

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳукукида
УДК. 517.956

Маҳмудова Дилдора Қахрамоновна

**ҚАТОРЛАР НАЗАРИЯСИНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ
ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИШГА ТАТБИҒИ**

5 А 460101 – математик таҳлил мутахассислиги бўйича магистр
академик даражасини олиш учун тақдим этилган

**МАГИСТРЛИК
ДИССЕРТАЦИЯСИ**

Илмий раҳбар:

**физика-математика
фанлари доктори,
профессор А.Қ.Ўринов**

Фарғона 2012 йил.

Мундарижа

Кириш

I боб. Асосий тушунчалар ва маълумотлар.....

1.1-§. Функционал кетма-кетлик ва функционал қаторлар. Уларнинг яқинлашиши ҳақидаги асосий маълумотлар.....

1.2-§. Фурье қаторлари.....

1.3-§. Дифференциал тенгламаларни ечимини қаторлар ёрдамида ечиш усули ҳақида асосий маълумотлар.....

II боб. Оддий дифференциал тенгламалар ечимини қаторлар ёрдамида топиш.....

2.1-§. Биринчи тартибли тенгламалар учун Коши теоремаси.....

2.2-§. Иккинчи тартибли чизиқли тенглама учун Коши масаласини ечиш..

III боб. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ечимини қаторлар ёрдамида топиш.....

3.1-§. Тор тебраниш тенгламаси учун аралаш масала ечимини қаторлар ёрдамида топиш.....

3.2-§. Бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала ечимини қаторлар ёрдамида топиш.....

3.3-§. Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи ечимини қаторлар ёрдамида топиш.....

IV . Хулоса.....

Фойдаланилган адабиётлар

Кириш

Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислом Каримов ўзининг “Ўзбекистон мустақилликка эришиш оstonасида” асарида қуйидаги фикрларни айтиб ўтган.

Ўзбекистон фани салмоқли куч-қувватга эга. Ҳозир республикамызда 185 та илмий тадқиқот муассасалари, конструкторлик бюрolari ва илмий ишлаб чиқариш бирлашмалари бор. Моддий ишлаб чиқариш тармоқларининг ўзидагина 500 дан кўпроқ завод конструкторлик бюрolari, лабораториялари, механизациялаш ва автоматлаштириш бўлимлари ва шу кабилар ишламоқда.

Шу катта имкониятдан тўғри фойдаланиш, кучларни самарали тарзда жой-жойига қўйиш, фундаментал тадқиқотлар билан амалий тадқиқотлар ўртасида енг мақбул мутаносибини топиш учун нималар қилиш керак? Бу енг аввало республика илм-фанининг қарори-академиямызга боғлиқдир [1].

Математика соҳасидаги ва фаннинг бошқа тармоқларидаги тадқиқотлар ва ечимлар хаммага маълум...

Олимларимиз ижодқорлик билан, аниқ мақсадни кўзлаб ишлаётганликларига оид бошқа мисолларни хам айтиб ўтиш мумкин бўлур эди, албатта. Аммо бугунги реал воқелик хотиржам бўлиб қолиш учун асос бермайди.

Хўш, бугун биз илм-фандан нималарни кутияпмыз, бизнинг фикримизча, унинг куч-ғайратларини қайси йўналишларда жамлаш керак бўлади?

Рўйирост айтадиган бўлсак, республиканинг фундаментал фани ҳали фан-техника тараққиётининг қудратли двигателига айланишига анча бор, бу фан ишлаб чиқаришда инқилобий ўзгаришлар ясайдиган ечимларни амалга оширгани йўк.

Шуни таъкидлаш кифояки, жорий этилган ечимларнинг ярми қўлланмалар ва тавсияларни, факат учдан бир қисми эса янги технологияларни ташкил қилади...

Ривожланган мамлакатларнинг тажрибаси фан учун ҳеч нарсани аямаётган мамлакат гуллаб-яшнаётганлигини ва бундай давлат хамма яхши

нарсаларни - одамларнинг куч-ғайратларини ҳам, моддий-техника ресурсларини ҳам ўзида жамлаётганлигини яққол кўрсатмоқда.

Фанни малакали кадрлар билан таъминлаш, ходимларнинг профессионал билимдонлиги даражасини ошириш, уларнинг қобилиятларини рўёбга чиқариш учун барча шароитларни яратиш илмий жараёни жадаллаштиришнинг асосий омилидир...

Яна шуни ҳам айтиш керакки, фан соҳасида республика ҳозир ўзини ўзи таъминлай олмайди ва бундай бўлиши мумкин ҳам эмас. Фақат бошқа минтақаларнинг, бошқа мамлакатларнинг олимлари билан ўзларига наф келтирадиган хилма-хил алоқалар ҳозирги талаблар даражасида бўлишга имкон беради.

Фан соҳасидаги кадрларни жадал кўпайтириш ва ёшартириш учун, Ўзбекистан интеллектуал имкониятларини кескин даражада ошириш учун республика раҳбарияти ҳозир зарур маблағларни, жумладан, валюта маблағларини ажратишга, тегишли ташкилий масалаларни ҳал қилишга тайёр.....

Юқоридаги фикрларга эътибор қаратадиган бўлсак, мамлакатимизни ривожланган давлатлар қаторидан ўз ўрнини эгалашига эришишининг асосий омилларидан бири юқори малакали кадрлар тайёрлашдир.

1997 йил 29 август Ўзбекистон Республикаси Олий мажлисида «Таълим тўғрисида» ги қонуннинг ва «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» нинг қабул қилиниши муқаддам заминимизда яшаётган ҳар бир инсон ва унинг бахту-саодати, фарзандини фазлу-камолини кўриш учун улкан имкониятлар яратишга асос бўлди. Мамлакатимизда таълим тизимидаги олиб борилаётган ислохотларнинг мазмуни ва амалга ошириш муддатлари ушбу қонунда ўз аксини топган.

«Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» да таъкидланганидек, «Кадрлар тайёрлаш тизими ва мазмунини мамлакатнинг ижтимоий ва иқтисодий таракқиёти истикболларидан, жамият эҳтиёжларидан, фан, маданият, техника

ва технологиянинг замонавий ютуқларидан келиб чиккан ҳолда қайта куриш лозим»¹.

Президентимиз Ислон Каримов ташаббуси билан ишлаб чиқилган “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”нинг ҳаётга тадбиқ этилиши туфайли узлуксиз таълим тизими мунтазам янгиланаётгани ва такомиллашаётгани, таълим муассасаларининг замонавий моддий-техник ва ўқув базасини шакллантириш ва мустаҳкамлаш, таълим-тарбия жараёнига янги стандартлар, илгор педагогик ва ахборот технологияларини жорий этиш борасида кенг кўламли ишлар амалга оширилаётир.

Президентимиз "Юксак маънавият - енгилмас куч" асарида таъкидлаганидек "Ватанимизнинг келажаги, халқимизнинг эртанги куни, мамлакатимизнинг жаҳон ҳамжамиятидаги обрў — эътибори, авваламбор, фарзандларимизнинг униб - ўсиб, улғайиб, қандай инсон бўлиб ҳаётга кириб боришига боғлиқдир. Биз бундай ҳақиқатни ҳеч қачон унутмаслигимиз керак".²

Ўзбекистан мустақилликка эришган кундан бошлаб ўтган қисқа вақт ичида Ўзбек халқи сиёсий - ижтимоий, иқтисодий ва маданий соҳаларда катта ютуқларга эришди. Ўз тарихига янгича тафаккур асосида ёндошиш, улуғ аجدодлар қолдирган бой маданий, маънавий меросни ўрганиш шарафига муяссар бўлди, миллий ғурури қайта тикланди. Республикада илм-фан, жумладан, математика фани тараққиёт босқичига кўтарилмокда. Ўтмишдаги риёзиёт (математика) даҳоларининг шуҳратини тиклаш, уларнинг ғояларини халқ ҳаётига тадбиқ этишдек улуғ ишлар амалга оширилмокда.

Мазкур битирув малакавий иши математиканинг узоқ тарихга эга бўлган бир йўналишларидан бири бўлган. Дифференциал тенгламалар назариясининг баъзи масалаларини ўрганишга бағишланган. У уч боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

¹ Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”, Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. Тошкент, Шарқ, 1997 йил.

² И.А.Каримов – Юксак маънавият – енгилмас куч. Тошкент, “Маънавият” 2008 йил.

Мавзунинг долзарблиги.

Маълумки, дифференциал тенгламалар назарияси табиатда содир бўладиган жараёнлар физикаси ва сиртлар назарияси билан таркибан боғлангандир. Шунинг учун дифференциал тенглама ечимини топиш аниқ бир физик ёки геометрик масаланинг ечимини топишга тенг кучлидир. Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ечими нафақат тенгламада иштирок этаётган тартибли ҳосиллага балки ундан юқори тартибли ҳосиллага ҳам эга бўлиши мумкин. Агар ечим ихтиёрий тартибли ҳосиллага эга бўлса, уни қаралаётган нукта атрофида даражали қатор кўринишида ёзиш мумкин бўлади. Бундай вақтда тенглама ечимини даражали қатор кўринишида қидириш мумкин.

Ишнинг мақсади.

Ушбу магистрлик диссертациясида қаторлар назариясининг баъзи хоссаларини ўрганишга ҳам бу хоссаларни оддий дифференциал тенгламалар учун бошланғич масалаларни ва эллиптик, параболик ва гиперболик типдаги тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ечишга татбиқ қилишга бағишланган.

Текшириш усуллари.

Қўйилган масалаларни ечишда аниқмас коэффициентлар ва ўзгарувчиларни ажратиш (Фурье) усулидан фойдаланилган.

Илмий янгилиги, назарий ва амалий аҳамияти.

Биринчи ва иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласининг голоморф ечимларини топиш усули кўрсатилган. Тор тебраниш тенгламаси учун аралаш масала, иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала, Лаплас тенгламаси учун доирада ва тўғри тўртбурчакда Дирихле масалаларининг ечимлари қаторлар назарияси ёрдамида ечилган. Диссертацияда олинган илмий натижалар назарий аҳамиятга эга бўлиб, ундан дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантиришда ва олий ўқув юртларида танлов фанлари ташкил қилишда фойдаланиш мумкин.

Ишнинг муҳокамаси.

Диссертацияда олинган илмий натижалар хар хафтанинг пайшанба куни профессор А.Қ.Ўринов раҳбарлигидаги «Дифференциал тенгламалар ва турдош математик соҳаларнинг долзарб муаммолари» номли илмий семинарда, 2011 йил 8-9 ноябрь кунлари АДУ да ўтказилган "Математика фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари" номли Республика илмий-амалий анжуманида ҳамда Фаргона давлат университетида ўтказилган "Илм-заковатимиз сенга, она-Ватан!" илмий-амалий анжуманида маъруза килинган.

Чоп этилган илмий ишлар.

Диссертация мавзуси бўйича 2 та мақола чоп этилган.

Диссертация тузилиши ва хажми.

Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, 85 бетдан иборат. Унда 20 та адабиётларга ҳавола этилган.

Диссертациянинг мазмуни.

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги асослаб берилган. Биринчи бобда диссертация мавзусига оид асосий тушунчалар ва маълумотлар келтирилган бўлиб, уч параграфдан иборат. 1.1-§ да функционал кетма-кетликлар ва қаторлар, уларнинг яқинлашишига оид материаллар, 1.2-§ да эса Фурье қаторларига оид материаллар келтирилган. 1.3-§ да дифференциал тенгламалар ечимини қаторлар ёрдамида ечиш усули ҳақида асосий маълумотлар берилган.

Иккинчи боб оддий дифференциал тенгламалар ечимини топишга бағишланган бўлиб, 2.1-§ да 1- тартибли тенгламалар, 2.2-§ да эса юқори тартибли тенгламалар ўрганилган.

Учинчи боб уч параграфдан иборат бўлиб, унда тор тебраниш тенгламаси учун аралаш масала, иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала, Лаплас тенгламаси учун доирада ва тўғри тўртбурчакда Дирихле масаласи қаторлар назарияси ёрдамида ечилган.

I БОБ

Асосий тушунчалар ва маълумотлар

1.1-§. Функционал кетма-кетлик ва функционал қаторлар.

Уларнинг яқинлашиши ҳақидаги асосий маълумотлар.

Ушбу бобда функционал кетма-кетлик ва қаторлар ҳақидаги бошланғич тушунчалар, уларнинг яқинлашиши ҳақидаги таъриф ва теоремалар, функционал кетма-кетлик ва қаторларнинг текис яқинлашиш шартлари, Коши теоремаси, Вейерштрасс аломатлари баён қилинган.

Бизга X соҳада аниқланган ва битта ўзгарувчи x нинг функцияларидан иборат бўлган

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1.1)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. (1.1) кетма-кетлик функционал кетма-кетлик деб аталади ва $\{f_n(x)\}$ кўринишда белгиланади. $f_n(x)$ функция шу кетма-кетликнинг умумий ҳади дейилади. (1.1) кетма-кетлик ҳадларининг аниқланиш соҳаси, умуман олганда, турлича бўлиши мумкин. Биз X сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини оламиз.

X тўпланда x_0 нуқтани олиб, (1.1) кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ҳадини шу нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз, натижада

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots \quad (1.2)$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. (1.2) сонлар кетма-кетлигини яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилигини қандай аниқлаш ҳақида биз маълумотга эгамиз.

1-таъриф. Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, (1.1) функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада

яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади; x_0 нукта эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуктаси дейилади. (1.1) функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нукталаридан иборат тўплам $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (ёки тўплами) деб аталади.

(1.1) кетма-кетлик X соҳанинг ҳар бир x_0 нуктасида чекли лимитга эга бўлсин; бу лимит x нинг қиймати билан тўла аниқлангани учун у x нинг X соҳада аниқланган функцияси бўлади:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad x \in X \quad (1.3)$$

$f(x)$ функция (1.1) кетма-кетликнинг лимит функцияси деб аталади.

Мисол.

$$\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{4+x^2}, \frac{1}{9+x^2}, \dots, \frac{1}{n^2+x^2}, \dots$$

функционал кетма-кетлик $X = (-\infty; +\infty)$ берилган. Унинг умумий ҳади

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}. \text{ Бу функционал кетма-кетлик } \forall x \in R \text{ да яқинлашувчи ва}$$

унинг лимит функцияси 0 га тенг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = 0.$$

Бирор X тўпламда

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (1.4)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

2-таъриф.

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1.5)$$

ифода функционал қатор деб аталади ва у $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ кўринишда белгиланади.

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ функциялар (1.5) функционал қаторнинг ҳадлари, $u_n(x)$ эса унинг умумий ҳади деб аталади.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор ҳадларининг берилиш соҳалари умуман айтганда, турлича бўлади. Биз эса X тўплам сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини оламиз.

$x_0 \in X$ нуқтани олиб, (1.5) функционал қаторнинг ҳар бир ҳадини шу нуқтадаги қийматини топамиз. Натижада

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (1.6)$$

сонли қатор ҳосил бўлади.

3-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи)

бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи)

деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш)

нуқтаси дейилади. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш

(узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам бу функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси дейилади.

Бизга $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, M унинг яқинлашиш соҳаси бўлсин.

$\forall x_0 \in M$ учун унга мос $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси эса S_0 дейлик.

Агар ҳар бир $x \in M$ учун $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг йиғиндисини мос қўйсак,

$S(x)$ функцияга эга бўламиз. $S(x)$ функцияни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг

йиғиндиси деб атаймиз. Демак, $x \in M$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1.7)$$

Сонли қатордаги каби

$$\left. \begin{aligned} S_1(x) &= u_1(x), \\ S_2(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ S_n(x) &= u_1(x) + \dots + u_n(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

йиғиндилар функционал қаторнинг хусусий йиғиндилари деб аталади. (1.8)
хусусий йиғиндилардан

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (1.9)$$

функционал кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

4-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуктада яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуктада яқинлашувчи (узоқлашувчи) деб аталади. $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси тегишли функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси деб аталади.

$\{S_n(x)\}$ нинг лимит функцияси $S(x)$ эса $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг

йиғиндиси деб аталади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x). \quad (1.10)$$

Мисоллар. 1) $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$ функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳадлари махражи $q = x$ бўлган геометрик прогрессия ҳадларидан иборат. Маълумки, $|q| < 1$ да геометрик прогрессия яқинлашувчи, $|q| \geq 1$ да узоқлашувчи бўлади. Шунинг учун берилган қатор x нинг $|x| < 1$ қийматларида яқинлашувчи бўлади. Яқинлашиш соҳаси $(-1; 1)$ дан иборат. Қатор йиғиндиси $\forall x \in (-1, 1)$ учун

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{1}{1-x}$$

бўлади.

$$2) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \dots \text{ функционал қаторни қарайлик. } |x| \leq 1$$

да бу қатор узоқлашувчи бўлади, чунки унинг умумий ҳади нолга интилмайди. $|x| > 1$ да бу қаторнинг ҳадлари

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} + \dots$$

қаторининг мос ҳадлари билан

$$\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$$

тенгсизликни қаноатлантиради (таққослаш теоремаси шартини бажаради).

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} + \dots$$

қатор $q = \frac{1}{x^2} < 1$ бўлган геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган бўлиб,

$|x| > 1$ да яқинлашувчи. Шунинг учун берилган қатор ҳам яқинлашувчи.

Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

тўпладан иборат.

Функционал кетма-кетлик ва қаторнинг текис яқинлашувчилиги.

Бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, M - унинг яқинлашиши соҳаси бўлсин, $f(x)$ эса унинг лимит функцияси бўлсин.

Демак, ҳар бир $x_0 \in M$ нуктада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \quad (1.11)$$

бўлади. Бу, кетма-кетликнинг лимити таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.12)$$

ўринли бўлишини кўрсатади.

Бундаги n_0 сон ε га ва x_0 нуктага боғлиқ бўлади:

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x_0).$$

М тўпламдаги барча нукталар учун умумий бўлган n_0 натурал сонни топиш мумкинми деган савол туғилади. Қуйидаги мисоллардан кўриш мумкинки, баъзи функционал кетма-кетликлар учун бундай n_0 натурал сон топилади, баъзилари учун эса топилмайди.

Мисоллар. 1) $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}, \quad M = (-\infty; +\infty).$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0.$$

Демак, $f(x) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ дейилса, барча $n > n_0$

ва $\forall x \in M$ да

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Бу ҳолда n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган x нуктага боғлиқ эмас.

2) $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\}, \quad M = [0,1].$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x.$$

$\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) ни олиб, $n_0 = \left\lceil (1+x_0) \left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$ десак, $\forall n > n_0$ ва

$x \in [0,1]$ нукта учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{nx}{1+n+x} - x_0 \right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} \leq \frac{x_0(1+x_0)}{1+n_0+x_0} < \varepsilon$$

бўлади. Бу ерда n_0 сон ε га ва x_0 нуктага боғлиқ.

3) $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}, \quad M = [0,1].$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Бундан, таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon x} \right\rceil \quad (x \neq 0)$$

дейилса, барча $n > n_0$ да

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} \leq \frac{n}{(n_0+1)x} < \varepsilon \quad (1.13)$$

бўлади, $x=0$ да эса $\forall n$ учун $f_n(0)=0$ бўлади. Аммо, масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ да

$\forall n \in N$ ва $x = \frac{1}{n}$ нукта учун

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

Демак, барча x ($0 \leq x \leq 1$) нукталар учун умумий бўлган ва (1.13) тенгсизлик бажариладиган n_0 натурал сон топилмайди.

Таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\exists n_0 \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in M$ учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпلامда лимит функцияси $f(x)$ га текис яқинлашади деб аталади, акс ҳолда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик M тўпلامда $f(x)$ га нотекис яқинлашади деб аталади.

$\{f_n(x)\}$ нинг $f(x)$ га текис яқинлашиши

$$f_n(x) = f(x) \quad (x \in M)$$

кўринишда белгиланади.

Теорема. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпلامда $f(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ бўлсин. У ҳолда, таърифга кўра $\forall \varepsilon > 0$ да $\exists n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ ва барча $x \in M$ нуқталар учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўлади. Бунда $\forall n > n_0$ учун

$$M_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (1.14)$$

бўлиб, бундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

келиб чиқади.

Етарлилиги. (1.14) муносабат ўринли бўлсин. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади.

Агар $|f_n(x) - f(x)| = \sup |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in M)$ эканлигини эътиборга олсак, $\forall x \in M$ учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўлади.

Таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\exists n_0 \in N$ сон мавжуд бўлсаки, $n > n_0$, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X \quad (X \subset R)$ нуқталар учун

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1.15)$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма-кетлик деб аталади.

Коши теоремаси. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарлидир.

$M \quad (M \subset R)$ тўпламда бирор $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган

бўлсин ва у M да яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $S(x)$ га тенг бўлсин.

Таъриф. Агар M тўпламда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ нинг хусусий йиғиндиларидан тузилган $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашади дейилади.

Теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг M да текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{S_n(x)\}$ нинг M да фундаментал бўлиши зарур ва етарлидир.

Теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиш шарти. Бирор

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1.16)$$

кетма-кетлик берилган бўлса, бу кетма-кетлик қийматларини қабул этувчи x_n ўзгарувчи учун чекли лимитнинг мавжудлиги ҳақидаги умумий белги, ушбу теорема орқали ифодаланган эди:

Теорема. x_n ўзгарувчи чекли лимитга эга бўлиши учун ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер мавжуд бўлиши керакки, бунда $n > N$ ва $n' > N$ бўлганда,

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \quad (1.17)$$

тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу теорема Больцано (1817) ва Коши (1821) ларга тегишли бўлганлигидан Больцано-Коши теоремаси дейилади, кўпинча бу теоремани яқинлашиш принципи деб ҳам аташади.

Бу теоремадан кўриниб турибдики, номерлари ўсиши билан ўзгарувчиларнинг қийматлари ўзаро чексиз яқинлашади.

Яқинлашиш принциpidан фойдаланиб, X соҳада берилган

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиш шартини келтиришимиз мумкин.

Коши критерийси. Бизга X соҳада

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1.18)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиш шарти қуйидаги теорема билан ифодаланади:

Теорема. (1.18) функционал кетма-кетлик 1) лимит функцияга эга бўлиши ва 2) бу лимит функцияга X соҳада x га боғлиқ бўлмаган шундай номер N мавжуд бўлиб, $n > N$ бўлганда ва исталган $m = 1, 2, \dots$ да X дан олинган ҳамма x лар учун бир вақтнинг ўзида

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (1.19)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот.Зарурлиги. Агар (1.17) кетма-кетлик лимит функция $f(x)$ га эга бўлиб, унга X соҳада текис яқинлашса, у ҳолда берилган $\varepsilon > 0$ бўйича x га боғлиқ бўлмаган шундай номер N топиладики, $n > N$ бўлганда ҳамма x лар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

бўлади. Шунга ўхшаш

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Бу иккита тенгсизликдан (1.19) келиб чиқади.

Етарлилиги. Теоремада кўрсатилган шарт бажарилган бўлсин. Бу ҳолда X даги x нинг қайси бир қиймати тайинланмасин, бу қийматда (1.18) кетма-кетлик сонлар кетма-кетлигига айланиб, унинг учун Больцано-Коши теоремасининг шартлари бажарилади. Демак, бу кетма-кетлик учун лимит функция $f(x)$ нинг мавжудлиги исботланади.

Энди ихтиёрий $n > N$ ва X дан x олиб (1.19) тенгсизликдаги m чексиз ўсиб борсин дейлик (n ва x ларни ўзгармас деб ҳисоблаймиз). Лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Бу билан $f_n(x)$ нинг $f(x)$ га текис интилиши исботланади.

Функционал қаторнинг текис яқинлашиш шarti. Юқорида исботланган функциялар кетма-кетлигини текис яқинлашаш шартини функционал қаторга мослаб қуйидагича ифодалаш мумкин.

Теорема.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1.20)$$

қатор X соҳада текис яқинлашиши учун, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун x га боғлиқ бўлмаган шундай N номер мавжуд бўлиб, $n > N$ бўлганда ва исталган $m = 1, 2, 3, \dots$ да X нинг ҳамма x лари учун бир вақтда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad (1.21)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Амалда бу шартдан фойдаланиб конкрет кетма-кетликлар ёки қаторларнинг текис яқинлашишини текшириш анча қийинчиликлар келтиради. Шунинг учун кўпинча қулайроқ бўлган аломатлардан фойланилади.

Вейерштрасс аломати. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари

X соҳада

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.22)$$

тенгсизликни қаноатлантириб, C_n лар бирор яқинлашувчи сонли қатор $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ нинг ҳадлари бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X соҳада текис яқинлашади.

Ҳақиқатан ҳам, (1.22) дан X соҳанинг ҳамма x лари учун бир вақтда ўринли бўлган қуйидаги

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+m}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Сонли қатор $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ га яқинлашиши принципини

татбиқ қилсак, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists N$ топиладики, $n > N$ бўлганда

$$C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+m} < \varepsilon$$

бўлади, яъни юқоридаги тенгсизликнинг ўнг томони ва, демак, ҳамма x лар учун бир йўла юқоридаги тенгсизликнинг чап томони ҳам ε дан кичик бўлади.

Бундан эса текис яқинлашиш шартига кўра Вейерштрасс аломатининг исботи келиб чиқади.

Мисоллар. 1) Умумий ҳади $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлган

функционал кетма-кетликни текис яқинлашишини текширамыз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0.$$

Бундан кўринадики, берилган функционал кетма-кетлик x нинг ихтиёрий қийматида ўзининг лимит функцияси $f(x)$ га барча $x \in (-\infty, +\infty)$ да яқинлашади.

Энди бу кетма-кетлик текис яқинлашишини текширайлик. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N топилсаки, барча $n > N$ учун

$|f_n(x) - f(x)|$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ функциялар кетма-кетлиги $[a, b]$ да ўзининг лимит функцияси $f(x)$ га текис яқинлашади. Бу ерда лимит функция $f(x) = 0$ ва кетма-кетликнинг ҳадлари дифференциалланувчи функциялар бўлганлигидан $f_n(x)$ ни аввал экстремумга текшираемиз:

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Бундан $x_1 = \frac{1}{n}$ ва $x_2 = -\frac{1}{n}$. Бу ҳолда $x = \frac{1}{n}$ да $f_n(x)$ функция максимумга эга бўлиб,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

бўлади. Агар $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ε сон олсак, n қанча катта бўлмасин ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Бундан кўринадики, берилган функционал кетма-кетлик барча $x \in (-\infty, +\infty)$ да нотекис яқинлашади.

Қуйида биз текис яқинлашиш учун етарли бўлган Дирихле-Абель шартларини ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v(x) \tag{1.23}$$

функционал қатор берилган бўлсин. Агар қуйидаги икки шарт бажарилса, яъни 1) $\{v_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда ўсмайдиган ва шу тўпламда нолга текис яқинлашувчи бўлса; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M

тўпдамда текис чегараланган хусусий йиғиндилар кетма-кетлигига эга бўлса, у ҳолда (1.23) қатор M тўпдамда текис яқинлашувчи бўлади.

Бу теоремани исботи сонли қаторларни яқинлашиш белгиларини исботи каби бажарилади.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ қаторнинг текис яқинлашишини кўрсатайлик. Бунинг учун Дирихле-Абель белгисидан фойдаланамиз. Бу ерда Дирихле-Абель белгисининг 1-шарти бажарилади, яъни $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$ кетма-кетлик ўсмайди ва нолга текис интилади.

Энди 2-шартни бажарилишини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x$$

айниятга k ни 1дан n гача бўлган йиғинди деб қараймиз ва

$$2 \sin \frac{x}{2} S_n(x) = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$S_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

бўлади. Барча n лар учун

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

бўлиб, бу тенгсизлик $\{S_n(x)\}$ хусусий йиғиндилар кетма-кетлигини $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталарни ўз ичига олмаган барча сегментларда текис чегараланганлигини билдиради. Бундан Дирихле-Абель белгисининг 2-шарти ҳам бажарилиши ва берилган қаторнинг $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқталарни ўз ичига олмаган барча сегментларда текис яқинлашиши келиб чиқади.

$$\frac{\sin x}{5} + \frac{\sin 2x}{5^2} + \dots + \frac{\sin nx}{5^n} + \dots$$

қаторни бутун сон ўқида текис яқинлашишини кўрсатайлик.

Бунинг учун Вейерштрасс аломатидан фойдаланамиз. Ихтиёрий x учун

$$\left| \frac{\sin nx}{5^n} \right| = \frac{|\sin nx|}{5^n} \leq \frac{1}{5^n}$$

тенгсизлик бажарилади. Умумий ҳади $C_n = \frac{1}{5^n}$ бўлган сонли қатор

яқинлашувчи, чунки бу қатор маҳражи $q = \frac{1}{5}$ бўлган геометрик прогрессия

ҳадларидан тузилган. Шу сабабли Вейерштрасс аломатига кўра берилган қатор бутун сон ўқида текис яқинлашади.³

1.2-§. Фурье қаторлари.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган жуфт функция бўлсин. У шу $[-\pi, \pi]$ ораликда интегралланувчи бўлсин. Бу ҳолда $f(x) \cos nx$ жуфт функция, $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) эса тоқ функция бўлади ва улар $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad (1.24)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

³ Т.Азларов, Ҳ.Мансуров – “Математик анализ” 2-қисм, Тошкент “Ўқитувчи”, 1989 йил.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] = \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] = \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] = 0$$

Демак, жуфт $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.25)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \approx T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган тоқ функция бўлсин ва у шу $[-\pi, \pi]$ ораликда интегралланувчи бўлсин. Бу ҳолда $f(x) \cos(nx)$ тоқ функция, $f(x) \sin(nx)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) эса жуфт функция бўлади. (1.24) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] = \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] = \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Демак, тоқ $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.26)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \approx T(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

бўлади.

Мисол. 1. $f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ функциянинг Фурье қатори топилсин.
(1.25) формуладан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left[\left(-x \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянинг Фурье қатори ушбу

$$x \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

кўринишда бўлади.

2. Ушбу

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

тоқ функциянинг Фурье қатори топилсин.

(1.26) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$b_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, $f(x) = x$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$x \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

$[-l, l]$ ораликда берилган функциянинг Фурье қатори. $f(x)$ функция $[-l, l]$ ($l > 0$) да берилган ва шу ораликда интегралланувчи бўлсин.

Ушбу

$$t = \frac{\pi}{l} x \quad (1.27)$$

алмаштириш $[-l, l]$ ораликни $[-\pi, \pi]$ ораликка ўтказди. Агар

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t)$$

дейилса, $\varphi(t)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу ораликда интегралланувчи бўлишини кўриш мумкин. Бу $\varphi(t)$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$\varphi(t) \approx T(\varphi; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Юқоридаги (1.27) тенгликни эътиборга олсак, унда

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \right)$$

бўлиб, унинг коэффициентлари эса

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) \cos n \frac{\pi}{l} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin n \frac{\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлади.

Натижада

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1.28)$$

га эга бўламиз, бунда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.29)$$

(1.28) нинг ўнг томонидаги тригонометрик қаторни $[-l, l]$ да берилган $f(x)$ нинг Фурье қатори дейилади, (1.29) Фурье коэффициентлари дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

функциянинг Фурье қатори топилсин.

(1.29) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз (бунда $l = 1$);

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1}, \\ a_n &= \int_{-1}^1 e^x \cos n\pi x dx = \frac{n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x}{1 + n^2 \pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{1}{1 + n^2 \pi^2} (e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi) = (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{1 + n^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 e^x \sin n\pi x dx = \frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{1 + n^2 \pi^2} e^x \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{1 + n^2 \pi^2} (e \cdot n\pi \cos n\pi + e^{-1} n\pi \cos n\pi) = \\ &= \frac{n\pi \cos n\pi}{1 + n^2 \pi^2} (e^{-1} - e) = \frac{n\pi (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} (e^{-1} - e) = (-1)^{n+1} \frac{e - e^{-1}}{1 + n^2 \pi^2} n\pi \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Демак, $f(x) = e^x$ функциянинг $(-1 \leq x \leq 1)$ Фурье қатори ушбу

$$e^x \approx \frac{e - e^{-1}}{2} + (e - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{1 + n^2 \pi^2} n\pi \cdot \sin n\pi x \right]$$

кўринишда бўлади.

Леммалар. Қуйида келтирилган леммалар Фурье қаторлари назариясида муҳим роль ўйнайди.

1-лемма. $[a, b]$ ораликда берилган ва интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx = 0, \quad (1.30)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos pxdx = 0. \quad (1.31)$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ ораликнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

бўлинишни олайлик. Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^b \varphi(x) \sin pxdx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin pxdx \quad (1.32)$$

бўлади. $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак,

$$\inf \{\varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

мавжуд. Уни m_k билан белгилаймиз:

$$m_k = \inf \{\varphi(x); x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Энди (1.30) интегрални

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) \sin pxdx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin pxdx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} m_k \sin pxdx = S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

кўринишда ёзиб, сўнгра ҳар бир

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k) \sin(px) dx, \quad ,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin pxdx$$

кўшилувчини баҳолаймиз.

Агар ω_k $\varphi(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) даги тебраниши бўлса, S_1 учун ушбу

$$|S_1| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \quad (1.34)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.35)$$

бўлади. (1.33) ва (1.34) муносабатлардан

$$|S_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.36)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin pxdx$ йиғиндини баҳолаймиз. Бунда

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin pxdx \right| = \left| \frac{\cos px_k - \cos px_{k+1}}{p} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Демак, $|S_2| \leq \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$ бўлади. p ни етарли катта қилиб олиш ҳисобига

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.37)$$

бўлади. Натижада (1.33), (1.36 ва (1.37) муносабатлардан етарли катта p лар

учун $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx \right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx = 0.$$

(1.31) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Эслатма. Леммадаги

$$I(p) = \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx, \quad I_1(p) = \int_a^b \varphi(x) \cos pxdx$$

интеграллар, параметрга боғлиқ интеграллар.

Юқоридаги лемма чегараланмаган функциянинг хосмас интегралли учун ҳам умумлаштирилиши мумкин.

$\varphi(x)$ функция $[a, b)$ ярим интерсалда берилган, b нукта шу функциянинг махсус нуктаси бўлсин.

2-лемма. $[a, b)$ да абсолют интегралланувчи ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin pxdx = 0, \quad (1.38)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos pxdx = 0$$

бўлади.

Исбот. Ихтиёрий η ($0 < \eta < b - a$) олиб,

$$\int_a^b \varphi(x) \sin pxdx$$

интегрални қуйидагича ёзиб

$$\int_a^b \varphi(x) \sin pxdx = \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin pxdx + \int_{b-\eta}^b \varphi(x) \sin pxdx \quad (1.39)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

Қаралаётган $\varphi(x)$ функция $[a, b - \eta)$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли юқорида келтирилган 1-леммага асосан

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin pxdx = 0$$

бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $p_0 > 0$ топиладики, барча $p > p_0$ учун

$$\left| \int_a^{b-\eta} \varphi(x) \sin pxdx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.40)$$

бўлади.

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b)$ да абсолют интегралланувчи. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $0 < \eta < \delta$ бўлганда

$\int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Демак,

$$\left| \int_{b-\eta}^b \varphi(x) \sin p x dx \right| \leq \int_{b-\eta}^b |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.41)$$

Юқоридаги (1.39), (1.40) ва (1.41) муносабатлардан етарли катта p лар учун

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin p x dx \right| < \varepsilon \quad \text{бўлиши келиб чиқади. Демак,} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin p x dx = 0. \quad (1.38)$$

муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Натижа. $[-\pi, \pi)$ ораликда бўлакли узлуксиз ёки шу ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Дирихле интегралли. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги, бу қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити дегани. Шунинг учун қатор қисмий йиғиндисини қулай кўринишда ёзиб оламиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi)$ ораликда берилган ва абсолют интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топиб,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(l) \cos k l dl \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(l) \sin k l dl \quad (k = 1, 2, \dots),$$

сўнгра топилган коэффициентлар бўйича $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини тузамиз:

$$f(x) \approx T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Энди бу қаторнинг ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

қисмий йиғиндисини оламыз. Бу йиғиндидаги a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) ва b_k ($k = 1, 2, \dots$) ларнинг ўрнига уларнинг ифодаларини қўйсак, у ҳолда

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx] dt.$$

Маълумки,

$$\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx = \cos k(t - x).$$

Демак,

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) \right] dt.$$

Интеграл остидаги ифода учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) = \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{u}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right] &= \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{u}{2} \cos ku = \\ &= \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) u \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u \\ &\quad (u = t - x). \end{aligned}$$

Бу тенглик ёрдамида $F_n(f; x)$ йиғинди қуйидагича ифодаланади:

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (1.42)$$

(1.42) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихле интеграллари деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f; x)$ параметрга боғлиқ (1.42) кўринишдаги Дирихле интегралидан иборат экан.⁴

1.3-§. Дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдамида ечиш усули ҳақида асосий маълумотлар.

Коши масаласининг ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги Коши теоремаси дифференциал тенглама ечимини даражали қатор шаклида топиш назариясининг асосидир.

Дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдамида ечиш учун голоморф функциядан фойдаланамиз. Унинг таърифи қуйидагича:

$f(x)$ функция x_0 нукта атрофида $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйилса, уни x_0 нуктада *голоморф функция* дейилади. Демак, голоморф функциялар қуйидаги кўринишга эга:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho \quad (1.43)$$

Бу ҳолатда $f(x)$ функция $|x - x_0| < \rho$ соҳада $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича даражали қатор кўринишининг аналитик тасвири бўлади.

Бу ҳолатда $f(x)$ функцияга ва уни $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича тасвирловчи даражали қаторга кўрсатилган соҳада учта шарт қўйилади: $f(x)$ аниқланган, яъни аниқ қийматга эга; қатор яқинлашади; унинг йиғиндиси $f(x)$ билан устма-уст тушади.

1-мисол. $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ функциялар $x=0$ нуктада голоморф, чунки

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

⁴ Т.Азларов, Ҳ.Мансуров – “Математик анализ” 2-қисм, Тошкент “Ўқитувчи”, 1989 йил.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots,$$

бунда қаторлар $|x| < 1$ да текис яқинлашади.

Қатори x нинг барча қийматларида яқинлашадиган, ҳар қандай x_0 нуқтанинг атрофида (1.43) кўринишда тасвирлаш мумкин бўлган функциялар *бутун функциялар* дейилади ва голоморф функцияларнинг муҳим хусусий холлари бўлади.

2-мисол. e^x , $\sin x$, $\cos x$ -бутун функциялар. Хусусан, $x_0 = 0$ да қуйидаги ёйилмаларга эгамиз.

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

x нинг барча қийматларида бу қаторлар ўнгдан яқинлашади.

$f(x)$ функция учун юқорида келтирилган таърифлар $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўригишдаги n та эркин ўзгарувчили функциялар учун ҳам ўринли. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта атрофида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_n} (x_1 - x_1^0)^{m_1}, \dots, (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, *голоморф функция* дейилади, бунда

$$|x_1 - x_1^0| < \rho_1, \dots, |x_n - x_n^0| < \rho_n.$$

соҳада қатор текис яқинлашади.

3-мисол. $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$ функция $(0,0)$ нуқтада голоморф функция. чунки

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m=0}^{\infty} y^m = \sum_{k,m=0}^{\infty} x^k y^m$$

ва $|x| < 1$, $|y| < 1$ соҳада қатор текис яқинлашади.

x - эркин ўзгарувчига боғлиқ $f(x)$ функцияни қараймиз. Даражали қаторлар назариясидан маълумки, $f(x)$ функция (1.43) кўринишда ёйилса, бу ёйилма ягонадир ва $C_0, C_1, C_2, \dots$ коэффициентлар $f(x)$ функция ва унинг ҳосилалари қийматлари орқали маълум формулалар билан ифодаланади:

$$C_0 = f(x_0), \quad C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Шунинг учун (1.43) ёйилмани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho \quad (1.44)$$

Бу қатор x_0 нуктада $f(x)$ функция учун *Тейлор қатори* дейилади.

Шундай қилиб, ҳар қандай яқинлашувчи даражали қатор ўзининг йиғиндиси учун Тейлор қатори бўлади ва $f(x)$ функция x_0 нукта атрофида Тейлор қаторига ёйилса, у x_0 нуктада *голоморф функция* бўлади. Хусусий ҳолда, $f(x)$ функция учун

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad |x| < \rho$$

ёйилма ўринли ва $f(x)$ функция 0 нуктада голоморф.

(1.44) ёйилмадан келиб чиқадики, x_0 нуктада голоморф $f(x)$ функцияни $x \rightarrow x_0$ да

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

асимптотик ифодалаш мумкин, бунда $o((x - x_0)^n)$ функция $x \rightarrow x_0$ да $(x - x_0)^n$ га нисбатан юқориқ даражали чексиз кичик миқдор функция.

Хусусан, $x \rightarrow 0$ да $f(x)$ голоморф функцияни

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

кўринишда асимптотик ифодалаш мумкин.

(1.44) Тейлор каторидаги озод ҳад ва биринчи даражали $(x - x_0)$ айирмадан ташқари барча ҳадларни ташлаб юборсак, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги чизиқлаштирилганини ҳосил қиламиз:

$$Y = Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad . \quad (1.45)$$

Бунда $x \rightarrow x_0$ да $f(x)$ функцияни

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

кўринишда асимптотик ифодалаш мумкин.

Нормал формадаги биринчи тартибли тенглама учун Коши масаласини кўрамиз.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.46)$$

Агар

$$y = y(x) = y(x, x_0, y_0) \quad (1.47)$$

функция x_0 нуқтада голоморф бўлсин, яъни эрки ўзгарувчининг бошланғич қийматида (1.46) масала x_0 нуқтада голоморф ечимга эга ва

$$y = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho$$

ёки

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho \quad (1.48)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин бўлсин. Бу ерда y_0 - озод ҳад, $x = x_0$ да (1.47) ечимнинг бошланғич қиймати.

(1.46) Коши масаласи ечимининг x_0 нуқтадаги чизиқлаштирилгани

$$Y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \quad (C_1 = y'(x_0))$$

ёки

$$Y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

кўринишга эга.

Коши масаласининг ечими яқинлашувчи даражали қатор кўринишида тасвирлаш мумкин бўлган мисолни кўрамиз.

4-мисол. Коши масаласининг голоморф ечимини топинг.

$$y' = y^2, y(0) = 1 \quad (1.49)$$

яъни $y(0) = 1$ бошланғич шартни ва $y' = y^2$ дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи ҳамда $x = 0$ нуқтада голоморф бўлган функцияни топинг.

Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона. $y' = y^2$ тенгламани интеграллаб, изланган ечимни топамиз, сўнгра уни x нинг даражалари бўйича қатор шаклида тасвирлаймиз.

$y' = y^2$ тенгламани интеграллаймиз,

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \quad (y \neq 0), \quad -\frac{1}{y} = x + C.$$

$y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантириб, $C = -1$ эканлигини топамиз.

Демак, изланган ечим

$$y = \frac{1}{1-x}, \quad -\infty < x < 1 \quad (1.50)$$

бўлади. Бу ечим x нинг бошланғич қиймати атрофида бизга маълум бўлган даражали қатор, аниқроғи геометрик қатор кўринишида тасвирланади:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \quad (1.51)$$

(1.50) ечим $(-\infty, 1)$ интервалда аниқланган бўлиб, (1.51) қатор, ечимнинг $(-1, 1)$ интервалдаги аналитик кўриниши эканлигини таъкидлаб ўтамыз. $x = 0$ нуқтадаги линеаризация $y = 1 + x$ бўлади.

Кўйилган (1.49) Коши масаласининг бевосита ечимини топиш учун, ечимни Тейлор қатори кўринишида тасвирлашга асосланган, берилган дифференциал тенгламани кетма-кет дифференциаллаш усулини ёки ноаниқ коэффициентлар усулини қўллаш мумкин. Иккала усулни ҳам кўриб чиқамиз.

Ечимни x нинг даражалари бўйича Тейлор қатори кўринишида тасвирлаймиз:

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots \quad (1.52)$$

$y(0)$ оғид ҳад $y(0)=1$ бошланғич шартдан маълум. x нинг коэффициентлари бўлган $y'(0)$ ни $y' = y^2$ дифференциал тенглама иккала қисмида $x=0$ деб ва $y(0)=1$ бошланғич шартни инобатга олиб, топамиз: $y'(0) = y^2(0) = 1$. Сўнгра $y' = y^2$ тенглама ҳар иккала қисмини x га нисбатан дифференциаллаб

$$y'' = 2yy' \quad (1.53)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бунда $x=0$ деб, сўнгра y ва y' ни $x=0$ даги қийматлари билан алмаштирсак, $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2!$ келиб чиқади.

(1.53) ни x га нисбатан дифференциаллаб,

$$y''' = 2(y'^2 + yy'')$$

ни топамиз, сўнгра $x=0$ деб

$$y'''(0) = 2(1^2 + 1 \cdot 2) = 3!$$

ни топамиз.

Худди шундай $y^{(k)}(0) = k!$ ни топамиз. $y(0)$ ни ва топилган ҳосилаларни $x=0$ нуқтадаги қийматларни (1.52)га қўйсак (1.51) ёйилмани ҳосил қиламиз.

Ноаниқ коэффициентлар усулида (1.49) Коши масаласининг голоморф ечими (1.48) га асосан

$$y = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_kx^k + \dots \quad (1.54)$$

кўринишда қидирилади. Бу ерда $C_1, C_2, \dots$ - ноаниқ коэффициентлар бўлиб, уларнинг қийматларини топиш учун ҳосил бўлган тенгликни иккала қисмида x нинг бир хил даражали коэффициентларини тенгланади. Сўнгра $y' = y^2$ дифференциал тенгламага ўрнига қўйилади. (1.54) қаторни яқинлашади деб ҳисобланади ва бунда даражали қаторлар айнан тенглиги ҳақидаги теорема қўлланилади:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + kC_kx^{k-1} + \dots$$

y' ни ва (1.54) ни $y' = y^2$ тенгламага қўямиз:

$$C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + kC_kx^{k-1} + \dots =$$

$$= \left(1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots + C_kx^k + \dots\right)^2$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги даражали каторни квадратга кўтаришни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + kC_kx^{k-1} + \dots =$$

$$= 1 + 2C_1x + (C_1^2 + 2C_2)x^2 + 2(C_3 + C_1C_2)x^3 + \dots + \left(\sum_{m=0}^k C_m C_{k-m}\right)x^k + \dots$$

x нинг бир хил даражаларининг коэффицентларини тенглаймиз:

$$x^0 : C_1 = 1,$$

$$x^1 : 2C_2 = 2C_1,$$

$$x^2 : 3C_3 = C_1^2 + 2C_2,$$

$$x^3 : 4C_4 = 2(C_3 + C_1C_2),$$

$$\dots$$

$$x^{k-1} : kC_k = \sum_{m=0}^{k-1} C_m C_{k-1-m},$$

$$\dots$$

$C_1, C_2, \dots$ ларни кетма-кет аниқлаб, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \dots = 1$ эканлигини топамиз. $C_1, C_2, \dots$ ларни топилган қийматларини (1.54) қаторга қўйиб, изланган ечимни яна (1.51) кўринишда топамиз.

Энди Коши масаласини нормал формадаги n - тартибли тенглама учун кўриб чиқамиз.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.55)$$

Агар

$$y = y(x) = y(x, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \quad (1.56)$$

функция x_0 нуқтада голоморф, яъни (1.43) кўринишда тасвирланса, (1.56) масала x_0 нуқтада голоморф ечимга эга дейилади, ёки

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

$$|x - x_0| < \rho. \quad (1.57)$$

Бунда $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$ лар (1.55) масаланинг $x = x_0$ бўлгандаги бошланғич шартлари. C_k ($k \geq n$) коэффициентлар биринчи тартибли тенглама учун Коши масаласининг ечимини аниқлаш ҳолатидагидек, дифференциал тенгламанинг ўзидан ва уни кетма-кет дифференциаллашдан ҳосил бўлган тенгламаларидан ёки ноаниқ коэффициентлар усулидан фойдаланиб топилиши мумкин. (1.48) формула (1.57) формуланинг $n = 1$ бўлгандаги хусусий ҳоли бўлади.

Нормал дифференциал тенгламалар учун Коши масаласини қараймиз.

$$\begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, \dots, y_n), \quad m = \overline{1, n} \\ y_m(x_0) &= y_m^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

Агар

$$y_m = y_m(x) = y_m(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \quad m = \overline{1, n} \quad (1.59)$$

барча функциялар x_0 нуқтада голоморф бўлса, бу масаланинг (1.59) ечими x_0 нуқтада голоморф бўлади.

Бу ҳолда ечим

$$y_m = y_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)} (x - x_0)^k, \quad m = \overline{1, n}$$

кўринишда қидирилади, бунда $y_m^{(0)}$ - берилган сонлар.

II БОБ

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМИНИ ҚАТОРЛАР ЁРДАМИДА ТОПИШ

2.1-§. Биринчи тартибли тенгламалар учун Коши теоремаси

Нормал формадаги биринчи тартибли тенгламани қараймиз. Коши масаласи қўйилган бўлсин.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада голоморф бўлса, унда (2.1) Коши масаласи x_0 нуктада голоморф ечимга эга ва бу ечим ягона (1.27) кўринишда бўлади.

Хусусий ҳолда, бошланғич қиймат x_0, y_0 ларни $x_0 = 0, y_0 = 0$ деб қабул қилиш мумкин. Улар нолга тенг бўлмаса, $x - x_0 = \zeta, y - y_0 = \eta$ алмаштириш ёрдамида $x_0 = 0, y_0 = 0$ га эришиш мумкин. Шундай қилиб, (2.1) Коши масаласининг ўрнига

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0 \quad (2.2)$$

Коши теоремаси.

Агар $f(x, y)$ функция $(0, 0)$ нуктада голоморф бўлса, яъни уни

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad |x| < \rho, |y| < r \quad (2.3)$$

Кўринишдаги қаторга ёйилса, унда Коши масаласи $x = 0$ нуктада голоморф бўлган ягона ечимга эга:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k, \quad |x| < \rho_1 < \rho. \quad (2.4)$$

Исбот. Агар (2.4 даги) барча C_k коэффициентлар бир қийматли топилса ва (2.4) қатор $x_0 = 0$ нуқтанинг кўрсатилган оралиғида яқинлашишини кўрсатсак, теорема тасдиғи исботланган бўлади. Исбот 2 қисмдан иборат.

Шундай қилиб, Коши масаласининг (2.4) кўринишдаги формал равишда кўрдик. C_k коэффициентлар 1-қисм (2.4) ечимни ноаниқ коэффициентлар усулида топамиз. (2.4) қаторни тенгламага қўямиз

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n \quad (2.5)$$

ва ушбунни ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k C_k x^{k-1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k. \quad (2.6)$$

(2.4) ечим (2.5) дифференциал тенгламанинг ечими бўлгани учун, (2.6) ни айният деб ҳисоблаймиз ва x нинг бир хил даражали коэффициентларини тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^0 : 1 \cdot C_1 = a_{00} \Rightarrow C_1 = a_{00},$$

$$x^1 : 2 \cdot C_2 = a_{10} + a_{01} C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} (a_{10} + a_{01} a_{00}) \equiv P_2(a_{\lambda\mu})$$

Кўриниб турибдики, C_1 ва C_2 лар $f(x,y)$ функция ёйилмасининг дастлабки бир нечта коэффициентлари орқали ифодаланган.

Худди шундай, (2.6) тенгламадаги x^{k-1} нинг коэффициентларини тенглаб

$$C_k = P_k(a_{\lambda\mu}) \quad (2.7)$$

эга бўламиз. Бунда P_k - ўз аргументларига боғлиқ мусбат коэффициентли кўпхад. C_k лар ягона усулда топилганлиги учун, Коши масаласининг ечими мавжуд бўлса, ягоналиги келиб чиқади.

2-қисм. Энди (2.4) қатор $x_0 = 0$ нуқтанинг берилган атрофида яқинлашишини исботлаймиз.

Бунинг учун (2.4) қатор учун мажорант даражали қатор, яъни

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k x^k \quad (2.8)$$

ни тузиш кифоя, бу қатор мусбат коэффициентли ва

$$|x| < \rho_1 \quad (2.9)$$

соҳада яқинлашувчи ва

$$|C_k| \leq \overline{C}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

шартни қаноатлантиради.

Бу шартлар бажарилса (2.4) қатор $|x| < \rho_1$ соҳада албатта яқинлашади.

(2.8) қаторни яшаш учун Кошининг мажорант (кучайтирилган) масаласини қараймиз.

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = F(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(0) = 0, \quad (2.11)$$

бунда $F(x, y) - f(x, y)$ функциянинг бирор мажорантаси.

$F(x, y)$ учун Коши мажорантасини оламиз.

$$F(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)}, \quad |x| < \rho', \quad |y| < r',$$

бунда $0 < \rho' < \rho$, $0 < r' < r$, M - ушбу қатор йиғиндиси.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| \rho'^m r'^n = M \quad (2.12)$$

Бу қатор яқинлашади, чунки (2.3) қатор $|x| < \rho$, $|y| < r$ соҳада абсолют яқинлашади.

F мажоранта (2.3) даражали яқинлашувчи қатор коэффицентини Коши баҳолаши асосида F мажоранта шакллантирилади:

$$|a_{mn}| \leq \frac{M}{\rho'^m r'^n} \equiv A_{mn} \quad (2.13)$$

бу тенгсизлик (2.12) дан келиб чиқади. A_{mn} коэффицентли ва x, y га нисбатан даражаи қаторни олсак,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^m r'^n} x^m y^n = M \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho'}\right)^m \left(\frac{y}{r'}\right)^n = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)} \equiv F(x, y),$$

$$|x| < \rho', \quad |y| < r'$$

ни ҳосил қиламиз. Натижада Кошининг (2.11) мажорлантирилган масаласи ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)}, \quad \bar{y}(0) = 0 \quad (2.14)$$

(2.14) масаладаги дифференциал тенглама (2.1) масаланинг тенграмаси учун *мажорант тенглама* дейилади.

(2.14) мажорант масала ягона ечимга эга. Шу ечимни топамиз.

Мажорант тенграмани интераллаб ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right) d\bar{y} &= \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} dx, \\ -\frac{r'}{2} \left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right)^2 &= -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) + C. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\bar{y}(0) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантириб, $C = -\frac{r'}{2}$ эканлигини топамиз. (2.15) га

C нинг қийматини қўйиб ва иккала қисмни $\left(-\frac{2}{r'}\right)$ га қупайтириб,

$$\left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right)^2 = 1 + \frac{2M\rho'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликдан $\bar{y}$ ни топамиз:

$$\bar{y} = r' \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2M\rho'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)} \right) \quad (2.16)$$

Топилган ечим иккита голоморф функциялар суперпозисияси бўлгани учун $x_0 = 0$ нуқтада голоморф бўлади:

$$\sqrt{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{2M\rho'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right).$$

Шундай қилиб, (2.16) ечимни

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k x^k \quad (2.17)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу қатор $x_0 = 0$ нуқтанинг атрофида ўнгдан яқинлашади. (2.17) қаторнинг яқинлашиш соҳасини баҳолаймиз.

Абель теоремасига кўра x нинг мусбат қийматларини текшириш етарли. Логарифмик ва биноминал қаторларнинг яқинлашиш радиуси 1 бўлгани учун, x нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантириши керак:

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < \rho', \\ -\frac{2M\rho'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) < 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Охирги тенгсизлик $\alpha < 0$ ва $|\alpha| < 1$ эканлигидан келиб чиқади. (2.18) нинг иккинчи тенгсизлигини ечиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) > -\frac{r'}{2M\rho'}, \quad 1 - \frac{x}{\rho'} > e^{-\frac{r'}{2M\rho'}},$$

$$x < \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{2M\rho'}}\right).$$

Демак, (2.17) қатор $|x| < \rho_1 = \rho'(1 - e^{-\frac{r'}{2M\rho'}})$ ораликда яқинлашади.

Энди (2.17) қаторнинг барча коэффициентлари мусбат ва (2.10) баҳолаш ўринли эканлиги исботлаймиз. Бунинг учун $\bar{C}_k$ ларни ноаниқ коэффициентлар усули билан C_k ларни топиш алгоритми бўйича топиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\bar{C}_k = P_k(A_{\lambda\mu}). \quad (2.19)$$

Бунда P_k - (2.71) даги кўпхадлар бўлиб, унинг аргументлари f функция ёйилмаси коэффициентлари эмас, балки F мажорант ёйилмаси коэффициентлари дир ва (2.19) формуладан, P_k - кўпхадларнинг коэффициентлари мусбат ва (2.13) баҳолаш ўринли эканлигидан барча $\bar{C}_k$ лар мусбат эканлиги ҳамда C_k ларни мажорлаши келиб чиқади, яъни (2.81) мажорант қатор тузилди.

Шундай қилиб, (2.17) қатор (2.4) формал ечимни мажорлайди, демак, Коши теоремаси исботланди.

Чизиқли тенглама холи. Бошланғич шартларни танлаш. Ечимни тасвирловчи қаторнинг яқинлашиш радиуси.

Нормал формадаги чизикли тенгламани қараймиз.

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \equiv f(x, y) \quad (2.19)$$

Тенгламанинг ўнг қисми $f(x, y)$ функция y га нисбатан чизикли бўлиб, ҳар қандай $y_0 : y = y_0 + (y - y_0)$ нуқтада голоморф.

Коши теоремаси шартлари бажарилиши учун p ва q ларни x_0 нуқтада голоморфлигини ва y_0 ни ихтиёрий танлаш мумкинлиги кўрсатиш етарли.

Аввалгидек, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ деб қабул қиламиз, яъни ушбу

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), y(0) = 0 \quad (2.20)$$

Коши масаласи қўйилган бўлсин. Бу ерда p ва q ларни $x_0 = 0$ нуқтада голоморф деб қабул қиламиз, яъни

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \end{aligned} \right\} |x| < \rho \quad (2.21)$$

Теорема. (2.20) Коши масаласи $x_0 = 0$ нуқтада голоморф бўлган ягона ечимга эга, бунда ечимни ифодаловчи (2.4) қатор p ва q функцияларни тасвирловчи (2.21) қаторлар каби яқинлашадиган $|x| < \rho$ (2.22) соҳада яқинлашади.

Исбот. Исботни умумий схема бўйича ўтказамиз. (2.19) тенглама чизикли бўлганлиги учун берилган соҳадан кенгроқ соҳада мажоранта танлаш мумкин ва у (2.4) ечимни (2.22) соҳада яқинлашишини таъминлайди.

Аввал ноаниқ коэффициентлар усулида (2.4) формал ечимни топамиз:

$$C_k = P_k(p_k q_k) \quad (2.23)$$

(2.4) қаторнинг яқинлашишини исботлаш учун (2.4) кучайтирилган Коши масаласидан фойдаланамиз, бунда F - (2.19) функциянинг мажорантаси. F - мажорантани яшаш учун p ва q функцияларни, унинг умумий мажорантаси билан масалан, ушбу функция билан алмаштириш етарли:

$$\Phi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}}, |x| < \rho' \quad (2.24)$$

Бу тенгликда M - ихтиёрий мусбат сон.

Ҳақиқатан, ρ дан кичик ρ' мусбат сон олиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k| \rho'^k = M_1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |q_k| \rho'^k = M_2$$

Шунинг учун

$$|p_k| \leq \frac{M_1}{\rho'^k}, \quad |q_k| \leq \frac{M_2}{\rho'^k}$$

бўлганда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_1}{\rho'^k} x^k = \frac{M_1}{1 - \frac{x}{\rho'}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2}{\rho'^k} x^k = \frac{M_2}{1 - \frac{x}{\rho'}}$$

қаторлар (2.21) қаторларни можарлайди. Шунинг учун p ва q ларни умумий мажорантаси учун (2.24) функцияни олиш мумкин, бунда $M = \max(M_1, M_2)$.

Шундай қилиб,

$$F(x, y) = \Phi(x)y + \Phi(x) = \Phi(x)(y+1)$$

ёки

$$F(x, y) = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (y+1), \quad |x| < \rho'.$$

Демак, Кошининг мажорант масаласи сифатида

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (\bar{y}+1), \quad \bar{y}(0) = 0$$

ни оламиз. Бу масалани ечиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}+1} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} dx, \quad \ln(\bar{y}+1) = -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) + C \quad (\bar{y}(0) = 0 \Rightarrow C = 0),$$

$$\ln(\bar{y}+1) = -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right).$$

Бундан

$$\bar{y}+1 = \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'}$$

$$\bar{y} = -1 + \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'}.$$

келиб чиқади. Ҳосил бўлган ечим $x_0 = 0$ нуқтада голоморф эканлиги равшан:

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k x^k, |x| < \rho' \quad (2.25)$$

Коши теоремаси ва уни чизиқли тенглама учун исботланган тасдиғи дифференциал тенгламалар системаси учун ҳам ўринли.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_n(x_0) &= y_n^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, \dots, n).$$

системанинг барча f_m функциялари $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ нуқтада голоморф деб фараз қилайлик, унда Коши масаласининг x_0 нуқтада ягона голоморф ечими мавжуд.

Чизиқли тенгламалар системаси учун Коши масаласини қарайлик:

$$\begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} &= \sum_{l=1}^n P_{ml}(x) y_l + f_m(x), \\ y_m(x_0) &= y_m^{(0)} \quad (m = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

$P_{ml}(x)$ ва $f_m(x)$ функциялар x_0 нуқтада голоморф, $y_m^{(0)}$ - эса берилган ихтиёрий сонлар бўлса бу система x_0 нуқтада голоморф бўлган ягона ечимга эга, бунда ечимни ташкил этувчи

$$y_m = y_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)} (x - x_0)^k \quad (m = 1, \dots, n).$$

қаторлар, $P_{ml}(x)$ ва $f_m(x)$ функцияларни тасвирловчи қаторлар каби, берилган соҳада яқинлашади.

Юқори тартибли тенгламалар (ва уларнинг системалари) учун ҳам Коши масаласининг голоморф ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема ўринли.

Нормал формадаги n - тартибли тенглама учун Коши масаласини кўриб чиқамиз:

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

f функция $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ нукталарда голоморф бўлса, (2.26) Коши масаласи x_0 нуктада голоморф бўлган ягона ечимга эга. Бу тасдиқ (2.26) Коши масаласига қуйидаги нормал система учун Коши масаласига тенг кучли эканлигидан келиб чиқади.

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1(x_0) &= y_0, y_2(x_0) = y_0', \dots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Яъни (2.26) Коши масаласи голоморф ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги, (2.27) нормал системани голоморф ечимининг мавжудлиги ва ягоналигидан келиб чиқади, чунки (2.27) системанинг ўнг томонлари бошланғич нуктада голоморф, функциялардан иборат.

n - тартибли чизиқли тенглама учун Коши масаласини кўрамиз:

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y &= f(x), \\ y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Бу ерда $P_1, \dots, P_n$ ва f функциялар x_0 нуктада голоморф, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ - ихтиёрий берилган сонлар эканлиги шартидан (2.28) масала x_0 нуктада ягона голоморф ечимга эга. Унинг ечимни ташкил этувчи ушбу қатор:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k (x - x_0)^k.$$

$P_1, \dots, P_n$ ва f функциялар тасвирловчи қаторлар берилган соҳада яқинлашиши соҳасида албатта яқинлашади.

Бу тасдиқ бу сафар (2.28) Коши масаласига тенг кучли чизиқли нормал система эканлигидан келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= -P_1(x)y_n - \dots - P_{n-1}(x)y_2 - P_n(x)y_1 + f(x), \\ y_1(x_0) &= y_0, y_2(x_0) = y_0', \dots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

f функция ва бу чизиқли системанинг барча коэффициентлари x_0 нуктада голоморф. Бошланғич қийматларини қандай олишимиздан қатъий назар (2.29) Коши масаласи x_0 нуктада голоморф бўлган ягона $y_1, \dots, y_n$ ечимга эга бўлиб, бунда $y_1 = y$ ва бу ечим қатор шаклида тасвирланади.

2.2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМА УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ.

1. Иккинчи тартибли чизиқли тенглама

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.30)$$

берилган бўлиб, унинг

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \quad (2.31)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи, x_0 нуктада голоморф, яъни x_0 нуктанинг яқин атрофида

$$y = y_0 + y_0' (x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (x - x_0)^k, |x - x_0| < \rho \quad (2.32)$$

даражали қатор шаклида тасвирланувчи ечимини топиш талаб қилинсин.

Юқорида кўрсатилган n - тартибли чизиқли тенглама учун Коши масаласининг голоморф ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги Коши теоремасидан, агар x_0 нукта p, q ва f функцияларни голоморфлик нуктаси бўлса, изланаётган ечим мавжуд ва ягона эканлигидан келиб чиқади. y_0 ва y_0' бошланғич шартларни эса, ихтиёрий танлаш мумкин. (2.32) қатор ҳеч бўлмаганда p, q ва f функциялар тасвирловчи $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича ёйилган

қаторлар яқинлашадиган $|x - x_0| < \rho$ соҳада яқинлашишини Коши теоремаси таъминлайди.

C_k коэффициентларни топиш қолди, холос. Коэффициентларни ноаниқ коэффициентлар усулида топиш мумкин. Бунинг учун (2.32) қаторни кетма-кет дифференциаллаб, y' ва y'' ларни топамиз. Сўнгра p , q ва f функцияларни $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича ёйиб ва y , y' , y'' ларни (2.30) тенгламага қўямиз. Ҳосил бўлган айниятда $(x - x_0)$ нинг тенг даражали коэффициентларни тенглаб, C_k ($k \geq 2$) га нисбатан тенгламалар системаси ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасидан ҳар доим кетма-кет йўқотиш усули билан ягона ечимни топиш мумкин. (2.34) ечимини яқинлашишга текширишни ҳожати йўқ, яқинлашишни Коши теоремаси таъминлайди.

Мисол.

$$y'' + \frac{1}{1-x} y' = x \quad (2.33)$$

тенгламани $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи голоморф ечимини топим.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

эканлигидан, изланаётган ечим мавжуд ва ягона, ушбу кўринишга эга:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \quad (2.34)$$

Бу қатор $|x| < 1$ да албатта, ўнгдан яқинлашади.

C_k ($k \geq 2$) коэффициентларни топамиз y ни коэффициентларини x нинг даражалари бўйича қаторга ёйиб, (2.33) тенгламани

$$y'' + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot y' = x \quad (2.35)$$

кўринишда ёзамиз, y' ва y'' ни ҳисоблаймиз:

$$y' = \sum_{k=2}^{\infty} k C_k x^{k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2}$$

тенгликларга эга бўламиз. y ва y'' нинг ёйилмаларини (2.35) дифференциал тенгламага қўямиз:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k x^k \right) = x.$$

x нинг бир хил даражали коэффицентларини тенглаймиз:

$$\begin{aligned} x^0 : 2 \cdot 1 \cdot C_2 + 1 &= 0 \\ x^1 : 3 \cdot 2 \cdot C_3 + 1 &= 1 \\ x^2 : 4 \cdot 3 \cdot C_4 + 1 + C_2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Бу системадан C_k ларни топамиз

$$C_2 = -\frac{1}{2}, C_3 = 0, C_4 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

Изланаётган ечим

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots \quad (2.36)$$

кўринишда бўлади. Ечимнинг чизиқлаштирилгани $y = 1$ кўринишга эга, C_k коэффицентларни кетма-кет дифференциаллаш усулида топайлик.

Қуйидагига эгамиз:

$$C_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \quad (k \geq 2).$$

$x = 0$, $y = 1$ деб фараз қилиб, (2.33) тенгламадан $y''(0)$ нинг қийматини топамиз.

$y''(0) + 1 = 0$, $y''(0) = -1$ ларга эга бўламиз.

(2.33) ни дифференциаллаб,

$$y''' + \frac{1}{(1-x)^2} y + \frac{1}{1-x} y' = 1$$

га эга бўламиз. Бундан

$$y'''(0) + 1 = 1 \Rightarrow y'''(0) = 0.$$

Сўнгра

$$y^{(4)} + \frac{2}{(1-x)^3} y + \frac{1}{(1-x)^2} y' + \frac{1}{(1-x)^2} y' + \frac{1}{1-x} y'' = 0,$$

Бундан $y^{(4)}(0) + 2 - 1 = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = -1$.

(2.34) да $C_2, C_3, C_4, \dots$ ларни уларнинг қийматлари билан алмаштирсак, яна (2.36) ни ҳосил қиламиз.

2. Энди иккинчи тартибли бир жинсли чизикли тенгламани қараймиз:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.37)$$

тенгламанинг p ва q коэффициентлари қандайдир x_0 нуқтада голоморф, яъни $p(x)$ ва $q(x)$ лар $|x - x_0| < \rho$ соҳада $(x - x_0)$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи даражали қатор кўринишида тасвирланади. Унда Коши теоремасидан фойдаланиб, берилган нуқтада голоморф фундаментал ечимлар системасини тузиш мумкин, яъни чизикли боғлиқ бўлмаган голоморф ечимлар системасини тузиш мумкин.

Одатда x_0 нуқтанинг $|x - x_0| < \rho$ атрофида яқинлашувчи ва

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \end{aligned} \right\}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи y_1 ва y_2

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(1)} (x - x_0)^k, \\ y_2 &= x - x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} (x - x_0)^k, \end{aligned} \right\}$$

даражали қаторлар кўринишида тасвирлаш мумкин бўлган y_1 ва y_2 чизикли эркин ечимлар, яъни (y_1, y_2) голоморф базис ясалади.

Бу ўз навбатида, чизикли тенгламалар назарияси асосий теоремасига асосан

$$|x - x_0| < \rho, |y| < +\infty, |y'| < +\infty$$

соҳада аниқланган умумий ечим

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ни яшашга имкон беради.

Шундай қилиб, (2.27) тенглама коэффицентлари голоморф деб фарз қилиб, бу тенгламани ҳамма вақт даражали қаторлар ёрдамида интеграллашимиз мумкин.

1-мисол. $y'' + y = 0$ тенгламани даражали қаторлар ёрдамида интегралланг. y нинг коэффицентлаи голоморфлик нуқтаси бўлган $x = 0$ нуқтада нормаллашган (y_1, y_2) голоморф базис ясаймиз. Чизиқли тенглама холи учун кўрилган Коши теоремаси бу базисни мавжуд ва ягоналигини таъминлайди, у ҳолда y_1 ва y_2 ларни ясаш қолди, холос.

y_1 ни қуйидаги кўринишда излаймиз.

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(1)} x^k .$$

Буни y_1 функция учун Тейлор қатори деб қараб, C_k коэффицентни кетма-кет дифференциаллаш усулида топамиз:

$$C_k^{(1)} = \frac{y_1^{(k)}(0)}{k!} \quad (k \geq 2)$$

Шундай қилиб, $y^{(k)}(0)$ ни топишимиз керак.

$$y_1'' = -y_1 \tag{2.38}$$

айниятдан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_1''(0) = -y_1(0) \quad (y_1(0) = 1) \Rightarrow y_1''(0) = -1 .$$

(2.39) ни дифференциаллаб, $y_1''' = -y_1'$ га эга бўламиз. Бундан

$$y_1'''(0) = -y_1'(0) \quad (y_1'(0) = 0) \Rightarrow y_1'''(0) = 0 .$$

Худди шундай усулда

$$y_1^{(4)} = -y_1'' \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = -y_1''(0) \quad (y_1''(0) = -1) \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = 1,$$

$$y^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad y^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

эканлигини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \cos x$$

бўлади. Худди шундай

$$y_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots = \sin x$$

эканлигини топамиз.

Кутганимиздек, y_1 ва y_2 қаторлар x нинг барча қийматларида яқинлашади, уларнинг йиғиндилари $\cos x$ ва $\sin x$ бутун функциялар. $\cos x$ ва $\sin x$ функциялар $x_0 = 0$ нуқтада нормаллашган голоморф базис ташкил этишини текшириш мумкин. Топилган голоморф базисни қўллаб, $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$ да

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (2.39)$$

умумий ечимни топамиз.

$$\mathbf{2-мисол.} \quad y'' - y = 0 \quad (2.40)$$

тенгламанинг $x = 0$ нуқтада нормаллашган шундай фундаментал ечимлар системасини тузингки, уларни даражали қатор кўринишида ифодалаш мумкин бўлсин.

(2.40) тенглама e^x ва e^{-x} фундаментал ечимлар системасига эга. иккала ечим ҳам $x = 0$ нуқтада голоморф. Лекин бу фундаментал система $x_0 = 0$ нуқтада нормаллашмаган. $x_0 = 0$ нуқтада нормаллашган y_1 ва y_2 фундаментал системани тузиш учун умумий ечимдан фойдаланамиз.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (2.41)$$

Унда, бу фундаментал системани бевосита топамиз. y_1 ни қуйидагича қидирамиз:

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(1)} x^k, \quad |x| < +\infty, \quad C_k^{(1)} = \frac{y_1^{(k)}(0)}{k!} \quad (k \geq 2),$$

Тенгламадан $y_1'' = y_1 \Rightarrow y_1''(0) = y_1(0) = 1$ ни топамиз.

Худди шу каби $y_1''' = y_1' \Rightarrow y_1'''(0) = y_1'(0) = 0$, $y_1^{(4)} = -y_1'' \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = -y_1''(0) = 1, \dots$

$$y_1^{(2k)}(0) = 1, \quad y_1^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ларга эга бўламиз. Шунинг учун

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x.$$

Худди шундай усулда

$$y_2 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sinh x$$

ечимга эга бўламиз.

Демак $x=0$ нуқтада нормаллашган $\cosh x$, $\sinh x$ фундаментал системага эга бўлдик. $\cosh x$, $\sinh x$ фундаментал система ёрдамида (2.40) тенглама ечимини $y = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Бу ечимни ҳам (2.41) умумий ечим каби ёзиш мумкин, фақат бунда c_1 ва c_2 лар c_1 ва c_2 лар орқали ёзилади.⁵

Дифференциал тенгламаларни интеграллашнинг кўриб чиқилган усули Коши теоремасига таянган ҳолда дифференциал тенгламалар системалари учун ҳам ўринли. Бу усул бир жинсли чизиқли системаларни интеграллашда муваффақиятли қўлланилади. Бунда, бир жинсли дифференциал тенгламалар

⁵ Матвеев И – «Дифференциальные уравнения» «Наука» Москва 1972 год.

системаси коэффициентлари голоморф бўлган нуқтада, голоморф фундаментал ечимлар системасини тузиш етарли.

III БОБ

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ечимини қаторлар ёрдамида топиш

3.1-§. Тор тебраниш тенграмаси учун аралаш масала ечимини қаторлар ёрдамида топиш.

1. Бир жинсли тор тебраниш тенграмаси учун аралаш масала. Масаланинг қўйилиши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

тенгламанинг

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

чегаравий шартларни, ҳамда

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < l \quad (3.3)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборат. Аввало (3.1) тенгламанинг айнан нолга тенг бўлмаган ва (3.2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.4)$$

кўринишда излаймиз. Биз бу ерда $X(x)$ ни фақат x га , $T(t)$ ни эса фақат t га боғлиқ деб ҳисоблаймиз. (3.4) нинг ўнг томонини (3.1) тенгламадаги $u(x,t)$ нинг ўрнига олиб бориб қўямиз:

$$XT'' = a^2 X''T \text{ ёки } \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \quad (3.5)$$

Охирги тенгликнинг чап томони x га , ўнг томони t га боғлиқ эмас.

Демак, $\frac{T''}{a^2 T}$ ва $\frac{X''}{X}$ миқдорларнинг ҳар бири x га ҳам , t га ҳам боғлиқ эмас, яъни улар ўзгармас. Бу ўзгармасни - λ орқали белгилаб оламиз. У ҳолда , (3.5) га асосан

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 , \quad (3.6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 . \quad (3.7)$$

Шундай қилиб, (3.5) тенглама иккита тенгламага ажралди, булардан бири фақат x га боғлиқ функцияни , иккинчиси эса фақат t га боғлиқ функцияни ўз ичига олади. Бундай ҳолларда *ўзгарувчилар ажралди* деб айтилади.

(3.4) кўринишидаги (3.2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган $u(x,t)$ ечимни топиш учун (3.7) тенгламанинг

$$X(0) = 0 , X(l) = 0 \quad (3.8)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечимини топиш керак . Шундай қилиб, биз қуйидаги масалага келдик:

λ параметрнинг шундай қийматларини топиш керакки, бу қийматларда (3.7) тенглама (3.8) шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимга эга

бўлсин. Бу масала одатда *спектр масаласи* ёки *Штурм – Лиувилл масаласи* дейилади.

λ нинг бундай қийматлари (3.7), (3.8) масаланинг *хос қийматлари* (*сонлари*) , бу қийматларга мос ечимлар эса *хос функциялари* дейилади.

(3.7) тенгламанинг умумий ечими $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ёки $\lambda > 0$ бўлишига қараб турли кўринишга эга бўлади.

Шунинг учун ҳам бу учта ҳолни алоҳида- алоҳида текшираимиз.

1) $\lambda < 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (3.7) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

кўринишга эга бўлади. Бунда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

(3.8) чегаравий шартларга асосан

$$C_1 + C_2 = 0 \text{ , } C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \text{ .}$$

Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлгани учун $C_1 = C_2 = 0$.
Демак , $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (3.7) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X(x) = C_1 + C_2 x \text{ .}$$

(3.8) чегаравий шартларни қаноатлантириб, $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 l = 0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ ва ,демак , $X(x) \equiv 0$.

3) $\lambda > 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (3.7) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \tag{3.9}$$

кўринишга эга бўлади. (3.8) чегаравий шартларга биноан

$$C_1 = 0 \text{ , } C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \text{ .}$$

Биз $C_2 \neq 0$ деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда $X(x) \equiv 0$ бўлиб қолади. Демак,

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина, яъни $\sqrt{\lambda} l = \pi n$ ёки $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ бўлганда, бу ерда n - бутун сон, (3.7), (3.8) масала (3.9) кўринишдаги айнан нолдан фарқли ечимга эга бўлади. $\sin nx$ ва $\sin(-n)x = -\sin nx$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлгани учун n нинг 1, 2, 3, ... натурал қийматлари билан чегараланиш кифоядир.

Шундай қилиб, биз қуйидаги хулосага келдик: $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ сонлар

(3.7), (3.8) масаланинг хос қийматларидир, $C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ функциялар эса, уларга мос хос функциялардир, C_n - нолдан фарқли ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар.

Биз қуйида $C_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ деб ҳисоблаймиз.

$\lambda = \lambda_n$ бўлганда (3.6) тенгламанинг умумий ечими

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l}$$

кўринишга эга бўлади, бунда a_n , b_n - ихтиёрий ўзгармаслар. Демак, (3.1), (3.2) бир жинсли масала чексиз кўп чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.10)$$

ечимларга эга бўлади. (3.1) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги сабабли, (3.10) ечимларнинг чексиз йиғиндиси ҳам ечим бўлади.

Энди (3.1), (3.2), (3.3) масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.11)$$

қатор кўринишида излаймиз. Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлиб, уни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, қаторнинг йиғиндиси ҳам (3.1) тенгламани қаноатлантиради. (3.11) қаторнинг ҳар бир хади (3.2) чегаравий шартларни қаноатлантиргани учун унинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция ҳам бу шартни қаноатлантиради.

(3.11) қаторнинг a_n ва b_n коэффицентларини шундай аниқлашимиз керакки, қаторнинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция (3.3) бошланғич шартни ҳам қаноатлантирсин.

(3.11) қаторни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi at}{l} + b_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.12)$$

(3.11) ва (3.12) да $t = 0$ деб, (3.3) бошланғич шартларга асосан ушбу

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.13)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. (3.13) формулалар берилган $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ функцияларнинг $0 \leq x \leq l$ ораликда синуслар бўйича ёйилган Фурье қаторидан иборатдир. (3.13) ёйилмалар коэффицентлари

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (3.14)$$

формулалар билан аниқланади.

Энди (3.11) қаторни ва уни икки марта дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторнинг текис яқинлашувчилигини кўрсатсак, (3.11) қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция ҳақиқатан ҳам (3.1), (3.2), (3.3) масаланинг ечимидан иборат бўлади. Қуйидаги теорема ўринлидир.

Т е о р е м а. Агар $\varphi_0(x)$ функция $[0,l]$ сегментда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, учинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга бўлса, $\varphi_1(x)$ эса узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, иккинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга бўлса, ҳамда

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0 \quad (3.15)$$

мувофиқлаштириш шартлари бажарилса, у ҳолда (11) қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, (3.1) тенгламани, (3.2) чегаравий ва (3.3) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шу билан бирга (3.11) қаторни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлиб, ҳосил бўлган қаторлар ихтиёрий t да $0 \leq x \leq l$ оралиқда абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Аввало (3.15) мувофиқлаштириш шартлари қандай келиб чиқишига тўхталиб ўтамиз. (3.15) нинг биринчи иккита шарти $u(x,t)$ функциянинг $x=0$, $t=0$ ва $x=l$, $t=0$ нуқталарда узлуксизлигидан (3.2) ва (3.3) шартларга асосан келиб чиқади.

(3.15) нинг иккинчи иккита шарти эса худди шу нуқталарда $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосиланинг узлуксизлигидан ҳосил бўлади. Учинчи жуфт шартни эса қуйидагича чиқариш мумкин. (3.1) тенгламада $t=0$ деб,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} - a^2 \varphi''(x)_0 = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (3.2) шартларни дифференциаллаб,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=l} = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ерда $t = 0$ деб, олдинги тенгликда $x = 0$ ва $x = l$ десак, (3.15) нинг учинчи иккита шarti келиб чиқади.

(3.14) формулалардаги интегралларни бўлаклаб интеграллаймиз. (3.15) шартларга асосан, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_n = -\frac{2l^2}{(\pi n)^3} \int_0^l \varphi_0'''(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = -\frac{2l^2}{a(\pi n)^3} \int_0^l \varphi_1''(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Ушбу

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0'''(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\varphi_1''(x)}{a} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

белгиларни киритамиз. У ҳолда

$$a_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\alpha_n}{n^3},$$

$$b_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\beta_n}{n^3}. \quad (3.16)$$

α_n ва β_n миқдорлар $\varphi_0'''(x)$ ва $\frac{\varphi_1''(x)}{a}$ функцияларнинг Фурье коэффициентларидан иборатдир.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta_n|}{n}$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади.

(3.16) ни (3.11) қаторга олиб бориб қўямиз:

$$u(x,t) = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi at}{l} + \beta_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Бу қатор ва уни икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар учун ушбу

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^3}, C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^2}, C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n},$$

Яқинлашувчи қаторлар можаранта қаторлар ролини ўйнайди. бу ерда C_1, C_2, C_3 - ўзгармаслар. Демак, (3.11) қатор ва уни икки марта дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Бундан (3.11) қаторнинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция ўзининг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан бирга узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Агар

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n$$

белгиларини киритсак, биз асосий масаламизнинг ечими (3.11)ни

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \left(\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n \right)$$

кўринишда ёзиб олишимиз мумкин. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади *турғун тўлқин* деб аталади. Бунда торнинг ҳар бир нуқтаси бир хил φ_n фазоли, $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ амплитудали ва $\omega_n = \frac{n\pi at}{l}$ частотали гармоник тебраниш ҳаракатини бажаради.

Маълумки, (3.1), (3.2), (3.3) масаланинг ечимини берилган $\varphi_0(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни $(0,l)$ ораликдан ташқарига $2l$ давр билан тоқлик қонуни бўйича давом эттириб, Даламбер формуласи билан ифодалаш мумкин, яъни

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\Phi(x-at) + \Phi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, \quad (3.17)$$

бу ерда Φ ва ψ функциялар бошланғич $\varphi_0(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларнинг $(0, l)$ ораликдан ташқарига давомидан иборатдир. Φ ва ψ функциялар $2l$ даврли бўлгани учун ушбу

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

қаторлар билан ифодалаш мумкин. Бу қаторларни (3.17) формулага қўйиб, синус ва косинусларнинг йиғиндиси ва айирмаси учун формулалардан фойдалансак, қуйидаги

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a} B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.18)$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар бажарилиши учун

$$a_n = A_n, b_n = \frac{l}{n\pi a} B_n$$

бўлишини эътиборга олсак, (3.18) қатор (3.11) қатор билан устма-уст тушади.

2. Бир жинсли бўлмаган тор тенгламаси учун аралаш масала. Бир жинсли ва четлари мустаҳкамланган торнинг ташқи куч таъсиридаги мажбурий тебранишларини текширамыз. Бу масала ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.19)$$

тенгламанинг

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \quad (3.20)$$

чегаравий ва

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (3.21)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир. Бу масаланинг ечимини

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $v(x, t)$ (3.19) тенгламанинг (3.20) чегаравий ва

$$u|_{t=0} = 0 , \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3.22)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими, w эса

$$\frac{\partial W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (3.23)$$

бир жинсли тенгламанинг (3.20) ва (3.21) шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборатдир.

(3.23), (3.20), (3.21) масала 1- бандда ечилган.(3.19) , (3.20), (3.22) масаланинг ечимини қуйидаги қатор кўринишида излаймиз:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} . \quad (3.24)$$

Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлса, (3.20) чегаравий шартлар ўз-ўзидан қаноатланади.

Энди $T_n(t)$ функцияларни шундай аниқлаймизки, (3.24) қатор (3.19) тенгламани ва (3.22) бошланғич шартларни қаноатлантирсин. Шу мақсадда (3.24) қаторни (3.19) тенгламага қўйиб, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)] \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x, t) \quad (3.25)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}.$$

$f(x, t)$ функцияни $(0, l)$ интервалда синуслар бўйича Фурье қаторига ёямиз:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.26)$$

бунда

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.27)$$

(3.25) ва (3.26) ёйилмаларни таққослаб, $T_n(t)$ функцияни аниқлаш учун ўзгармас коэффициентли

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.28)$$

оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. (3.24) қатор билан аниқланган $u(x, t)$ функция (3.22) бошланғич шартларни ҳам қаноатлантириши учун $T_n(t)$ функциялар

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0 \quad (3.29)$$

шартларни қаноатлантириши етарлидир.

(3.28) тенгламанинг (3.29) шартлари қаноатлантирувчи ечими ушбу

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

кўринишга эга бўлади ёки $f_n(t)$ ўрнига унинг (3.27) ифодасини қўйсак, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \int_0^l f_n(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.30)$$

$T_n(t)$ функцияларнинг бу қийматларини (3.24) га қўйгандан сўнг, ҳосил бўлган қатор ва бу қаторни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб

дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (3.24) қатор (3.19), (3.20) ва (3.22) масаланинг ечимидан иборат бўлади.

Агар узлуксиз $f(x, t)$ функция x бўйича иккинчи тартибгача ухлуксиз ҳосилага эга бўлиб, t нинг барча қийматларида

$$f(0, t) = 0, f(l, t) = 0$$

шарт бажарилса, юқорида айтилган қаторларнинг текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Шундай қилиб (3.19), (3.20) ва (3.21) масаланинг ечими ушбу қатор билан ифодаланади :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

бу ерда

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$T_n(x)$ коэффицентлар эса (3.30) формулалар билан аниқланади.⁶

Агарда торнинг четлари мустаҳкамланмай, берилган қонун бўйича ҳаракат қилаётган бўлса, унинг мажбурий тебранишини аниқлаш масаласи (3.19) тенгламанинг (3.21) бошланғич шартлари ва

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (3.31)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишга келади. (3.19), (3.21), (3.31) масалани осонликча чегаравий шартлари бир жинсли бўлган масалага олиб келиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$w(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}$$

ёрдамчи функцияни киритамиз. Равшанки,

$$w|_{x=0} = \psi_1(t), \quad w|_{x=l} = \psi_2(t) . \quad (3.32)$$

⁶ М. Салоҳиддинов – “Математик физика тенгламалари” Тошкент, “Ўзбекистон” 2002 йил.

(3.19), (3.21), (3.31) масаланинг ечимини

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (3.33)$$

кўринишда излаймиз, бунда $v(x, t)$ - янги номаълум функция. (3.31) ва (3.32) чегаравий, (3.21) бошланғич шартларга асосан $v(x, t)$ функция

$$v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0$$

чегаравий ва

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \varphi_0(x) - \psi_1(0) - [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \frac{x}{l} = \bar{\varphi}_0(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) - \psi_1'(0) - [\psi_2'(0) - \psi_1'(0)] \frac{x}{l} = \bar{\varphi}_1(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. (3.33) ифодани (3.19) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t),$$

бу ерда

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - \psi_1''(t) - [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \frac{x}{l}.$$

Шундай қилиб, $u(x, t)$ функцияни аниқлаш учун ушбу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t),$$

$$v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0,$$

$$v|_{t=0} = \bar{\varphi}_0(x), \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \bar{\varphi}_1(x)$$

масалага келдик.

Бу масалани ечиш усули юқорида кўрсатилган.

3.2 -§. Бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала ечимини қаторлар ёрдамида топиш.

1. Бир жинсли тенглама бўлган ҳол. Масала

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.34)$$

тенгламанинг

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (3.35)$$

чегаравий шартларни ва

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3.36)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир, бунда берилган $\varphi(x)$ функция узлуксиз, бўлак – бўлак узлуксиз ҳосилага эга ва $x=0$, $x=l$ да нолга айланади.

Фурье усулига биноан (3.34) тенгламанинг хусусий ечимларини

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

кўринишда излаймиз. Буни (3.34) га қўйиб,

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

ёки

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.37)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.38)$$

(3.35) чегаравий шартларга биноан $X(x)$ функция

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (3.39)$$

шартларни қаноатлантириши зарурдир.

Шу бобнинг 3.1-§идан маълумки, (3.38), (3.39) масаланинг хос қийматлари

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

лардан, хос функциялари эса

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

лардан иборатдир. λ параметрнинг $\lambda = \lambda_n$ қийматларига (3.37) тенгламанинг

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$$

ечимлари мос келади, бунда a_n - ихтиёрий ўзгармаслар. Шундай қилиб,

$$u_n(x, t) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

функциялар (3.34) тенгламани ва (3.35) чегаравий шартларни қаноатлантиради.

Бошланғич (3.36) шартни қаноатлантириши учун ушбу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.40)$$

каторни тузамиз ва

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.41)$$

тенгликнинг бажарилишини талаб қиламиз.

(3.41) катор берилган $\varphi(x)$ функциянинг $(0, l)$ ораликда синуслар бўйича Фурье қаторига ёйилмасидан иборатдир. Унинг коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (3.42)$$

формула билан аниқланади.

Берилган $\varphi(x)$ функциянинг узлуксиз, бўлак- бўлак узлуксиз ҳосилага ҳамда $x = 0$ ва $x = l$ да нолга айланиши талаб қилингани учун коэффициентлари (3.42) формула билан аниқланган (3.41) катор $\varphi(x)$ функцияга абсолют ва текис яқинлашади. $t \geq 0$ бўлганда

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун (3.40) катор $t \geq 0$ абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

Шунинг учун (3.40) катор билан аниқланган $u(x, t)$ функция $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ соҳада узлуксиз ва (3.35) чегаравий, (3.36) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Ихтиёрий $t > 0$ да, агар n етарли катта бўлса,

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, 0 < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} < 1$$

бўлгани сабабли, (3.40) қатордан t бўйича бир марта, x бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар ҳам $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Бу эса, $u(x, t)$ функциянинг $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада (3.34) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади.

Худди шунга ўхшаш, $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада $u(x, t)$ функциянинг x ва t бўйича ихтиёрий тартибдаги ҳосилалари мавжудлигини кўрсатиш мумкин.

Энди чегаравий шартлар нолга тенг бўлмаган, яъни

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (3.43)$$

ҳолни текширамиз, бу ерда $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ - берилган функциялар.

Бу масалада (3.34) масаланинг (3.36) ва (3.43) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш керак.

Ечимни

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.44)$$

қатор кўринишида излаймиз, бунда

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.45)$$

(3.45) интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} [u(0, t) - (-1)^n u(l, t)] - \frac{2l}{n^2 \pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$u(x, t)$ функция (3.34) тенгламани ва (3.43) чегаравий шартларни қаноатлантиргани учун

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)] - \frac{2l}{n^2 \pi^2 a^2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.46)$$

Энди (3.45) ифодани t бўйича дифференциаллаймиз:

$$T'_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (3.47)$$

(3.46) тенгликдаги интеграл ўрнига унинг қийматини (3.47) дан қўйиб, $T_n(t)$ коэффицентларни аниқлаш учун

$$T'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{2n\pi a^2}{l^2} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)]$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \left[C_n + \frac{2n\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau} (\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)) d\tau \right], \quad (3.48)$$

бу ерда , равшанки

$$C_n = T_n(0).$$

(3.36) бошланғич шартни қаноатлантириш учун

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

тенгликнинг бажарилишини талаб қиламиз. Демак,

$$T_n(0) = C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (3.49)$$

Шундай қилиб , (3.34) , (3.36), (3.43) масаланинг ечими (3.44) қаторлардан иборат бўлиб, бундаги $T_n(t)$ (3.48) ва (3.49) формулалар билан аниқланади.

2. Бир жинсли бўлмаган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (3.50)$$

тенгламанинг

$$u|_{x=0} = \psi_1(t) , \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (3.51)$$

чегаравий шартларни ва

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3.52)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласини кўрамиз.

Аввало чегаравий ва бошланғич шартлар шартлар нолга тенг бўлган , яъни

$$u|_{x=0} = 0 \quad , \quad u|_{x=l} = 0 \quad , \quad (3.53)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (3.54)$$

ҳолни текширамыз.

Бу масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.55)$$

кўринишда излаймиз, бунда (3.53) чегаравий шартлар ўз-ўзидан бажарилади. $f(x,t)$ функцияни x нинг функцияси деб қараб, Фурье қаторига ёйилиши мумкин деб ҳисоблаймиз, яъни

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad , \quad (3.56)$$

бу ерда

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad .$$

(3.55) қаторни (3.50) тенгламага қўйиб, (3.56) ни эътиборга олсак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан ,

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad . \quad (3.57)$$

Бошланғич (3.54) шартга асосан,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad .$$

$T_n(t)$ учун

$$T_n(0) = 0 \quad (3.58)$$

бошланғич шарт ҳосил бўлади.

(3.57) тенгламанинг (3.58) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \quad (3.59)$$

кўринишга эга бўлади. Буни (3.55) қаторга қўйиб, (3.50), (3.53) , (3.54) масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.60)$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Агар бошланғич шарт нолга тенг бўлмаса, у ҳолда (3.60) ечимга бир жинсли (3.34) тенгламанинг берилган $u|_{t=0} = \varphi(x)$ бошланғич ва (3.53) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи , 1- бандда олинган ечимни қўшиб қўйиш керак.

Энди бошланғич ва чегаравий шартлар нолга тенг бўлмаган ҳолни кўрамиз. Бу (3.50) , (3.51) , (3.52) масалани юқорида кўрилган масалаларга осонликча елтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам

$$u = v + w \quad (3.61)$$

деб ҳисоблаймиз, бунда $v(x,t)$ функция (3.34) тенгламанинг (3.51) чегаравий ва (3.52) бошланғич шартларни аноатлантирувчи ечими, $w(x,t)$ функция (3.50) тенгламанинг (3.53), (3.54) шартларни қаноатлантирувчи ечими.

Равшннки, (3.61) йиғинди (3.50)-(3.52) масаланинг ечими бўлади.

Эслатиб ўтамиз, (3.50)-(3.52) масалада чегаравий шартларни умумийликка зарар етказмай, нолга тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун $u(x,t)$ функция ўрнига

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$$

тенглик билан янги $u(x,t)$ функция киритиш кифоядир, бунда

$$U(x,t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l} .$$

Маълумки , икки ўлчовли бир жинсли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

кўринишга эга бўлади.

Агар иссиқлик тўғри бурчакли пластинкада ёки доиравий цилиндрда тарқалаётган бўлса, у ҳолда биринчи чегаравий масала Фурье усули билан худди тўғри бурчакли мембрана ёки доиравий мембрананинг тебранишларини текширгандек ўрганилади .

3.3-§. Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи ечимини қаторлар ёрдамида топиш.

1.Тўғри тўртбурчак учун Дирихле масаласи. Лаплас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.62)$$

тегламаси учун $0 < x < p$, $0 < y < q$ тўғри тўртбурчакда

$$u|_{y=0} = \varphi(x) , \quad u|_{y=q} = \varphi_1(x) , \quad (3.63)$$

$$u|_{x=0} = \psi(y) , \quad u|_{x=p} = \psi_1(y) \quad (3.64)$$

Дирихле масаласини ечамиз. Бу ерда $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ функциялар $0 \leq x \leq p$ ораликда берилган ва унинг четларида нолга айланувчи узлуксиз функциялардир. $\psi(y)$, $\psi_1(y)$ лар эса $0 \leq y \leq q$ ораликда берилган , четларида нолга нолга айланувчи узлуксиз функциялар. (3.62) , (3.63) , (3.64) масаланинг ечимини тўртбурчакнинг бурчак нукталарида нолга айланиши, умумиятга ҳеч қанча зиён етказмайди, чунки, изланаётган ечимдан гармоник $A + Bx + Cy + Dxy$ функцияни айириб A, B, C, D ўзгармасларни мос равишда танлаб олиш натижасида эришиш мумкин (3.62).

Қўйилган масалани ечиш учун , аввало (3.62) тенгламанинг

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.65)$$

кўринишдаги ва $x = 0$, $x = p$ бўлганда $\psi(y) = \psi_1(y) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топамиз.

(3.65) ни (3.62) тенгламага қўйиб,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (3.66)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда λ - ўзгармас . Бундан $X(x)$ функцияни аниқлаш учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғрисидаги қуйидаги масалага келамиз:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 ,$$

$$X(x)|_{x=0} = 0 , \quad X(x)|_{x=p} = 0 .$$

1- “ дан маълумки, бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{p^2} , \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{p} x , \quad n = 1, 2, \dots$$

лардан иборат λ_n нинг бу қийматини (3.66) да λ нинг ўрнига қўйиб, $Y(y) = Y_n(y)$ функцияни аниқлаш учун

$$Y_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{p^2} Y_n(y) = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$Y_n(y) = \alpha_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{p} y + \beta_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} y , \quad \alpha_n, \beta_n = \text{const} \quad (3.65)$$

дан иборат. $X_n(x)$ ва $Y_n(y)$ ларни (3.65) га қўйиб, сўнгга (3.65) кўринишидаги барча ечимларни йиғиб, (3.62) тенгламанинг $x = 0$, $x = p$ да нолга тенг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{p} y + \beta_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} y \right) \sin \frac{n\pi}{p} x \quad (3.67)$$

ечимни ҳосил қиламиз. (3.67) қатордаги α_n ва β_n коэффициентларни шундай танлаймизки, натижада бу қатор (3.63) чегаравий шартларни қаноатлантирсин. $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни синуслар бўйича текис яқинлашувчи Фурье қаторларига ёйилади деб ҳисоблаймиз, яъни

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{p} x , \quad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \quad (3.68)$$

(3.67) да аввал $y = 0$, сўнгга $y = q$ деб ҳисоблаб , ҳосил бўлган қаторлар ва

(3.68) қаторлардаги синуслар олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\alpha_n = a_n, \quad \beta_n = \frac{b_n - a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{p} q}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} q}.$$

Буларни (3.67) қаторга қўйиб, $\operatorname{sh}(\alpha - \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta$ тенгликни эътиборга олсак, (3.62), (3.63), (3.64) масаланинг $\psi(y) = \psi_1(y) = 0$ бўлгандаги ечимини ҳосил қиламиз:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} (q - y) + \beta_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} y \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} q} \sin \frac{n\pi}{p} x. \quad (3.69)$$

Агарда (3.62), (3.63), (3.64) масаланинг ечимини $\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0$ бўлганда изласак, юқоридаги мулоҳазалар ўзгармайди, фақат x ва y нинг ўринлари алмаштирилади, яъни

$$\psi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin \frac{n\pi}{q} y, \quad \psi_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin \frac{n\pi}{q} y$$

десак, бу ҳолда ечим ушбу

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{a}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} (p - x) + \bar{b}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{q} x \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{q} p} \sin \frac{n\pi}{q} y \quad (3.70)$$

кўринишга эга бўлади.

(3.69), (3.70) қаторларни қўшиб, қуйидаги қаторга эга бўламиз:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} (q - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} y}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} q} \sin \frac{n\pi}{p} x + \frac{\bar{a}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{q} (p - x) + \bar{b}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{q} x}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{q} p} \sin \frac{n\pi}{q} y \right] \quad (3.71)$$

Гиперболик синуснинг ўсиш тартибини эътиборга олсак, (3.71) қаторнинг $0 < x < p$, $0 < y < q$ тўғри тўртбурчакда икки марта ҳадлаб дифференциаллангандан сўнг текис яқинлашувчилигига ишонч ҳосил

қиламиз. Демак, бу катор тўғри тўртбурчак учун (3.62), (3.63), (3.64) Дирихле масаласининг ечимини беради.

Худди шунга ўхшаш, тўғри тўртбурчак учун Лаплас тенгламасига қўйилган Нейман масаласининг ечимини топиш мумкин.

2. Доира учун Дирихле масаласи. Лаплас тенгламаси кутб координаталарида қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.72)$$

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини соҳа доира бўлган ҳолда ечамиз. Доиранинг радиуси R , маркази координата бошида бўлсин. Доирада гармоник, доиранинг чегараси $r = R$ айланада аввалдан берилган $\varphi(\theta)$ узлуксиз қийматларни қабул қилувчи, яъни

$$u_{r=R} = \varphi(\theta), \quad (3.73)$$

$u(r, \theta)$ функция топилсин.

Изланаётган ечим бир қийматли бўлиши учун $\varphi(\theta)$ функция 2π даврли даврий функция бўлиши керак. Бу масаланинг хусусий ечимларини

$$u(r, \theta) = W(r)V(\theta)$$

кўринишда излаб, бундаги номаълум $W(r)$ ва $V(\theta)$ функциялар учун

$$V''(\theta) + \lambda V(\theta) = 0, \quad (3.74)$$

$$r^2 W''(r) + r W'(r) - \lambda W(r) = 0$$

оддий дифференциал тенгламаларни ҳосил қиламиз. Маълумки, $V(\theta)$ функция 2π даврли даврий бўлиши учун $\lambda = n^2$ бўлиши зарур, бунда n - бутун сон. Бунга асосан, (3.74) тенгламанинг ечими

$$V_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, n = 0, 1, 2, \dots$$

кўринишда бўлади.

$W(r)$ функцияни аниқлаш учун

$$r^2 W''(r) + r W'(r) - n^2 W(r) = 0 \quad (3.75)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу эса, $n \neq 0$ да Эйлер тенгламасидир. Эркин ўзгарувчини $r = e^\xi$ алмаштириш натижасида

$$W_{\xi\xi}'' - n^2 W = 0$$

тенгламага келасиз. Бу тенглама иккита $W = e^{n\xi}$ ва $W = e^{-n\xi}$ ёки $W = r^n$ ва r^{-n} ечимга эгадир. $n = 0$ бўлганда эса, бу тенглама $\ln r$ ва 1 чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга.

Лекин, r^{-n} ва $\ln r$ ($n = 0$ да) ечимлар $r \rightarrow 0$ да чегараланган бўлмагани учун, уларни эътиборга олмаймиз.

Шундай қилиб, битта

$$W_n(r) = r^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

ечим қолади. Буларга асосан,

$$u(r, \theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n.$$

Лаплас тенгламаси чизиқли ва бир жинсли бўлгани учун, хусусий ечимларнинг йиғиндиси

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n \quad (3.76)$$

ҳам Лаплас тенгламасининг ечими бўлади. A_0 , A_n , B_n коэффициентларни шундай танлаймизки, натижада (3.73) чегаравий шарт бажарилсин, яъни

$$\varphi(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R^n \cos n\theta + B_n R^n \sin n\theta).$$

Бу қатор эса, $\varphi(\theta)$ функциянинг Фурье қаторига ёйилмасидан иборат, унинг коэффициентлари қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos n\tau d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin n\tau d\tau . \quad (3.77)$$

Коэффициентлари (3.77) формулалар билан аниқланган (3.76) қаторни $r < R$ да исталган марта r ва θ бўйича ҳадлаб дифференциаллаш мумкин , чунки ҳар гал ихтиёрий $r_0 < R$ да $0 \leq r \leq r_0$ лар учун текис яқинлашувчи қаторлар ҳосил бўлади. Бундан (3.76) формула билан аниқланган $u(r, \theta)$ функция (3.72) тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

(3.76) қаторни интеграл кўринишида ҳам ёзиш мумкин. Шу мақсадда (3.77) коэффициентларни (3.76) га қўйсак, ушбу

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - \tau) \right] \varphi(\tau) d\tau$$

тенгликка эга бўламиз. Квадрат қавс ичидаги йиғиндини ҳисоблаш мумкин. Эйлер формуласига асосан

$$\cos b(\theta - \tau) = \operatorname{Re} e^{in(\theta - \tau)}$$

Шу сабабли,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - \tau) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in(\theta - \tau)} \right] .$$

Агар

$$q = \frac{r}{R} e^{i(\theta - \tau)}$$

белгилашни киритсак, унинг модули $|q| = \frac{r}{R} < 1$ бўлади. Бунга асосан, аввалги

йиғинди махражи q бўлган чексиз геометрик прогрессиядан иборат бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in(\theta - \tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q} .$$

Демак,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in(\theta-\tau)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{R} e^{i(\theta-\tau)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\tau)}} = \frac{1}{2} \frac{R + re^{i(\theta-\tau)}}{R - re^{i(\theta-\tau)}} .$$

Бу ифоданинг ҳақиқий қисмини ажратиш учун сурат ва махражни унинг махражига қўшма бўлган миқдорга кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{R + re^{i(\theta-\tau)}}{R - re^{i(\theta-\tau)}} \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{(R + re^{i(\theta-\tau)})(R - re^{-i(\theta-\tau)})}{(R - re^{i(\theta-\tau)})(R - re^{-i(\theta-\tau)})} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2 + 2iRr \sin(\theta - \tau)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \tau) + r^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \tau) + r^2} . \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \tau) + r^2} d\tau .$$

Бу эса Грин функцияси ёрдамида олинган шар учун Дирихле масаласининг $n = 2$ бўлган ҳолда ечимини берувчи Пуассон формуласидир.

Хулоса

Маълумки, дифференциал тенгламалар назарияси узоқ ва бой тарихга эга. У ўз назариясини ривожлантириш учун зарур бўлган ички эҳтиёж балки, ҳам реал воқеликда содир бўлаётган масалаларни ёки бошқа фанларни ривожда ҳосил бўладиган масалаларни ҳал қилиш нуктаи назаридан ҳам жадал ривожланади. Хозирги кунгача кўплаб дифференциал тенгламалар ва уларга оид масалалар ўз татбиқларини топган бўлсада , ундан кўпроқ тенгламалар учун татбиқ доиралари номаълумлигича қолмоқда. Бунинг сабаби бир томондан тенгламалар ечимларини топишнинг умумий усули йўқ, яъни бу нарса ечиш усулини тўғри танлашга боғлиқ.

Мазкур битирув малакавий ишида дифференциал тенгламанинг маълум нуқтанинг атрофида голоморф , яъни қатор кўринишида ифодалаш мумкин бўлган ечими қидириш усули баён қилинган. Баён қилинганлардан кўринадики, бундай ечим мавжуд бўлиши учун тенгламада ёки шу билан бирга унга қўйилган масалада берилган функциялар шу нуқта атрофида голоморф бўлишлари керак экан. Бу функцияларнинг голоморфлик оралиғига қараб, тенглама ёки унга қўйилган масаланинг ечими қаралаётган нуқтанинг жуда қисқа атрофида , ёки шу нуқтани ўз ичига олувчи бирор ораликда , ёки бутун текисликда голоморф бўлар экан. Яна шуни айтиш керакки , хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун масалалар ечимини ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан қидирилганда оддий дифференциал тенгламаларнинг голоморф ечимини топишга келинар экан.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш оstonасида . Тошкент – “Ўзбекистон”, 2011 й.
2. Каримов И.А. Жаҳон молиявий – иқтисодий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этиш йўллари ва чоралари. Тошкент – “Ўзбекистон”, 2009й.
3. Каримов. И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. Тошкент – “Маънавият”, 2008й.
4. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”, Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори – Тошкент, Шарқ, 1997й.
5. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 2- қисм, Тошкент. “Ўқитувчи”, 1989.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. – Теория колебаний, изд. 2-е. Физ.мат.гиз, М., 1959
7. Демидович Б.П. – Лекции по математической теории устойчивости, Наука, М., 1967 год.
8. Еругин Н.П. – Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Наука и техника, Минск, 1970 год.
9. Еругин Н.П. ва бошқалар – Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Головне изд. Киев. 1974.
10. Матвеев И. – Дифференциальные уравнения, М., Наука, 1972 год.
11. Понтрягин Л.С. – Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., наука, 1969 год.
12. Петровский И.Г. – Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1964 год.
13. Салоҳиддинов М. – Математик физика тенгламалари, Тошкент, “Ўзбекистон”, 2002.
14. Степанов В.В. – Курс дифференциальных уравнений, М., Гиз-физ.мат. литература 1958 год.

15. Хартман Ф. - Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд., «Мир» М., 1970.
16. Эльсгольц Л.Э. – Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Наука, Москва, 1965 год.
17. Ёринов А.Қ., Маҳмудова Д.Қ., Тор тебраниш тенгламаси учун Дарбу ва Коши- Гурса масалаларини Риман усули билан ечиш, “Математика фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари” мавзусидаги Республика илмий- амалий анжумани, Андижон, 2011 йил 8-9 ноябрь, б 5-8.
18. Шерматов А., Маҳмудова Д., “Дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимини даражали қаторлар ёрдамида топиш”, ФарДУ да ўтказилган “Илм-заковатимиз сенга она-Ватан” мавзусидаги Республика илмий- амалий анжумани, Фарғона, 2012 йил 25 май. б 14-17.
19. [www. ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)
20. www. Info.uz