

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

5480100 – амалий математика ва информатика йўналиши

09.305-гуруҳ талабаси Жалолов Жавлонбекнинг

ҳисболаш усуллари фанидан

КУРС ИШИ

**Мавзу: Гиперболик типдаги бир тенглама учун
қуйилган чегаравий масалани чекли айирмалар усули
ёрдамида ечиш**

Мавзу: Гиперболик типдаги бир тенглама учун қўйилган чегаравий масалани чекли айирмалар усули ёрдамида ечиш

Режа:

КИРИШ

I.БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ

I.1. Тенгламалар классификацияси

I.2. Математик физика тенгламаларининг типлари

I.3. Асосий масалаларнинг қўйилиши: Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалалар

I.4. Эйлер интеграллари ва гипергеометрик функция

II.БОБ. БИТТА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ЕЧИШ

II.1. Қўриниши ўзгартирилган Коши масаласининг қўйилиши

II.2. Масала ечимининг бир қийматли топилиши

II.3. Масала ечимини ЭХМда қайта ишлаш

ХУЛОСА

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

КИРИШ

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Шу мақсадни амалга оширишда бўлажак мутахассис билим ва кўникмаларининг мустаҳкамлиги, улар эгаллаган билимнинг атрофлича ўрганилгани катта аҳамият касб этади. Республикамиз Президенти Ислом Абдуғаниевич Каримов айтганларидек «...мамлакатимизнинг бой илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш» учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Давлат таълим стандартларида бўлажак мутахассис эгаллаши кўзда тутилган билимларни чуқур ва атрофлича баён қилиниши ҳамда ўргатилишига алоҳида аҳамият бериш “Миллий дастур”да кўзда тутилган асосий мақсадни амалга ошириш бўйича катта натижа беради. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришиш, жумладан юқори малакали кадрлар тайёрлашда миллий дастурни ўрни ва аҳамияти бекиёсдир. Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди: «Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, бирибир кадрларга бориб қадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз калажаги, ўрнимизга

ким келишига ёки бошқачароқ қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ... ».

Дифференциал тенгламалар назариясига оид дастлабки масалалар XVI-XVII асрларда Ж.Непернинг логарифмик жадвални тузиш жараёнида учрайди. Г.Галилей эса қаршиликсиз мухитда оғир жисмларнинг тушушини ўрганишида бундай масалалар таҳлилига асос солган [6],[7].

И.Ньютон ва Г.Лейбницнинг ишлари билан дифференциал тенгламалар назарияси ривожининг илк даври бошланди деб айтиш мумкин.

Баъзи геометрик масалаларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоб усуллари ёрдамида ўрганилиши оддий дифференциал тенгламаларнинг синфларга бўлинишига олиб келади.

XVII асрнинг биринчи ярмида дифференциал тенгламалар фақатгина механикада эмас, балки дифференциал геометрия ва варивцион ҳисобда ҳам кенг қўлланила бошланди. Бу давр охирига келиб математик физика масалалари, аввало торнинг тебраниши ҳақидаги масала хусусий ҳосилали тенгламалар кўринишини олди. Мазкур асрда дифференциал тенгламалар назарияси дифференциал тенгламаларнинг турли типлари ҳақидаги таълимот сифатида ривожлантирилди. Шунингдек, асосий эътибор интеграллашнинг хусусий усулларига, ечимни оддий функциялар билан ифодалашга ва квадратураларга олиб келишга қаратилган бўлиб, ечим мавжуд, лекин уни квадратурага олиб келиб бўлмаган тақдирда тақрибий интеграллашга ҳаракат қилинар эди.

Оддий дифференциал тенгламаларнинг кейинги ривожланишида XVIII асрнинг йирик математиклари Л.Эйлер, А.К.Клеро, Ж.Даламбер, С.Пуассон, ва Ж.Л.Лагранж катта ҳисса қўшдилар.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси дастлаб торнинг тебраниши ҳақидаги масалани ечишдан ривожлана бошлади.

Б.Тейлор (1715 йил) ушбу масаланинг ечимини математик жиҳатдан асослади, бунда у қуйидаги кўринишдаги тенгламага келди [6]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Баъзи чегаравий шартлар асосида Б.Тейлор масалани ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли оддий чизиқли тенгламаларга келтирди ва иккита учи бириктирилган тор учун ҳар қангдай вақт моментида у синусоида шаклида эканлигини топди. Тебранувчи тор тенгламасини

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

шаклида Даламбер ифодаланади ва унинг ечимини иккита ихтиёрий функция йиғиндиси шаклида, яъни $f(x+t) + \varphi(x-t)$ кўринишда топди [7].

Тор тебраниши тўла аниқланиши учун чегаравий шартлар билан бирга бошланғич шартлар берилиши кераклигини бир йилдан сўнг кўрсатди.

Юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар гидродинамика масалаларида (Эйлер, Даламбер, 1752 йил), мембрана тебранишлари ҳақидаги масала (Эйлер, 1753 йил), потенциаллар назариясида (Лаплас, 1789 йил) ва ҳ.к.ларда пайдо бўлди.

Р.Липшиц, Ж.Пеано, Ш.Пикар, С.В.Ковалевская, Ж.Дарбу, Ж.Лиувилль, П.Л.Чебышев, К.Я.Якоби, М.В.Остроградский ва бошқалар диккеренциал тенгламалар назариясининг навбатдаги масалаларини ҳал қилган ҳолда унинг ривожига катта ҳисса қўшдилар.

Дифференциал тенгламалар назариясининг XX асрдаги ривожланишида рус олимларидан А.Н.Тихонов, В.В.Степанов, М.М.Нахушев, Ф.Трикоми, А.В.Бицадзе, Н.М.Гюнтер, В.И.Смирнов, М.А.Лаврентьев, Н.И.Мусхелишвили, И.Н.Векуа, ўзбекистонлик

олимлардан М.С.Салоҳиддинов, Т.Ж.Жўраев ва улар яратган мактаб вакилларининг ҳиссаси катта бўлди.

Ҳисоблаш математикаси, амалий масалаларни ечишга бўлган эҳтиёж (юза ва ҳажмларни ўлчаш, кема ҳаракатини бошқариш, юлдузлар ҳаракатини кузатиш ва бошқалар) туфайли вужудга келганлиги учун ҳам у сонли математика бўлиб, унинг мақсади масала ечимини сон шаклида топишдан иборат.

Шундай типик математик масалаларга дуч келинадик, уларни классик методлар билан ечиш мумкин эмас ёки ечиш мумкин бўлган тақдирда ҳам ечим шундай мураккаб кўринишда бўладики, ундан самарала фойдаланишнинг иложи бўлмайди. Бундай типик математик масалаларга алгебрада тартиби жуда катта бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш, матрицаларнинг тескарисини топиш, матрицаларнинг хос сонларини топиш, алгебраик ва трансцендент тенгламалар ҳамда бундай тенгламалар системасини ечиш масалалари, математик анализда сонли интеграллаш ва дифференциаллаш, функцияни яқинлаштириш масалалари, шунингдек, оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш масалалари ва бошқалар киради.

Математикада ўрганиладиган объектлар сонининг кўпайиши бу фаннинг амалий татбиқ соҳаларини кенгайтиради. Масалан, К.Гаусс, Ж.Фурье, О.Коши, М.В.Остроградский каби олимлар вариацион ҳисоб усулини яратдилар, механика, физиканинг экстремумга доир масалаларини ҳосила ёрдамида ечдилар.

Европалик олимлар Л.Эйлер, Ж.А.Лагранж, Г.В.Лейбниц, Г.Крамер, К.Якоби, Ж.Г.Стокс, Дж. Ортега, Б.Больцано, К.Вейрштрасс ва бошқалар турли исботлаш усулларида фойдаланиб, дифференциал ва интеграл ҳисоб курсини ривожлантирдилар.

Бу усулларнинг кенйинги ривожда европалик олимлар Б.П.Демидович, Б.С.Кронберг, А.А.Самарский, Н.С.Бахвалов, Г.И.

Марчук, И.С. Березин, ўзбекистонлик олимлардан В.Қ. Қобулов, М.Исроилов, А.Абдуқодиров ва бошқаларнинг ҳиссаси катта бўлди.

Мавзунинг долзарблиги:

Фан ва техниканинг фаол ривожланиши, атом ядросидан фойдаланиш, учувчи аппаратларни лойиҳалаш, космик учиш динамикаси, бошқариладиган термоядро синтези муаммоси муносабати билан плазма физикаси масалаларини текшириш ҳамда ечишни тақозо қилмоқда. Бундай масалалар ўз навбатида математиклар олдида янгидан-янги ҳисоблаш методларини яратиш вазифасини қўяди. Иккинчи томондан, фан ва техника ютуқлари математиклар ихтиёрига кучли ҳисоблаш воситаларини бермоқда. Бунинг натижасида эса мавжуд усулларни янги машиналарда қўллаш учун қайтадан кўриб чиқиш эҳтиёжи туғилмоқда.

Шу мақсадда юқоридагиларга асосланиб келтирилган БМИ, яъни Гиперболик типдаги бир тенглама учун қуйилган чегаравий масалани чекли айирмалар усули ёрдамида ечиш долзарб деб ҳисоблаймиз.

1. БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ

1.1. Тенгламалар классификацияси.

Икки эркин ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, номаълум функция ва унинг иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари (иккинчи тартибли ҳосилалардан бири иштирок этиши шарт) орасидаги боғланишни ифодаловчи муносабатга айтилади ва уни умумий ҳолда

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

кўринишда ёзилади, бу ерда F - ўз аргументларининг берилган функцияси.

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.1)$$

кўринишдаги тенглама *юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизикли тенглама* дейилади. Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x, y нинг функциялари бўлиб, камида биттаси нолдан фарқли. Агар бу коэффициентлар x, y дан ташқари яна u, u_x ва u_y ларнинг ҳам функцияси бўлса, (1.1) **квази чизикли тенглама** дейилади.

Агар тенгламада юқори тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлар ҳам чизикли бўлса, яъни (1.1) ушбу

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{33}u + f = 0 \quad (1.2)$$

кўринишда бўлса, (1.1) чизикли тенглама дейилади. Бунда $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ ва f лар x, y нинг функциялари ҳисобланади; агарда тенгламанинг коэффициентлари x, y га боълиқ бўлмаса, тенглама *ўзгармас*

коэффициентли дейилади. Тенгламада $f(x, y) = 0$ бўлса, тенглама **бир жинсли** дейилади.

Агар (1.2) кўринишдаги тенгламада ўзгарувчиларни $\xi = \varphi(x, y)$ ва $\eta = \psi(x, y)$ тенгликларга асосан алмаштирсак, олдинги тенгламага **эквивалент янги тенглама** ҳосил бўлади.

Шуни эслатиб ўтамизки, тенгламада юқорида айtilган алмаштириш бажарилганда иккинчи тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлардан иккинчи тартибли ҳосилалар пайдо бўлмайди; агар бу ҳадлар чизиқли бўлса, чизиқлилигича қолади, яъни алмаштириш бажарилгач,

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{33}u + f$$

ифода яна

$$\bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \bar{a}_{13} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{a}_{23} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{a}_{33}u + \bar{f}$$

кўринишга келади, бу ерда $\bar{a}_{13}, \bar{a}_{23}, \bar{a}_{33}, \bar{f}$ — ξ ва η ўзгарувчиларнинг функциялари. Шу сабабли келгусида бу ҳадларнинг ёйилган ифодасини олмасдан ихчам шаклдагисини ишлатамиз, яъни (1.1) кўринишдаги тенглама билан шуғулланамиз.

Энди қуйидаги саволни қўйиш мумкин: ўзгарувчилар қандай алмаштирилганда, эквивалент тенглама олдинги тенгламага нисбатан соддароқ кўринишга келади?

Бу саволга жавоб топиш учун юқоридаги мулоҳазаларни инобатга олиб, (1.1) тенгламада ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Бунда u x, y функциянинг ҳосилалари янги ўзгарувчилар орқали

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\end{aligned}$$

тенгликлар билан аниқланиб, (1.1) тенглама

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (1.3)$$

кўринишга келади. Бунда

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.\end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.3) тенглама (1.1) тенгламага нисбатан содда кўринишда бўлиши учун ўзгарувчиларни шундай алмаштириш керакки, бунда $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$ ва $\bar{a}_{22}$ коэффициентлардан бири ёки икkitаси (лекин учаласи эмас) нолга айлансин. Бу масалани ечиш учун қуйидаги иккита леммани кўриб чиқамиз.

1-лемма. Агар $z = \varphi(x, y)$ функция ушбу

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (1.5)$$

тенгламанинг хусусий ечимларидан бири бўлса, $\varphi(x, y) = C$ ифода

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \quad (1.6)$$

қўринишдаги оддий дифференциал тенгламанинг умумий интегралли бўлади.

2-лемма. Агар $\varphi(x, y) = C$ ифода (1.6) оддий дифференциал тенгламанинг умумий интегралли бўлса, $z = \varphi(x, y)$ функция (1.5) тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Биринчи лемманинг исботи. Лемманинг шартига асосан $z = \varphi(x, y)$ функция берилган соҳанинг ихтиёрий нуқтасида

$$a_{11}(\varphi_x)^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}(\varphi_y)^2 = 0 \quad (1.7)$$

тенглик ўринли. Умумийликни чегараламай $\varphi_y \neq 0$ деб ҳисоблаб, охириги тенгликни φ_y га бўлсак,

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (1.8)$$

тенгликка эга бўламиз.

$\varphi(x, y) = C$ ифода (1.6) нинг умумий интегралли бўлиши учун ундан ошкор шаклда топилган $y = f(x, C)$ функция (1.6) ни қаноатлантириши керак. Бу функциянинг ҳосиласи, $\varphi(x, y) = C$ га асосан,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \quad (1.9)$$

тенглик билан аниқланади. Буни эотиборга олсак, (1.8) тенгликдан

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0, \quad (1.10)$$

яъни (1.6) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Бу билан 1-лемма исбот бўлди.

Энди иккинчи леммани исбот қиламиз. $\varphi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг умумий интеграли бўлсин. У ҳолда, $\varphi(x, y) = C$ нинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай (x, y) нуқтада (1.10) тенглик бажарилади.

Буни эотиборга олсак, (1.9) га асосан, бу нуқтада (1.8) тенглик ҳам бажарилади. Бундан эса (1.7) тенгликнинг ўринлилиги келиб чиқади. Шу билан 2-лемма ҳам исбот бўлди.

(1.6) тенглама (1.1) тенгламанинг *характеристик тенгламаси*, бу тенгламанинг интеграллари эса (1.1) тенгламанинг *характеристикалари* дейилади. (1.6) тенглама билан аниқланувчи dx, dy вектор йўналиши (1.1) тенгламанинг *характеристик йўналиши* дейилади.

Демак, 1- ва 2-леммаларга асосан, $\varphi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг интегралларидан бири бўлганда, $\xi = \varphi(x, y)$ деб олинса, (1.3) тенгламадаги

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ олдидаги коэффициент нолга айланар экан, яъни $\bar{a}_{11} = 0$ бўлади;

шунингдек, $\psi(x, y) = C$ (1.6) тенгламанинг иккинчи интеграли бўлса,

$\eta = \psi(x, y)$ деб олинса, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ олдидаги коэффициент ҳам нолга айланади,

яъни $\bar{a}_{22} = 0$ бўлади.

Характеристик тенглама қуйидаги иккита биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ажралади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (1.11)$$

Бу тенгламалардаги радикал остидаги ифоданинг ишорасига қараб, (1.1) тенглама типларга ажратилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **гиперболик типдаги** тенглама дейилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **эллиптик типдаги** тенглама дейилади.

Агар M нуктада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ бўлса, (1.1) тенглама M нуктада **параболик типдаги** тенглама дейилади.

Таорифдан фойдаланиб кўрсатиш қийин эмаски,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.12)$$

тенгламалар, масалан, $O(0,0)$ нуктада мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишли тенгламалардир.

Тенглама турли нукталарда турли типга тегишли бўлиши мумкин, масалан,

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.13)$$

тенглама $M_1(1,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,-1)$ нукталарда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишлидир.

Агар тенглама бирор (тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳади аниқланган) D соҳанинг ҳар бир нуктасида бир хил типга тегишли бўлса, у ҳолда уни D соҳада шу типдаги тенглама дейилади. Масалан, (1.12) тенгламалар текисликнинг ихтиёрий нуктасида бир хил типга тегишли бўлгани учун улар бутун текисликда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типдаги тенглама ҳисобланади. (1.13) тенглама эса юқори ярим текисликда эллиптик, қуйи ярим текисликда эса гиперболик тенглама бўлади.

Агар (1.1) тенглама бирор D соҳада эллиптик типга тегишли бўлиб, ихтиёрий λ_1 , λ_2 сонлар учун шундай мусбат k_0, k_1 сонлар топилсаки, D соҳанинг барча нукталарида

$$k_0 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq a_{11} \lambda_1^2 + 2a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + a_{22} \lambda_2^2 \leq k_1 \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1.1) тенглама D соҳада **текис эллиптик тенглама** дейилади.

Масалан, (1.12) даги биринчи тенглама ихтиёрий соҳада текис эллиптик, (1.13) тенглама эса юқори ярим текисликда текис эллиптик эмас.

Агар тенглама D соҳанинг турли қисмида турлича типларга тегишли бўлса, уни шу соҳада аралаш типдаги тенглама дейилади. Масалан, (1.13) тенглама $D_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ соҳанинг $D_1 = D_0 \cap (y > 0)$ қисмида эллиптик, $D_2 = D_0 \cap (y < 0)$ қисмида гиперболик, $D = \cap (y = 0)$ қисмида эса параболик типга тегишли бўлгани учун, у D_0 соҳада аралаш типдаги тенглама ҳисобланади.

(1.4) га асосан

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2.$$

Бундан кўринадики (1.1) ва (1.3) тенгламалар бир хил типга тегишли бўлиши, яъни ўзгарувчиларни алмаштиришда тенглама типи ўзгармаслиги учун

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлиши керак экан. Бу тенгсизлик эса $\varphi_{x,y}$, $\psi_{x,y}$ функцияларнинг чизикли боълиқ бўлмаслигини кўрсатади.

Демак, ўзгарувчиларни чизикли боълиқ бўлмаган $\xi = \varphi_{x,y}$, $\eta = \psi_{x,y}$ формулалар ёрдамида алмаштирганда тенгламанинг типи ўзгармайди.

Бундан ташқари, юқоридагилардан келиб чиқадики, (1.1) тенглама бирор нуктада эллиптик бўлса, бу нуктада ҳақиқий характеристик йўналишга эга эмас, гиперболик (параболик) бўлса эса, иккита (битта) характеристик йўналишга эга бўлар экан.

2-§ Математик физика тенгламаларининг типлари

Кўпгина физика ва техника масалаларини ечиш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга олиб келади. Бунда 2-тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар энг кўп учрайди.

$u = u(x, y, z, t)$ икки ўзгарувчи функция учун қуйидаги мисолларни келтирамиз.

1. Торда тўлқин тарқалиши тенграмаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

бу тенграмани текширишга торнинг кўндаланг тебраниши жараёнини кузатиш, стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлари, газ молекулалари тебранишлари ва бошқаларни кузатиш давомида тўқнаш келамиз. Бу тенграмалар гиперболик типдаги энг содда тенграмалардир.

2. Кесмада иссиқлик тарқалиши тенграмаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

бу тенграмани текширишга иссиқлик тарқалиши жараёнини кузатиш, суюқлик ва газ филтратсияси, еҳтимоллар назариясининг баъзи бир масалалари олиб келадилар. Бу тенграма энг содда кўринишдаги параболик тип тенграмадир.

3. Лаплас тенграмаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.16)$$

бу тенграмани текширишга электр ва магнит майдони ҳақидаги масалаларни кузатиш жараёнида, статсионар иссиқлик ҳолатини текшириш, гидродинамика масалалари, диффузия ва бошқа масалаларни ечишда дуч келинади. Бу тенграма энг содда эллиптик типдаги тенграмадир.

1-мисол

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad xy \neq 0$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишига келтиринг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2$ бўлиб, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 > 0$. Демак, тенгламамиз гиперболик тип экан.

Унинг характеристик тенгламаси $x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0$ ёки $(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$ бўлиб у иккита дифференциал тенгламадан иборат, уларнинг ўзгарувчиларини ажиратиб, $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ кўринишга эга бўлади, буларни интеграллаб $\ln y + \ln x = \ln c_1$ ва $\ln y - \ln x = \ln c_2$ ёки $xy = c_1$ ва $\frac{y}{x} = c_2$ га эга бўлиб, ва $\zeta = xy, \eta = \frac{y}{x}$ алмаштириш бажарсак, ески ўзгарувчилар бўйича олинган хусусий ҳосилаларни янги ўзгарувчилар орқали оламиз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$$

$$y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) +$$

$$\frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} = y \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \right) - \frac{y}{x^2} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - ларнинг бу қийматларини берилган дифференциал тенгламага

қўйиб ва уни соддалаштириб, қуйидаги каноник тенгламага эга бўламиз.

$$x^2(y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - y^2(x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})) = 0$$

$$\text{ёки } -4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ ёки } \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{xy} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$\text{бундан } \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

2-мисол

$$\sin^2 x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y \sin x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (сода) кўринишга келтириш.

Ечиш:

Бу ерда $a_{11} = \sin^2 x$, $a_{12} = -y \sin x$, $a_{22} = y^2$ бўлиб,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 \cdot \sin^2 x - y^2 \cdot \sin^2 x = 0$. Демак, тенглама параболик тип экан.

Характеристик тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$\sin^2 x \cdot dy^2 + 2y \cdot \sin x \cdot dx dy + y^2 \cdot dx^2 = 0,$$

ёки

$$(\sin x \cdot dy + y dx)^2 = 0.$$

Қуйидаги

$$\sin x \cdot dy + y dx = 0.$$

тенгламада ўзгарувчиларни ажратиш

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0.$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Уни интеграллаб

$$\ln y + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \ln C,$$

ёки

$$y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C$$

ечимни оламиз.

Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз: $\xi = y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\eta = y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ &= \frac{1}{4} y^2 \sec^4 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ &= \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ларнинг қийматларини дифференциал}$$

тенгламага қўямиз:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} y^2 \sec^4 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial \xi} - \\ &- y^2 \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right) - y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi} + \\ &+ y^2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Осонгина кўрсатиш мумкинки, $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$ -ларни ўз ичига олган ҳадлар

Ўзаро қисқаради ва тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{1}{2}y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial \xi} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0,$$

ёки

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \sin x \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

лекин

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta},$$

бўлганлиги учун

$$\sin x = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Натижада

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

3-мисол

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишга келтиринг.

Ечиш: Бу ерда $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 2$, бўлиб, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$. Демак тенгламамиз эллиптик тип экан. Характеристик тенглама $dy^2 + 2 \cdot dx dy + 2 \cdot dx^2 = 0$, ёки $y'^2 + 2y' + 2 = 0$.

Бундан $y' = -1 \pm i$; Демак иккита комплекс ечимлар оиласини ҳосил қиламиз:

$$y + x - ix = C_1 \quad \text{и} \quad y + x + ix = C_2.$$

Ўзгарувчиларни алмаштирамиз: $\xi = y + x$, $\eta = x$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dy} + \frac{dz}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = \frac{dz}{d\xi};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Дифференциал тенгламага хусусий ҳосилаларнинг топилган ифодаларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0.$$

яъни

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

4-мисол

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

қўринишдаги тенгламани каноник (соғда) қўринишга келтиринг.

Жавоб: $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$

5-мисол

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

қўринишдаги тенгламани каноник (соғда) қўринишга келтиринг.

Жавоб: $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x + y.$

6-мисол

$$xy \neq 0 \text{ бўлганда } \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

кўринишдаги тенгламани каноник (содда) кўринишга келтиринг.

Жавоб:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi = y^2, \quad \eta = x^2.$$

3-§ Асосий масалаларнинг қўйилиши:

Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалалар.

Физик жараёнларни математик тилда ёзиш учун аввало масала қўйилиши шарт, яъни жараённи бир қийматли аниқлаб берувчи шартлар баён қилиниши керак. Оддий дифференциал тенгламалар ва айниқса хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар умуман олганда чексиз кўп ечимга эга.

Шунинг учун физик масала хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга олиб келинадиган ҳолда, жараённи бир қийматли аниқлаш учун тенгламага баъзи бир қўшимча шартлар қўйилади. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар бўлган ҳолда, ечим бошланғич шартлар орқали аниқланиши мумкин, яъни аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи функциянинг ва унинг биринчи ҳосиласининг қийматлари берилади (Коши масаласи).

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун ҳам турли кўринишдаги қўшимча шартлар қўйилиши мумкин.

Энг аввало қуйидаги содда масалани қараймиз: учлари маҳкамланган торнинг кўндаланг тебраниши масаласи; Бу масалада u x, t деб торнинг ОХ ўқидан четланишини қараймиз. Агар торнинг учлари $0 \leq x \leq \ell$ кесманинг учларида маҳкамланган бўлса, u ҳолда қуйидаги «чегаравий шартлар» бажарилиши зарур

$$u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad (1.17)$$

Тор тебраниши унинг $t = t_0$ вақтдаги бошланғич формасига ва тезлик тақсимланишига боғлиқ бўлганлиги сабабли қуйидаги “бошланғич шарт” лар берилиши зарур:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x) \\ u_t(x, t_0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

Шундай қилиб, қўшимча шартлар «чегаравий» ва «бошланғич» шартлардан иборат бўлади, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар берилган функциялар. Бу шартлар тор тебраниши жараёнини, яъни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1.19)$$

тенглама учун (1.17), (1.18) чегаравий масала ечимини тўлиқ аниқлаб беради. Бошқа кўринишдаги чегаравий шартлар ҳам берилиши мумкин. (1.17) чегаравий шартлар биринчи тур шартлар деб аталади. $u(x, t)$ функциянинг x бўйича ҳосиласи $u_x(x, t)$ га қўйилган чегаравий шартлар

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(\ell, t) = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

иккинчи тур чегаравий шартлар деб аталади. Агар чегаравий шартлар $u(x, y)$ нинг ўзининг қийматларига ва унинг ҳосиласи $u_x(x, t)$ га қўйилган бўлса:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right)_{x=\ell} = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

учинчи тур чегаравий шартлар деб аталади. (1.17) - (1.21) шартлардан ташқари, бундан сўнг учта асосий тур чегаравий шартлар ҳақида гапирамиз:

- биринчи тур чегаравий шарт: $u(0, t) = \mu(t)$ – берилган режим,
- иккинчи тур чегаравий шарт: $u_x(0, t) = \nu(t)$ – берилган куч,
- учинчи тур чегаравий шарт: $u_x(0, t) = h u(0, t) - \theta(t)$ – эластик маҳкамланиш.

Худди шундай торнинг иккинчи учи $x = \ell$ га ҳам чегаравий шартлар қўйилади. Агар $\mu(t)$, $\nu(t)$ ва $\theta(t)$ лар нолга тенг бўлса, у ҳолда бу шартлар

бир жинсли деб аталади. Енди $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ тенглама учун биринчи чегаравий масалани келтирамиз: $0 \leq x \leq \ell$ ва $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

тенгламани,

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(\ell, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

чегаравий шартларни ва

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ функцияни топиш масаласи.

Агар торнинг учлари учун иккинчи ёки учинчи чегаравий шартларни олсак, буларга мос келувчи масалалар иккинчи ёки учинчи чегаравий масалалар деб аталади. Агар $x=0$ ва $x=\ell$ лардаги чегаравий шартлар турлича типларга мансуб бўлса, у ҳолда аралаш чегаравий масалаларга келамиз.

Агар бизни кичик вақт оралиғидаги торнинг ўзгариши қизиқтирса, у ҳолда чегаранинг таъсири кам бўлади ва тўлиқ масала ўрнига чексиз узунликдаги тор учун бошланғич шартлар остидаги чегаравий масалалар қаралади:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

тенгламанинг

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty$$

бошланғич шартларга бўйсунувчи ечимини топиш масаласи. Бу масала Коши масаласидир.

4-§. Эйлер интегралы ва гипергеометрик функция.

Гамма функция

Гамма-функция ушбу

$$\Gamma a = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (1.22)$$

интеграл билан аниқланади ва бу интеграл *иккинчи тур Эйлер интегралы* деб аталади.

Бу интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да эса узоқлашувчи бўлади.

Бўлаклаб интеграллаш натижасида (1) дан

$$a \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = x^a e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx,$$

яъни

$$\Gamma a+1 = a \Gamma a \quad (1.23)$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

Бу формулани кетма-кет қўлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma a+n = a+n-1 \cdot a+n-2 \cdot \dots \cdot a+1 \cdot a \cdot \Gamma a.$$

Агар бунда $a=1$ десак ва

$$\Gamma 1 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (1.24)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Gamma n+1 = n! \quad (1.25)$$

келиб чиқади. $n = 0$ бўлганда (1.25) формула $0! = \Gamma(1) = 1$ кўринишга эга бўлади. (1.23) дан $a \rightarrow 0$ да $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \rightarrow +\infty$ эканлиги равшан.

Бета ва гамма функцияларнинг ўзаро боғланишларини ўрнатиш мақсадида $x = ty$ ($t = \text{const} > 0$) алмаштириш бажариб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy. \quad (1.26)$$

Бу ерда a ни $a+b$ билан ва t ни $1+t$ билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{1+t^{a+b}} = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Охирги тенгликнинг ҳар икки томонини t^{a-1} га кўпайтирамиз ва t бўйича 0 дан ∞ гача интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^{a+b}} dt = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt.$$

Бундан (1.22) ва (1.26) га асосан

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) B(a,b) &= \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \\ &= \Gamma(a) \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a) \Gamma(b), \end{aligned}$$

бу ерда $B(a,b)$ – Бета функция деб номланади.

Демак,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (1.27)$$

Агар (1.27) формулада $b = 1 - a$ десак, у ҳолда

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ва (1.28) га асосан

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

формулага эга бўламиз. Бу формула *тўлдириш формуласи* дейилади.

Бундан $a = 1/2$ бўлганда $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ келиб чиқади.

Юқоридагилардан ташқари гамма-функция учун ушбу

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2a} \Gamma(2a)$$

Лежандр формуласи ҳам ўринли.

Ушбу

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1.28)$$

гипергеометрик тенглама ёки *Гаусс тенгламаси* деб аталувчи тенгламани текшираамиз. Бу ерда a, b, c - ихтиёрий параметрлар, улар ҳақиқий ёки комплекс сонлар бўлиши мумкин. Булардан a ва b параметрлар тенгламада симметрик иштирок этади.

(1.28) тенглама $0, 1, \infty$ махсус нукталарга эга. Бу тенгламанинг $x = 0$ махсус нукта атрофидаги ечимини

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (1.29)$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1} \quad \text{ёки} \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)A_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)A_{n+2}x^n.$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва y ни (1.28) тенгламага қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x) \frac{n+1}{n+2} A_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[c - \frac{a+b+1}{x} \right] (n+1) A_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} ab A_n x^n = 0.$$

Номалум $A_1, \dots, A_n, \dots$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз. Бунга асосан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш керак. x^n олдидаги умумий коэффициентларни нольга тенглаб, ушбу

$$- \frac{n-1}{n} A_n + \frac{n}{n+1} A_{n+1} - \frac{n}{a+b+1} A_n + c \frac{n+1}{n} A_{n+1} - ab A_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$A_{n+1} = \frac{a+n}{(n+1)} \frac{b+n}{c+n} A_n$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ деб ҳисоблаймиз. (1.28) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими y_1 ни $F(a, b, c; x)$ орқали белгилаб, A_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (1.29) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{c} \frac{b}{n} \frac{1}{n} x^n. \quad (1.30)$$

Бунда

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad a_0 = 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

(1.30) қатор *гипергеометрик қатор*, бу қаторнинг йиғиндиси бўлган $F(a, b, c; x)$ функция эса *гипергеометрик функция* дейилади.

Даламбер принципига асосан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{n+1} \frac{b+n}{c+n} x \right| = |x|.$$

Демак, (1.30) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи бўлади. Исботсиз эслатиб ўтамизки, $x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (1.30) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq 0$ бўлса, узоқлашувчи, $x = -1$ бўлганда эса, агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар $-1 < c - a - b \leq 0$ бўлса, абсолют бўлмайд яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (24) формулада $b = c$ бўлса,

$$a_n = (-1)^n \frac{-a(-a-1) \dots (-a-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-a}{n} n!$$

тенгликка асосан

$$F(a, b, c, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1, b = c$ бўлса, (1.30) формула ушбу

$$F(1, b, b, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади, яъни $a=1$, $b=c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор *геометрик прогрессияга* айланади, шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган.

(1.28) тенгламанинг иккинчи хусусий, умуман айтганда, (1.30) га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун (1.28) тенгламада $y = x^\rho \eta$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда, (1.28) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x^{1-x} \eta'' + \left[c + 2\rho - a + b + 1 + 2\rho x \right] \eta' - \left[ab + \rho a + b + \rho - \frac{\rho(\rho+c-1)}{x} \right] \eta = 0.$$

Бу тенглама (1.28) тенглама типига тегишли тенглама бўлиши учун $\rho = 0$ (албатта бу ҳол бизни қизиқтирмайди) ёки $\rho = 1 - c$ бўлиши керак. У ҳолда,

$$x^{1-x} \eta'' + (2-c - [(a-c+1) + b-c+1 + 1]x) \eta' - (a-c+1)(b-c+1) \eta = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\rho = 1 - c$ бўлганда $y = x^\rho \eta$ алмаштириш (1.28) тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказди, фақат a, b, c ларни мос равишда $a - c + 1$, $b - c + 1$, $2 - c$ ларга алмаштириш зарур. Демак, берилган (1.28) тенглама y_1 га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2 = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, y_2 ечим

$$2 - c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$$

бўлгандагина маънога эга бўлади. Шундай қилиб, (1.28) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = C_1 F(a, b, c; x) + C_2 x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; x),$$

бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган a ва b параметрлардан биттаси манфий бутун сон $(-n)$ га тенг бўлса, (1.30) гипергеометрик қатор узилиб қолади ва y n - даражали кўпҳадга айланади.

Агарда $a = -n_1$, $b = -n_2$, бунда $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ бутун сонлар бўлса, y ҳолда гипергеометрик қатор кўпҳадга айланиб, унинг даражаси n_1 , n_2 сонларнинг кичигига тенг бўлади.

(1.30) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(1.30) қаторни аввал x^a , x^b ёки x^{c-1} га кўпайтириб, сўнгга ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\frac{d}{dx} [x^a F(a, b, c; x)] = ax^{a-1} F(a + 1, b, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^b F(a, b, c; x)] = bx^{b-1} F(a, b + 1, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^{c-1} F(a, b, c; x)] = (c-1) x^{c-2} F(a, b, c-1; x).$$

Гипергеометрик функциянинг интеграл ифодаси. (1.30) қаторни

$a_n = \Gamma(a+n) / \Gamma(a)$ тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$\begin{aligned}
F(a, b, c; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c+n) n!} x^n = \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n \right] = \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n
\end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

(1.27) формулага асосан

$$B(b+n, c-b) = \Gamma(b+n) \Gamma(c-b) / \Gamma(c+n)$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n B(b+n, c-b)$$

кўринишда ёзилади ёки (1.30) тенгликка асосан

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt.$$

Бу ердаги интеграл n нинг барча n қийматларида янгилашувчи бўлиши учун

$$b > 0, c-b > 0 \quad \text{ёки} \quad c > b > 0 \quad (1.31)$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} x^n dt =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n \right] dt$$

кўринишда ёзиб оламиз. Интеграл остидаги йиғинди $(1-xt)^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйилмасидан иборат бўлгани учун

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt \quad (1.32)$$

формулага эга бўламиз. Бу эса *гипергеометрик функциянинг интеграл ифодасидир*.

(1.31) шартларни битта $c-a-b > 0$ шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a < 0$ бўлса, $-a > 0$ бўлади ва бу тенгсизликнинг (1.31) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $c-a-b > 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a > 0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (1.31) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c-b > a$ тенгсизликка эга бўламиз.

Гипергеометрик функцияга оид баъзи формулалар

Гипергеометрик функциянинг $x=1$ даги қийматини ҳисоблайлик. Шу мақсадда, (1.32) формуладаги интеграл $b > 0$, $c > 0$ ва $|x| < 1$ бўлганда текис яқинлашувчи бўлгани сабабли $x \rightarrow 1$ да лимитга ўтамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^1 \left[t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} \right] dt =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 1} \left[t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} \right] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-a-1} dt = \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} B(b, c-b-a) = \\
&= \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} \frac{\Gamma b \Gamma c-b-a}{\Gamma c-a} = \frac{\Gamma c \Gamma c-a-b}{\Gamma c-a \Gamma c-b}.
\end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(a, b, c; x) = F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma c \Gamma c-a-b}{\Gamma c-a \Gamma c-b}. \quad (1.33)$$

Агар (1.31) формуладаги интегралда $t = 1-s / 1-xs$ ёки $s = 1-t / 1-xt$ алмаштириш бажарсак, интеграл қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt = \\
&= (1-x)^{c-a-b} \int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} (1-xs)^{-c-a} ds = \\
&= \frac{\Gamma b \Gamma c-b}{\Gamma c} (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; x).
\end{aligned}$$

Демак,

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; x).$$

Бу тенглик гипергеометрик функция учун *автотрансформация формуласи* дейилади.

(1.31) интегралда ўзгарувчини $t = 1-s$ формула билан алмаштириб

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt = (1-x)^{-b} \int_0^1 s^{c-a-1} (1-s)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{x-1} s\right)^{-b} ds$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан, (26) тенгликни эътиборга олсак,

$$F(a, b, c; x) = 1 - x^{-b} F\left(c - a, b, c; \frac{x}{x-1}\right) \quad (1.34)$$

формула ҳосил бўлади. (1.34) тенгликдан $c = a$ бўлганда эса $F(a, b, a; x) = 1 - x^{-b}$ тенглик келиб чиқади.

Гипергеометрик функция қийматини $-1 \leq x \leq 1$ кесмадан ташқарида аниқлашга хизмат қилувчи ушбу

$$\begin{aligned} F(a, b, c; x) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b, 1-c+a+b; 1-x) + \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b; 1-x), \quad c-a-b \notin \mathbb{Z}, \\ F(a, b, c; x) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)} 1-x^{-a} F\left(a, c-b, a-b+1; \frac{1}{1-x}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(a)} (1-x)^{-b} F\left(c-a, b, b-a+1; \frac{1}{1-x}\right), \quad a-b \notin \mathbb{Z} \quad (1.35) \end{aligned}$$

аналитик давом эттириш формулалари ҳамда қуйидаги

$$\begin{aligned} F(a, b, a+b; 1-x) &= -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(a, b, 1; x) \ln x + \\ &+ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a) \Gamma^2(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{k!^2} \times \\ &\times \left[2 \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} - \frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)} - \frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)} \right] x^k, \quad (1.36) \end{aligned}$$

формула ҳам ўринлидир [2]. Бу формулаларнинг биринчиси *Больц формуласи* деб аталади.

П.БОБ. БИТТА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ҚЎЙИЛГАН МАСАЛАНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ЕЧИШ

II.1. Кўриниши ўзгартирилган Коши масаласининг қўйилиши.

Ушбу

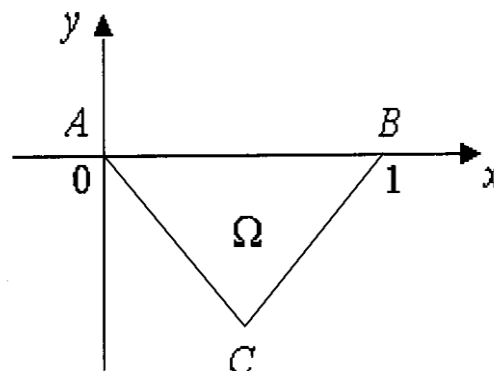
$$AB = \{ (x, y) : 0 < x < 1, y = 0 \},$$

$$AC = \{ (x, y) : 0 < x < 1/2, x + y = 0 \},$$

$$BC = \{ (x, y) : 1/2 < x < 1, x - y = 1 \}$$

тўғри чизиклар билан чегараланган

Ω соҳада



$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad 0 < \beta < 1/2, \quad (2.1)$$

тенгламанинг

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) &= \tau(y) \\ \lim_{y \rightarrow -0} (y^{-2\beta} u_y(x, y)) &= \nu(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ ечимини топиш талаб этилган бўлсин.

Ω соҳада (2.1) тенгламанинг коэффицентлари орасида $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ($a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -1$) муносабат ўринли бўлганлиги учун, бу тенгламани шу соҳада гиперболик типга тегишли дейилади.

AC ва BC чизиклар (2.1) тенгламанинг характеристикалари дейилади. AB тўғри чизик эса (2.1) тенглама учун сингулярлик чизиги ҳисобланади.

Одатда Коши масаласининг қўйилишида қаралаётган соҳанинг бир қисмида қидирилаётган функциянинг қиймати ва шу қисмда қидирилаётган функциянинг ҳосиласи берилиб, тенгламанинг шу соҳада қаноатлантирувчи функцияни топишдан иборат бўлар эди.

Биз қаралаётган масалада эса (2.2) шартлардан иккинчисиди функция ҳосиласи олдида вазн функцияси қатнашганлиги ҳисобига, бундай масала кўриниши ўзгартирилган Коши масаласи деб ном олди.

II.2. Масала ечимининг бир қийматли топилиши

Аввало (2.1)-(2.2) масалани аналитик усулда ечамиз. Бунинг учун (2.1) тенгламанинг характеристикаларини топишимизга тўғри келади, яъни (1.6) формуладан фойдаланамиз:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0.$$

Бу ерда $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{22}=-1$ бўлганлиги учун, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$(dy - dx)(dy + dx) = 0 \text{ ёки } (dx - dy)(dx + dy) = 0.$$

Бундан кўринадикки, $x + y = C_1$, $x - y = C_2$ характеристикалар оиласи пайдо бўлади. Мос ҳолда буларни ξ ва η орқали белгилаймиз, яъни $\xi = x + y$ ва $\eta = x - y$. Айнан шулар (2.1) тенгламанинг характеристикалари дейилади.

Каноник кўринишга ўтиш формулаларидан фойдаланган ҳолда, қуйидагиларни ҳисоблаб

$$\xi_x = 1, \quad \eta_x = 1, \quad \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{xx} = 0,$$

$$\xi_y = 1, \quad \eta_y = 1, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{yy} = 0$$

x, y буйича олинган хусусий ҳосилаларни ξ, η буйича олинган ҳосилаларга алмаштирамиз

$$u_y = u_\xi - u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Бу ҳисоб-китобларни олиб бориб, (2.1) тенгламага қўямиз. У ҳолда (2.1) тенглама қуйидаги кўринишдаги Эйлер-Дарбу тенгламасига келади [3]:

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi} (u_\eta - u_\xi) = 0. \quad (2.3)$$

(2.3) тенгламанинг умумий ечими мавжуд [3] ва у қуйидаги кўринишда:

$$u(\xi, \eta) = (\eta - \xi)^{2\beta} \int_0^1 Z(\xi + (\eta - \xi)t)^{\beta} dt + \int_0^1 \Psi(\xi + (\eta - \xi)t)^{\beta-1} dt,$$

бу ерда $z = \xi + (\eta - \xi)t$, $Z, \Psi \in C^2$ – узлуксиз функциялар. Эски x ва y координаталар системасига қайтиб, (2.1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$u(x, y) = (2y)^{2\beta} \int_0^1 Z(x + y(1-t))^{\beta} dt + \int_0^1 \Psi(x + y(1-t))^{\beta-1} dt, \quad (2.4)$$

бу ерда $z = x + y - 2yt$.

Кўриш қийин эмаски, $\Psi(\xi)$ функцияни (2.4) дан (2.2) нинг биринчи шартидан фойдаланган ҳолда топса бўлади, яъни

$$u(\xi, 0) = \Psi(\xi) \int_0^1 (\xi + (\eta - \xi)t)^{\beta-1} dt = \tau(\xi). \quad (2.5)$$

Охирги ифодадаги интеграл, Бета функциянинг [2] интеграл кўриниши деб аталади. Унинг Гамма функциялар орқали ифодиси қуйидагича:

$$\int_0^1 (\xi + (\eta - \xi)t)^{\beta-1} dt = B(\beta, \beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \beta)} = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Охирги тенгликдан фойдаланиб, (2.5) дан $\Psi(\xi)$ функциянинг кўринишини ёзамиз:

$$\Psi(\xi) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \tau(\xi). \quad (2.6)$$

Энди (2.4) дан u буйича ҳосила оламиз

$$u_y = -(-2\beta)^{1-2\beta} (y)^{2\beta} \int_0^1 Z(\xi) (1-t)^{\beta} dt + \\ + (2y)^{2\beta} \int_0^1 Z'(\xi) (1-2t) (1-t)^{\beta-1} dt + \int_0^1 \Psi'(\xi) (1-2t) (1-t)^{\beta-1} dt.$$

ва (2.2) шартларнинг иккинчисдан фойдаланамиз

$$\lim_{y \rightarrow -0} (y)^{2\beta} u_y(\xi, y) = (-2\beta)^{1-2\beta} Z(\xi) \int_0^1 (1-t)^{\beta} dt = \\ = -(-2\beta)^{1-2\beta} Z(\xi) \frac{\Gamma^2(-\beta)}{\Gamma(-2\beta)} = \nu(\xi).$$

Бу ердан

$$Z(\xi) = -2^{2\beta-1} \frac{\Gamma(-2\beta)}{\Gamma^2(-\beta)} \nu(\xi) \quad (2.7)$$

эканлигини топамиз.

Топилган (2.6) ва (2.7) ларни (2.4) га олиб бориб қўйиб, кўриниши ўзгартирилган Коши масаласининг ечимини ҳосил қиламиз:

$$u(\xi, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(\xi + y - 2yt) (1-t)^{\beta-1} dt - \\ - \gamma_2 (y)^{2\beta} \int_0^1 \nu(\xi + y - 2yt) (1-t)^{\beta} dt, \quad (2.8)$$

$$\text{бу ерда } \gamma_1 = \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma^2(-\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-2\beta)}{\Gamma^2(-\beta)}.$$

Бевосита текшириш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $\tau \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$ ва $\nu \in C^2(0,1)$ синфлардан ва $\nu(\xi)$ функцияда $t \rightarrow 0$ ва $t \rightarrow 1$ да $1-2\beta$ дан ошмайдиган тартибда махсусликка интилиши мумкин бўлса, у ҳолда $u(\xi, y)$ функция (2.8) формула билан аниқланади ва ҳақиқатан ҳам Ω соҳада (2.1) тенглама учун қўйилган кўриниши ўзгартирилган Коши масаласи ечими бўлади.

Энди эса юқоридаги назариямизни амалиётда қўллаш жараёнини кўриб чиқамиз.

(2.1) тенгламанинг

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= x, \\ \lim_{y \rightarrow -0} -y^{2\beta} u_y(x, y) &= 3x - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ ечимини топинг.

Маълумки (2.1) тенглама учун қўйилган кўриниши ўзгартирилган Коши масаласининг ечими (2.8) формула билан берилган эди. Шу формуланинг $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялари ўрнига мос равишда x ва $3x - 1$ ларни қўйиб, керакли интегралларни ҳисоблаб, (2.1), (2.9) масала ечимининг кўринишини топамиз.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \gamma_1 \int_0^1 (x + y - 2yt) \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{-1} dt - \\ &- \gamma_2 (x + y)^{2\beta} \int_0^1 (3x + 3y - 6yt - 1) \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{\beta} dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.10) тенгликдаги интегралларни ҳисоблаймиз ва натижани чиқарамиз.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \gamma_1 (x + y) \int_0^1 \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{-1} dt - 2\gamma_1 y \int_0^1 t^{\beta} \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{-1} dt - \\ &- 3\gamma_2 (x + y - 1/3)(y)^{2\beta} \int_0^1 \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{\beta} dt - 6\gamma_2 (x + y)^{2\beta} \int_0^1 t^{1-\beta} \mathcal{K}(-t) \mathcal{J}^{\beta} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\beta) \Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\beta) \Gamma(\beta)} (x + y)^2 \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\beta + \beta) \Gamma(\beta)}{\Gamma^2(\beta) \Gamma(\beta + 2\beta)} y - \\ &- 3 \frac{\Gamma^2(-\beta) \Gamma(-2\beta)}{\Gamma(-\beta) \Gamma^2(-\beta)} (x + y - 1/3)(y)^{2\beta} - \\ &- 6 \frac{\Gamma(-2\beta) \Gamma(-\beta) \Gamma(-\beta)}{\Gamma^2(-\beta) \Gamma(-2\beta)} (x + y)^{2\beta} = x - \frac{3x - 1}{1 - 2\beta} (x + y)^{2\beta} \end{aligned}$$

Охирги ифода эса (2.1), (2.9) масаланинг ечимини беради.

$$u(x, y) = x - \frac{3x - 1}{1 - 2\beta} (x + y)^{2\beta}$$

ечимни текшириб кўрайлик:

1) x бўйича олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосила нолга тенг, яъни $u_{xx} = 0$. Энди y бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$u_y = (x-1)y^{2\beta};$$

$$u_{yy} = 2\beta(x-1)y^{2\beta-1}.$$

Буларни (2.1) тенгламага қўямиз,

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y}u_y = 0 - 2\beta(x-1)y^{2\beta-1} - \frac{2\beta}{y}(x-1)y^{2\beta} = 0.$$

Булардан хулоса шуки, топилган ечим берилган тенгламани қаноатлантиради.

2) $y=0$ да $u(0) = x$; $\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y = 3x-1$ бўлиб, бу эса берилган бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Демак, ушбу фикрлардан хулоса чиқариш мумкинки, $u(x,y) = x - \frac{3x-1}{1-2\beta} y^{2\beta}$ функция (2.1), (2.9) масаланинг ечими экан.

II.3. Масала ечимини ЭХМда қайта ишлаш

Сонли ҳисоблашларни бажариш алгоритми Pascal ABC дастурлаш тилида ифодаланади. Берилган (2.1), (2.9) масаланинг аналитик усулда топилган ечими $u(x,y) = x - \frac{3x-1}{1-2\beta} y^{2\beta}$ функциянинг Pascal ABC дастурлаш тилидаги дастури қуйидаги кўринишда бўлади:

```
program analitik;
label 1;
label 2;
var x,y,beta,uf:real;
i:integer;
```

```

function u(z,t:real):real;
begin
beta:=0.2;
u:=z-(3*z-1)*exp((1-2*beta)*ln(-y));
end;
begin
y:=0;
x:=0.05;
1: x:=1-x; y:=y-0.05;
if (y<=-1/2) and (x-y>1) then goto 2;
for i:=1 to 20 do
begin
uf:=u(x,y);
writeln('x=', x, ' y=', y, ' u(x,y)=' ,uf);
if (x-y<=1) and (x+y>=0) and (x>0.16) then x:=x-0.1 else goto 1;
end;
2: end.

```

Дастурдан шуни кўрса бўладики, x ва y нинг қийматлари, яъни (x, y) нукталар Ω соҳанинг ичида жойлашган. Бунинг учун (x, y) нукталар $0 < x < 1$, $-1/2 < y < 0$, $x - y \leq 1$ ва $x + y \geq 0$ тенгсизликларни қаноатлантириши керак, яъни танлаб олинган нукта Ω соҳага тегишли бўлиши керак.

Дастурни ишга тушургандан сўнг бизда қуйидаги натижалар пайдо бўлади:

```

x=0.95 y=-0.05 u(x,y)=0.643413003396051
x=0.85 y=-0.05 u(x,y)=0.593129813656151
x=0.75 y=-0.05 u(x,y)=0.542846623916251
x=0.65 y=-0.05 u(x,y)=0.492563434176351
x=0.55 y=-0.05 u(x,y)=0.44228024443645
x=0.45 y=-0.05 u(x,y)=0.39199705469655

```

x=0.35 y=-0.05 u(x,y)=0.34171386495665
x=0.25 y=-0.05 u(x,y)=0.29143067521675
x=0.15 y=-0.05 u(x,y)=0.24114748547685
x=0.85 y=-0.1 u(x,y)=0.460657603116015
x=0.75 y=-0.1 u(x,y)=0.436014196061302
x=0.65 y=-0.1 u(x,y)=0.41137078900659
x=0.55 y=-0.1 u(x,y)=0.386727381951877
x=0.45 y=-0.1 u(x,y)=0.362083974897165
x=0.35 y=-0.1 u(x,y)=0.337440567842452
x=0.25 y=-0.1 u(x,y)=0.31279716078774
x=0.15 y=-0.1 u(x,y)=0.288153753733027
x=0.85 y=-0.15 u(x,y)=0.353423167881795
x=0.75 y=-0.15 u(x,y)=0.349534812807899
x=0.65 y=-0.15 u(x,y)=0.345646457734003
x=0.55 y=-0.15 u(x,y)=0.341758102660108
x=0.45 y=-0.15 u(x,y)=0.337869747586212
x=0.35 y=-0.15 u(x,y)=0.333981392512316
x=0.25 y=-0.15 u(x,y)=0.33009303743842
x=0.15 y=-0.15 u(x,y)=0.326204682364524

ХУЛОСА

Ҳозирги кунда секундига миллиардлаб математик амалларни бажара оладиган ЭХМларнинг яратилиши ва кенг ишлаб чиқаришга тадбиқ қилиниши математик масалаларнинг ечимларини етарлича аниқликда ҳисоблаш имконини берувчи янги ҳисоблаш схемаларини куриш, алгоритмик усулларни ишлаб чиқишга йўл очиб бермоқда. Табиий фанларнинг назарий ва амалий масалалари кўп ҳолларда иккинчи тартибли хусусий дифференциал тенгламаларни ечишга келтирилади. Дифференциал тенгламаларнинг ечимини яхши ўрганилган маълум элементар функциялар олрқали ифодалаш мумкин бўлмаган ҳолда тақрибий ҳисоблаш усулларида фойдаланиш талаб этилади.

Ушбу ишда сонли ҳисоб тўрлар усули ўрганиб чиқилди. Бу усул ёрдамида битта сингуляр коэффициентга эга бўлган гиперболик типдаги тенглама учун қўйилган кўриниши ўзгартирилган Коши масаласи ўрганиб чиқилди. Масала даставвал аналитик усулда, сўнгра эса тўрлар усули ёрдамида ҳисобланиб, натижалар жадваллар кўринишида сонли топилди.

Аналитик усулда қилинган ҳисоб китобларга мос масаланинг ечимини ифодаловчи дастурлар Паскал дастурлаш тилида келтирилди.

Хулоса ўрнида шуни айтишим керакки, мен ушбу битирув малакавий ишида тенгламалар типлари, хусусий ҳосилали гиперболик типдаги тенглама, бундай тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ва бу масалаларни тўрлар усули ёрдамида ечишни ҳамда масала ечиш жараёнини ифодаловчи алгоритмлар ва дастурларни тузишни ўргандим.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Каримов И.А. Жаҳон молиявий-иқтисодий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари / И.А.Каримов. – Т: Ўзбекистон, 2009. – 56 б.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.І., М.: Наука- 1965, 295 с.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. –Минск: Наука. 1977. –227 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численный метод анализа.–М.: Наука. 1967.–368 с.
5. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. –Тошкент: Ўқитувчи. 1988.–324 б.
6. Тешабоева Н. Математика физика методлари. – Тошкент: Ўқитувчи. 1993. –315 б.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука. 1974. -724 с.
8. Шоҳамидов Ш.Ш. Амалий математика унсурлари. –Тошкент: Ўзбекистон. 1997. –315 б.

ИНТЕРНЕТ ТАРМОҒИДАН ФОЙДАЛАНИЛГАН WEB-САҲИФАЛАР

1. <http://referat.ru/document/2921>
2. http://collection.pp.ru/f36_106.htm
3. www.elibrary.ru
4. www.ziyonet.uz
5. www.math-net.ru
6. http://library.tuit.uz/lectures/afu/togri_tortburchakli.htm
7. <http://sapr.mgsu.ru/biblio/kps/mkr.htm>