МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-математический факультет

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Студента IV курса группы № 404 р
по направлению 5460100 «Математика»

ИСАЖОНОВА ЖУРАБЕКА АБДУМАЛИКОВИЧА

На тему: «***Асимптотика собственных значений и собственных функций при больших значениях*** $|\lambda|$ **оператора**

$$Ly = \lambda y\left[L = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\right]$$»

Руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, Шабадиков К.Х.

Фергана 2012 г.

План.

I. Введение

II. Основная часть

Глава I. Асимптотика собственных значений и собственных функций при больших значениях $|\lambda|$

§ 1 Сведение уравнения $L(y)+\rho^n y=0$ к интегро –дифференциальному уравнению, и о системе интегралных уравнений.

§ 2. Асимптотические формулы для решений уравнения $L(y)+\rho^n y=0$.

§ 3. Уточнение асимптотических формул и нормировка краевых условий.

§ 4. Регулярные краевые условия.

§ 5. Асимптотика собственных значений и функций.

Глава II. Метод Фурье.

§ 1. Задача обоснования метода Фурье.

§ 2. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями.

§ 3. Случай кратного полюса функции Грина; m-кратная полнота.

III. Заключение.

IV. Использованная литература.

V. Материал интернета.

ВВЕДЕНИЕ

По инициативе президента И.А. Каримова в 1997 году было принято национальная программа образования. В чем говорились.

Реализуемые в стране реформы по формированию устойчивой и эффективной экономики в настоящее время дают свои положительные результаты.

Тщательная разработка руководителем государства Исламом Каримовым стратечне социально-экономического развития, точное и правильное определение путей реализации целей и задач экологических реформ создали, предложены для достижения всех результатов на пути к главной цели.

Однако необходимо отметить, что порядку с позитивным влияниям интентрации и глобализации на мировую экономику: возникают и определенные противоречивее моменты. Так неравномерное развитием экономик отдельных государств, усилении различия социально экономического развития различных стран, экологических ураз, существенная разница демографического роста в отдельных государствах препятствуют стабильному развитию мирового хозяйства в качестве единой системы.

А) … Самое главное, нужно осознать, что, **не решив вопрос кадров, трудно будет добиться от наших действий у устремления духовности. Стало быть, совершенствование работы по подготовке кадров, соответствующих** требованиям времени, должно стать главным направлением нашей деятельности.

Б) … В результате **мы не смогли научить молодежь самостоятельно мыслить на должном уровне.** У некоторых выпускников наших школ нет всегда собственного мнения. **Человек, не имеющие своего мнения, может пойти за любой толпой. Именно в этом состоит важная сторона вопроса.**

«**наше правительство уделяет самое пристальное внимание науке, просвещению и культуре.** Несмотря на имеющиеся трудности и сложности, и в этот переходный период государство ничего не жалеет для совершенствования системы народного образования, подготовки высокообразованного и всесторонне развитого поколения.

Судьба реформ, успех их осуществления прямо зависят от квалификации кадров, их умения работать, их патриотизма и преданности делу».

1. … будущее начинается сегодня. Если мы не уделим внимания

вопросам воспитания молодого поколения, то потеряем будущее. Мы ничего не пожалеем, чтобы вырастить достойное поколение!

Духовное и моральное очищение, вера, честь и достоинство, совесть, порядочность, доброта – все эти замечательные человеческие качестве не появляются на пустом месте, в основе их – воспитание.

«системы просвещения и науки, созданные у нас, не хуже, чем в некоторых странах, которые перешли к рыночной экономике несколько десятков лет назад. Все это – наше богатство. **Наша цель – не потерять созданной у нас совершенной системы, а реорганизовать ее на основе национальной независимости и обогатить новым национальным содержанием**».

2. Чтобы получить отдачу от кадров, надо вложить средства в их

подготовку. Если мы действительно хотим вырваться из оков бедности и отсталости, надо очень серьезно заняться подготовкой молодежи, помочь ей овладеть современными профессиями. Скупиться здесь нельзя.

Нам нужна специальная программа подготовки национальных кадров, которая бы включала:

- повышения качества преподавания в общеобразовательных школах (дополнительное материальное поощрение учителей, методистов, создание специальных классов, установление шефства вузов над школами и др.);
- создание школ для наиболее одаренных детей;

- внедрение качественно новых отношений между предприятиями и школами;
- внедрение хозрасчета и на этой основе резкое повышение качества подготовки кадров массовых профессий в профессионально – технических училищах;
- перестройку системы подготовки специалистов в высших учебных заведениях, внедрение в эту сферу заказной формы подготовки кадров…

3. «…Никто не может остаться равнодушным, особенно к судьбам подрастающего поколения. Тут немалая роль принадлежит высшей школе. Забота о методах обучения и воспитания молодежи, об их образовательном и профессиональном уровне для каждого из нас является священным долгом. **Доведение системы высшего и среднего специального образования до уровня мировых стандартов, научная оценка потребностей в специалистах для отраслей народного хозяйства, эффективное использование передового зарубежного опыта в обучении и воспитании молодежи – эти вопросы являются сегодня самыми важными.**

… интеллектуальный потенциал – это великое достояние народа, Родины. Ради его развития, ради подготовки квалифицированных специалистов государство, как говорится, за цепной не постоит».

4. **Завтрашний день требует высококвалифицированных**

специалистов, мыслящих по-новому, обладающих современными знаниями. Разве мы готовы к этому? Распоряжение Кабинета Министров Республики Узбекистан «О разработке национальной программы по подготовке кадров»

«…в целях разработки Национальной программы по подготовке кадров с учетом требований демократических и рыночных реформ, охватывающей все сферы деятельности государства, общества и человека:

1. Образовать комиссию и рабочие группы.
2. …разработать и внести Кабинета Министров проект Национальной

программы по подготовке кадров, определив ее как важнейшую задачу государства»

3. При разработке национальной программы по подготовке кадров иметь

в виду: коренное реформирование всей системы образования, осуществление структурных преобразований с переориентацией действующих и созданием новых учебных заведений, прежде всего технических колледжей, бизнес – школ и специальных учебных заведений для подготовки специалистов, способных работать в новых условиях и на современных технологиях;

подъем качества учебно-воспитательного процесса до уровня мировых стандартов, внедрение принципиально новых методик обучения, современных педагогических и информационных технологий;

Совершенствование структуры учебных заведений, создание и расширение сети специальных образовательных учреждений, особенно для выпускников девятых классов, с преподаванием основ предпринимательской деятельности, экономических и правовых знаний;

обучение и воспитание молодежи на основе идеологии национального возрождения и познания общечеловеческих ценностей, в духе любви к Родине, преданности идеалам независимости;

системную кропотливую работу с молодежью, выявление одаренных детей, создание им условий для получения профессионального образования в лучших зарубежных учебных центрах;

воспроизводство и развитие кадрового потенциала Узбекистана, адекватного его экономическим и духовным потребностям, способного составить конкуренцию зарубежным высококвалифицированным специалистам;

укрепление материально-технической базы образовательных учреждений новой учебной литературой, современным оборудованием и компьютерной техникой; создание социально-экономических предпосылок для повышения престижа педагогической профессии, усиления мотивации труда педагогов и наставников.

В центре нашего внимания в прошлом году оставались вопросы дальнейшего развития социальной сферы, неуклонного повышения доходов и уровня жизни населения страны.

Не секрет, что с первых же лет нашего независимого развития мы придаем большое знание вопросам дальнейшего укрепления принципов социальной справедливости, недопущению резкого расслоения населения по доходам и условиям жизни.

Говоря о развитии сферы образования отчетном году, хочу отметить, что была продолжена работа по формированию целостной непрерывной системы образования, включающей в себя весь цикл подготовки высокообразованного и профессионально подготовленного подрастающего поколения от общего среднего образования до среднего специального, профессионального и высшего образования.

Важным шагом в этом направлении стало принятие дополнительных мер по полному охвату выпускников 9-х классов общеобразовательных школ обучением в профессиональных колледжах за счет строительства 24 филиалов в отдаленных и труднодоступных районах, ввода в эксплуатацию 18 общежитий к действующим колледжам.

Большая работа осуществлена по укреплению материально-технической базы общеобразовательных школ – построено и реконструировано 166 школ, капитально отремонтирована 151 школа, введено свыше 46,3 тысячи ученических мест, оснащенных самым современным учебным и лабораторным оборудованием. В 852 школах республики созданы современные учебные компьютерные классы.

Свыше 9400 общеобразовательных школ, или 96 процентов от их общего количества, подключены к электронно-информационной сети ZiyoNet.

Особое внимание было уделено вопросам трудоустройства выпускников профессиональных колледжей. В практику внедрено заключение договоров между колледжами и предприятиями о прохождении будущими выпускниками производственной практики с последующим их трудоустройством на этих предприятиях. В рамках реализации этих договоренностей было трудоустроено более 390 тысяч выпускников.

На реализацию Программы модернизации материально-технической базы высших образовательных учреждений и кардинального улучшения качества подготовки специалистов, рассчитанной на 2011-2016 годы, в соответствии с принятым постановлением правительства намечено направить свыше 277 миллиардов сумов.

Для аккумулирования средства и обеспечения финансирования намеченных в Программе мер был образован в прошлом году специальный Фонд, за счет средств которого в 2011 году профинансированы намеченные на год мероприятия на сумму свыше 39 миллиардов сумов.

Не будет преувеличением заявить, что большим событием прошлого года в жизни нашей страны стало завершение строительства и ввод в эксплуатацию Центра просвещения, вобравшего в себя Дворец симпозиумов, а также Национальную библиотеку Узбекистана имени Алишера Навои – информационного ресурсного центра, оснащенного передовой информацию - компьютерной технологией и обеспечивающего широкий доступ, прежде всего, нашей молодежи к национальному и зарубежным информационно – библиотечным фондам.

1. Постановка задачи. При больших значениях $|\lambda|$ можно дать

приближенные (именно асимптотические) формулы для собственных значений и собственных функций дифференциального оператора. Эти формулы не только представляют интерес сами по себе, но и применяются также в различных вопросах теории дифференциальных операторов.

Оказывается, что при большом $|\lambda|$ поведение собственных значений и

собственных функций в правом приближении такое же, как и в случае весьма простого оператора, порожденного дифференциальным выражением $L(y)=\frac{d^n y}{dx^n}.$

Для вывода асимптотических формул мы сначала обратимся к асимптотическому поведению при больших $|\lambda|$ решений уравнения *L(y)=λy*. Подставляя затем асимптотические выражения для этих решений в уравнение *Δ(λ)=0* мы найдем асимптотические выражения для собственных значений.

Положим $\lambda=-\rho^m$, тогда уравнение *L(y)=λy* запишется в виде

$$L(y)+\rho^m y=0 \qquad (1)$$

или подробнее

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n(x)y+\rho^n y=0. \qquad (2)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $p_1(x)\equiv 0$. Действительно, если $p_1(x)\neq 0,$ то, полагая $y=e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)dx}\tilde{y}$,

Мы приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{d^n\tilde{y}}{dx^n}+\tilde{p}_2(x)\frac{d^{n-2}\tilde{y}}{dx^{n-2}}+\ldots+\tilde{p}_n(x)\tilde{y}+\rho^n\tilde{y}=0$$

с тем же значением ρ. При этом $\tilde{p}_2(x),\ldots,\tilde{p}_n(x)$ -также непрерывные функции от x в интервале $[a,b]$. Далее не нарушая общности, можно считать, что интервал $[a,b]$ есть $[0,1]$. Общий случай легко сводится к этому подстановкой

$$x=a+(b-a)t.$$

Асимптотическое поведение решений уравнения $L(y)+\rho^n y=0$ зависит от того, в какой части комплексной плоскости находится точка ρ.

2. Области *S* и *T*. Разобьем всю комплексную ρ-плоскость на *2n* секторов S_ν,

$\nu=0, 1, 2, \dots, 2n-1$, определяемых неравенством (рис 7)

$$\frac{\nu\pi}{u} \le \arg\rho \le \frac{(\nu+1)\pi}{n}. \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

Ниже мы увидим, что асимптотические формулы для решений *y* уравнения (2) существенно зависят от того, в каком именно из секторов S_ν находится ρ.

Обозначим через

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$$

все различные корни *n*–й степени из *-1*.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство секторов S_ν :

1. *Для каждого сектора* S_ν *существует такое расположение чисел* $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$, *что для всех* $\rho \in S_\nu$ *выполняются неравенства*

$$\Re(\rho\omega_1) \le \Re(\rho\omega_2) \le \dots \le \Re(\rho\omega_n). \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства (4) достаточно доказать только для каких-нибудь двух соседних секторов. Действительно, обозначим через ε какой-нибудь корень *n–й* степени из единицы: $\varepsilon = e^{\frac{2l\pi i}{n}}$.

Умножение на ε переводит сектор S_ν в другой сектор, повернуты на угол $\frac{2\pi l}{n}$. Далее, числа $\varepsilon^{-1}\omega_1, \varepsilon^{-1}\omega_2, \dots, \varepsilon^{-1}\omega_n$ отличаются от чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ только порядком. Если поэтому неравенства (4) имеют место для некоторого сектора S_ν, то записав их в виде

$$\Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_1) \le \Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_2) \le \dots \le \Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_n),$$

получаем аналогичные неравенства для другого сектора, повернутого на угол $\frac{2\pi l}{n}$.

Итак, достаточно доказать наше утверждение для двух соседних секторов, например для S_{2n-1} и S_0.

Пусть, например, n нечетно: $n=2\mu-1$.

Перенумеруем числа ω_k так, что

$$arg\,\omega_1=\pi, \qquad arg\,\omega_2=\pi+\frac{2\pi}{n}, \quad arg\,\omega_3=\pi-\frac{2\pi}{n}, \quad arg\,\omega_4=\pi+\frac{4\pi}{n}, \quad arg\,\omega_5=\pi-\frac{4\pi}{n},\ldots,$$

$$arg\,\omega_n=\frac{\pi}{n},$$

И умножим какое-нибудь число $\rho\in S_{2n-1}$ – последовательно на $\omega_1, \omega_2, \omega_3,...,\omega_n$; тогда полученные точки $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ расположатся так, как показано на рис 1. Поэтому неравенства (4) для области S_{2n-1} геометрически совершенно очевидны.

Аналогично они доказываются для области S_0 и аналогично рассматривается случай четного n.

В дальнейшем нам удобно будет рассматривать области более общего вида, которые получаются из сектора S_ν сдвигом $\rho\to\rho+c$, где c - фиксированное комплексное число. Эти новые секторы (с вершиной в точке $\rho=-c$) мы будем обозначать через T_ν

Так как переход от S_ν к T_ν осуществляется сдвигом $\rho\to\rho+c$, то для этих новых секторов T неравенства (4) перепишутся в виде

$$\Re((\rho+c)\omega_1)\le\Re((\rho+c)\omega_2)\le...\le\Re((\rho+c)\omega_n). \qquad (5)$$

В дальнейшем мы будем считать, что ρ находится в некоторой фиксированной области T_ν и что числа ω_p занумерованы так, чтобы во всей области T_ν выполнялись неравенства (5). Области S_ν и T_ν мы удем просто называть областями S *и* T.

§ 1 Сведение уравнения $L(y)+\rho^n y=0$ к интегро–дифференциальному уравнению, и о системе интегралных уравнение

Вывод асимптотических формул основан на сведении уравнения

$$L(y)+\rho^n y=0 \qquad (6)$$

К некоторому эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению, которое получается следующим образом: положим

$$m(y)=p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny; \qquad (7)$$

тогда уравнение (6) можно будет переписать в виде

$$y^{(n)}+\rho^n y=-m(y). \qquad (8)$$

Однородное уравнение $y^{(n)}+\rho^n y=0$ имеет фундаментальную систему решений

$$e^{\rho\omega_1 x},\ e^{\rho\omega_2 x},\ldots,e^{\rho\omega_n x};$$

поэтому, рассматривая (8) как неоднородное уравнение с правой частью $m(y)$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим уравнение

$$y=c_1e^{\rho\omega_1 x}+\ldots+c_ne^{\rho\omega_n x}+\int_0^x\frac{\omega_1e^{\rho\omega_1(x-\xi)}+\ldots+\omega_ne^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\rho^{n-1}}m_\xi(y)\,d\xi, \qquad (9)$$

эквивалентное уравнению (8).

При этом $c_1,\ldots,c_n$- произвольные постоянные, которые могут зависеть от ρ, а $m_\xi(y)$ обозначает значение $m(y)$ при $x=\xi$. Положим для некоторого фиксированного k,

$k=1, 2, \ldots, n$,

$$\left.\begin{aligned} c_j&=c_j && при\quad j=1,2,\ldots,k,\\ c_j&=c_j-\int_0^1\frac{\omega_je^{-\rho\omega_j\xi}}{n\rho^{n-1}}m_\xi(y)\,d\xi && при\quad j=k+1,\ldots,n.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$y=c_1e^{\rho\omega_1 x}+\ldots+c_ne^{\rho\omega_n x}+\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\,\xi,\,\rho)m_\xi(y)\,d\xi-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\,\xi,\,\rho)m_\xi(y)\,d\xi,$$

(11)

где

$$K_1(x,\xi,\rho)=\sum_{\alpha=1}^{k}\omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)},\qquad K_2(x,\xi,\rho)=\sum_{\alpha=k+1}^{n}\omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}. \qquad (12)$$

Уравнение (11) является, очевидно, интегро-дифференциальным уравнением относительно *y*; из него и будут получены асимптотические формулы. Также доказанный следуюшие леммы и теоремы.

Лемма 1. *Пусть дана система интегральных уравнений*

$$y_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x,\xi,\lambda)y_j(\xi)\,d\xi,\qquad i=1,2,...,r, \qquad (13)$$

где:

1) *функции $f_i(x)$ непрерывны в интервале [a, b];*
2) *при каждом фиксированном λ функции $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$ непрерывны при $a\le x<\xi$ и $\xi<x\le b$;*
3) *при фиксированных x и ξ ($a\le x,\ \xi\le b$) $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$- регулярные аналитичечские функции параметра λ;*
4) *сущесвуют постоянные R и C такие, что при $|\lambda|>R$*

$$|A_{ij}(x,\xi,\lambda)|\le\frac{C}{|\lambda|}$$

во всем квадрате $a\le x,\ \xi\le b$.

5) *Тогда при достаточно большом R_0 и $|\lambda|>R_0$ система (13) имеет одно и только одно решение $y_i(x)=y_i(x, \lambda)$; при этом $y_i(x, \lambda)$ являются аналитическими функциями параметра λ, регулярными при $|\lambda|>R_0$,* и

$$y_i(x,\lambda)=f_i(x)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\qquad при\quad \lambda\to\infty. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ситема *(13)* имеет решение $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, r$, то, применяя метод последовательных подстановок, получим:

$$y_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x,\xi,\lambda)f_j(\xi)\,d\xi+\sum_{j_1,j_2=1}^{r}\int_a^b\int_a^b A_{ij_1}(x,\xi_1,\lambda)A_{j_1j_2}(\xi_1,\xi_2,\lambda)\,y_{j_2}(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=$$

……………………………………………………………………………

$$= f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{ij}(x, \xi, \lambda)\ f_j(\xi)\ d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j_1, \ldots j_n = 1}^{r} \int_a^b \ldots \int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda) \ldots A_{j_{n-1} j_n}(\xi_{n-1}, \xi_n, \lambda) \times f_{jn}(\xi_n)\ d\xi_1 \ldots d\xi_n +$$

$$+ \sum_{j_1, \ldots j_{n+1} = 1}^{r} \int_a^b \ldots \int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda) \ldots A_{j_{n-1} j_n}(\xi_{n-1}, \xi_{n+1}, \lambda) \times y_{jn+1}(\xi_{n+1})\ d\xi_1 \ldots d\xi_{n+1}.$$

Положим $B = max \mid y_i(x) \mid$, $a \le x \le b$, $i = 1, 2, \ldots, r.$ При $|\lambda| \ge R$ последнее слагаемое по модулю не превосходит

$$\frac{1}{|\lambda|^{n+1}} [(b-a)Cr]^{n+1} B$$

и, следовательно, стремится к 0 при $n \to \infty$, если $|\lambda| \ge R_0$, где $R_0 = \max\{R, (b-a)\ Cr\}$.

Поэтому функция $y_i\ (x) = y_i\ (x, \lambda)$ есть сумма ряда

$$y_i(x, \lambda) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{ij}(x, \xi_1, \lambda) f_j(\xi)\ d\xi + \sum_{j_1, j_2 = 1}^{r} \int_a^b \int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda) A_{j_1 j_2}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\ f_{j_2}(\xi_2)\ d\xi_1\ d\xi_2 + \ldots$$

Обратно, легко видеть, что в каждой области $|\lambda| \ge R_1 \succ R_0$, $a \le x \le b$, этот ряд сходится равномерно и представляет собой решение системы (13). Отсюда вытекает формула (14) и регулярность функции $y_i(x, \lambda)$ при $|\lambda| > R_0$.

§ 2 Асимптотические формулы для решений уравнения $L(y)+\rho^n y=0$.

Прежде всего нам понадобятся оценки для ядер K_1 *и* K_2 в уравнениях (11) и их производных.

Л е м м а (2). *Существует константа C, такая, что для всех* $\rho\in T$ *имеют место неравенства*

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_1(x,\xi,\rho)\right|\le C|\rho|^\nu k\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad \text{при}\quad 0\le\xi\le x\le 1, \qquad (15а)$$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_2(x,\xi,\rho)\right|\le C|\rho|^\nu (n-k)\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad \text{при}\quad 0\le x\le\xi\le 1, \qquad (15б)$$

$$\nu=0,1,2,3,\ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем константу C так, чтобы

$$\left|e^{c(\omega_j-\omega_k)(x-\xi)}\right|\le C \qquad (16)$$

для всех $j,\ k=1,\ldots,n$ и всех x *и* ξ из интервала [$0,\ 1$]; это возможно, ибо левая часть (16) есть непрерывная функция переменных x *и* ξ. Если $\rho\in T$, то из неравенств (5) следует, что при $\alpha\le k$

$$\Re(\rho\,\omega_\alpha)\le\Re(\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha));$$

отсюда заключаем, что при $0\le x\le\xi\le 1$,

$$\left|e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right|\le\left|e^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha)](x-\xi)}\right|\le C\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_1(x,\xi,\rho)\right|=\left|\sum_{\alpha=1}^{k}\rho^\nu\omega_\alpha^{\nu+1}e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right|\le Ck|\rho|^\nu\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|,$$

так что неравенство (15а) доказано.

Аналогично доказывается неравенство (15б).

Т е о р е м а 1. *Если функции* $p_1, p_2,\ldots,p_n$ *непрерывны в интервале* [$0,\ 1$] *, то во всякой области T комплексной* ρ*–плоскости уравнение*

$$y^{(n)}+p_2\,y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_n y+\rho^n y=0$$

имеет n линейно-независимых решений y_1, y_2 ,…,y_n , регулярных относительно $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &y_k = e^{\rho\omega_k x}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\\ &\frac{dy_k}{dx} = \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} = \rho^{n-1}e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что уравнение (6) имеет решение y_k, такое, что $c_\nu = 0 \quad при \quad \nu \neq k, \quad c_k = 1.$

Таким образом,

$$y_k = e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\, m_\xi(y_k)d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)m_\xi(y_k)d\xi. \qquad (18a)$$

Дифференцируя это равенство *n-1* раз, получим вместе с исходным равенством систему

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} m_\xi(y_k)\, d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} m_\xi(y_k)\, d\xi, \quad (18б)$$

ν=0, 1, 2, …, n-1.

Положим в (18б)

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu}; \qquad (19)$$

тогда для функций $z_{k\nu} = z_{k\nu}(x,\rho)$ мы получим систему уравнений

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu + \frac{1}{n\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\left[p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k,n-3}(\xi,\rho) + \dots\right.$$

$$\left.\dots\frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k0}(\xi,\rho)\right]d\xi - \frac{1}{n\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu}\frac{\partial_\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\left[p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k,n-3}(\xi,\rho) + \dots + \frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k0}(\xi,\rho)\right]d\xi. \qquad (20)$$

Положим, далее,

$$K_{k\nu\alpha}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}\frac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi) & при \quad \xi \prec x,\\ \frac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi) & при \quad \xi \succ x;\end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots, n;$ $\quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1;$ $\quad \alpha=2,3,\dots,n;$

тогда система (20) перепишется в виде

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\omega_k^\nu+\frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=2}^{n}\int_0^1 K_{k\nu\alpha}(x,\xi,\rho)z_{k\alpha}(\xi,\rho)\,d\xi. \qquad (21)$$

При фиксированном k *и* $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1;$ она является системой интегральных уравнений относительно функций $z_{k\nu}(x,\rho)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Из предыдущей леммы вытекает, что все функции $K_{k\nu\alpha}(x,\xi,\rho)$ ограничены. Поэтому к системе (21) применима лемма 1 . На основании этой леммы система (21) имеет одно и только одно решение

$z_{k\nu}=z_{k\nu}(x,\rho)$, , аналитическое относительно ρ, причем

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\omega_k^\nu+O\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (22)$$

Отсюда и из (19) непосредственно следует соотношения (17).
Из этих соотношений вытекает, что функции y_k , $k = 1, 2, \dots, n$ линейно независимы.

Остается доказать, что существует решение $y_k(x, \lambda)$ уравнения (6), удовлетворяющее уравнению (18а); для этого достаточно показать, что, каковы бы ни были *постоянные* (т.е.не зависящие от ρ) c_ν , существует решение y уравнения (6), удовлетворяющее (11) при этих значениях c_ν .

Равенства (10) представляют собой линейное преобразование от c_j к c_j (заметим, что y, а следовательно, и выражение $m_\xi(y)$ в правой части (10) линейно зависит от $c_1, c_2, \dots, c_n$). Очевидно, достаточно доказать, что определитель преобразования (10) при достаточно большом $|\rho|$, $\rho \in T$ отличен от нуля; в таком случае уравнения (10) можно решить относительно

c_j при произвольно заданных c_j. Решение y уравнения (6) или, что то же, уравнения (9), соответствующее эти значениям c_j, будет тогда искомым.

Но если определитель преобразования (10) равен нулю для сколь угодно больших $|\rho|$, $\rho \in T$, то для этих значений ρ уравнения (10) имеют нетривиальные решения относительно c_j при $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$. Соответствующая функция y будет, следовательно, нетривиальным решением уравнения

$$y = \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\,\xi,\,\rho)\, m_\xi(y)d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\,\xi,\,\rho)m_\xi(y)d\xi. \qquad (23)$$

которое получается из (11) при $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$.

Докажем, что это невозможно. Дифференцируя (23) n раз и полагая

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (24)$$

получим для функций z_ν систему уравнений

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \frac{1}{n\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega(x-\xi)_k}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times\left\{\rho^{n-2}p_2(\xi)z_{n-2}(\xi,\rho)+\ldots+p_n(\xi,\rho)\,z_0(\xi,\rho)\right\}d\xi -$$

$$-\frac{1}{n\rho^{m-1}}\int_ч^1 e^{-\rho\omega(x-\xi)_k}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times\left\{\rho^{n-2}p_2(\xi)z_{n-2}(\xi,\rho)+\ldots+p_n(\xi)\,z_0(\xi,\rho)\right\}d\xi. \qquad (25)$$

Пусть

$$m(\rho)=max\,|z_\nu(x,\rho)|,$$
$$\nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

применяя лемму 2 к правой части (25), получим оценку

$$|z_\nu(x,\rho)| \le \left[\frac{1}{n|\rho|}Ck\int_0^1\left(|p_2|+\ldots+\frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right)d\xi + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{n|\rho|}C(n-k)\int_0^1\left(|p_2|+\ldots+\frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right)d\xi\right] m(\rho).$$

Так как левая часть достигает своего максимума $m(\rho)$, то отсюда следует, что

$$m(\rho) \le m(\rho)\frac{C}{|\rho|}\int_0^1\left(|p_2| + \ldots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right)d\xi \le m(\rho)\frac{C_1}{|\rho|},$$

где C_1- некоторая константа.

При больших $|\rho|$ это неравенство возможно, только если $m(\rho)$=0; следовательно, $z_\nu(x, \rho) = 0.$ Отсюда в силу (24) при $\nu = 0,\ y \equiv 0,$ и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Уравнение

$$U^{(n)} + \rho^n U = 0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$U_k = e^{\rho\omega_k x}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Формулы (17) показывают, что решения y_k в теореме 1 аппроксимируются этими функциями U_k.

Другими словами, для больших $|\rho|$ в уравнении

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y + \rho^n y = 0$$

существенную роль играют только первое и последнее слагаемые.

В случае уравнения второго порядка $y'' + p(x)y + \rho^2 y = 0$ имеются четыре области S (рис 9); в силу доказанной теоремы в каждой из них есть линейно независимые решения y_1, y_2 , которые можно асимптотически представить в виде

$$y_1 = e^{i\rho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$y_2 = e^{-i\rho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Если ρ вещественно и положительно, то эти решения можно заменить их линейными комбинациями

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(\rho x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin(\rho x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

§ 3 Уточнение асимптотических формул и нормировка краевых условий.

Если коэффициенты $p_2,\ldots,p_n$, дифференциального выражения не только непрерывны, но и имеют также непрерывные производные до некоторого порядка m, то полученные асимптотические формулы можно уточнить.

Пусть, например, коэффициент $p_2(\xi)$ имеет непрерывную первую производную $p_2(\xi)$.

Подставим в правую часть (18а) вместо функции y_k и ее производных выражения из (17). Тогда, прменяя оценки (15а) и (15б) при $\nu = 0$, получим

$$y_k = e^{\rho\omega_k} x + \frac{1}{n\rho}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)e^{\rho\omega_k\xi}\omega_k^{n-2}p_2(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{n\rho}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)e^{\rho\omega_k\xi}\omega_k^{n-2}p_2(\xi)d\xi + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\rho\omega_k x}.$$

(26)

Но в силу (12)

$$\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\, e^{\rho\omega_k\xi}\; p_2(\xi)d\xi = e^{\rho\omega_k x}\left(\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha\int_0^x e^{-p(\omega_k-\omega_\alpha)(x-\xi)}p_2(\xi)\, d\xi + \omega_k\int_0^x p_2(\xi)\, d\xi\right),$$

причем, интегрируя по частям и принимая во внимание неравенства (5), легко убедиться в том, что первое слагаемое в скобках есть $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Таким образом,

$$\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\, e^{\rho\omega_k\xi}\; p_2(\xi)d\xi = e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k\int_0^x p_2(\xi)\, d\xi + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

и аналогично

$$\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)\, e^{\rho\omega_k\xi}\; p_2(\xi)d\xi = e^{\rho\omega_k x}O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Подставляя эти выражения в (26), получим

$$y_k = e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k0}(x)}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \qquad (27)$$

где

$$y_{k0}(x) = -\frac{1}{n\omega_k}\int_0^x p_2(\xi)\,d\xi. \qquad (28)$$

Аналогично, подставляя выражения (17) в правую часть (18), получим

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k\nu}(x)}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \qquad \nu = 0, 1, 2, ..., n-1; \qquad (29)$$

при этом легко проверить, что первые два слагаемых в скобках в формуле (29) получатся, если ν раз продифференцировать выражение

$$e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k0}(x)}{\rho}\right]$$

в (27) и после вынесения за скобку $\rho^\nu \omega_л^\nu e^{\rho\omega_k x}$ отбросить все члены порядка $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$.

Если p_2 *и* p_3 имеют непрерывные производные до второго и первого порядков соответственно, то подставляя выражения (29) в правую часть (18а) и (18б) аналогично предыдущему, получим,

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k\nu 1}(x)}{\rho}+\frac{y_{k\nu 2}(x)}{\rho^2}+O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\right]. \qquad (30)$$

Повторяя эти рассуждения, приходим к следующему результату.

С л е д с т в и е. *Если функции $p_2, p_3, \ldots, p_n$ имеют в интервале* [*0, 1*] *непрерывные производные до m- го, (m-1)-го, (m-2)-го,… порядков соответственно, то для решений*

$y_1, y_2, \ldots, y_n$, построенных в теореме1, имеют место асимптотические формулы

$$y_k = e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k01}(x)}{\rho}+\frac{y_{k02}(x)}{\rho^2}+\ldots+\frac{y_{k0m}(x)}{\rho^m}+O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \qquad (31а)$$

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k\nu 1}(x)}{\rho}+\frac{y_{k\nu 2}(x)}{\rho^2}+\ldots+\frac{y_{k\nu m}(x)}{\rho^m}+O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \qquad (31б)$$

где $y_{k\nu 1}(x),\ y_{k\nu 2}(x), \ldots,\ y_{k\nu m}(x),$ непрерывные функции в интервале[0, 1] .

З а м е ч а н и е 1. Формулы (31 б) получаются из (31а) почленным дифференцированием, вынесением за скобку множителя $\rho^{\nu}\omega_{л}^{\nu}e^{\rho\omega_k x}$ и объединением в скобках в $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$ всех тех слагаемых, которые содержат $\frac{1}{\rho^{k}}$ при k > m.

В этом легко убедиться, если вспомнить, что $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$ в (31а) есть выражение вида

$$\frac{1}{\rho^{m+1}}\left[\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\, K_1(x,\xi,\rho)\,\varphi(\xi,\rho)\,d\xi - \int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\, K_2(x,\xi,\rho)\,\varphi(\xi,\rho)\,d\xi\right],$$

где $\varphi(\xi,\rho)$ –некоторая ограниченная функция; из леммы тогда следует, что ν – я производная этого выражения по *x (ν =1, 2,…,n)* ,будет $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$.Согласно замечанию 1 функции $y_{k\nu j}(x)$ выражаются через функции $y_{k0\mu}(x)$.

З а м е ч а н и е 2 . *функции* $y_{k0\mu}(x)$ *можно определить с точностью до постоянных слагаемых, подставляя выражения (31а), (31б) в уравнение* $l(y)+\rho^n y$ *и сравнивая после сокращения на* $\rho^m e^{\rho\omega_k x}$ *члены при одинаковых степенях* $\frac{1}{\rho}$ *до* $\frac{1}{\rho^m}$ *включительно. В результате получается система рекуррентных дифференциальных уравнений первого порядка, из которых последовательно определяются функции* $y_{k0\mu}(x)$ *с точностью до постоянных слагаемых.*

Действительно, после указанных подстановок и сокращения дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{A_1}{\rho}+\frac{A_2}{\rho^2}+\ldots+\frac{A_m}{\rho^m}+O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)=0, \qquad (32)$$

где $\frac{A_\nu}{\rho^\nu}$ обозначает сумму всех членов уравнения, содержащих $\frac{1}{\rho^\nu}$.

Очевидно, равенство (32) возможно только тогда, когда

$$A_1=0,\quad A_2=0, \ldots,\ A_m=0. \qquad (33)$$

Если фактически вычислить выражения для A_1, A_2,…, A_m, то из уравнения (33) получаются следующие выражения для функций $y_{k0\mu}(x)$:

$$y_{k01} = \alpha_1 - \frac{1}{n\omega_k}\int_0^x p_2(\xi)\, d\xi, \qquad (34a)$$

$$y_{k0\nu} = \alpha_\nu - \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-\alpha-1}\omega_k^{\alpha-\nu}\int_0^x p_{\nu+1-\alpha-\beta}(\xi)y_{k0\alpha}^{(\beta)}(\xi)\, d\xi, \qquad \nu = 2,3,4,...,m. \qquad (34б)$$

Постоянные α_ν, $\nu = 1,2,3,...$ можно уже определить только из уравнений (18). Так например, выше мы видели, что $\alpha_1 = 0$. Аналогично можно определить остальные постоянные α_ν.

Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений при больших значениях параметра исследуется во многих работах. Ниже приведем нормировки краевых условий.

Рассмотрим линейные формы $U_\nu(y)$, $\nu = 1,2,...,n$, определяющие данный дифференциальный оператор. Число k назовем порядком формы $U(y)$, если эта форма содержит $y_0^{(k)}$ или $y_1^{(k)}$, но не содержит переменных $y_0^{(\nu)}$ или $y_1^{(\nu)}$ при $\nu \succ k$. Рассмотрим формы $U_\nu(y)$ порядка $n-1$, если таковые имеются. Заменяя их, если надо, линейными комбинациями, можно добиться того, что максимальное число форм порядка $n-1$ будет ≤ 2. Остальные формы имеют порядок ≤ $n-2$; применяя к формам порядка $n–2$ тот же прием, сведем их число к минимуму и т.д.

Описанные операции называются *нормировкой краевых условий*, а полученные в результате краевые условия называются *нормированными*. Из способа их построения следует, что *нормированные краевые условия должны иметь вид*

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \qquad (35)$$

где

$$U_{\nu 0}(y) = a_{\nu} y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y_0^{(i)}, \qquad (36)$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_{\nu} y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y_0^{(i)}, \qquad (37)$$

причем для каждого значения индекса ν хотя бы одно из чисел отлично от нуля.

§ 4 Регулярные краевые условия.

Рассмотрим фиксированную область S_ν и как выше, занумеруем ω_1, ω_2,…, ω_n так, что при $\rho \in S_\nu$

$\Re(\rho\omega_1) \le \Re(\rho\omega_2) \le ... \le \Re(\rho\omega_n)$.

В дальнейшем нам удобно будет выделить класс краевых условий, которые называются *регулярными*. Этот класс определяется различным образом в зависимости от того, будет ли – нечетным или четным:

а) n нечетно ; $n=2\mu-1$.

Нормированные краевые условия (35) называются регулярными, если числа θ_0 и θ_1, определенные равенством

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} ... \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} ... \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} ... \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} ... \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} ... \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} ... \beta_n\omega_n^{k_k} \end{vmatrix}, \qquad (38)$$

отличны от нуля.

б) n четно; $n=2\mu$.

Нормированные краевые условия (35) называются регулярными, если числа θ_{-1} и θ_1 , определенные равенством

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} ... \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1}\beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} ... \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} ... \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2}\beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} ... \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} ... \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n}\beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} ... \beta_n\omega_n^{k_k} \end{vmatrix} \qquad (39)$$

отличны от нуля.

Это определение регулярности *не зависит от выбора области* S, *при помощи которой были занумерованы числа ω_k.*

Для того чтобы это показать вспомним, что расположения чисел ω_k., отвечающие различным областям S, могут быть получены умножением на корень степени n из единицы из двух основных рас положений, отвечающих например, областям S_0 *и* S_{2n-1}. Но если в соотношениях (38) или (39) все ω_k. умножить на общий множитель, равный по модулю единице, то и числа θ умножаться на один и тот же множитель, равный по модулю единице. В частности, сохраняет свое значение отношение $\theta_0 : \theta_1$, соответственно $\theta_0 : \theta_1 : \theta_{-1}$, а поэтому останутся без изменения корни уравнения $\theta_1\xi+\theta_0=0$, или соответственно $\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0$; этим мы и воспользуемся еще в дальнейшем.

Таким образом, остается проследить, как меняются числа θ при переходе от какой-нибудь другой области S_ν, с нечетным ν. Отметим, что хотя при этом переходе по-прежнему каждое из чисел θ умножается на определенное число, равное по модулю единице, однако теперь, вообще говоря, не все θ умножаются на один и тот же множитель.

Рассмотрим сначала случай нечетного n.

При $n=2\mu-1$ числа $\psi_k=e^{i\pi+\frac{2k\pi i}{n}}$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm(\mu-1)$ являются всеми корнями степени n из –1. В случае области S_{2n-1} неравенства (4) со следующим расположением индекса:

$$0, +1, -1, +2, -2, \ldots, +(\mu-1), -(\mu-1),$$

а в случае области S_0

$$0, -1, +-1, -2, +-2, \ldots, -(\mu-1), +-(\mu-1).$$

В силу (38)

$$\theta_0=\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1}\ldots\alpha_1\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1}\ldots\beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2}\ldots\alpha_2\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2}\ldots\beta_2\omega_n^{k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n}\ldots\alpha_n\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n}\ldots\beta_n\omega_n^{k_k} \end{vmatrix};$$

также выглядит определитель для θ_1, с той лишь разницей, что в μ *-м* столбце следует заменить α_k *на* β_k. Пусть числа θ_0 *и* θ_1 вычислены для области S_{2n-1}; соответствующие числа, найденные для области S_0, обозначим через θ_0 *и* θ_1. Очевидно, что θ_0 *и* θ_1 можно получить из θ_0 *и* θ_1, переставляя в соответствующих определителях числа ω_k соответственно во втором и третьем столбцах, в четвертом и в пятом столбцах и т.д.

соответствующее изменение чисел θ_0 *и* θ_1 легко выяснит путем рассмотрения следующих схем:

a$_1$) μ*-четно ,n=4q-1.*

$$\begin{array}{l|l}
\theta_0 & \\
 & \alpha \quad \alpha \quad \alpha \qquad \alpha \qquad\quad \alpha \qquad\quad \alpha \qquad \beta \;\; \ldots \;\; \beta \qquad\quad \beta \\
\theta_1 & 0, \;\; 1, \;\; -1,\ldots,q-1, \;\; -(q-1), \;\; q, \;\; -q,\ldots,2q-1, \;\; -(2q-1) \\
 & \alpha \quad \alpha \quad \alpha \qquad \alpha \qquad\quad \alpha \qquad\quad \beta \qquad \beta \;\; \ldots \;\; \beta \qquad\quad \beta
\end{array}$$

a$_2$) μ*-нечетно ,n=2q+1*

$$\begin{array}{l|l}
\theta_0 & \\
 & \alpha \quad \alpha \quad \alpha \;\ldots \alpha \qquad\quad \alpha \qquad\quad \beta \qquad\quad \beta \;\; \ldots \;\; \beta \qquad\quad \beta \\
\theta_1 & 0, \;\; 1, \;\; -1,\ldots,q, \qquad -q, \qquad q+1, \quad -(q+1),\ldots,2q \qquad -2q \\
 & \alpha \quad \alpha \quad \alpha \qquad \alpha \qquad\quad \beta \qquad\quad \beta \qquad \beta \;\; \ldots \;\; \beta \qquad\quad \beta
\end{array}$$

Здесь, с одной стороны, указано расположение ψ –индексов для чисел $\omega_1,\ldots,\ \omega_n$ в столбцах определителя θ, с другой стороны, с помощью букв α или β указано, на какое из соответствующих чисел $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ умножается данное $\omega_j^{k_l}$. При переходе S_{2n-1} *к* S_0 следует строку индексов *(0,1,-1,…)* заменить строкой *(0,-1,+1,…)* и оставить без изменения «(α,β)-распределение».

Поскольку в случае a$_1$) это приводит попросту к перестановке столбцов в θ_1 , а в случае a$_2$) - в θ_0 , то

θ_1=- θ_1 *при n=4q-1*

θ_0= θ_0 *при n=4q+1*

Для нахождения остальных соотношений будем рассуждать следующим образом.

При умножении на $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i l}{n}}$ система чисел $\omega_1,\ldots,\ \omega$ переходит сама в себя, причем происходит такая перестановка этих чисел, что к каждому ψ–индексу k добавляется l *и к* $k+l$ добавляется некоторое число, кратное n, если $|\, k+l\, |$ оказывается $\geq \mu$ *-1* . Таким образом (при $l=-1$, $n=4q-1$), из строки индексов

$$\ldots\alpha \quad \alpha \quad \beta \quad \beta\ldots$$

0, 1, -1, … , q-1, -(q-1), q, -q, q+1,…, -(2q-1)

получается строка

-1, 0, -2, 1, -3, …, q -2, -q, q-1, -(q+1), q, …, (2q-2), 2q-1

Последняя строка может быть приведена к виду

$$\ldots\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \beta\ldots$$

0, -1, 1, -2,+2, …, -(q-1), q-1, -q, q,…, -(2q-1), 2q-1.

отвечающему θ_0, θ_1 с помощью перестановок первых *2q-1* пар чисел. Отсюда вытекает, что

$$\theta_0 = -e^{-\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}\theta_0 \qquad при \quad n = 4q-1$$

и аналогично

$$\theta_1 = e^{-\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}\theta_1 \qquad при \quad n = 4q+1$$

Теперь ясно, что определение регулярности не зависит от выбора области. Кроме того, оказывается, что:

I. К*орни уравнения* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$ *не меняются при переходе от* S_ν *и* S_ν *при* $\nu = \nu'(\mathrm{mod}\, 2)$*; при переходе от* S_{2l+1} *к* S_{2l} *они*

умножаются на $e^{\pm\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}$, *причем знак +(-) соответствует n=4q+1 (n=4q-1).*

Обозначая через $\xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ корни, отвечающие S_ν с ν соответственно нечетным и четным, мы имеем

$$\xi^{(2)} = e^{\pm\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}\xi^{(1)} \qquad при \quad n=4q-1$$

В случае четного n , $n=2\mu$ имеется более удобный путь, приводящий к цели.

Теперь все корни степени n из –1 имеют вид $\psi_k = e^{\pm\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}$, и мы по-прежнему можем охарактеризовать каждое расположение чисел $\omega_1,\ldots,\omega$, а следовательно, и выбор области S_ν , соответствующей строкой ψ-индексов. В результате для областей S_{2n1}, S_0, S_1 мы получим следующие строки:

$$\begin{array}{llllllllll}
1, & -1, & 3, & -3, & \ldots, & n-1, & & & -(n-1), & \\
-1, & 1, & -3, & 3, & \ldots, & -(n-1), & & & n-1, & \\
-1, & -3, & 1, & -5, & 3, & -7, & 5, & \ldots, & -(n-1), & n-3, \; n-1.
\end{array}$$

Будем различать два случая:

б$_1$) $\mu=2q$, $n=4q$.

Строка для S_1 может быть получена из строки для S_0, если поменять местами второй и третий, четвертый и пятый, … *(n-2)-й и (n-1)-й* элементы. Если поэтому в определителе (39), составленном для S_0 переставит соответственно столбцы и, кроме того, заменить s на $\frac{1}{s}$, то получим определитель (39), составленный для области S_1. Ввиду того, что число таких перестановок $(2q–1)$ нечетно, то $D_1(s)=-D_0\left(\frac{1}{s}\right)$, где $D_\nu(s)$ определитель (39), составленный для области S_ν.

б$_2$) $\mu=2q+1$, $n=4q+2$

В этом случае аналогичным способом находится

$$D_{2n-1}(s) = -D_0\left(\frac{1}{s}\right).$$

Таким образом, и в случае четного n определение регулярности не зависит от выбора области S_ν . Кроме того, отметим следующее:

II . П*ри изменении* ν *на четное слагаемое корни* ξ' *и* ξ'' *квадратного уравнения* $D_\nu(s)$ *(отвечающего регулярным краевым условиям) не меняются; при переходе от четного* ν *к нечетному они переходят в* $\frac{1}{\xi'}$, $\frac{1}{\xi''}$.

И, наконец, еще одно замечание. Если все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ действительны,то при переходе от S_{2n-1} к S_0 числа θ переходят в комплексно сопряженные. Следовательно, в этом случае независимость определения регулярности от выбора S_ν усматривается непосредственно.

Рассмотрим некоторые примеры регулярных краевых условий.

а) Условия типа Штурма при четном $n(n=2\mu)$. Так называются краевые условия вида

$$\left.\begin{array}{l} U_{j0}(y) \equiv y_0^{(k_j)} + \sum\limits_{\nu=1}^{k_j-1} \alpha_{j\nu} y_0^{(\nu)} = 0, \\ U_{j1}(y) \equiv y_1^{(k_j)} + \sum\limits_{\nu=1}^{j-1} \beta_{j\nu} y_1^{(\nu)} = 0, \\ \qquad j = 1, \quad 2 \quad ,\ldots, \quad \mu \end{array}\right\} \qquad (40)$$

где

$$n-1 \geq k_1 > k_2 > \ldots > k_\mu \geq 0; \qquad n-1 \geq k'_1 > k'_2 > \ldots > k'_\mu \geq 0;$$

здесь половина условий содержит значения функции y и ее производных только в точке $x=0$, а половина - только в точке $x=1$.

В этом случае

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k1} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k1} & \omega_\mu^{k1} & \omega_{\mu+1}^{k1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{k\mu} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k\mu} & \omega_\mu^{k\mu} & \omega_{\mu+1}^{k\mu} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & s\omega_\mu^{k1'} & \frac{1}{s}\omega_{\mu+1}^{k1} & & \ldots & \omega_n^{k1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & s\omega_\mu^{k\mu} & \frac{1}{s}\omega_\mu^{k\mu} & & \ldots & \omega_n^{k\mu} \end{vmatrix}$$

следовательно,

$\theta_0 = 0,$

$$\theta_1 = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k1} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k1} & \omega_{\mu+1}^{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{k\mu} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k\mu} & \omega_{\mu+1}^{k\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_\mu^{k1} & \dots & \omega_{\mu+2}^{k1} & \omega_n^{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_\mu^{k\mu} & \dots & \omega_{\mu+2}^{k\mu} & \omega_n^{k\mu} \end{vmatrix}, \qquad (41)$$

$$\theta_{-1} = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k1} & \dots & \omega_\mu^{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{k\mu} & \dots & \omega_\mu^{k\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{\mu+1}^{k1} & \dots & \omega_n^{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{\mu+1}^{k\mu} & \dots & \omega_n^{k\mu} \end{vmatrix}, \qquad (41)$$

Все определители в формулах (41) и (42) отличны от нуля; следовательно, *условия типа Штурма регулярны.* Докажем, например, (считая для определенности $\nu=2n-1$), что не равен нулю определитель

$$\alpha = \begin{vmatrix} \omega_1^{k1} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k1} & \omega_{\mu+1}^{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{k\mu} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k\mu} & \omega_{\mu+1}^{k\mu} \end{vmatrix};$$

для остальных определителей доказательство проводится аналогично.

Прежде всего заметим, что точки $\omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}, \omega_{\mu+1}$ лежат на одной полуокружности (радиуса единица, с центром в точке нуль). Это вытекает непосредсьвенно из их определения. Поэтому, с точностью до порядка следования элементов, последовательность ($\omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}, \omega_{\mu+1}$) совпадает с последовательностью $\left(p,\ pe^{i\frac{2\pi}{n}}, \dots, pe^{i\frac{2\pi}{n}(\mu-1)}\right)$, где p– некоторое число, равное по модулю единице. Следовательно, полагая $e^{i\frac{2\pi}{n}k_j} = \alpha_j$, мы имеем

$$\alpha = \pm p^{k1+\dots+k\mu} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{\mu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_\mu & \dots & \alpha_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}.$$

так как все k_j различны и $0 \le k_j \le n-1$, то среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ нет одинаковых, а поэтому $\alpha \ne 0$.

Заметим еще, что поскольку $\theta_0=0$, то условия Штурма *усиленно регулярны* в том смыле, что θ^2-4θ.

б) Условия периодического типа. Так называются условия вида

$U_\nu(y) \equiv y_0^{(\nu)} - y_1^{(\nu)} = 0, \qquad \nu = 0,1,2,...,n-1.$

Условия периодического типа регулярны.

Действительно, при n четном $(n=2\mu)$

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \pm \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1-s & 1-\frac{1}{s} & 1 & ... & 1 \\ \omega_1 & ... & \omega_{\mu-1} & \omega_\mu(1-s) & \omega_{\mu+1}(1-\frac{1}{s}) & \omega_{\mu+2} & ... & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1} & ... & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \omega_\mu^{n-1}(1-s) & \omega_{\mu+1}^{n-1}(1-\frac{1}{s}) & \omega_{\mu+2}^{n-1} & ... & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\pm C(1-s)\left(1-\frac{1}{s}\right),$$

где C- определитель Вандермонда чисел $\omega_1, ..., \omega_n$, и следовательно, $C \neq 0$.

Отсюда

$\theta = \pm 2C; \qquad \theta_1 = \theta_{-1} = \pm C \neq 0;$

т.е. условия регулярны.

При n нечетном $(n=2\mu-1)$

$$\theta_0 + \theta_1 s = \pm \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1-s & 1 & ... & 1 \\ \omega_1 & ... & \omega_{\mu-1} & (1-s)\omega_\mu & \omega_{\mu+1} & ... & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1} & ... & \omega_{\mu-1}^{n-1} & (1-s)\omega_\mu^{n-1} & \omega_{\mu+1}^{n-1} & ... & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \pm C(1-s).$$

Отсюда видно , что и в этом случае условия регулярны.

в) К р а е в ы е у с л о в и я п р и $n=2$. Наиболее общие краевые условия при $n=2$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0, \\ c_1 y_0' + d_1 y_1' + c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$. Решая (43) относительно y_0' и y_1' можно привести условия к виду

$$y_0' + \alpha_{11}y_0 + \alpha_{12}y_1 = 0,$$
$$y_1' + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{22}y_2 = 0.$$

В этом случае

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ s\omega_1 & \frac{1}{s}\omega_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s,$$

следовательно,

$\theta_0=0,\qquad \theta_1=-1,\qquad \theta_{-1}=1,$

т.е. условия регулярны.

2) $a_1d_1 - b_1c_1 = 0, \quad |a_1| + |b_1| \succ 0$. В этом случае условия (43) можно привести к виду

$$a_1y_0' + b_1y_1' + a_0y_0 + b_0y_1 = 0,$$
$$c_0y_0 + d_0y_1 = 0,$$

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} (a_1 + sb_1)\omega_1 & -\left(a_1 + \frac{1}{s}b_1\right)\omega_1 \\ c_0 + sd_0 & c_0 + \frac{1}{s}d_0 \end{vmatrix} = \omega_1(b_1c_0 + a_1d_0)\left(s + \frac{1}{s}\right) + 2(a_1c_0 + b_1d_0)\omega_1;$$

таким образом, условия регулярны, если

$b_1c_0 + a_1d_0 \neq 0.$

3) $a_1=b_1=c_1=d_1=0$. Так как формы (43) должны быть независимыми, то в этом случае $a_1d_0 - b_0c_0 \neq 0$. ; следовательно, условия (43) эквивалентны условиям

$y_0 =0,\qquad y_1=0.$

Отсюда

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s,$$

т.е. условия регулярны.

Итак, при *n=2 условия (43) регулярны в следующих случаях:*

1) $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$

2) $a_1d_1 - b_1c_1 = 0, \quad |a_1| + |b_1| \succ 0$, $a_1d_0 - b_0c_0 \neq 0$

3) $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0, \quad a_1d_0 - b_0c_0 \neq 0$

§ 5 Асимптотика собственных значений и функций.

Результаты дают возможность установить существование бесчисленного множества собственных значений дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями, и получить асимптотические выражения для этих собственных значений при больших значениях их модуля. Оказывается, что главные члены этих выражений не зависят от вида дифференциального выражения и краевых условий, порождающих дифференциальный оператор. При этом существенную роль играют только числа θ_0, θ_1 *и* $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1},$, определенные при данных краевых условиях формулами (38) и (39) для нечетного и четного n соответственно. В теореме 2 ниже мы предполагаем, что коэффициенты рассматриваемого дифференциального выражения непрерывны в интервале $[0,1]$. Заметим, однако, что физически все результаты этого пункта остаются верными и тогда, когда коэффициенты дифференциального выражения – произвольные функции, суммируемые в интервале $[0,1]$.

Т е о р е м а 2 . С*обственные значения дифференциального оператора n–го порядка в интервале* $[0,1]$, *порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности* λ_k', λ_k'' $(k = N, \quad N+1, \quad N+2, ...,)$, *где N -некоторое целое число.*

При нечетном n, n=4q+1,

$$\lambda' = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \qquad (44a)$$

$$\lambda_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \qquad (44б)$$

а для нечетного n, n=4q+1

$$\lambda_k' = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \qquad (44a')$$

$$\lambda_k'' = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \qquad (44б')$$

где $\xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ *определенные ранее корни уравнения* $\theta_1\xi+\theta_0=0$ *отвечающего области* S_ν *с* ν*, соответственно нечетным и четным.*

При четном n, $n=2\mu$, *и* $\theta^2-4\theta_{-1}\theta_1\neq 0$

$$\lambda_k'=(-1)^\mu(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi'}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (45а)$$

$$\lambda_k''=(-1)^\mu(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi''}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (45б)$$

где ξ' *и* ξ'' *корни уравнения*

$$\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0, \qquad (46)$$

отвечающего области S_0 *, причем верхний знак в формулах (45) соответствует четному, а нижний – нечетному* μ*..*

Наконец, при четном n, $n=2\mu$, *и* $\theta_0^2-4\theta_{-1}\theta_1\neq 0$

$$\lambda_k'=(-1)^\mu(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \qquad (47а)$$

$$\lambda_k''=(-1)^\mu(2k\pi)^n\left[1\mp\frac{\mu\ln_0\xi}{k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \qquad (47б)$$

где ξ*—(двойной) корень уравнения (46), отвечающего области* S_0*, а выбор верхнего или нижнего знака в формулах (47) следует производить по такому же правилу, как в (45).*

В первых трех случаях все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в четвертом, - начиная с некоторого, простые, или двукратные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разберем сначала случай нечетного n; пусть $n=2\mu-1$. Рассмотрим фиксированную область T; пусть числа ω_k занумерованы так, что при $\rho\in T$.

$$\Re((\rho+c)\omega_1)\le\Re((\rho+c)\omega_2)\le\ldots\le\Re((\rho+c)\omega_n). \qquad (48)$$

Положим

$$\bar\rho_k=(\rho+c)\omega_k, \qquad k=1, 2,\ldots, n. \qquad (49)$$

Точки $\overline{\rho}_1,\ \overline{\rho}_2,...,\overline{\rho}_n$ лежат на окружности радиуса $|\rho + c|$ на одинаковом угловом расстоянии $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2\mu - 1}$ друг от друга; поэтому на правой замкнутой полуокружности их не больше чем μ. Действительно, если их там было бы по меньшей мере μ + *1*, то мы пришли бы к противоречивому неравенству .

$$\pi \geq \frac{2\pi}{2\mu - 1}\mu \succ \pi,$$

ибо угловая мера полуокружности есть π. Отсюда из неравенств (48) следует, что по крайней мере первые μ - *1* точек $\overline{\rho}_1,\ \overline{\rho}_2,...,\overline{\rho}_{\mu-1}$ должны находиться на левой открытой полуплоскости, аналогично последние μ - *1* точек $\overline{\rho}_{\mu+1},\ \overline{\rho}_{\mu+2},...,\overline{\rho}_{2\mu-1}$ находятся в правой открытой полуплоскости. Другими словами,

$$\Re(\overline{\rho}_1) \prec 0, \qquad \Re(\overline{\rho}_2) \prec 0, \ \ldots, \ \Re(\overline{\rho}_{\mu-1}) \prec 0, \qquad (50а)$$

$$\Re(\overline{\rho}_{\mu+1}) \succ 0, \qquad \Re(\overline{\rho}_{\mu+2}) \succ 0, \ \ldots, \ \Re(\overline{\rho}_{2\mu-1}) \succ 0 \qquad (50б)$$

Если $\rho \to \infty$, оставаясь в области T, то левые части (50а) и (50б) стремятся к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Действительно, $\mathfrak{R}(\overline{\rho}_{\mu-1})$ например, не будет стремиться к $-\infty$ лишь тогда, когда угловое расстояние между $\overline{\rho}_{\mu-1}$ и отрицательной или положительной мнимой полуосью стремиться к нулю, но тогда при достаточно большом $|\rho|$, на дуге

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

разместятся μ + *1* точек $\overline{\rho}_{\mu-1},\ \overline{\rho}_{\mu},...,\overline{\rho}_n$. Отсюда следует, что

$$\pi + 2\varepsilon \leq \frac{2\pi\ \mu}{2\mu - 1}$$

при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, что невозможно.

Из доказанного нами утверждения вытекает, что при $\rho \to \infty,\ \rho \in T$,

а) $e^{\overline{\rho}_j}$ *экспоненциально стремится к нулю, если* $j < \mu$

б) e^{ρ_j} *экспоненциально стремится к бесконечности, если* $j > \mu$..

Согласно теореме 1 в области T имеется n независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – уравнения $l(y)+\rho^n y=0$ таких, что

$$\left.\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\\ y_k' &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_k^{(n-1)} &= \rho^{n-1}e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Составим при помощи этих решений определитель $\Delta(y)=det(U_\nu(y_j))$; по доказанному выше собственные значения суть нули этого определителя. Поэтому займемся определителем $\Delta(\lambda)$.

Для краткости введем обозначение

$$[\,a\,]=a+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Подставляя выражения (51) в нормированные формы $U_\nu(y)$ имеем

$$U_{\nu 0}(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}\left[\alpha_\nu+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu],$$

$$U_{\nu 1}(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}\left[\beta_\nu+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu],$$

откуда

$$U_\nu(y_j)=U_{\nu 0}(y_j)+U_{\nu 1}(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\alpha_\nu]+e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu]\}.$$

Но если $j<\mu$, то функция

$$e^{\rho\omega_j}=e^{-c\omega_j}e^{\tilde{\rho}_j}$$

экспоненциально убывает при $\rho\to\infty$; $\rho\in T$ следовательно,

$$U_\nu(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu] \qquad \textit{при} \qquad j\prec\mu \qquad (52a)$$

Аналогично

$$U_\nu(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu] \qquad \textit{при} \qquad j\succ\mu \qquad (52б)$$

Наконец,

$$U_\nu(y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\alpha_\nu]+e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu]\} \qquad (52в)$$

Подставим все эти выражения в уравнение

$$\Delta = \det(U_\nu(y_j)) = 0 \qquad (53)$$

и сократим на общие множители $\rho^{k_1}, \rho^{k_2}, ..., \rho^{k_n}$ строк и $e^{\rho\omega_{\mu+1}}, e^{\rho\omega_{\mu+2}}, ..., e^{\rho\omega_n}$, последних столбцов определителя $\Delta(\lambda)$. Тогда это уравнение запишется в виде

$$\Delta_0 = 0,$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} [\alpha_1]\omega_1^{k_1} & ... & [\alpha_1]\omega_{\mu-1}^{k_1} & ([\alpha_1] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_1])\omega_\mu^{k_1} & [\beta_1]\omega_{\mu+1}^{k_1} & ... & [\beta_1]\omega_n^{k_1} \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & ... & [\alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2}] & ([\alpha_2] + e^{o\omega_\mu}[\beta_2])\omega_\mu^{k_2} & [\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & ... & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & ... & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & ([\alpha_n] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n])\omega_\mu^{k_n} & [\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & ... & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{vmatrix} \qquad (54)$$

Согласно определению чисел θ_0 *и* θ_1 из формулы (54) вытекает, что

$$\Delta_0 = [\theta_0] + e^{\rho\omega}[\theta_1]..$$

Если ρ есть корень уравнения $\Delta_0 = 0$, то

$$e^{\rho\omega_\mu} = -\frac{[\theta_0]}{[\theta_1]},$$

т.е.

$$e^{\rho\omega_\mu} = -\frac{\theta_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\theta_1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)} = -\frac{\theta_0}{\theta_1}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\} = \xi\left\{1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \qquad (55)$$

ибо в силу регулярности краевых условий $\theta_0 \neq 0, \quad \theta_1 \neq 0$

Поэтому

$$\rho = \frac{1}{\omega_n}\left\{\ln_0 \xi + 2k\pi\, i + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \qquad k = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ... \qquad (56)$$

Докажем теперь, что действительно существуют нули функции Δ, определяемые формулой (56).

Положим

$$\rho_л = \frac{1}{\omega_\mu}(2л\pi i + \ln_0 \xi); \qquad (57)$$

тогда соотношение (56) перепишется в виде

$$\rho = \rho_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad k = 1, \quad 2, \quad \ldots \qquad (58)$$

опишем теперь около каждой точки ρ_k окружность Γ_k одного и того же радиуса *r*. В силу только что сказанного, при *k* достаточно большом, эти окружности будут целиком находиться в области *T*. Уравнение (53) эквивалентно уравнению (55); так как $\xi = e^{\rho_k \omega_\mu}$, то это последнее можно переписать в виде

$$e^{\omega_\mu(\rho - \rho_k)} - 1 - O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \qquad (59)$$

Вне окружностей Γ_k функция

$$f = e^{\omega_\mu(\rho - \rho_k)} - 1 = e^{\omega_\mu(\rho - \rho_0)} - 1$$

ограничена снизу положительным числом.

В силу (56)

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu}\left\{2k\pi i + \ln_0 \xi + O\left(\frac{1}{\rho'_k}\right)\right\};$$

с другой стороны, в силу этой же формулы

$$O\left(\frac{1}{\rho'_k}\right) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Поэтому

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu}\left\{2k\pi i + \ln_0 \xi + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\},$$

или

$$\rho'_k = \frac{2k\pi i}{\omega_\mu}\left\{1 + \frac{\ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\}.$$

Если теперь применить формулу (60) к каждой из областей *T* и учесть высказанные ранее соображения относительно выбора знака *k*, то после возведения в *n–ю* степень получатся в точности формулы (44).

Простота этих собственных значений при достаточно большом $|k|$ вытекает из того, что, по доказанному выше, они являются простыми нулями определителя $\Delta(\lambda)$.

Перейдем теперь к случаю четного n; пусть $n=2\mu$. Рассмотрим снова фиксированную область T, для которой имеют место неравенства (48). Рассуждая так же, как и в случае нечетного n , придем к выводу, что

$$\Re(\rho_1) < 0, \quad \Re(\rho_2) < 0, \ \dots, \ \Re(\rho_{\mu-1}) < 0, \qquad (61)$$

$$\Re(\rho_{\mu+2}) > 0, \quad \Re(\rho_{\mu+3}) > 0, \dots, \Re(\rho_n) > 0, \qquad (62)$$

причем левые части неравенств (61) и (62) стремятся соответственно к $-\infty$ *и* $+\infty$, когда $\rho\to\infty$, оставаясь в данной области T.

Отсюда, как и в случае нечетного n, заключаем, что в области T

$$\left.\begin{aligned} U_\nu(y_j) &= (\rho\omega_j)^{k\nu}[\alpha_\nu] && \text{при} \quad j \le \mu-1, \\ U_\nu(y_j) &= (\rho\omega_j)^{k\nu} e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu] && \text{при} \quad j \ge \mu+2 \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

и, кроме того,

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_\nu]\right\}, \qquad (64a)$$

$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_{\mu+1}}[\beta_\nu]\right\}. \qquad (64б)$$

Уравнение четной степени $\omega^n + 1 = 0$ вместе с корнем ω_k содержит также корень $-\omega_k$, отсюда и из неравенств (48) следует, что

$$\Re(\tilde\rho_\mu) \le 0, \qquad \Re(\tilde\rho_{\mu+1}) \ge 0$$

и

$$\omega_1=-\omega_n, \qquad \omega_2=-\omega_{n-1}, \dots, \qquad \omega_\mu=-\omega_{\mu+1}.$$

Поэтому (64б) можно переписать в виде

$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{-\rho\omega_{\mu+1}}[\beta_\nu]\right\}. \qquad (64б')$$

Подставляя в уравнение $\Delta=0$ выражения (63), (64) для $U_\nu(y_j)$ и произведя сокращения, получим уравнение вида

$$\Delta_0=0, \qquad (65)$$

где

$$\Delta_0=det(A, B), \qquad (66)$$

$$A=\begin{pmatrix}[\alpha_1\omega_1^{k_1}] & \dots & [\alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1}] & \omega_\mu^{k_1}\{[\alpha_1]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_1]\} \\ [\alpha_2\omega_1^{k_2}] & \dots & [\alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2}] & \omega_\mu^{k_2}\{[\alpha_2]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_2]\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n\omega_1^{k_n}] & \dots & [\alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n}] & \omega_\mu^{k_n}\{[\alpha_n]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\omega_{\mu+1}^{k_1}\{[\alpha_1]+e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_1]\} & [\beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1}] & \dots & [\beta_1\omega_n^{k_1}] \\ \omega_{\mu+1}^{k_2}\{[\alpha_2]+e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_2]\} & [\beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2}] & \dots & [\beta_2\omega_n^{k_2}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{\mu+1}^{k_n}\{[\alpha_n]+e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_n]\} & [\beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n}] & \dots & [\beta_n\omega_n^{k_n}]\end{pmatrix},$$

По определению чисел

θ_0, θ_1, θ_{-1}

$\Delta_0=[\theta_0]+[\theta_1]e^{\rho\omega_\mu}+[\theta_{-1}]e^{-\rho\omega_\mu}$,

следовательно,

$$e^{\rho\omega_\mu}\Delta_0=[\theta_1]e^{2\rho\omega_\mu}+[\theta_0]e^{\rho\omega_\mu}+[\theta_{-1}]=\theta_1e^{2\rho\omega_\mu}+\theta_0e^{\rho\omega_\mu}+\theta_{-1}+O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad (67)$$

ибо в силу соотношения $\Re(\tilde{\rho}_\mu)\le 0$

$$\left|e^{\rho\omega_\mu}\right|=\left|e^{\tilde{\rho}_\mu}\right|\left|e^{-c\omega_\mu}\right|\le\left|e^{-c\omega_\mu}\right|,$$

т.е. функция $e^{\rho\omega_\mu}$ ограничена в области T.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0; \qquad (68)$$

пусть ξ' *и* ξ'' его корни, так что

$$\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=\theta_1(\xi-\xi')(\xi-\xi'').$$

Тогда (67) перепишется в виде

$$e^{\rho\omega_\mu}\Delta_0=\theta_1(e^{\rho\omega_\mu}-\xi')(e^{\rho\omega_\mu}-\xi'')+O\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (69)$$

Уравнения

$$e^{\rho\omega_\mu}-\xi'=0, \qquad e^{\rho\omega_\mu}-\xi''=0$$

имеют соответственно корни

$$\tilde{\rho}_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0\xi'+2k\pi i) \qquad \tilde{\rho}_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0\xi''+2k\pi i), \qquad (70)$$

$$k=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\dots,$$

Для нас интерес представляют только те из них, которые лежат внутри области T. отметим, что эти корни располагаются на прямой, параллельной стороне сектора S.

Действительно, будем для определенности предполагать, что рассматриваемым сектором является область S_0. Тогда

$$\omega_\mu = -ie^{-\frac{i\pi}{n}} \qquad при \qquad n = 4q,$$

$$\omega_\mu = i \qquad при \qquad n = 4q + 2.$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho}'_k = e^{\frac{i\pi}{n}}(i\ln_0 \xi' - 2k\pi), \qquad \tilde{\rho}''_k = e^{\frac{i\pi}{n}}(i\ln_0 \xi'' - 2k\pi), \qquad при \qquad n = 4q$$

и

$$\tilde{\rho}'_k = -i\ln_0 \xi' + 2k\pi, \qquad \tilde{\rho}''_k = -i\ln_0 \xi'' + 2k\pi, \qquad при \qquad n = 4q + 2.$$

Отсюда также вытекает, что при $n=4q$ все корни с $k< 0$, а при $n=4q+2$ все корни с $k>0$ лежат внутри области T_0 на положительном расстоянии от ее границы, если только надлежащим образом выбрать вершину $\rho =-c$ этой области. В первом из этих случаев мы заменим k на $-k$; в результате получим последовательности

$$\rho'_л = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \qquad \rho''_л = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i) \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (70a)$$

принадлежащие области T_0 при условии, что в случае $n=4q$ берется верхний знак, а в случае $n=4q+2$ –нижний. Используя $\rho'_л, \rho''_л$ и принимая во внимание (69), можно преобразовать уравнение $\Delta_0 = 0$ к виду

$$\left[e^{\omega_\mu(\rho - \rho'_k)} - 1\right]\left[e^{\omega_\mu(\rho - \rho''_k)} - 1\right] + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \qquad (71)$$

Около каждой из точек $\rho'_л, \rho''_л$ $(k=1,2,\ldots,)$ опишем окружность соответственно Γ'_k *и* Γ''_k одного и того же радиуса. При достаточно малом r эти окружности будут содержаться целиком в области T_0.

Применяя, как в случае нечетного n, теорему Руше, при достаточно большом $|\rho|$, $\rho \in T$, заключаем, что при достаточно большом $|\rho|$ уравнение

$\Delta_0 = 0$ может имеет нули только внутри Γ'_k *и* Γ''_k и притом имеет их столько, сколько их там имеет уравнение

$$\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho'_k)}-1\right]\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho''_k)}-1\right]=0. \qquad (72)$$

Пусть теперь $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0;$ тогда $\xi' \neq \xi''$; следовательно, числа $\rho'_л, \rho''_л$, а потому и круги Γ'_k *и* Γ''_k отличны друг от друга.

В каждом из этих кругов уравнение (72), а значит, и уравнение $\Delta_0 = 0$, имеет в точности один корень; обозначим эти корни через $\tilde{\rho}'_л, \tilde{\rho}''_л$ соответственно.

Далее приведем асимптотику для собственных функций.

Применим теперь результаты прежних параграфов к нахождению асимптотических формул для собственных функций при больших по модулю собственных значениях.

При этом мы снова предполагаем, что *L*– дифференциальный оператор в интервале $[0,1]$, порожденный дифференциальным выражением с непрерывными коэффициентами и регулярными краевыми условиями.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$- линейно-независимые решения уравнения $l(y)+\rho^n y=0$, удовлетворяющие соотношениям (17) в некоторой области Т; собственная функция y, соответствующая данному значению $\lambda=-\rho^n$, должна быть линейной комбинацией функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$

коэффициенты которой суть нетривиальные решения однородной системы

$$U_\nu(y_1)c_1+ U_\nu(y_2)c_2+\ldots+ U_\nu(y_n)c_n=0, \qquad \nu=1, 2, \ldots,n.$$

Следовательно, они пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-нибудь строки определителя этой системы.

Поэтому

$$y=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{73}$$

если не все миноры элементов первой строки этого определителя равны нулю.

Рассмотрим отдельно случаи нечетного и четного n.

а) n н е ч е т н о; $n=2\mu-1$. Подставляя в (73) вместо y_j, $U_\nu(y_j)$ их выражения из (17) и (52) и разделив полученное выражение на несущественные множители $\rho^{k_2}, \rho^{k_3}, \dots, \rho^{k_n}, e^{\rho\omega_{\mu+1}}, \dots, e^{\rho\omega_n}$, получим (ненормированную) собственную функцию y_0:

$$y_0=det(X_1, X_2), \tag{74}$$

где

$$X_1=\begin{pmatrix} e^{\rho\omega_1 x}[1] & \dots & e^{\rho\omega_{\mu-1}x}[1] & e^{\rho\omega_\mu x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \dots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & ([\alpha_2]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_2])\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \dots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & ([\alpha_n]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n])\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_2=\begin{pmatrix} e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-1)}[1] & \dots & e^{\rho\omega_n(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & \dots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

Для достаточно больших $|\lambda|$ число ρ должно совпадать с одним из чисел $\tilde{\rho}'_k$ *или* $\tilde{\rho}''_k$, лежащих в области T. Таким образом, для области T с нечетным индексом

$$\rho=\tilde{\rho}'_k=\frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i+\ln_0\xi^{(1)}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right],$$

а для области T с четным индексом

$$\rho=\tilde{\rho}''_k=\frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i+\ln_0\xi^{(2)}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

для всех натуральных k, начиная с некоторого, причем верхний знак соответствует $n=4q-1$, а нижний соответствует $n=4q+1$. Полагая

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(1)}\right], \qquad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(2)}\right],$$

имеем

$$\tilde{\rho}'_k = \rho_k^{(1)} + O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \tilde{\rho}''_k = \rho_k^{(2)} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Очевидно,

$$e^{\rho\omega_\nu} = e^{\tilde{\rho}_k\omega_\nu x} = e^{\rho_k^{(1)}\omega_\nu x}[1],$$

ибо

$$e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) + \left(O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2 + \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1].$$

Подставляя эти выражения в (74), получим следующую формулу для соответствующих собственных функций $y = y_k^{(\sigma)}$, $\sigma = 1,2,$ отвечающих собственным значениям λ'_k, λ''_k определяемым формулами *(44)*

$$y_k^{(\sigma)} = \det(X_{1k}^{(\sigma)}, X_{2k}^{(\sigma)}), \qquad (75)$$

где

$$X_{1k}^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & \ldots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & e^{\omega_\mu\rho_k^{(\sigma)}x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \ldots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2 + \xi\beta_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \ldots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n + \xi\beta_n]\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] & \ldots & e^{\omega_n\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

k = N, N+1,…; N-достаточно большое натуральное число, а $\sigma = 1, 2$.

б) *n* ч е т н о; $n=2\mu$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим две последовательности собственных функций, соответствующих собственным значениям λ'_k *и* λ''_k. Собственному значению λ'_k отвечает собственная функция

$$y_k=det(X_{1k}, X_{2k}), \qquad (76)$$

где

$$X_{1k}=\begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho'_k x}[1] & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho'_k x}[1] & e^{\omega_\mu\rho'_k x}[1] & e^{-\omega_\mu\rho'_k x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \dots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2+\xi'\beta_2]\omega_\mu^{k_2} & \left[\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2\right]\omega_{\mu+1}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \dots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n+\xi'\beta_n]\omega_\mu^{k_n} & \left[\alpha_n+\frac{1}{\xi'}\beta_n\right]\omega_{\mu+1}^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}=\begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+2}\rho'_k(x-1)}[1] & \dots & e^{\omega_n\rho'_k(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \dots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+2}^{k_n} & \dots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

Формула для собственной функции y_{k_2}, соответствующей λ''_k, получается, если в (76) вместо ρ'_k *и* ξ' подставить $\rho''_л$ *и* ξ''.

Особенно просто выглядят эти формулы при *n=2*. Если например, областью *T* является первый квадрант ρ–плоскости, то $\omega_\mu=i; \quad \omega_{\mu+1}=-i$, и формула (76) в этом случае имеет вид

$$y_{k1}=(-i)^{k_2}e^{i\rho'_k x}\left\{\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta^2+O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}-(i)^{k_2}e^{-i\rho_k x}\left\{\alpha_2\xi'+\beta_2+O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Также приведем несколько примеров обобщения асимтотических формул.

а) Случай произвольного интервала. Этот случай сводится к предыдущему подстановкой $x=a+t(b-a), \quad 0\le t\le 1$. Соответственно этому в формулах (17) и (75)-(78) следует вместо x подставить $\frac{x-a}{b-a}$, а в формулах (44)-(47) для собственных значений вместо π подставить $\frac{\pi}{b-a}$.

б) Краевая задача $L(y)=\lambda\,\rho\,y$. Пусть функция $\rho(x)$ непрерывна и сохраняет знак в интервале [*a, b*]; не нарушая общности, можно считать, что $\rho(x)>0$. В противном случае можно заменить λ и ρ на $-\lambda$ и $-\rho$. Введем новую переменную *t* , полагая

$$t = \frac{1}{h}\int_a^x \sqrt[n]{\rho(\xi)}d\xi, \qquad (77)$$

где

$$h = \int_a^b \sqrt[n]{\rho(x)}dx. \qquad (78)$$

В переменной t краевая задача $Ly=\lambda\rho y$ запишется в виде $L_1y=\lambda y$, где L_1–оператор в интервале $0 \leq t \leq 1$, который получается переходом к переменной t и делением на $\rho(x)$. К этому оператору L_1 применимы формулы (17), (75), (76). Подставляя в них вместо t его выражение (77), получим соответствующие формулы для рассматриваемой краевой задачи. Формулы для собственных значений получаются при этом, если в (44)- (47) вместо π подставить $\dfrac{\pi}{\int_a^b \sqrt[n]{\rho(x)}dx}$.

Глава II. Разложение по собственным функциям.

§ 1 Задача обоснования метода Фурье.

Решение уравнений в частных производных по методу Фурье приводит к важной задаче; разложению заданной функции по собственным функциям дифференциальных операторов.

Пусть, например, требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u, \qquad a \le x \le b, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\ \Big|_{t=0} = f(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\ \Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2)$$

и краевым условиям

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}\alpha_{o\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{m-1}\beta_{o\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0, \qquad j = 1,2,\ldots n. \qquad (3)$$

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) в виде

$$u = y(x)(A\cos pt + B\sin pt). \qquad (4)$$

Подставляя в (1) и (3), получим, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = -p^2 y \qquad (5)$$

и краевым условиям

$$U_j(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{j\nu}y_a^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{j\nu}y_b^{(\nu)} = 0. \qquad (6)$$

Если, следовательно, $y \neq 0$, то y есть собственная функция краевой задачи (5), (6), соответствующая собственному значению $-p^2$.

Пусть

$$-p_1^2, -p_2^2, -p_3^2, \ldots$$

-все собственные значения этой задачи, а

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$$

-соответствующие собственные функции; при этом каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. тогда бесконечный ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t)$$

по крайней мере формально удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (3). Остается удовлетворить начальным условиям. Подстановка в первое начальное условие дает

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x); \qquad (7)$$

это последнее равенство представляет собой разложение заданной функции – в ряд по собственным функциям краевой задачи.

Таким образом, вопросы обоснования метода Фурье непосредственно приводят к следующей проблеме: *при каких условиях заданная функция f(x) разлагается в ряд по собственным функциям данной краевой задачи.*

Наиболее просто эта проблема решается в случае самосопряженной краевой задачи, т.е. в случае, когда выражение $l(y)$ и краевые условия $U_j(y)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$ порождают самосопряженный дифференциальный оператор.

Пусть L–самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями $U_j(y)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Не нарушая общности, можно считать, что $Ly=0$ лишь при $y=0$ что краевая задача

$$l(y)=0, \quad U_j(y)=0, \quad j=1, 2, \ldots, n \qquad (8)$$

имеет лишь тривиальное решение $y \equiv 0$. Действительно, в противном случае достаточно заменить $l(y)$ выражением $l(y)$-cy, где c–любое число, отличное от всех собственных значений оператора L. Такое число заведомо существует, ибо самосопряженный оператор имеет не более счетного множества собственных значений.

Но если краевая задача (8) имеет лишь тривиальные решения, то оператор L имеет функцию Грина $G(x, \xi)$, которая является эрмитовым ядром. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ из области определения оператора L; это означает, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n–го порядка включительно и удовлетворяет краевым условиям (6).
Положим

$$Lf=h,$$

тогда

$$f(x)=\int_a^b G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

т.е. функция $f(x)$ представляется «истокообразно» при помощи непрерывного ядра $G(x, \xi)$.

На основании теоремы Гильберта-Шмидта из теории интегральных уравнений функцию $f(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G(x, \xi)$. Но, как мы видели, ядро $G(x, \xi)$ и оператор L имеют одни и те же собственные функции. Тем самым доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Напомним, что область определения дифференциального оператора n–го порядка состоит из всех функций, которые имеют в данном интервале непрерывные производные до n–го порядка включительно и удовлетворяют краевым условиям, порождающим данный оператор. Следовательно, в предыдущей теореме речь идет именно о таких функциях.

§ 2 Разложение по собственным функциям дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями.

Оператор L не является самосопряженным. Поэтому мы применим теперь другой метод, основанный на аналитических свойствах функции Грина оператора $L–\lambda 1$ и на асимптотических формулах. При этом мы будем предполагать, что L- оператор, порожденный регулярными краевыми условиями; что $\lambda=0$ не является собственным значением оператора L, следовательно, оператор L имеет функцию Грина $G(x, \xi)$.

Рассмотрим в комплексной λ–плоскости последовательность окружностей Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, с общим центром в начале координат, обладающих следующими свойствами:

1^0 . *Радиус R_k окружности Γ_k неограниченно возрастает при $k\to\infty$.*

2^0. *Существует положительное число δ–такое, что прообразы ρ_k в $S_0 \cup S_1$ собственных значений оператора L при отображении $\lambda=-\rho^n$ находятся для достаточно больших k на расстоянии $\geq \delta$ от прообразов каждой из окружностей Γ_k.*

Рассмотрим интеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{G(x,s,\lambda)d\lambda}{\lambda}$; применяя к нему теорему о вычетах, получаем

$$I_k = G(x,s) + \sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{H_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}, \qquad (10)$$

где $H_\nu(x, s)$– вычет функции $G(x, s, \lambda)$ относительно ее полюса λ_ν , а m_k - число этих полюсов в круге Γ_k. Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} I_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{H_k(x,s)}{\lambda_\nu} \qquad (11)$$

и притом равномерно относительно x и s из интервала $[a,b]$. В силу (10) отсюда будет следовать, что имеет место разложение

$$G(x,s) = -\sum_{o=1}^{\infty}\frac{H_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}$$

в ряд, равномерно сходящийся относительно x и s из интервала $[a,b]$.

Действительно, из асимптотических формул для собственных значений вытекает, что круги Γ_k. можно выбрать таким образом, что

$$2 \le m_{k+1} - m_k \le 4.$$

Доказательство первого соотношения (11) основано на следующей лемме:

Л е м м а 1. *На окружностях Γ_k. функция $G(x, s, \lambda)$ удовлетворяет неравенству*

$$|G(x,s,\lambda)| \le \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}} \qquad (12)$$

где M- некоторая постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\lambda = -\rho^n$; тогда при надлежащем выборе $\arg\rho$ окружность Γ_k. перейдет в дугу γ_k окружности с центром в начале координат и с центральным углом $\frac{2\pi}{n}$, проходящую в двух соседних областях S_0, S_1 комплексной ρ–плоскости.

а) n н е ч е т н о; $n=2\mu-1$. Пусть числа $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ занумерованы так, что для $\rho \in S_0$

$$\Re(\rho\omega_1) \le \Re(\rho\omega_2) \le ... \le \Re(\rho\omega_n).$$

тогда при $\rho \in S_0$

$$\left.\begin{aligned} &\Re(\rho\omega_1) \le 0, ..., \Re(\rho\omega_{\mu-1}) \le 0, \\ &\Re(\rho\omega_{\mu+1}) \ge 0, ..., \Re(\rho\omega_n) \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Пусть γ_k' та часть дуги γ_k, которая находится в области S_0 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \le 0,$ а γ_k' та ее часть, которая также находится в области S_0 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \ge 0,$. Оценим функцию $G(x, s, \lambda)$ на дуге γ_k' . Обозначим через W_ν алгебраическое дополнение элемента $y_\nu^{(n-1)}$ в определителе

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-1)}(\xi) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$$

и положим

$$z_\nu(\xi) = \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)}. \qquad (14)$$

Тогда формула перепишется в виде

$$g(x,\xi) = \pm\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x) z_\nu(\xi). \qquad (15)$$

Согласно теореме при $\rho \in S_0$

$$y_j^{(\nu)}(\xi) = e^{\rho\omega_j \xi}\rho^\nu \left[\omega_j^\nu\right], \qquad j = 1,2,\dots,n; \qquad \nu = 0,1,2,\dots,n-1;$$

подставим эти выражения в (14) и сократим числитель и знаменатель на $\rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-2}, e^{\rho\omega_1 x}, e^{\rho\omega_2 x}, \dots, e^{\rho\omega_n x}$. Мы получим

$$z_\nu(\xi) = e^{-\rho\omega_\nu \xi}\frac{1}{\rho^{n1}}\left[\frac{\beta_\nu}{\beta}\right], \qquad (16)$$

где

$$\beta = \begin{vmatrix} \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \dots & \omega_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

а β_ν–алгебраическое дополнение элемента ω_ι^{m-1} в этом определителе. Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{m}\omega_\nu^j \frac{\beta_\nu}{\beta} = \begin{cases} 0 & при \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-2, \\ 1 & при \quad j = n-1. \end{cases} \qquad (17)$$

Система (17) имеет единственное решение; с другой стороны, она удовлетворяется при $\frac{\beta_\nu}{\beta} = -\frac{\omega_\nu}{n}$, ибо $\omega_\nu^n = -1$. Следовательно, (16) принимает вид

$$z_\nu(\xi) = e^{-\rho\omega_\nu \xi}\frac{1}{n\rho^{n-1}}\left[-\omega_\nu\right], \qquad \nu = 1, 2, \dots, n. \qquad (18)$$

Из формулы (15) следует, что

$$U_\nu(g) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} U_{\nu 0}(y_j) z_j(\xi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} U_{\nu 1}(y_j) z_j(\xi). \qquad (19)$$

Рассмотрим функцию *G(x, s, λ)* при $x \succ \xi$; тогда в формуле (15) следует взять знак «+». Умножим *1–й, 2-й, …, μ-й* столбец определителя *H(x, ξ, λ),* фигурирующего в числителе на $\frac{1}{2}z_1(\xi), \frac{1}{2}z_2(\xi),..., \frac{1}{2}z_\mu(\xi), \quad a \quad (\mu+1)-й, (\mu+2)-й,..., n-й$ столбец на $-\frac{1}{2}z_{\mu+1}(\xi), -\frac{1}{2}z_{\mu+2}(\xi),..., -\frac{1}{2}z_n(\xi),$ соответственно и прибавим к последнему столбцу. Тогда элементами последнего столбца будут

$$\sum_{j=1}^{\mu} y_j(x) z_j(\xi),$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} U_{\nu 1}(y_j) z_j(\xi) - \sum_{j=\mu+1}^{n} U_{\nu 0}(y_j) z_j(\xi), \qquad \nu = 1,2,...,n.$$

В силу формул (17) и (52) и формулы (18) эти элементы можно переписать в виде

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}} P_0 = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{\nu=1}^{\mu} e^{\rho\omega_\nu (x-\xi)} [\omega_\nu],$$

$$\frac{\rho^k \nu}{n\rho^{n-1}} P_\nu = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j (1-\xi)} \rho^{k_\nu} \left[-\beta_\nu \omega_j^{k_\nu+1} \right] + \sum_{j=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_j \xi} \rho^{k_\nu} \left[\alpha_\nu \omega_j^{k_\nu+1} \right] \right\}.$$

Кроме того, имеют место асимптотические формулы

$y = e^{\rho\omega_\nu x}[1], \qquad \nu = 1,2,...,n$

$$U_\nu(y_j) = \begin{cases} \rho^{k_\nu}\left[\alpha_\nu \omega_j^{k_\nu}\right] & при \quad j = 1,2,...,\mu-1, \\ \rho^{k_\nu}\left(\left[\alpha_\nu \omega_\mu^{k_\nu}\right] + e^{\rho\omega_\mu}\left[\beta_\nu \omega_\mu^{k_\nu}\right]\right) & при \quad j = \mu, \\ \rho^{k_\nu} e^{\rho\omega_j}\left[\beta_\nu \omega_j^{k_\nu}\right] & при \quad j = \mu+1, \mu+2,..., \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} \rho^{k_\nu} \prod_{j=\mu+1}^{n} e^{\rho\omega_j} \left([\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu} [\theta_1] \right).$$

Подставим эти выражения в формулу (34), в которой изменен указанным выше способом последний столбец в определителе *H(x, ξ, λ)*, и распределим множителе знаменателя $\Delta(\lambda)$ следующим образом. На ρ^{k_ν} разделим $(\nu+1)-ю$ строку, на $e^{\rho\omega_\nu}$ разделим *j-й* столбец на 1-последний столбец и на $[\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1] - \mu - й$ столбец. Тогда формула (34) примет вид

$$G(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x}[1] & \ldots & \dfrac{e^{\rho\omega_\mu x}[1]}{[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots & e^{\rho\omega_n(x-1)}[1] & P_0 \\ [\alpha_1\omega_1^{k_1}] & \ldots & \dfrac{\omega_\mu^{k_1}([\alpha_1]+\varepsilon^{\rho\omega_\mu}[\beta_1])}{[\theta_1]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots & [\beta_1\omega_n^{k_1}] & P_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\alpha_n\omega_1^{k_n}] & \ldots & \dfrac{\omega_\mu^{k_n}\left([\alpha_n]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right)}{[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots & [\beta_n\omega_n^{k_1}] & P_n \end{vmatrix}.$$

В силу условий (13) все компоненты в последнем определителе имеют на дуге γ_k' не положительную действительную часть; кроме того, знаменатель $[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]$ на дугах γ_k' ограничен снизу одним и тем же числом. Отсюда следует, что все элементы этого определителя ограничены на дугах γ_k', следовательно, и весь определитель ограничен на этих дугах.

Таким образом, на дугах γ_k'

$$|G(x,\xi,\lambda)|\le\frac{M}{|\rho|^{n-1}}, \qquad (20)$$

где M – некоторая константа.

§ 3 Случай кратного полюса функции Грина; *m*-кратная полнота.

Рассмотрим обобщенную задачу о собственных значениях

$$l(y)=0, \qquad (21)$$

$$U_\nu(y)=0, \qquad \nu=1, 2, \ldots, n; \qquad (22)$$

пусть

$$\lambda_1,\ \lambda_2,,\ \lambda_3, \ldots$$

-все собственные значения этой задачи. Эти собственные значения могут, вообще говоря, быть кратными нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, следовательно, кратными полюсами функции Грина. Пусть λ – одно из этих собственных значений, а

$$y, y_1, \ldots, y_{q-1}$$

-цепочка собственной и присоединенной функций, входящая в состав канонической системы, соответствующей этому собственному значению. Построим m систем функций

$$y^{(\nu,k)} = \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{\lambda t}\left(y_k + y_{k-1}\frac{t}{1!} + \ldots + y\frac{t^k}{k!}\right)\right]_{t=0}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

Каждая из таких систем

$$y^{(\nu,0)}, y^{(\nu,1)}, \ldots, y^{(\nu,q-1)}$$

называется *производной цепочкой*, отвечающей исходной цепочке $y, y_1, \ldots, y_{q-1}$.

Система всех собственных и присоединенных функций краевой задачи (23), (24) называется *m–кратно полной*, если всякую систему m функций n–го порядка включительно и удовлетворяет краевым условиям (61), можно представить как предел m равномерно сходящихся последовательностей конечных линейных комбинаций

$$f_\nu = \lim_{N\to\infty}\sum_{i,k} c_{Nk}^{(i)} y_i^{(\nu,k)}$$

с коэффициентами, не зависящими от ν.

Теорема. *Пусть*

$$l(y)=y^{(n)}+p_1(x,\lambda)y^{(n-1)}+\ldots+[p_n(x,\lambda)+\lambda^m]y,$$

где $p_k(x,\lambda)$ *многочлен относительно* λ *степени* $< \frac{km}{n}$, *и пусть краевые условия имеют вид*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} y_a^{(k-1)} = 0, \qquad j = 1,2,\dots, p;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} y_b^{(k-1)} = 0, \qquad j = p+1, p+2,\dots, p,$$

$$0 \prec p \prec n,$$

или

$$y_a^{(k)} = y_b^{(k)}, \qquad k = 0,1,2,\dots, n-1.$$

Тогда система собственных и присоединенных функций соответствующей краевой задачи m*– кратно полна*

III. Заключение

При интенсивном развитии науки и техники математические модели реального мира усложняются, и поэтому естественно для их анализа использовать асимптотические методы. Однака асимптотический анализ дифференциальных операторов имеет развитию теорию в основном для случая регулярных возмущений, когда возмущения носит подчиненный характер по отношению к возмущенному оператору. Поетому теория асимптотического анализа имеет большое значение как для развития фундаментальных исследований, так и для решения конкретных задач практики. Так например, прибольшых значения параметра вычисление интегралов и рядов – весьма трудоемкая работа даже для самых современных ЭВМ. Поэтому решающую роль играют асимптотические методы.

Наметилось два основных метода исследования асимптотики числа собственных значений. Первый метод-вариационный и восходит к Р. Куранту. В последние годы он был существенно развит М. Ш. Бирманом и его учениками. Второй метод принадлежит Т. Карлеману и связан с изучением резольвенты рассматриваемого оператора.

Метод Т. Карлемана все время «конкурирует» с вариационным. Каждый из них имеет свои преимущества. Главным преимущества вариационного метода в настоящее время является то, что он «нечувствителен» к наличию непрерывного спектра.

Для более глубокого понимания вопросов, изложенных в последующих параграфах работы были рассмотрены эти вопросы с точки зрения общей спектральной теории линейных самосопряженных операторов в пространстве Гильберта.

В данной работы изучена вопросы свидение операторного уравнения к интегро – дифференциальным уравнениям и асимптотические формулы, и точнение и нормировка этих формул и при этом доказаны соответствующие теоремы. Также изучены вопросы асимптотика собственных значении и собсвенных функций. Обощены асимптотические формулы.

Результаты данной дипломной работы можно использовать в качестве спецкурса или спец семинара для студентов старших курсов, а также научно-иследовательских работах в области математической физики, теоретической физики, астрофизики и космогонии.

Литература

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.*

1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.

2. *Глазман И. М., Скачек Б. Я.*

1. О дискретной части спектора лапласиана в предельно цилиндрических областях. – ДАН СССР, 1962, т. 147, № 4, с. 760–763.

3. *Дихаминджия Г. В.*

1. Спектральные свойства оператора, порожденного системой уравнений первого порядка. – Сообщ. АН ГССР, 1975, т. 79, № 3, с. 533–536.

4. Ильин В. А.

1. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа. – Успехи матем. наук, 1968, т. 23, № 2, с. 60–120.

5. *Ильин В. А., Филиппов А. Ф.*

1. О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области (фундаментальные системы функций с произвольной наперед заданной последовательностью фундаментальных чисел). – ДАН СССР, 1970, т. 191, № 2, с. 267–269.

6. *Левитан Б. М.*

1. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. – М. – Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов. – В сб.: Междунар. конгресс математиков в Ницке. 1970. – М.: Наука, 1972, с. 145–157.

7. *Плеснер А. И.*

1. Спектральная теория линейных операторов. – М.: Наука, 1965.

8. *Наймарк М. А.*

1. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

9. *Туловский В. Н.*

1. Асимптотическое распределение собственных значений для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. – ДАН СССР. 1970, т. 195, № 3, с. 570–573.

2. Об асимптотическом распределении собственных чисел вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, – Матеем. сб., 1971, т. 86, № 1, с. 76-89.

3. Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. – Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 2, с. 85–100.

4. Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. – ДАН СССР, 1972, т. 206, № 4, с. 827–830.

5. Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных уравнений. – Матем. сб., 1972 т. 89, № 2, с. 191–206.

10. М. С. Салохитдинов, А. К. Уринов *“Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар” 2007 Тошкент.*

11. Соломещ И. А.

1. О собственных числах некоторых вырождающихся эллиптических уравнений. – Матем. сб., 1961, т. 54, №3, с. 295–310.

2. Об асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с некоторыми вырождающимися на границе эллиптическими уравнениями. – ДАН СССР, 1962, т. 144, № 4, с. 727–729.

3. К асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с вырождающимися эллиптическими уравнениями. – Вестн. Ленинград ун-та, 1964, № 1, с. 163–166.

12. М. С. Салохитдинов *“Математика физика тенгламалари” 2002 Узбекистон.*

13. Х. Р. Лотанов, Ф. У. Носиров, Ш. И. Тожиев *“Дифференциал тенгламаларни сифат назарияси ва уни тадбиклари” Тош.- “Узбекистон” 2007.*

14. В. А. Шоимкулов, Т. Т. Туйчиев *“Математик анализдан мустакил ишлар” 2008 Узбекистон.*

15. Ж. И. Абдуллаев, Р. Н. Ганихужаев, М. Н. Шерматов, О. И. Эгамбердиев *“Функционал анализ” Тошкент-Самарканд 2009.*

16. www.googl.ru

17. www.lip.ru

18. www.lex.uz

19. www.ronest.uz

20. www.edunet.uz