариясида кенг қўлланилади.

2. Иккинчи бобда Бессел функциялари ҳақида сўз юритилган. Ихтиёрий индекс учун Бессел функциялари буюк Леонард Эйлер томонидан киритилган, унда Бессел хали туғилмаган ҳам эди. Умуман, бу функциялар Рикати номи билан аталадиган дифференциал тенгламани ечиш учун пайдо бўлган ва секин аста 1690-1770- йиллари оралиғида киритилган. Бунда Бернули оиласи аъзолари, Венециялик граф Жакколо Франческо Рикатти ва Эйлерлар қатнашган. Шу билан бирга, Фридрих Бесселнинг ўзининг номи билан аталувчи функцияларни ўрганишга қўшган хиссаси бекиёс улкандир. Иккинчи бобнинг биринчи параграфида биринчи турдаги Бессел функциялари, иккинчи параграфида иккинчи турдаги Бессел функциялари, учинчи параграфида турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар, тўртинчи параграфида Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари бўйича сўз борган.

3. Учинчи бобда $A_{kx}^{S,\lambda}$, $B_{kx}^{S,\lambda}$ ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ операторлар ва уларнинг хоссалари, $A_{ax}^{S,\lambda}$ ва $B_{ax}^{S,\lambda}$ - операторларни Векуа-Эрдейи-Лаундес алмаштириш операторлари шартларини қаноатлантириши ҳақида, ядросида Бессел

функцияси қатнашган интеграл операторларнинг спектрал параметр бўйича ярим группа ташкил этиши ҳақида ишлар қилинган.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни қўйиш ва тадқиқ қилишда муҳим аҳамиятга эга бўлган алмаштириш операторларидан фойдаланиш мумкин.

Диссертацияда текширилган хоссалар ва теоремалар ҳам янги бўлиб, олинган илмий натижалар назарий ва амалий аҳамиятга эгадир. Улардан дифференциал тенгламалар учун қўйилган текширишда фойдаланиш мумкин.

Адабиётлар.

1. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш оstonасида. Т.:«Ўзбекистон»НМИУ, 2011.
2. Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислон Каримовнинг «Ўзбекистон мустақилликка эришиш оstonасида» китобини ўрганиш бўйича ўқув-услубий қўлланма.Т.:«Ўзбекистон»НМИУ, 2011.106,108,109- бетлар.
3. Каримов И.А. Юксак манавият-енгилмас куч.Т.:«Манавият» 2008. 161-бет.
4. Кадрлар тайёрлаш бўйича Миллий дастур (махсус курс) Т:1997.31-бет.
5. М.С. Салохитдинов, А.Қ. Уринов “ Краевые задача для уравнений смешанного типа со спектральным параметром ”// Изд.“Фан” АН РУз, 1997 г.
6. М.С. Салохитдинов “ Математик физика тенгламалари ”// “Ўзбекистон” 2002 й.
7. Каримов Ш.Т., Хўжахонов З.З. Ядросида Бессел функцияси қатнашган алмаштириш операторлари ҳақида. Андижон Давлат Университети Республика илмий-амалий анжумани материаллари. 2011 йил 8-9 ноябрь.
8. Хўжахонов З.З. “Узлуксиз таълим тизимида математика ва информатика фанларини ўқитишни такомиллаштириш масалалари”, ”Ядросида Бессель функцияси қатнашган интеграл операторларнинг баъзи хоссалари ҳақида” Қўқон 2012.
9. Хўжахонов З.З. “ Илм-заковатимиз сенга, она-ватан!”, “Ядросида Бессель функцияси қатнашган интеграл операторларнинг ярим группа ташкил этиши ҳақида” ФарДУ. 2012.
10. Carrol R. Transmutation and Operator Differensial Equation.-North Holland, 1979.-245 p.
11. Carrol R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.- North Holland, 1982.-457 p.

12. Carrol R. Transmutation Theory and Applications.- North Holland, 1986.-351 p.
13. Gilbert R., Begehr H. Transmutations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1-2.-Longman, Pitman, 1992.
14. Trimiche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators.-Harwood Academic Publishers, 1988.-282 p.
15. Фаре Д.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов.-Новосибирск: Наука 1977.-280 с.
16. Gilbert R. Constructive Methods for Elliptic Equations. Springer Lecture Notes Math, 365, 1974.
17. Марченко В.А. пекральная теория операторов Штурма-Лиувилля.-Киев: Наукова думка, 1972.-220 с.
18. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.-Киев: Наукова Думка,1977.-331 с.
19. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи.-М.: Мир, 1980.-408 с.
20. Килбас А.А., Маричев О.И., Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.-Минск: Наука и техника, 1987.-688 с.
21. Положий Г.Н. Уравнения математической физики.-М.:Вкшная школа, 1964.-560 с.
22. Хромов А.П. конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Современная математика. Фундаментальная-2004,-№ 10.-с.3-163.
23. Ситник С.М. элементарная теория операторов преобразования.(Рукопись подготовлена к печати).-150 с.
24. Левитан Б.М., Повзнер А.Я. дифференциальные уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля// Докл. АН.-1946.-Т.52.-№ 6.-с. 483-486.

25. Блох А.Ш. Оп определении дифференциального оператора по его спектральной матрице-функции. Докл. АН.-1953.-Т.92.-№ 2-с. 209-212.
26. Левин Б.Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка// Докл. АН.-1956.-Т.106.-№ 2.-С. 187-190.
27. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.:ИЛ.1957.-444 с.
28. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики.-М.:МГУ,1993.-155с.
29. Волкодавов В.Ф., Лернер М.Е., Никалаев Н.Я. Таблицк некоторых функций Римана, интегралов и рядов.-Куйбышев: изд. Куйышев. гос. пед. инст.,1982.-56 с.
30. Волкодавов В.Ф., Никалаев Н.Я. Интегральные уравнения Вольтера первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения.-Самара: изд.-во –«Самарский университет»,1992.-100 с.
31. Колмагоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М:Наука, 1981.-544 с.
32. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных.-М.:1991.-112 с.
33. Нейман-задк М.И. Шкаликов А.А. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов//Матем. заметки .-1999.-Т.66.-№5.-с. 723-733.
34. Савчук А.М. Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами. Матеем. заметки.-1999.-Т.66.-№6-с. 897-912.
35. Boumenir A., VU Kim Tuan. Existence and construction of the transmutation operator//J.Math. Phys.-2004.-Vol.45.-Issue 7.-P. 2833-2843.
36. Гусейнов И.М. Об одном операторе преобразования// Матеем. заметки.-1997.-Т.62.-№2.-с.206-215.

37. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua//Quart. of Appl. Math.-1943.-V.5.-No. 1.-P.168—188.
38. Bers L.,Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations//Trans. Amer. Math. Soc.-1944.-V.56.-P. 67-93.
39. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного.-киев: изд. КГУ,1965-444 с.
40. Климентов С.Б. Классы Харди обобщённых аналитических функций// Изв. ВУЗов, Сев.-Кавказ. регион, серия «Естественные науки».-2003.-№3.-С.6-10.
41. Ляховецкий Г.В., Ситник С.М.Операторы преобразования Векуа-Эрдейи-Лаундеса// Влававосток: ДВо РАН, 1994.-24 с.
42. Lyahovetskii G.V. Sitnik S.M. the Vekua-Erdelyi-Lawndes transmutations// Влававосток: ДВо РАН, 1994.-14 с.
43. Килбас А.А., Сайго М., Жук В.А.//Дифференциальные уравнения.-1991.-Т.27.-№9.-С.1640-1642.
44. Delsart J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux equations linearts aux derivees partielles du seconda ordre// C.R.Acad.Sci.Paris.-1938.-206.-1780-1782.
45. Lions J.L. Operateurs de Delsarte et probleme mixte// Bull.Suc.Math.France.-1956.-No.84.-9-95.
46. Lions J.L. Quelques aplications d'operateurs de transmutations// Colloques Internat. Nancy.-1956.-125-142.
47. Фаре М.К. Построение операторов преоброзования и решение одной проблемы моментов для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка// УМН.-1957.-Т.12.-Выл. 1(73).-с.240-245.
48. Сахнович Л.А. Спектральный анализ вольтеровских операторов и обратные задачи//Докл. АН.-1957.-Т.115-№4.-с. 666-669.

49. Сахнович Л.А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами// Матем. сборник.-1958.-Т.46.-№1.-с. 61-76.
50. Маламуд М.М. Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков// Функцион. анализ и его прил.-1982.-Т.16.-№3.-с.108-111.
51. Маламуд М.М. К вопросу об операторах преобразования//Киев:, 1984.-48 с.
52. Коробейник Ю.Ф. Операторы сдвига на числовых семействах.-Ростов-на-Дону: ИРУ, 1983.-155 с.
53. Коробейник Ю.Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных интегральных уравнений.-Ростов-на-Дону: 2005.- 245 с.
54. Фишман М.К. Матем.сборник.-Т. 68 (110).-№ 1.-с. 73.
55. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка// Докл.АН.-1950.-Т. 74.-№ 2.-с. 185-188.
56. Cheikh B. Relations between harmonic analysis associated with two differential operators of different orders// Jurnal of Computational and Applied Mathematics.-2003.-Vol. 153.- No. 1.-P. 61-71.
57. Carrol R., Boumener A. Toward a general theory of transmutation// arXiv: funct-an/9501006.-1995.-19 p.
58. Юшкевич А.П. Леонард Эйлер.-М.: Знание, 1982.-64 с.
59. Ватсон Г.Н. Теория бесселных функций, т. 1.-М.: ИЛ, 1949.-728 с.
60. Сонин Н.Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах.-М.: Гостехтеоретиздат, 1954.-241 с.
61. Левитан Б.М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// УМН.-1957.-Т-6.-Вып 2.-С.- 102-143.
62. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.-М.: Мир, 1987. -736 с.

63. Kiryakova V. All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions// J.Physics A: 1997. 5085-5103.
64. Ситник С.М. О некоторых обобщениях дробного интегродифференцирования//Налчик-Эльбрус: 2003.-с. 86-87.
65. Катрахов В.В, Катрахова А.А. Формула Тэйлора с оператором Бесселя для функций одной и двух переменных//Деп.ВИН.-Воронеж:1982.-23-с.
66. Kiryakova V. Обобщённое дробное исчисление и его приложения а Анализе//София, Болгария, 2010.-532 с.
67. Гаршин С.В., Прядиев В.Л. Построение операторов преобразования и решение одной проблемы моментов для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка//София. 2005.-83-98.
68. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Transmutation Operators for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials//Mathematical physics, Analysis and Geometry 7, 2004, P. 119-149.
69. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials.// Inverse Problems 19, 2003, P. 665-684.
- 70.www.ziyo.net
- 71.www.nuu.uz
- 72.mathsms@yandex.ru Sitnik S.M.“Transmutations and Applications” Voronej: 2010.