

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

Математика йўналиши кундузги бўлим

07. 403 гуруҳ битирувчиси

Абдуллаева Шохистанинг

Асосий алгебраик структуралар

(группа, ҳалқа, майдон)

мавзусидаги

БИТИРУВ

МАЛАКАВИЙ ИШИ

Илмий раҳбар: физика-математика

фанлари номзоди, доцент

Шерматов А.

Фаргона – 2011

Асосий алгебраик структуралар (группа, ҳалқа, майдон)

РЕЖА:

Кириш

1-§. Тўплам ва тўпламлар устида амаллар.

2-§. Алгебраик амаллар ва уларнинг турлари

3-§. Группа, яримгруппа ва моноидлар

**4-§. Алгебрик амалларга нисбатан ҳалқа ва майдоннинг
умумий таърифлари**

5-§. Тўплам системалари. Тўпламлар ҳалқаси ва алгебраси

6-§. Майдон ва унинг асосий хусусиятлари

Хулоса

Фойдаланилган адабиётлар

Кириш

Кадрлар тайёрлашнинг миллий модели асосида узлуксиз таълим ётади. Узлуксиз таълим малакали рақобатдош кадрлар тайёрлашнинг асоси бўлиб, таълимнинг барча турларини, давлат таълим стандартларини, кадрлар тайёрлаш тизими тузилмасини ва унинг фаолият кўрсатиш мухитини ўз ичига олади.

Ўзбекистон республикасида қабул қилинган «Таълим қонуни» ва «Кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури» таълимда дифференциал ва индивидуал ёндашишни алоҳида таъкидлайди. Натижада замонавий педагогик технологияларга асосланган таълим тизимини жорий этиш учун: замонавий таълим технологиялари яратиш муаммолари; таълим берувчи ва таълим олувчилар орасидаги ўзаро муносабатларига асосланган педагогик ҳамкорлик муаммолари; интерфаол методлардан фойдаланиш ва таълим жараёнларини лойихалаш соҳасида илмий изланишлар олиб борилишини тақозо этди.

Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримовнинг кишиларнинг умумтаълим ва профессионал малака даражасини ошириш, янги талаблар асосида кишиларнинг саводхонлигини ошириш, узлуксиз таълим тизимини жорий қилиш борасидаги ташаббуслари негизида етук мутахассислар ва рақобатбардош кадрлар тайёрлаш орқали тармоқлардаги ўсиш параметрларининг яхшиланишига эришилмоқда. Маълумки, узлуксиз ва узвийлик таълим тизимида ортиқча такрорийликка чек қўйиб, энг аввало, жамиятнинг маънавий ва интеллектуал салоҳиятини кенгайтиради, қолаверса, давлатнинг ижтимоий ва илмий–техник тараққиётини такомиллаштириш омили сифатида ишлаб чиқаришнинг барқарор ривожланишини таъминлайди. Педагогик технологияларнинг ривожланиши ва уларнинг ўқув – тарбия жараёнига кириб келиши натижасида, шунингдек

ахборотни тез алмашинуви ва такомиллашуви жараёнида ҳар бир инсон учун ўз касбий тайёргарлигини, маҳоратини кучайтириш имконияти яратилди.

Факат билимли, маърифатли жамиятгина демократик тараккиётнинг барча афзалликларини кадрлай олишини ва, аксинча, билими кам одамлар авторитаризмни ва тоталитар тузумни маъқул кўришини ҳаётнинг ўзи ишонарли тарзда исботламоқда. Билимга чанқоқ, истеододли ёшларни топиб, уларни Ватанга фидойи инсонлар қилиб тарбиялаш мукаддас вазифадир.

Битирув малакавий ишида математиканинг асосий тушунчаларидан бўлган алгебраик структуралар кўриб чиқилади. Алгебраик структуралар орқали математиканинг турли бўлимлари аксиоматик асосга эга бўладилар. Аксиоматик қуриш эса математика фанини ривожда асосий негиз бўлиб хизмат қилади. Алгебранинг асосий вазифаси алгебраик амалларнинг хоссаларини ўрганишдан иборат. Алгебраик нуктаи назардан ўрнаштирилган амалга нисбатан ўзларини бир хилда олиб борадиган тўпламлар орасида ҳеч қандай фарқ йўқ, уларни айнан бир хил деб ҳисоблаш мумкин.

Ишида тўплам ва тўпламлар устида амаллар, алгебраик амаллар ва уларнинг турлари, группа, яримгруппа ва моноидлар, алгебрик амалларга нисбатан ҳалқа ва майдоннинг умумий таърифлари, тўплам системалари, тўпламлар ҳалқаси ва алгебраси, майдон ва унинг асосий хусусиятлари кўриб чиқилади ва мисоллар билан бойитилади.

1-§. Тўплам ва тўпламлар устида амаллар

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич тушунчаларидан бири бўлиб, у таърифсиз қабул қилинади. Бунинг сабаби шундаки, у тушунчага берилган таърифнинг ўзи ҳам янада соддароқ тушунчага асосланган бўлиши керак; аммо бундай тушунчага эга эмасмиз. «Тўплам» сўзи математикада «йиғин», «тўда», «уюм» маонода ишлатилади. (Тўпламлар назариясининг асосчилари Чех математикги Б.Больцано, немис математиклари Георг Кантор

ва Р.Дедикентлар ҳисобланади). Тўпламни таърифни қидирмасдан, уни мисоллар билан тушунтирамиз.

Масалан. Фарғона шаъридаги бирча 10-синф ўқувчилари тўплам ҳосил қилади дейиш мумкин, шунингдек ўзбек алфавитининг барча ҳарфлари, барча натурал сонлар, ҳамма узлуксиз функциялар, текисликдаги барча нуқталар, Фарғона шаҳридаги барча чинорлар ҳам тўплам ташкил этади. Бундай мисолларни чексиз кўп келтириш мумкин. Умуман, тўплам тушунчасини англашда унинг турли нарсаларнинг бирлашмаси (мажмуаси) эканлигини унутмаслик керак.

Берилган тўпламни ташкил этувчи объектлар (нарсалар) унинг **элементлари** дейилади. Одатда тўплам берилганда унинг элементлари бир ёки бир неча белгиларга мувофиқ аниқланган бўлади. Бу белгиларга асосланиб ҳам нарса берилган тўпламнинг элементи эканлиги ёки элементи эмаслигини айта олиш мумкин. Тўпламда бир хил (бир-биридан фарқ қилиб бўлмайдиган) элементлар бўлмайди. Масалан $(x-1)^2(x+1)^3=0$ тенгламанинг барча илдизлари тўплами 1, 1, -1, -1, -1 элементлардан иборат бўлмасдан, балки 1 ва -1 элементлардан иборат.

Агар тўплам бирорта ҳам элементга эга бўлмаса, **бўш** тўплам дейилади ва уни $\emptyset$ (баозан эса $\wedge$ ёки 0) билан белгиланади.

Тўпламларни латин алфавитининг $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ сингари бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса $a, b, c, \dots, x, y, z$ каби кичик ҳарфлар билан белгилаймиз.

Бирор a нарса A тўпламнинг элементи эканлиги $a \in A$ ($A \ni a$) шаклида, a нарса A тўпламга тегишли эмаслигини эса $a \notin A$ ($a \notin A$) кўринишда ёзилади ва уларни мос равишда « a элемент A тўпламга тегишли» « a элемент A тўпламга тегишли эмас» деб ўқилади.

Математикада асосий сонлар тўпламини қуйидагича белгиланади:

N - натурал сонлар тўплами, Z - бутун сонлар тўплами, Q - рационал сонлар тўплами, J - иррационал сонлар тўплами, R - ҳақиқий сонлар тўплами, C - комплекс сонлар тўплами. Агар берилган A тўпламнинг элементлари

бирор $p(x)$ хоссага эга бўлса, у тўпلامي $A=\{x:p(x)\}$ ёки $A=\{x \mid p(x)\}$ кўринишда ёзамиз. Бу ҳолда $p(x)$ хосса тўпламнинг **характеристик** хоссаси дейилади.

1-мисол.

Тўпламнинг характе- ристик хоссаси билан берилиши	Тўпламнинг белгиланиши	Тўпلامي сонлар ўқида тасвирланиши
$\{x:x \in a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$	
$\{x:x \in a < x \leq b\}$	$(a,b]$	
$\{x:x \in a \leq x < b\}$	$[a,b)$	
$\{x:x \in a < x < b\}$	(a,b)	
$\{x:x \in x > a\}$	(a,∞)	
$\{x:x \in x \geq a\}$	$[a,\infty)$	
$\{x:x \in x < a\}$	$(-\infty,a)$	
$\{x:x \in x \leq a \}$	$(-\infty,a]$	

2-мисол. Агар A барча жуфт натурал тўплами бўлса, у ҳолда уни қуйидаги белгилаймиз $A = \{x: x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

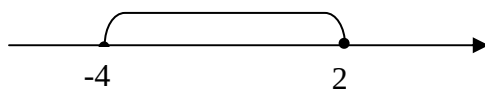
Агар тўплам чекли сондаги элементлардан иборат бўлса, уни барча элементларини кўрсатиш билан белгиланади.

Масалан A тўплам $1, 2, 3, 4, 5$ элементлардан иборат бўлса, уни $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ каби ёзилади.

3-мисол A тўплам 24 сонининг барча натурал бўлувчилари тўплами бўлса, уни $A = \{x: 24 \vdots x, x \in \mathbb{N}\}$ ёки $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ кўринишда ёзилади.

4-мисол. $|x+1| \leq 3$ тенгсизликни ечимлари тўпламини сонлар ўқида тасвирланг.

Берилган $|x+1| \leq 3$ тенгсизликни ечамиз $-3 \leq x+1 \leq 3$, $-4 \leq x \leq 2$. Демак, тенгсизликнинг ечимлари тўплами $A = \{x: x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq 2\}$. Бу тўпламни координаталар тўғри чизигидаги ифодаси қуйидагича:



1-таъриф. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг **қисми** ёки **қисм тўплами** дейилади ва бу муносабатни $A \subset B$ ёки $B \supset A$ шаклда ёзилади.

Таърифдан кўринадик, ҳар қандай A тўплам ўзи ўзининг қисм тўплами, яъни $A \subset A$ экани бевосита келиб чиқади.

Бўш тўплам эса ҳар қандай тўпламнинг қисмидир. A ва $\emptyset$ тўпламлар A тўпламнинг хосмас қисмлари дейилади; A тўпламнинг ҳамма бошқа қисмлари эса унинг хос қисмлари дейилади.

5-мисол. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламнинг хос қисми бўлади, яъни $A \subset B$.

6-мисол. $A = \{1, 3, 5, 6\}$ ва $B = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ тўпламларнинг ҳеч бири иккинчисининг қисми эмас.

2-таъриф. Агар A тўплам B тўпламнинг қисми ва B тўплам A тўпламнинг қисми бўлса, A тўплам B тўпламга **тенг** дейилади ва бу муносабат $A=B$ шаклда ёзилади: демак $A=B$ тенглик $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$ муносабатларнинг биргаликда бажарилиши билан тенг кучлидир.

Масалан. $A=\{-1,1\}$ ва B тўплам эса $(x-1)^2(x+1)^3=0$ тенгламанинг барча илдизлари тўплами бўлса, A тўплам B тўпламга тенг бўлади.

3-таъриф. A ва B тўпламлардан ақалли биттасига тегишли бўлган элементларнинг C тўпламини A ва B тўпламларнинг **бирлашмаси** (йиғиндиси) дейилади ва $C=A \cup B$ ($C=A+B$) кўринишда белгиланади, A ва B тўпламларни қўшилувчи тўпламлар. C эса йиғинди тўплам дейилади.

7-мисол. $A=\{1,3,5\}$ ва $B=\{2,3,4\}$ бўлса $A \cup B=\{1,2,3,4,5\}$ бўлади.

Қўшилувчи тўпламлар сони ихтиёрий бўлганда ҳам бирлашма (йиғинди) юқоридаги каби аниқланади ва қуйидагича белгиланади:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

4-таъриф. Бир вақтда ҳам A тўпламга, ҳам B тўпламга тегишли бўлган элементларнинг C тўплами A ва B тўпламларнинг **кесишмаси** (кўпайтмаси) дейилади ва $C=A \cap B$ ($C=A \cdot B$) кўринишда белгиланади. A ва B тўпламлар кўпайтувчи тўпламлар, C кўпайтма (кесишма) тўплам дейилади.

Тўпламлар сони ҳар қандай бўлганда ҳам уларнинг кесишмаси

$$\bigcap_{k=1}^n A_k, \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$$
 орқали белгиланади.

8-мисол. $A=(-\infty;7]$ ва $B=[1;+\infty)$ тўпламларнинг кесишмасини топинг.
 $A \cap B = [1;7]$.

9-мисол. A - 3 га қаррали бўлган натурал сонлар тўплами B 4 сонига қаррали бўлган натурал сонлар тўплами бўлса, $A \cap B$ ни топинг. $A \cap B$ - 12 қаррали бўлган сонлар тўпамидан иборат бўлади.

Тўпламлар устидаги асосий амаллар қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - коммутативлик хоссаси
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ - ассоциативлик хоссаси

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - дистрибутивлик хоссаси
4. $A \cup A = A \quad A \cap A = A ; B \subset A$ бўлса, $A \cup B = A, A \cap B = B$.

Айтайлик B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами бўлсин. B тўпламга тегишли бўлмаган A тўпламнинг барча элементларидан тузилган C тўплам B ни A га қадар **тўлдирувчи** тўплам дейилади ва уни $C_A B$ (B_A) кўринишда белгиланади, яъни $C_A B = A \setminus B$.

A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган C тўпламни A тўпламдан B тўпламнинг **айирмаси** дейилади ва $C = A \setminus B$ (ёки $C = A - B$) кўринишда белгиланади.

A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси деб ушбу $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ тўпламга айтилади ва $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ кўринишда белгиланади.

Бундан кейинги мулоҳазаларда қаралаётган тўпламлар тайии бир тўпламнинг қисм тўпламлари деб фараз қилинади. Бундай тўпламни биз **универсал** тўплам деб атаيمиз ва уни X ҳарфи билан белгилаймиз. Умуман айтганда, ҳар бир қаралаётган масала учун ўзининг универсал тўплами бўлади.

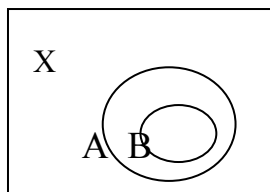
X ихтиёрий универсал тўплам бўлиб, A унинг бирор қисм тўплами бўлсин $(A \subset X)$. X тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан иборат тўплам A нинг X га қадар **тўлдирувчи** тўплами дейилади ва уни $C_X A$ (ёки $C_A, \bar{A}$) кўринишда белгиланади.

Агар $A \subset X$ ва $B \subset X$ бўлса, $C_X (A \cup B) = C_X A \cap C_X B$ ва $C_X (A \cap B) = C_X A \cup C_X B$ айниятлар ўринли. Бу айниятларни иккилик қонунлари деб аталади.

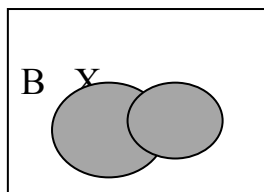
10-мисол. Агар $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{0, 6, 8\}$ бўлади.

11-мисол. Агар $A = \{1,2,3,5,7,10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ бўлса, у ҳолда $A \Delta B = \{1,3,4,5,6,7,8\}$ бўлади.

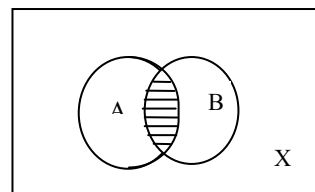
Тўпламлар устида амалларнинг Эйлер-Венн диаграммаларидаги тасвирлари чизмада берилган.



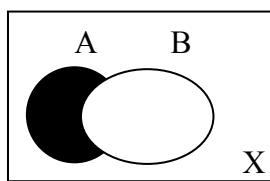
$$A \supset B$$



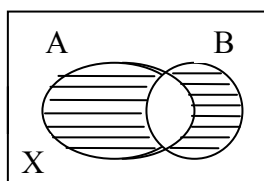
$$A \cup B$$



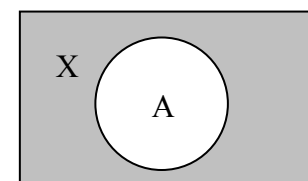
$$A \cap B$$



$$A \setminus B$$



$$A \Delta B$$



$$C_x A$$

12-Мисол. Кўпайтириш амалининг айириш амалига нисбатан дистрибутивлик қонуни ўринли, яъни

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (1)$$

Ечиш $x \in (A \setminus B) \cap C$ ихтиёрий элемент бўлсин, бундан $x \in (A \setminus B)$ ва $x \in C$. $x \in A \setminus B$ бўлгани учун айириш амалининг таърифига кўра $x \in A$ ва $x \notin B$. Шундай қилиб $x \in A$, $x \in C$ демак, $x \in A \cap C$, аммо $x \notin B \cap C$. Охирги муносабатлардан $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, демак

$$(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (B \cap C). \quad (2)$$

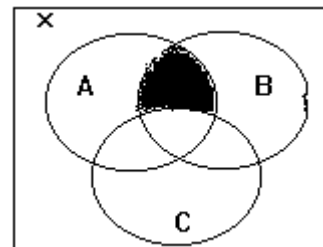
Энди

$$(A \setminus B) \cap C \supset (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (3)$$

эканлигини кўрсатамиз. $y \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ихтиёрий элемент бўлсин, у ҳолда $y \in A \cap C$ ва $y \notin B \cap C$ бундан $y \in A$, $y \in C$ ва $y \notin B$, демак, $y \in (A \setminus B) \cap C$ шу билан (3) муносабатни ўринли эканлиги келиб чиқади. (2) ва (3) муносабатлардан (1) тенгликнинг тўғри эканлиги келиб чиқади.

13-мисол. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ муносабатни

Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида
исботланг. Берилган муносабатнинг чап
ва ўнг томонида турган тўпламларни
Эйлер-Венн диаграммалардаги тасвири
чизмада берилган.



2-§. Алгебраик амаллар ва уларнинг турлари

Алгебраик структураларини синфларга ажратиш алгебраик амаллар ва уларнинг қайсилари структурада аниқланганлигига қараб бажарилади. Шунинг учун алгебраик амалларни кўриб чиқамиз.

1-таъриф. $A \neq \emptyset$ ихтиёрий табиатли элементнинг тўплами, n манфий бўлмаган бутун сон бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f : A^n \rightarrow A$ акслантириш A тўпланда аниқланган **n ўринли ёки n -ар алгебраик амал**, n сонни эса f алгебраик амалнинг **ранги** дейилади.

A тўпланда аниқланган нол ўринли амал деб, A тўпламнинг қандайдир элементини тайинлашни (ажратишни) айтилади.

2-таъриф. Агар $f : A^n \rightarrow A$ акслантиришнинг аниқланиш соҳаси A^n нинг тўғри қисмидан иборат бўлса, у ҳолда f ни A тўпланда аниқланган **қисман** алгебраик амал дейилади.

Ранги 0, 1 ва 2 бўлган алгебраик амалларни мос равишда **нолар**, **унар** ва **бинар** алгебраик амаллар дейилади. Унар амални оператор ҳам деб аталади.

Бундан буён n -ар алгебраик амал дейиш ўрнига n -ар амал ёки амал деган терминларни ишлатишга келишамиз. f - A тўпламда аниқланган ихтиёрий амал бўлсин. Агар $f : A^n \rightarrow A$ акслантиришда $(a,b) \in A^2$ элементга $c \in A$ мос келтирилган бўлса, у ҳолда $f((a,b))=c$ ёки $f(a,b)=c$ кўринишда ёзишнинг ўрнига $a \cdot f \cdot b=c$ ёки $(a,b) \rightarrow c$ ёки $a \mid b=c$ ёки $a \perp b=c$ ёки $a \circ b=c$ ёки $a * b=c, \dots$ кўринишда белгилаш қабул қилинган. Қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини мос равишда $a+b=c$, $a-b=c$, $ab=c$ ва $a:b=c$ кўринишда белгиланади.

Мисоллар. 1. M - ихтиёрий табиатли элементларнинг қандайдир бўш бўлмаган тўплами, $A=\{B: B \subset M\}$ бўлсин. У ҳолда $f:A \rightarrow A$ акслантиришни $\forall (B \in A) \quad f(B)=M \setminus B$ кўринишда аниқласак, f - A тўпламда аниқланган унар амал (оператор) дан иборат бўлади.

2. A 1- мисолдаги тўплам бўлсин. Агар $f:A^2 \rightarrow A$ акслантириш $\forall (B_1, B_2 \in A) \quad f(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2, \quad f(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$ кўринишда берилса, ҳар иккала ҳолда ҳам f - A тўпламда аниқланган бинар амалдан иборат бўлади.

3. $\mathbf{N}$ натурал сонлар тўплами, $\forall (n \in \mathbf{N})$ тайинланган натурал сон бўлсин. У ҳолда $f:A^2 \rightarrow A$ акслантириш $\forall (m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbf{N})$ $f(m_1, m_2, \dots, m_n) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ кўринишда берилса, f - $\mathbf{N}$ тўпламда аниқланган n -ар амал бўлади. Бу жойда $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, - $m_1, m_2, \dots, m_n$ натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси.

4. Бўлиш амали бутун сонлар системасида аниқланган қисман амалдан иборат.

Агар A тўпламда $*$ бинар амал аниқланган бўлса, уни алгебра дейилади. Ва $(A, *)$ кўринишда белгиланади.

3- таъриф. $\circ$ ва $*$ лар A тўпламда аниқланган ихтиёрий амаллар бўлсин:

а) $\forall (a, b \in B) \ a \circ b = b \circ a$ бўлса, у ҳолда амал **коммутатив** (ўрин алмаштириш) хоссасига;

б) $\forall (a, b, c \in A) \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ бўлса, у ҳолда $\circ$ - **ассоциатив** (группалаш) хоссасига;

в) $\forall (a, b, c \in A) \ (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$ ва $c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b)$ бўлса, мос равишда $*$ амал $\circ$ амалга нисбатан ўнг ва чап **дистрибутив** (ўнг ва чап тақсимот) хоссасига эга дейилади. Агарда $*$ амал коммутатив бўлса, охирида "ўнг" ва "чап" сўзлари туширилиб қолдирилади.

Мисоллар. 5. Сонларни одатдаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив, ассоциатив ва кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив, лекин қўшиш амали кўпайтириш амалига нисбатан дистрибутив эмас. Чунки $a + bc = (a + b)(a + c)$ тенглик ҳамма вақт ҳам ўринли бўлмайди.

6. Сонларни айириш амали коммутатив ҳам, ассоциатив ҳам эмас.

7. Акслантиришларнинг композицияси ассоциатив амал бўлиб, у коммутатив эмас (текшириб кўринг).

4-таъриф. А тўпламда $\circ$ амал аниқланган бўлсин. Агар $\exists (e_{\text{ў}}, e_{\text{ч}} \in A) \ \forall (a \in A) \ a \circ e_{\text{ў}} = a$ ёки $e_{\text{ч}} \circ a = a$ бўлса, у ҳолда $e_{\text{ў}}$ ва $e_{\text{ч}}$ элементларини $\circ$ амалга нисбатан мос равишда **ўнг** ва **чап нейтрал** элемент дейилади.

Мисоллар. 8. Бутун сонлар системасида 0 қўшиш амалига нисбатан, 1 кўпайтириш амалига нисбатан ҳам ўнг ҳам чап нейтрал элементлардир.

9. $\emptyset$ тўпламларнинг бирлашмаси амалига нисбатан универсал тўплам X тўпламнинг кесишмаси амалига нисбатан нейтрал элементлардир.

5 - таъриф. Айтайлик $A \neq \emptyset$, $\circ$ - A тўпламда аниқланган амал, e $\circ$ амалга нисбатан A тўпламнинг **нейтрал** элементи бўлсин.

Агар $\forall (a \in A) \exists (a_{\text{ў}}, a_{\text{ч}} \in A) \ a \circ a_{\text{ў}} = e, a_{\text{ч}} \circ a = e$ бўлса, у ҳолда $a_{\text{ў}}, a_{\text{ч}}$ ларни мос равишда $\circ$ амалга нисбатан a га **ўнг** ва **чап симметрик** элементлар дейилади. Агар $a \circ a' = a' \circ a = e$ бўлса, a' ни $\circ$ амалга нисбатан a га (ўз навбатида a ни a' га) **симметрик элемент** дейилади.

Мисоллар. 10. Бутун сонларни қўшиш амалига нисбатан a га $(-a)$ симметрик (карама-қарши) элемент бўлади.

11. Рационал сонларни кўпайтириш амалига нисбатан $a \neq 0$ рационал сонга $a^{-1} = 1/a$ симметрик (тескари) элемент бўлади.

6-таъриф. Айтайлик $\circ$ A тўпланда аниқланган амал ва $B \subset A$ бўлсин. Агар $\forall (a, b \in B) \Rightarrow a \circ b \in B$ бўлса, B тўпламни $\circ$ амалга нисбатан **ёпиқ** дейилади.

Мисол. 12. Агар $B, C \subset \mathbb{N}$, $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $C = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$ бўлса, B натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ, C эса кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ.

Агар $(A, *)$ алгебрада e нейтрал элемент аниқланган бўлса $(A, *, e)$ ни алгебраик система дейилади.

3-§. Группа, яримгруппа ва моноидлар

Алгебраик структураларнинг энг содда ва бир вақтнинг ўзида муҳим алгебраик структура бўлган группани кўриб чиқамиз.

Айтайлик $A \neq \emptyset$ тўплам, $*$ - A тўпланда аниқланган бинар амал бўлсин.

1-таъриф. Агар A тўпланда аниқланган $*$ бинар амал ассоциатив бўлса, яъни $\forall (a, b \in A), (a * b) * c = a * (b * c)$ бўлса, у ҳолда A **яримгруппа** дейилади. Агар $*$ амал $+$ (қўшиш) амали бўлса, аддитив яримгруппа, $\cdot$ (кўпайтириш) бўлса, A - **мультипликатив яримгруппа** дейилади.

Агар $*$ амал коммутатив бўлса, яъни $\forall (a, b \in A), a * b = b * a$ бўлса, A ни **коммутатив**, агар A чекли бўлса, A ни **чекли яримгруппа** дейилади.

$\forall (a, x, y \in A), (a * x = a * y \Rightarrow x = y)$ ва $(x * a = y * a \Rightarrow x = y)$

бўлса, у ҳолда A ни қисқартиришга эга бўлган яримгруппа дейилади.

Мисоллар. 1. $M \neq \emptyset$, $A = \{\varphi: \varphi: M \rightarrow M\}$, $*$ - акслантиришларнинг кўпайтириш (композицияси) амалидан иборат бўлсин. У ҳолда A яримгруппа

бўлади. Чунки акслантиришларни кўпайтириш амали ассоциативлик хоссасига эга.

1. $A=\{e,a\}$ икки элементли тўпلام бўлиб, унда аниқланган $*$ амал Кели жадвали билан берилган бўлсин, у ҳолда A яримгруппа бўлади. Лекин у қисқартиришга эга бўлмайди, чунки $(a*e=a*a)\wedge(e*a=a*a)$ муносабатлардан $a=e$ бўлиши келиб чиқмайди

2.

$*$	e	a
E	e	a
A	a	a

2 - таъриф. Агар A яримгруппа бўлиб, A тўпلام $*$ амалга нисбатан e нейтрал элемент мавжуд бўлса, у ҳолда **моноид** дейилади.

Мисоллар. 3. Юқоридаги 2-мисолда келтирилган яримгруппа моноид бўлади.

4. $\mathbf{N}$ алгебра мултипликатив моноид бўлишини кўрсатиш осон. $\mathbf{N}$ аддитив яримгруппа моноид бўлмайди, чунки $\mathbf{N}$ тўпلامда қўшиш амалига нисбатан нейтрал элемент мавжуд эмас.

Айтайлик A яримгруппа бўлсин, у ҳолда

$$\forall(a_1, a_2, \dots, a_n \in A) a_1 * a_2 * \dots * a_n \quad (1)$$

СИМВОЛНИ

$$a_1 * a_2 * \dots * a_n = (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1}) * a_n$$

маоносида тушунилади.

Агар $*$ амал $+$ (қўшиш) дан иборат бўлса, (1)ни қисқача $\sum_{k=1}^n a_k$

кўринишда, $*$ амал $\cdot$ (кўпайтириш) дан иборат бўлса, $\prod_{k=1}^n a_k$ кўринишда

белгилаймиз. Демак,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n \quad (2)$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n \quad (3)$$

Хусусий ҳолда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ бўлса, у ҳолда (2) $na = (n-1)a + a$, (3) эса $a^n = a^{n-1} \cdot a$ кўринишга келади.

Алгебранинг хусусий кўринишларидан бири группа тушунчаси бўлиб, у математика ва унинг татбиқларида муҳим аҳамиятга эга.

3-таъриф. G тўпламда аниқланган $*$ бинар амал қуйидаги шартлар (группа аксиомалари) ни қаноатлантирса:

$$1^0. \forall (a, b, c \in G) \quad a * (b * c) = (a * b) * c;$$

$$2^0. \exists (e \in G) \quad \forall (a \in G) \quad a * e = a;$$

$$3^0. \forall (a \in G) \exists (a' \in G) \quad a * a' = e.$$

у ҳолда **G группа** дейилади.

Агар юқоридаги $1^0 - 3^0$ шартларга қўшимча равишда яна $4^0 \quad \forall (a, b \in G) \quad a * b = b * a$ бўлса, у ҳолда G ни коммутатив группа ёки **Абел** группаси дейилади. Агар G чекли тўплам бўлса, G ни **чекли группа** G нинг элементлари сони G группанинг тартиби дейилади. Агарда G чексиз тўплам бўлса, G группанинг тартиби **чексиз** дейилади.

Агар $+$ бинар амал $+$ (қўшиш) дан иборат бўлса, G группани **аддитив** дейилади. Бу ҳолда $\forall (a, b \in G) \quad a + b = b + a$ кўринишда ёзилади ва уни a ва b

элементларни йигиндиси дейилади. Агар $*$ амал $\cdot$ (кўпайтириш) амалидан иборат бўлса, G ни **мультипликатив группа** дейилади, $a*b$ ни $a \cdot b$ ёки ab кўринишда белгиланади ҳамда a ва b элементларнинг кўпайтмаси дейилади.

Мисоллар. 5. $A=\{x,y\}$ - икки элементли тўплам, $G=\{y_1,y_2\}$ - A ни ўзига биектив акслантиришлар тўплами бўлиб, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_1(y)=y$, $\varphi_2(x)=y$, $\varphi_2(y)=x$ кўринишда берилган ва $\circ$ акслантиришларнинг кўпайтмаси (композицияси) дан иборат бўлсин, у ҳолда G алгебра Абел группаси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, группанинг 1^0 аксиомасининг бажарилишини бевосита текшириб кўриш мумкин.

Масалан. $[(\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \varphi_2](x) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \varphi_2(x) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(y) = \varphi_2(\varphi_1(y)) = \varphi_2(y) = x \Rightarrow (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \varphi_2 = \varphi_1$; $[\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2)](x) = \varphi_2 \circ (\varphi_1(x)) = \varphi_2(\varphi_1(y)) = \varphi_2(y) = x \Rightarrow \varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_1$ булардан $(\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2)$ келиб чиқади. Қолган мумкин бўлган ҳолларни ҳам шу каби текшириб кўриш мумкин. 1^0 . G да φ_1 нейтрал элемент вазифасини бажаради. 2^0 φ_1 ва φ_2 ларнинг ҳар бири ўз - ўзига тескари бўлади.

$$(\varphi_2 \circ \varphi_2)(x) = \varphi_2(\varphi_2(x)) = \varphi_2(y) = x \Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_1,$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_2)(y) = \varphi_2(\varphi_2(y)) = \varphi_2(x) = y \Rightarrow \varphi_1(y) \Rightarrow$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_2 = (\varphi_1 \circ \varphi_1)(x) = \varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x), (\varphi_1 \circ \varphi_1)(y) = \varphi_1(\varphi_1(y)) = \varphi_1(y) \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_1 = \varphi_1$$

Демак, $\varphi_1^{-1} = \varphi_1$, $\varphi_2^{-1} = \varphi_2$

4^0 . $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ эканлигини бевосита текшириб кўриш осон. Демак, G Абел группаси экан.

Группанинг қуйидаги хоссаларининг мулртипликатив группа учун келтирамиз. Бу хоссалар ихтиёрий группалар учун ҳам ўринга эга бўлади. Бу ҳолда $*$ амал кўпайтириш, $e=1$ $a^1=a^{-1}$ дан иборат бўлади.

1-теорема. Агар G группа бўлса, $\forall a \in G$ учун $a^{-1}a=1$ тенглик уринга эга бўлади.

Исбот. Айтайлик $x \in G$ $a^{-1} \in G$ га тескари элемент бўлса, яъни $a^{-1}x=1$. У холда $a=a \cdot 1=a(a^{-1} \cdot x)=1 \cdot x$, $a=1 \cdot x$, $a^{-1}a=a^{-1} \cdot (1 \cdot x)=(a^{-1} \cdot 1)x=a^{-1} \cdot x=1$, яъни $a^{-1}x=1$. Теорема исботланди.

2-теорема. G группа бўлса, $\forall a \in G$ $1 \cdot a=a$ бўлади.

ИСБОТ. $\forall a \in G$ $a^{-1} \cdot a=1$ 3^0 аксиомадан эса $aa^{-1}=1$ келиб чиқади. Шунинг учун $1 \cdot a=(a \cdot a^{-1})a=a \cdot (a^{-1} \cdot a)=a \cdot 1=a$. Демак, $1 \cdot a=a$.

3-теорема. Агар $ax=1$ ва $ay=1$ бўлса, $x=y$ бўлади.

ИСБОТ. $ay=1$ $y=a^{-1}$ шунинг учун 1-теоремадан $ya=1$ тенглик ўринли $y=y1=y(ax)=(ya)x=1x=x$.

Демак, $x=y$.

1-натижа. G группа бўлса $\forall a \in G$ $(a^{-1})^{-1}=a$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $a^{-1}a=aa^{-1}=a$, $(a^{-1})^{-1}=a$.

2-натижа. G ихтиёрий группада $\forall a, b \in G$ $ax=b$ ва $ya=b$ тенгламалар ягона $x=a^{-1}b$, $y=ba^{-1}$ ечимларга эга.

3-натижа. G группа бўлса, $1(e)$ ундаги ягона бирлик (нейтрал) элемент бўлади.

4-натижа. $\forall a, b \in G$ учун $(ab^{-1})=b^{-1}a^{-1}$ тенглик ўринга эга.

Ҳақиқатан ҳам, $(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=(a1)a^{-1}=aa^{-1}=1$.

4-таъриф. G группанинг $H \neq \emptyset$ қисм тўплами унинг **қисм** группаси (группа остиси) дейилади. Агар H G да аниқланган амалга нисбатан ўзи группа бўлса.

4-теорема. $H \neq \emptyset$ тўплами G группанинг қисм тўплами бўлсин. H G нинг қисм группаси бўлиши учун а) $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$; б) $a \in H \Rightarrow a' \in H$ шартлар ўринга эга ўринга эга бўлиши зарур ва етарлидир.

4-§. Алгебрик амалларга нисбатан ҳалқа ва майдоннинг умумий таърифлари

Айтайлик, E - бўш бўлмаган тўплам. $+$, $\cdot$ ундаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари бўлсин.

1-ТАЪРИФ. Агар E тўпламда аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирса E ни **ҳалқа** дейилади,

Яъни:

1. $\forall (a, b, c \in E) a + (b + c) = (a + b) + c$, 2) $\forall (a, b \in E) a + b = b + a$
3. $\forall (0 \in E) \forall (a \in E) a + 0 = a$, 4) $\forall (a \in E) \exists (-a) \in E a + (-a) = 0$
- 5) $\forall (a, b, c \in E) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- 6) $\forall (a, b, c \in E) a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$

Агар E ҳалқада 7. $\forall (a, b, c \in E) a \cdot b = b \cdot a$ аксиома ўринга эга бўлса E **коммутатив ҳалқа** дейилади.

Агар E коммутатив ҳалқада 8. $\exists 1 \in E, 1 \neq 0 \forall (a \in E) a \cdot 1 = a$ бўлса E **бирлик элементга эга бўлган ҳолда жисм** дейилади.

Агар E коммутатив ҳалқада

8. $\exists 1 \in E, 1 \neq 0 \forall (a \in E) a \cdot 1 = a$

9. $\forall a \in E a \neq 0 \exists a^{-1} \in E a \cdot a^{-1} = 1$

аксиомалар ўрнига эга бўлса, E ни **майдон** дейилади.

1-4 аксоималардан E коммутатив аддитив группа эканлиги келиб чиқади, уни E ҳалқанинг аддитив группаси дейилади.

2-ТАЪРИФ. Агар $\forall (a, b \in E) a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ бўлса, у ҳолда E ҳалқанинг a ва b элементларини **нолнинг бўлувчилари** дейилади.

3-ТАЪРИФ. Нолнинг бўлувчисига эга бўлмаган ҳалқани **бутунлик соҳаси** дейилади.

МИСОЛЛАР . $\mathbb{Z}$ - бутун сонлар тўплами одатдагидек қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан коммутатив, бирлик элементга эга бўлган ҳалқа бўлади:

2. $K = Z[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in Z\}$ ҳалқа бўлади.

4-ТАЪРИФ. E ҳалқа ва $E \supset K \neq \emptyset$ унинг қисм тўплами бўлиб, K ҳам E даги амалларга нисбатан ҳалқа бўлса K ҳалқа E ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлади.

5-ТАЪРИФ. P майдон ва $P \supset H \neq \emptyset$ унинг қисм тўплами бўлиб, P майдонда аниқланган амалларга нисбатан H майдон бўлса, H майдон E майдоннинг **қисм майдони** дейилади.

6-ТАЪРИФ. Айтайлик P майдон E бутунлик соҳаси бўлсин. Агар

1. E P ни қисм ҳалқаси бўлса.

2. $\forall (x \in P) \exists (a, b \in E) x = a \cdot b^{-1}$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда P ни E бутунлик соҳасининг **нисбатлари майдони** дейилади.

МАСАЛАН. Q - рационал сонлар майдони Z бутун сонлар ҳалқасининг нисбатлари майдони бўлади.

Агар E ҳалқа бўлса, $\forall a, b \in E$ учун қуйидаги тенгликлар ўринга эга бўлади:

1. $a + b = a \Rightarrow b = 0$

2. $a + b = 0 \quad b = -a;$

3. $(-a) = a;$

4. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$

5. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

6. $(-a)(-b) = ab$

Агар P майдон бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринга эга бўлади:

ТЕОРЕМА. Айтайлик E ҳалқа K эса унинг бўш бўлмаган қисм тўплами бўлсин. K E ҳалқанинг қисм ҳалқаси бўлиш учун а) $\forall a, b \in K \quad a+b, a \cdot b \in E$ б) $a \in K \Rightarrow (-a) \in K$ шартларни ўринга эга бўлиш зарур ва етарлидир.

5-§. Тўплам системалари. Тўпламлар ҳалқаси ва алгебраси

Тўпламлар ҳалқаси. Элементлари тўпламлардан иборат бўлган тўпламга тўпламлар системаси дейилади. Бундан буён, агар олдиндан таъкидланмаса, тўпламлар системаси сифатида олдиндан тайинланган X тўпламнинг қисм тўпламларидан тузилган системаларни қараймиз. Тўпламлар системасини одатда $F, G, R, \mathcal{R}$ ва х.к. каби готик ҳарфлар билан белгилаймиз.

Агар F тўпламлар системасидан олинган ихтиёрий $A \in F, B \in F$ элементлар устида бирор ρ алгебраик амал аниқланган бўлиб, бу амал натижасида ҳосил бўлган элемент яна шу F системага тегишли бўлса, у ҳолда F системани ρ амалга нисбатан ёпиқ система дейилади.

Тўпламлар системасида ρ алгебраик амаллар: $\cup$ -тўпламлар бирлашмаси; $\cap$ -тўпламлар кесишмаси; $\setminus$ -тўпламлар айирмаси; Δ - тўпламларнинг симметрик айирмаси бўлиши мумкин.

ТАЪРИФ: Агар F тўпламлар системаси $\cap$ ва Δ амалларига нисбатан ёпиқ бўлса, яъни $\forall A, B \in F$ лар учун

$$A \cap B \in F \text{ ва } A \Delta B \in F$$

ўринли бўлса, у ҳолда F системани тўпламлар ҳалқаси дейилади.

$\cap, \Delta$ амаллари орқали A ва B тўпламларнинг йиғиндиси

$$A \cup B (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

A ва B тўпламларнинг айирмаси эса

$$A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

тенгликлар орқали ифодалангани туфайли F тўпламлар ҳалқаси $\cup$ ва $\setminus$ амалларга нисбатан ҳам ёпиқ эканлиги келиб чиқади.

Бундан ташқари тўпламлар ҳалқаси

$$C = \bigcup_{k=1}^n A_k, D = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

кўринишдаги чекли сондаги тўпламлар бирлашмаси ва чекли сондаги тўпламлар кесишмасига нисбатан ҳам ёпиқ эканлиги ўз-ўзидан равшан.

F халқа \ амалга нисбатан ёпиқ эканлигидан $\forall A \in F$ учун $A \setminus A = \emptyset \in F$ бўлганлигидан ҳар қандай тўпламлар халқаси бўш тўплам $\emptyset$ ни ўз ичига қабул қилиши келиб чиқади.

ТАЪРИФ. E тўплам F тўпламлар системасининг бирлик элементи дейилади, агар бу тўплам F системага тегишли бўлиб, $\forall A \in F$ лар учун $A \cap E = A$ тенглик ўринли бўлса.

Бирлик элементга эга бўлган тўпламлар халқаси тўпламлар алгебраси деб аталади.

МИСОЛЛАР 1. Ихтиёрий A тўплам учун $\mathcal{R}(A)$ орқали A нинг барча қисм остилари системасини белгилаймиз. $\mathcal{R}(A)$ система $E=A$ бирлик элементга эга бўлган тўпламлар алгебрасини ҳосил қилади.

2. Ихтиёрий бўш бўлмаган A тўплам учун $\{A, \emptyset\}$ система алгебра ҳосил қилади. Бунда бирлик элемент $E=A$ бўлади.

3. Ихтиёрий A тўпламнинг барча чекли қисм остилари системаси тўпламлар халқасини ҳосил қилади. Агар A тўпламнинг ўзи ҳам чекли тўплам бўлса, у ҳолда ҳосил қилинган тўпламлар системаси алгебра ҳам бўла олади.

4. Ҳақиқий сонлар ўқидаги барча чегараланган тўпламлар системаси халқа ҳосил қилади, лекин бу система алгебра бўла олмайди.

Тўпламлар ярим халқаси. Абстракт ўлчовлар назариясида халқа тушунчаси билан бир қаторда ундан умумийроқ, айтилиши мумкин зарур тушунчалардан бири бўлган ярим халқа тушунчасини киритамиз.

ТАЪРИФ: 1) Агар G тўпламлар системаси $\emptyset$ - бўш тўпламни ўз ичига қабул қилса;

2) Агар бу система тўпламлар кесишмасига нисбатан ёпиқ бўлса;

3) $\forall A \in G$ ҳамда $A_1 \subset A$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $A_1 \in G$ учун, шундай ўзаро кесишмайдиган $A_2, A_3, \dots, A_n \in G$, тўпламлар топилиб $(A_i \in G, A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = \overline{1, n} \quad i \neq j)$ A тўплам

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

кўринишда ифодаланса, G тўпламлар системаси **ярим ҳалқа** дейилади,

Ҳар қандай тўпламлар ҳалқаси ярим ҳалқа бўла олади. Ҳақиқатан ҳам $G =$ ҳалқа бўлса у ҳолда A ва $A_1 \subset A \in G$ бўлгани учун $A_0 = A \setminus A_1 \in G$ бўлади, ҳамда $A = A_0 \cup A_1$ (бунда $A_0 \cap A_1 = \emptyset$) ўринлидир.

Лекин ҳар қандай ярим ҳалқа ҳалқа бўла олмайди. Масалан, G ҳақиқий сонлар ўқидаги барча $[a, b)$ кўринишдаги ярим очик интерваллар системаси бўлсин. Текшириш мумкинки G ярим ҳалқани ташкил қилади, яъни $a_1 \leq a_2 \leq b_1 \leq b_2$ лар учун $[a_1, b_1) \wedge [a_2, b_2) = [a_2, b_1)$ бўлади. $\emptyset = [a; a)$ ҳамда $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$ учун

$[a; b) = [a; a_1) \cup [a_1; a_2) \cup [a_2; a_3) \cup \dots \cup [a_n; b)$ ўринлидир. Лекин G ҳалқа бўла олмайди, чунки $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ учун

$$[a_1; b_1) \Delta [a_2; b_2) \notin G$$

Ярим ҳалқа орқали ҳосил қилинган ҳалқа. Фараз қилайлик $R(G)$ бирор G системани ўз ичига олган минимал ҳалқа бўлсин. $R(G)$ ҳалқа ҳар бир элементи кўринишини аниқлаш муҳим масала бўлиб ҳисобланади. Агар G ихтиёрий система бўлса $R(G)$ ҳалқа элементи кўринишини айтиш мураккабдир, мабодо G система ярим ҳалқа бўлса, у ҳолда $R(G)$ ҳалқа элементи кўринишини айтиш мумкин.

Аниқроғи қуйидаги теорема ўринлидир.

ТЕОРЕМА 3. G ярим ҳалқа бўлиб, $R(G)$ уни ўз ичига олган минимал ҳалқа бўлсин. У ҳолда ҳар бир $A \in R(G)$ учун шундай $A_1, A_2, \dots, A_k \in G$ ҳалқадан олинган ўзаро кесишмайдиган элементлар топиладики $(A_i \in G, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j = \overline{1, k})$ қуйидаги ёйилма ўринлидир:

$$A = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G}}^n A_k$$

σ - алгебралар. Математиканинг кўп масалаларида, хусусан, абстракт ўлчовлар назариясида чекли сондаги тўпламларнинг бирлашмаси ёки кесишмасидан ташқари санокли сондаги тўпламларнинг бирлашмаси ёки кесишмасини ҳам қарашга тўғри келади. Шунинг учун тўпламлар ҳалқасидан бошқа бўлган қуйидаги тушунчани ҳам киритамиз.

ТАЪРИФ. F тўпламлар ҳалқаси σ - ҳалқа_ сигма ҳалқа деб аталади, агар F га тегишли бўлган ҳар қандай $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ санокли тўпламлар билан бирга уларнинг $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ йиғиндиси ҳам F га тегишли бўлса.

Ўлчовнинг таърифи. Маълумки тўғри тўртбурчакнинг юзи, кесманинг узунлиги ва ҳ.к. шунга ўхшаш катталикларни аниқлаганимизда уларнинг ҳаммаси учун умумий бўлган ҳоссаларни кузатамиз, яъни бу катталиклар манфий эмас, ҳамда уларни ўлчаш учун фигураларни майда бўлақларга бўлиб ўлчаб сўнг уларнинг йиғиндисини олишимиз мумкин. Шунинг учун бу ҳоссаларни умумлаштириб қуйида абстракт ўлчов тушунчасини аниқлаймиз. Дастлаб қуйидаги тушунча бизга керак бўлади.

ТАЪРИФ. G тўпламлар системасини R ҳақиқий сонлар тўпламига бир қийматли акслантирувчи $\mu: G \rightarrow R$ акслантириш G да аниқланган тўплам функцияси деб аталади.

Агар G системада μ тўплам функцияси аниқланган бўлса, у ҳолда бу системани G_μ орқали белгилаймиз.

ТАЪРИФ. G_μ да аниқланган $m(\cdot)$ тўплам функцияси ўлчов дейилади, агар :

- 1) $m(\cdot)$ нинг аниқланиш соҳаси G_m ярим ҳалқа бўлса;
- 2) $\forall A \in G_m$ учун $m(A) \geq 0$ бўлса, яъни $m: G_m \rightarrow R_0^+$;
- 3) $m(A)$ -аддитив бўлса, яъни G_m дан олинган ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламлар учун $(A_i \in G_m, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j = \overline{1, k})$

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ бўлиб}$$

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

тенглик ўринли бўлса.

ИЗОХ $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ эканлигидан ҳамда m нинг аддитив эканлигидан $m(\emptyset) = 2m(\emptyset)$ ёки $m(\emptyset) = 0$ эканлиги келиб чиқади.

МИСОЛ: G система сифатида текисликдаги кўриниши $\{(x;y): a \leq x < b; c \leq y < d\}$ бўлган тўғри тўртбурчаклар системасини оламиз.

G нинг ярим ҳалқа ташкил этишини кўриш қийин эмас. G га тегишли бўлган ихтиёрий $A = \{(x;y) : a \leq x < b ; c \leq y < d\}$ тўплам учун m тўплам функцияси қийматини $m(A) = (b-a)(d-c)$ тенглик орқали аниқлаймиз. Бундай аниқланган тўплам функцияси ўлчовнинг 2) ва 3) шартларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

σ - аддитивлик . Анализнинг кўпгина масалаларида тўпламларнинг чекли бирлашмасидан, ташқари санокли сондаги тўпламларнинг бирлашмасини ҳам қарашга тўғри келиб қолади. Шу сабабли биз қуйидаги таърифни берамиз.

ТАЪРИФ: G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов σ - аддитив ўлчов дейилади, агар G_m ярим ҳалқага тегишли бўлган ихтиёрий ўзаро кесишмайдиган, санокли сондаги $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ($A_i \in G$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$) тўпламлар учун $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$ бўлганда

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

тенглик ўринли бўлса.

G ҳалқада берилган m ўлчов учун $m(B) < \infty$ бўлса, m ни чекли дейилади.

Айтайлик G алгебра, E ундан бирлик элемент, m унда аниқланган чекли ўлчов бўлсин.

Таъриф. $\sum_k m(B_k)$ йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегараси A тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади ва у

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k B_k} m(B_k), \quad (B_k \in G \quad k=1,2,\dots)$$

орқали белгиланади.

Ушбу $\mu_*(A)=m(E)-\mu^*(E \setminus A)$ миқдор A тўпламнинг ички ўлчовли дейилади.

Агар $\mu_*(A)=\mu^*(A)$ бўлса, A тўпламни ўлчовли тўплам дейилади, унинг ўлчовнинг $\mu(A)$ билан белгилаймиз.

6-§. Майдон ва унинг асосий хусусиятлари

Энди ҳалқаларнинг умумий назариясига яна қайтамиз. Ҳалқалар учун оддий алгебра ва арифметикадаги кўп қонунларнинг сақланиб қолишини биз аниқланган эдик. Агарда биз қуйидаги икки шартнинг бажарилишини талаб қилсак: 1) R ҳалқа коммутатив бўлсин ва 2) $ax=b$ тенглама $a \neq 0$ бўлганда, ҳарвақт R ичида ечиладиган бўлсин, у ҳолда ҳалқанинг алгебраик хоссалари яна ҳам кучаяди. Қуйидаги таҳрифни киритамиз.

Майдон деб шундай коммутатив P ҳалқага айтиладики, унинг ичида ҳеч бўлмаганда битта нольдан фарқ қиладиган элемент мавжуд бўлиб P дан олинган ҳарқандай $a \neq 0$ ва b элементлар учун P ичида $ax=b$ ечиладиган тенгламадир (тақсим қилишнинг бажарилиши).

Майдон қандай қўшимча хоссалар эга экан? Майдон нольдан ва карама-қарши элементлардан бошқа яна бирлик элементга ва тесқари элементларга эга бўлар экан.

Фараз қилайлик $c \neq 0$ майдоннинг бирор элементи бўлсин. Майдон таърифи бўйича ҳарвақт шундай e элементни танлаб олиш мумкинки, натижада

$$ce = ec = c \tag{4}$$

бўлади. Очик маълумки, $e \neq 0$. Агар $e=0$ бўлса эди, $c=ce=0$ бўлиб, $c \neq 0$ шарт бузилган бўлар эди.

Кўрсатиш мумкинки, e майдоннинг бирлик элементи, яъни ҳарқандай a элемент учун

$$ae = ea = a$$

бўлади. Исбот қилиш мақсадида майдондан шундай x элементни танлаб оламизки, у қуйидаги тенгламани қаноатлантирсин

$$cx = a \quad (5)$$

сўнгра бу тенгламанинг икки томонини e га кўпайтирамиз. У вақтда, ассоциатив ва коммутатив қонунлардан фойдалансак, мана бу

$$(ce)x = ae$$

ҳосил бўлади ёки (4) ва (5) ларга биноан

$$a = ae$$

бўлади. Ўз-ўзидан маълумки, ea ҳам a га тенг, чунки майдон коммутатив ҳалқадир.

Энди мана бу

$$ax = e \quad (a \neq 0) \quad (6)$$

типдаги тенгламани кўриб чиқайлик. Бунинг биттагина ечилмага эга эканлигини қуйидагича кўрсатиш мумкин. Фараз этайлик (6) тенгламанинг ечилмасиз битта эмас, балки иккита бўлсин: $x=x_1, x=x_2$, у вақтда

$$ax_1 = e \quad (7)$$

$$ax_2 = e \quad (8)$$

бўлади. (7) тенгликнинг икки томонини x_2 га кўпайтирамиз:

$$(ax_1)x_2 = x_2 \cdot e$$

Лекин иккинчи томондан, (8) га асосан

$$(ax_1)x_2 = (ax_2)x_1 = e \cdot x_1 = x_1$$

бундан $x_1 = x_2$ ҳосил бўлади.

(8) тенгламанинг ёлғиз биргина ечилмасини a^{-1} ёки $\frac{1}{a}$ орқали

белгилаш ва a нисбатан тескари элемент деб айтиш қабул қилинган. Яна

шуни ҳам эслаб ўтаемизки, $(a^{-1})^{-1} = a$ бўлади, чунки $a^{-1}x = e$ тенгламанинг ечилмаси, шубҳасиз a бўлади:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

Энди умумий ҳолга ўтаемиз:

$$ax = b \quad (a \neq 0).$$

Бунинг икки томонини $\frac{1}{a}$ га кўпайтириш билан биз ёлғизгина

$$x = ba^{-1} = b \cdot \frac{1}{a} \text{ ечилмага эга бўламиз ва уни } \frac{b}{a} \text{ кўринишда ёзамиз. } \frac{b}{a}$$

символ устида бўладиган амалларнинг касрлар устида бўладиган амаллардан ҳечқандай фарқи йўқлигини кўриш қийин эмас: $ad = bc$ ($b \neq 0, d \neq 0$)

бўлганда ва фақат шу ҳолдагина $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ бўлади.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ (кўшиш қоидаси) } (b \neq 0, d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (кўпайтириш қоидаси) } (b \neq 0, d \neq 0);$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \text{ (бўлиш қоидаси) } (b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0)$$

Шу муносабатларнинг ҳаммаси исбот қиламиз. Биринчисидан бошлаймиз. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тенгликнинг икки томонини bd га кўпайтирсак

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)d = b\left(\frac{c}{d} \cdot d\right) \text{ ёки } ad = bc$$

бўлади.

Аксинча, $ad = bc$ бўлсин. Бу тенгликнинг икки томонини $b^{-1}d^{-1}$ ни кўпайтирсак

$$add^{-1}b^{-1} = cbb^{-1}d^{-1} \text{ ёки } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

келиб чиқади.

Қўшиш қондасини исбот қилмоқ учун $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)$ ни bd га кўпайтириб,

дистрибутив қонундан фойдалансак

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)bd = \frac{a}{b}bd \pm \frac{c}{d}bd$$

ёки баҳзи маълум бўлган қисқартишлардан кейин мана бу

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)bd = ad \pm cb$$

келиб чиқади. Ниҳоят, сўнгги тенгликнинг икки томонини $(bd)^{-1}$ га кўпайтириб ушбу натижага эга бўламиз:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Учинчи муносабат ҳам (кўпайтириш қондаси) айнан шу усулда исбот қилинади. Яъни:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)bd = \frac{a}{b} \cdot b \cdot \frac{c}{d} \cdot d = ac$$

бунинг икки томонини $(bd)^{-1}$ га кўпайтирилса

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ҳосил бўлади.

Энди бўлиш қондасини текшираамиз. Маълумки

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$$

Ҳақиқатан ҳам, $\frac{c}{d}$ га нисбатан $\frac{d}{c}$ тескари элементдир, чунки

кўпайтириш қоидаcига мувофиқ

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{cd}{cd} = e$$

Демак,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

шунинг исботи қилиш керак эди.

Арифметиканинг одатдаги қонунлари майдон учун ҳам сақланганидан, бутун даражалар устида бўладиган ҳамма маълум қоидаларни айнан элементар алгебрадаги каби келтириб чиқариш мумкин. Шу билан бирга манфий кўрсаткичли a^{-m} даража деб (m - бутун мусбат сон) биз

$$\frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a} \right)^m \quad (a \neq 0) \text{ни тушунамиз. Манфий кўрсаткичли бўлмаган } a^m$$

даражани биз юқорида аниқланган эдик.

Нихоят, қуйидаги арифметик қонуннинг майдонда ҳам бажарилишини қайд қилиб ўтамиз: агарда иккита кўпайтирувчининг кўпайтмаси нольга тенг бўлса, у ҳолда кўпайтирувчилардан камида биттаси нольга тенг бўлади, бошқача айтганда майдон нольнинг бўлувчиларига эга эмас.

Бу оддий исбот қилинади: $a \neq 0$ бўлсин, у ҳолда $ab=0$ тенгликнинг икки томонини $\frac{1}{a}$ га кўпайтурсак $b=0$ келиб чиқади.

Юқорида баён қилинган фикрларни якунлаймиз. Биз юқорида кўрдикки майдон фақат ноль ва қарама-қарши элементларгагина эга бўлмасдан, балки бирлик элементга ва тескари элементларга ҳам эга. Ундан ташқари, майдон нольнинг бўлувчиларига эга эмас.

Мана шу айтилганларнинг моҳияти нима. Бунинг маъноси шуки,

- 1) қўшиш амалига нисбатан майдон абель группасидир,
- 2) кўпайтиришга нисбатан, майдоннинг нольдан бошқа ҳамма элементлари абель группасини ташкил қилади.

Майдонларга мисоллар. 1. Арифметик қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан, ҳамма рационал сонлар тўплами майдон учун энг содда мисол бўлаолайди. Дарҳақиқат, амалларга нисбатан рационал сонлар тўплами коммутатив ҳалқа ташкил қилиб, рационал $a \neq 0$ ва b учун $ax=b$ тенглама шу ҳалқада ҳамавақт ечиладиган тенгламаладир; чунки иккита рационал соннинг нисбати яна рационал сон бўлади.

Аксинча, ҳамма бутун сонлар тўплами арифметик қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан майдон эмас, фақат коммутатив ҳалқ ташкил этади, чунки унинг ичида $ax=b$ ($a \neq 0$) тенгламани ҳарвақт ҳам ечиб бўлабермайди, бунга сабаб шуки, иккита бутун соннинг нисбати ҳар доим бутун бўлабермайди.

2. Бошқа мисол-ҳамма ҳақиқий (яъни рационал ва иррационал) сонлар тўплами олдинги арифметик амалларга нисбатан майдон ташкил қилади, чунки бу тўплам кўраётган амалларга нисбатан коммутатив ҳалқа ташкил қилиб, шу тўплама тақсим қилиш амали ҳарвақт бажарилади (албатта, нольга бўлиш чиқариб ташланади). Бу ишимизда биз кўпинча сонли майдонлар билан иш кўрамиз, яъни шундай сонли ҳалқлар билан иш кўрамизки, улар ичида бўлиш амалини, нольга бўлишни эътиборга олмаганда бажариш мумкин бўлсин. Ҳамма комплекс сонлар тўплами энг кенг сонли майдон ташкил қилади: у ҳарқандай сонли майдонни ўз ичида бирн қисми сифатида сақлайди.

3. Ҳамма бутун сонларни икки синфга ажратамиз: жуфт сонлар синфига ва тоқ сонлар синфига. Биринчи синфни A_0 орқали ва иккинчи синфни A_1 орқали белгилашни шарт қилиб оламиз, сўнгра иккита A_0 ва A_1 элементлардан иборат бўлган S тўпламни текширамиз. Бу тўпламда биз

иккита алгебраик амални – синфларни қўшиш ва кўпайтиришнинг таърифини берамиз.

A_i ва A_j синфларнинг $A_i + A_j$ йиғиндиси деб биз A_0 ва A_1 синфлардан шунисини тушунамизки у, A_i синфнинг ҳар бир сонини A_j синфнинг ҳарбир сони билан қўшишдан ҳосил бўлган бутун сонларнинг ҳаммасини ўз ичида сақласин.

A_i ва A_j синфларнинг $A_i A_j$ кўпайтмаси деб A_0 ва A_1 синфлардан шунисини айтамызки, унинг ичида A_i синфнинг ҳарбир сонини A_j синфнинг ҳар бир сони билан кўпайтиришдан ҳосил бўлган ҳамма бутун сонлар бўлсин.

Қуйидагича бўлишини кўрсатиш қийин эмас

$$A_0 + A_0 = A_0, \quad A_0 + A_1 = A_1, \quad A_1 + A_1 = A_0 \quad (9)$$

ва

$$A_0 A_0 = A_0, \quad A_0 A_1 = A_0, \quad A_1 A_1 = A_1 \quad (10)$$

(9) тенгликларнинг тўғрилиги шундан маълумки, иккита жуфт соннинг йиғиндиси ҳам жуфт сон, жуфт сон билан тоқ соннинг йиғиндиси ҳам тоқдир ва ҳамма иккита тоқ сон йиғиндиси жуфт сонди. (10) тенгликнинг тўғрилиши ҳам шунга ўхшаш фикрларга асосланади.

Шундай қилиб, биз S тўпламда иккита алгебраик амал тайинладик – синфларни қўшиш ва кўпайтириш. Бу амаллар коммутатив, ассоциатив ва дистрибути қонунларга буйсунади, чунки бу амаллар бутун сонларни арифметик қўшиш ва кўпайтириш амалларни билан боғлангандир, булар учун эса юқоридаги қонунлар тўғридир.

(9) тенгликлардан бевосита кўринадики, A_0 синф S тўпламнинг нольдан элементи бўлиб ҳизмат қилади ва S тўпламнинг ҳарбир элементи ўз-ўзига қарама-қарши (A_0 синф учун A_0 ўзи қарама-қарши, A_1 учун қарама-қарши A_1 инг ўзидир). Демак, биз A_0 синфни 0 орқали белгилай оламиз. Ўз-ўзидан маълумки, бундаги 0 тўплам S нинг нольли A_0 элементининг белгиланиши бўлиб, 0 сон эмасдир.

Шундай қилиб C тўплам синфларни қўшиш ва қўпайтириш амалларига нисбатан коммутатив ҳалқа ташкил қилади. Биз ҳозир C нинг майдон эканлигини ҳам кўрамиз.

Ҳақиқатан ҳам, (10) тенгликларга мурожаат қилайлик. Улар ҳар қандай $a \neq 0$ ва b учун $ax=b$ тенгламанинг C ичида ечилишини кўрсатади, масалан, $A_1 x = A_0$ тенгламанинг ечилмаси $x=A_0$ ва $A_1 x=A_1$ тенгламанинг ечими $x=A_1$ бўлади.

(10) тенгликлардан аёнки, C майдоннинг бирлик элементи A_1 синфдан иборатдир. Демак, биз уни e орқали белгилай оламиз.

Шундай белгилашлар натижасида (9) ва (10) тенгликлар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left. \begin{array}{l} 0 + 0 = 0, \quad 0 + e = e, \quad e + e = 0 \\ 0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot e = 0, \quad e \cdot e = e \end{array} \right\} \quad (11)$$

Ҳозир текширилган майдонга мисол қуйидаги томондан ўрнлидир. (11) тенгликлардан биттасини, масалан $e+e=0$ ни олайлик. Энди a элементнинг ka қарралисининг таърифини эсласак биз $e+e=0$ тенгликни $2e=0$ кўринишда ёзаоламиз. Бундан биз кўрамизки, бирлик e элементининг мусбат ne қарраси нольга бўлган майдонлар ҳам мавжуд экан.

Шундай қилиб икки типдаги майдонлар бор: бирлик e элементининг фақат нольли қарраси нольга тенг бўлган майдон ва бирлик e элементининг фақат нольга тенг бўлган майдон. Иккинчи типдаги майдон учун шундай бутун мусбат p сон мавжуд бўлиши керакка, у сон учун $pe=0$ бўлиб, p дан кичик бўлган ҳарқандай бутун мусбат n сон учун ne нольга тенг бўлмайди. Биз шундай p сонни майдоннинг характеристикаси деб атаймиз ва шунга кўра иккинчи типдаги майдонларни чекли характеристикага эга бўлган, яъни p характеристикали майдонлар деймиз, биринчи типдаги майдонларни эса, нолли характеристикага эга бўлган майдонлар деймиз.

Чекли характеристикали майдонлар қуйидаги хоссаларга эга.

1. Агарда p майдон чекли p характеристикали бўлса, у ҳолда p туб сон бўлиши керак.

Исбот. Аксинча фараз этайлик, p - мурккаб сон бўлсин:

$$p = n_1 n_2$$

бундаги n_1, n_2 сонлар p дан кичик бўлган бутун мусбат сондир. Дистрибутив қонунга асосан

$$\begin{aligned} (n_1 e)(n_2 e) &= \underbrace{(e + \dots + e)}_{n_1 \text{ марта}} \underbrace{(e + \dots + e)}_{n_2 \text{ марта}} = \\ &= \underbrace{e^2 + \dots + e^2}_{n_1 n_2 \text{ марта}} = e + \dots + e = (n_1 n_2) e \end{aligned}$$

бўлади. бундан ушбу натижа келиб чиқади:

$$pe = (n_1 n_2) e = (n_1 e)(n_2 e) = 0$$

Лекин биз биламизки, майдонда нольнинг бўлувчилари бўлмайди. Шунинг учун $n_1 e = 0$ ёки $n_2 e = 0$ бўлади, бироқ бундай бўлиши мумкин эмас, чунки таъриф бўйича p характеристика, $pe = 0$ тенгликни ҳосил қиладиган, бутун мусбат n сонлар орасидаги энг кичик сондир.

2. Чекли p характеристикали p майдондан олинган ихтиёрий a элемент учун $pa=0$ бўлади.

Исбот. a элементнинг мусбат карраси таърифига мувофиқ биз қуйидагича ёза оламиз

$$\begin{aligned} pa &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{p \text{ марта}} = ae + ae + \dots + ae = \\ &= a(e + e + \dots + e) = a(pe) = a \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Нольни характеристикага эга бўлган майдонларга мурожаат қилиб, уларнинг тубандаги хоссаларини қайд қилиб ўтамыз.

Агар P ноль характеристикали майдон, $a-P$ нинг элементи, k – бутун сон бўлсалар, у ҳолда $ka=0$ тенглик фақат $a=0$ ёки $k=0$ бўлганда ва фақат шу ҳолдагина бажарилади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $a=0$ ёки $k=0$ бўлса, шубҳасиз ka ҳам нольга тенг бўлди.

Аксинча, фараз этайлик $ka=0$ бўлсин. У вақтда k мусбат ёки нольга тенг бўлганда мана бу

$$ka = a(ke) = 0$$

ҳосил бўлади, энди бундан, P майдонда нольнинг бўлувчилари бўлмаганлиги учун, $a=0$ ёки $ke=0$ келиб чиқади. Сўнгги ҳолда k нольга тенг бўлиши керак, чунки P майдоннинг характеристикаси нольга тенг.

k манфий ёки нольга тенг бўлган ҳолда $k=-n$ фараз этсак:

$$ka = -na = n(-a) = (-a)(ne) = 0$$

ҳосил бўлади, бундан $-a=0$ ёки $ne=0$, яъни $a=0$ ёки $k=0$ келиб чиқади.

3 мисолдаги C майдоннинг характеристикаси 2 га тенг эканлигини кўриш мумкин. Равшанки, ҳамма сонли майдонлар ноль характеристикали майдонлардан иборатдир.

Майдонга тегишли яна битта мисолни кўриб чиқайлик.

4. M орқали ушбу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлган ҳамма матрицалар тўпламини белгилаймиз, бундаги a, b - турли ҳақиқий сонлардир. Матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан берилган тўпламнинг майдон ташкил қилишини кўрсатамиз.

Матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларининг бир қийматли эканлигига шубҳа йўқ. Шунинг учун энди бу амалларнинг M тўплам ичида бажарилиши мумкин эканлигини кўрсатамиз. M дан олинган ушбу иккита ихтиёрий

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

матрицаларни қўшса ва ўзаро кўпайтирсак мана бу натижа

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$$

ҳосил бўлади, булардаги

$$\begin{aligned}
a &= a_1 + a_2; \\
a' &= a_1 a_2 - b_1 b_2; \\
b &= b_1 + b_2; \\
b' &= a_1 b_2 + a_2 b_1
\end{aligned}$$

яъни биз ўша типдаги матрицага эга бўлдик.

Матрицаларни қўшиш ва кўпайтиришнинг ассоциатив ва дистрибутив қонунларга бўйсунлигини, унинг устига, матрицаларни қўшишнинг коммутатив қонунга бўйсунлигини биз ўз вақтида аниқлаб ўтган эдик. Шунинг учун биз энди бу ерда кўпайтиришнинг коммутатив қонунга бўйсунлигини аниқлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, бунинг тўғрилигига ишониши мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Текширилаётган тўпламнинг матрицалари орасида нолли матрица ҳам бўлади ва ҳарқандай

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

матрица учун тескари бўлган

$$-A = \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{vmatrix}$$

матрица ҳам M тўпламга қарашли бўлади, чунки $-A$ матрица A каби кўринишга эга. Шундай қилиб биз кўрамизки, матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан M тўплам коммутатив ҳалқа ташкил қилади.

Энди M дан олинган ҳарқандай $A \neq 0$ ва B матрицадар учун $Ax=B$ тенгламанинг M ичида ечилиши мумкин эканлигини кўрсатиш қолади. Бу эса, $A \neq 0$ матрицанинг махсусмас эканлигидан келиб чиқади. Дарҳақиқат,

$A \neq 0$ бўлгани учун A матрицанинг a, b элементларидан камида биттаси нольдан фарқ қилади, шунга кўра у матрицанинг ушбу

$$D = a^2 + b^2$$

детерминант нольга тенг бўлмайди.

$A \neq 0$ махсусмас матрица бўлгани учун унга тескари бўлган матрица, албатта, бор. Шунини топамиз:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ -b'' & a \end{vmatrix}$$

бундаги

$$a'' = \frac{a}{D}, \quad b'' = -\frac{b}{D}.$$

Кўрамизки, M тўпلامга тегишли матрица келиб чиқди. Энди биз тенгламамизнинг ечимини ёзаоламиз. Бу эса $x = A^{-1}B$ дан иборат бўлиб, шубҳасиз, $A^{-1}B$ яна M тўпلامга қарашлидир, чунки A^{-1} ва B матрицалар M га қарашлидир. Бинобарин, биз кўрсатдикки, матрицаларни қўшиш ва қўпайтиришга нисбатан M тўпلام майдонни ташкил қилади.

Майдон тушунчаси бизга нима беради? Бу тушунча ҳамма натижаларини ҳар қандай майдонга тарқатишга йўл очади. Детерминантлар назарияси, чизикли тенгламалар назарияси, чизикли алмаштирмалар ва матрицалар назарияси, n - ўлчовли векториал фазолар ва уларнинг чизикли алмаштирмалари назарияси – комплекс сонлар майдони учун баён қилинган мана шу назарияларнинг ҳаммаси ҳеч қандай ўзгаришсиз ихтиёрий P майдонга ўтказилишлари мумкин фақат бу жойда сонлар тўғрисида эмас, балки текширилаётган P майдоннинг элементлари тўғрисида сўзлашга тўғри келади. Бу, албатта тушунарлик бир нарсас, чунки исботимиз майдоннинг алгебраик амалларининг умумий хоссаларига асосланган эди.

Ҳозирги айтилган фикримизга қўшимча қилиб шунини қайд қилиб ўтамизки, a_i координаталари P майдондан олинган n - ўлчовли $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ векторни P майдон устидаги n - ўлчовли вектор ва шундай векторларнинг тўпلامини P майдон устидаги n - ўлчовли векториал фазо деб айтиш қабул қилинган.

Алгебранинг асосий вазифаси алгебраик амалларнинг хоссаларини ўрганишдан иборат эканлигини эслатиб ўтган эдик. Алгебраик нуқтаи назардан ўрнаштирилган амалга нисбатан ўзларини бир хилда олиб борадиган тўпламлар орасида ҳеч қандай фарқ йўқ, уларни айнан бир хил деб ҳисоблаш мумкин.

Мисол учун $a + b\sqrt{2}$ кўринишдаги сонларнинг L_1 тўпламини олайлик, бундаги a, b ихтиёрий бутун сонлар. Сонларни арифметик кўпайтириш шу тўпламда аниқланган амалдан иборат бўлади. Ҳақиқатан ҳам L_1 тўпламнинг икки сонини кўпайтирсак, биз мудом бирқийматли равишда яна шу тўпламнинг бирор сонига эга бўламиз:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

бундаги $a = a_1a_2 + 2b_1b_2$ ва $b = a_1b_2 + a_2b_1$ - яна бутун сонлардир.

L_1 тўплам билан бир қаторда, яна қуйидаги

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлган иккинчи тартибли матрицаларнинг L_2 тўпламини кўриб чиқайлик, бундаги a, b - ихтиёрий бутун сонлар. Кўриш мумкинки, матрицаларни кўпайтириш шу тўпламда аниқланган амалдан иборат.

L_1 ва L_2 тўпламлар орасида қуйидаги ўзаро бир қийматли мосликни ўрнатиш мумкин:

$$a + b\sqrt{2} \leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (12)$$

яъни ҳар бир $a + b\sqrt{2}$ сонга мос қилиб, шу $a + b\sqrt{2}$ даги a ва b ларга эга бўлган матрицани қўйиш мумкин.

Энди, L_1 тўпламдаги ихтиёрий иккита соннинг кўпайтмасига нима мос келишини текшириб кўрайлик. Маълумки,

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

бўлгани учун ушбу

$$(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

сонга юқорида қабул қилинган (12) мосликка мувофиқ мана бу матрицани

$$\begin{vmatrix} (a_1a_2 + 2b_1b_2) & 2(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 + 2b_1b_2) \end{vmatrix} \quad (13)$$

мослаб олиш керак бўлади, у ҳолда $(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})$ кўпайтмага (13) матрица мос келади. Лекин текшириб кўриш мумкинки, (13) матрица ушбу матрица билан

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

кўйидаги матрицанинг

$$\begin{vmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

кўпайтмасига тенгдир. Демак,

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) \leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Шундай қилиб кўрамизки, L_1 тўпламдаги сонларнинг кўпайтмасига L_2 тўпламдаги мос матрицалар кўпайтмаси жавоб беради. Мана шу (14) мосликнинг ўзига мос бўлган хусусиятига кўра L_1 ва L_2 тўпламлар улар ичида ўрнаштирилган амалларга нисбатан ўзларини бир хилда тутадилар:

L_1 тўпламдаги сонларни кўпайтириш амалининг ҳар қандай хоссаси L_2 тўпламдаги матрицани кўпайтириш амали учун ҳам ўринлиқдир ва аксинча.

Масалан, L_1 тўплам сонларни кўпайтириш, коммутатив қонунга бўйсунishi керак.

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2}) \quad (15)$$

(14) муносабатга биноан (15) тенгликнинг чап қисмига ушбу кўпайтма

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

мос келиши керак, ўнг қисмига эса мана бу

$$\begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

мос келиши керак. Мослик ўзаро бир қийматлик бўлгани учун тенг сонларга тенг матрицалар жавоб бериши керак. Бундан натижа, (16) ва (17) кўпайтмалар тенг бўлишлари керак:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Шундай қилиб L_2 тўплам матрицаларини кўпайтириш ҳам коммутатив қонунга бўйсунishi керак. Ҳақиқатда ҳам (18) тенгликни бевосита текшириб кўриш фикримизнинг тўғрилигини тасдиқлайди.

Хулоса

Билимдан, профессионал жиҳатдан ҳамда. ғайрат шижоатли шахсларни, ўз мамлакатининг чинакам ватанпарварларини тарбиялай оладиган, уларни буюк миллий маданиятнинг улкан маънавий мероси билан бойита оладиган жаҳон фани ва маданияти дурдоналаридан баҳраманд эта оладиган мамлакатгина буюк келажакка эришиши мумкинлигини ёддан чиқармаслик лозим.

Битирув малакавий ишида математиканинг асосий тушунчаларидан бўлган алгебраик структуралар кўриб чиқилди. Алгебраик структуралар орқали математиканинг турли бўлимлари аксиоматик қурилишга эга бўладилар. Аксиоматик қуриш эса математика ривожига асосий негиз бўлиб хизмат қилади. Битирув ишида тўплам ва тўпламлар устида амаллар, алгебраик амаллар ва уларнинг турлари, группа, яримгруппа ва моноидлар, алгебрик амалларга нисбатан ҳалқа ва майдоннинг умумий таърифлари, тўплам системалари, тўпламлар ҳалқаси ва алгебраси, майдон ва унинг асосий хусусиятлари кўриб чиқилди ва мисоллар билан бойитилди. Кўрилган масалалар муҳим аҳамиятга эга бўлиб математиканинг турли бўлимлари учун умумий хоссалар айтиш имкониятини беради. Масалан майдон тушунчаси бизга нима беради? Бу тушунча ҳамма натижаларини ҳар қандай майдонга тарқатишга йўл очади. Детерминантлар назарияси, чизиқли тенгламалар назарияси, чизиқли алмаштирмалар ва матрицалар назарияси, n -ўлчовли векториал фазолар ва уларнинг чизиқли алмаштишлари назарияси – комплекс сонлар майдони учун баён қилинган мана шу назарияларнинг ҳаммаси ҳеч қандай ўзгаришсиз ихтиёрий P майдонга ўтказилишлари мумкин фақат бу жойда сонлар тўғрисида эмас, балки текширилаётган P майдоннинг элементлари тўғрисида сўзлашга тўғри келади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Барча режа ва дастурларимиз Ватанимиз тараққиётини юксалтириш, халқимиз фаровонлигини оширишга хизмат қилади. Ўзбекистон Республикаси Президенти И.Каримов маърузаси. Халқ сўзи. 2011 йи 22 январ
2. Асосий вазифамиз – Ватанимиз тараққиёти ва халқимиз фаровонлигини янада юксалтиришдир. – Президент Ислам Каримовнинг 2009 йилнинг асосий якунлари ва 2010 йилда Ўзбекистонни ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг мажлисидаги маърузаси // Халқ сўзи, 2010 йил 30 январь.
3. Каримов И.А. Жаҳон молиявий-иқтисодий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари. И.А.Каримов. Т:Ўзбекистон, 2009. – 56 б.
4. Каримов И.А. Энг асосий мезон – ҳаёт ҳақиқатини акс эттириш. – Т.: Ўзбекистон, 2009. – 24б
5. Ўзбекистон Республикаси Президентининг Қарори. «Баркамол авлод йили» Давлат дастури тўғрисида. 2010 йил 27 январь
6. Курош А.Г. Олий алгебра курси , Тошкент «Ўқитувчи», 1967й
7. Искандаров Р. Олий алгебра, 2- қисм Тошкент «Олий ва ўрта мактаб», 1963
8. Гаймназаров Г, Гаймназаров О.Г Функционал анализ курсидан масалалар ечиш, Тошкент «Фан ва технология» 2006 й.
9. Гаймназаров Г., Жомуратов К. чизиқли алгебра элементлари, Гулистон 1999й
10. Фадеев Д.К., Соминский И.С. ,Сборник задач по высшей алгебра. М.»Науки»,1977.
11. Ҳ.Маҳмудов. Алгебра ва сонлар назариясидан амалий машғулотлар. - Фарғона ФДУ.2002. -119 б..

Internet saytlari

1. <http://WWW.mcce.zu>
2. <http://lib.mexmat.zu>, Gelfand
3. [http://WWW.mecceG' zu](http://WWW.mecceG'zu), [http:// lip.mexmet.zu](http://lip.mexmet.zu), Kostrikan A.I.
4. <http://WWW.mecce.zu>, <http://lip.mexmat.zu>, Kurosh A.G.