ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида
УДК 517.95.

Муқимова Дилбархон Хусанбоевна

ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ХОС СОНЛАР ВА ХОС ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДАГИ БАЪЗИ МАСАЛАЛАР

5А460102 – дифференциал тенгламалар мутахассислиги бўйича
магистр академик даражасини олиш учун

МАГИСТРЛИК

ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар: физика - математика фанлари доктори, профессор А.Қ.Ўринов

Фарғона - 2011

МУНДАРИЖА

Кириш... 3

I БОБ. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН МАСАЛАЛАР.......... 8

1.1-§ Лаплас тенгламаси учун ярим доирада қўйилган масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари……………………………….. **8**

1.2-§ Лаплас тенгламаси учун чорак доирада қўйилган масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари…………………………..... **25**

II БОБ. СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН МАСАЛАЛАР... 35

2.1-§ Битта сингуляр коэффициентли тенглама учун бир спектрал масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари……..................... **35**

2.2-§ Сингуляр коэффициентли ва тенг параметрли тенглама учун масалалар……………………………………………………………... **43**

2.3-§ Иккита сингуляр коэффициентли ва турли параметрли тенглама учун масалалар……………………………………........................ **46**

ХУЛОСА……………………………………………………….. 52

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.. 53

КИРИШ.

Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди[1]:

«Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб қадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз келажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачарок қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ.

…Мамлакатимиз келажаги учун Олий Мажлиснинг IX сессиясида қабул қилинган «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури»нинг амалга оширилиши жуда ҳам муҳим аҳамиятга эга.

…Юқори малакали педагог кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашга алоҳида эътибор бериш лозим. Кадрлар тайёрлашнинг сифати, эркин фикрловчи шахс - фуқарони камол топтиришга эртага синф хоналар ва аудиторияларда кимлар дарс ва сабоқ беришига боғлиқ».

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришиш, жумладан юқори малакали кадрлар тайёрлашда миллий дастурнинг ўрни ва аҳамияти беқиёсдир.

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида мустақил ишлашга қодир, рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Бу мақсадга эришиш учун, шунингдек Республикамиз Президенти айтгани каби «мамлакатимизнинг бой илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника

[1] И.А.Каримов. Биз келажагимизни ўз қўлимиз билан қурамиз. Тошкент. Ўзбекистон. 1999. 370-403 бетлар

ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш» учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Мавзунинг долзарблиги.

Гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун бошланғич, чегаравий ва аралаш масалалар қўйиш ва ўрганиш мумкин бўлса, эллиптик типдаги тенгламалар учун фақат чегаравий масалалар ва уларга мос спектрал масалалар қўйилади ва ўрганилади. Буларнинг энг соддалари Дирихле, Нейман ва Стокс масалалари бўлиб, кейинги йилларда нолокал масалалар ҳам ўрганила бошланди. Нолокал масалаларда берилган шарт номаълум функция ёки ҳосилаларининг қаралаётган соҳа чегарасидаги қийматини соҳа ички нуқталаридаги қийматлари билан боғлайди. Ҳозирги кунда бошқа типдаги тенгламалар учун ҳам бундай масалалар жадал ўрганилмоқда.

Мавзунинг ўрганилганлик даражаси.

Эллиптик типдаги дифференциал тенгламалар учун доирада ва ярим доирада хос қийматлари ва хос функцияларини топиш масаласи яхши ўрганилган. Бу йўналиш бўйича ярим доирада хамда чорак доирада Лаплас тенгламаси учун нолокал шартли масалалар ва сингуляр коэффициентли тенгламалар учун эса хатто локал шартли хос қийматлар ва хос функцияларни топиш ҳақидаги масалалар кам ўрганилган.

Тадқиқотнинг мақсади.

Диссертацияда кўзда тутилган асосий мақсад ярим доирада хамда чорак доирада Лаплас тенгламаси учун нолокал шартли ва эллиптик типдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун локал шартли хос қийматлар ҳақидаги масалаларни ўрганиш.

Тадқиқотнинг вазифаси.

Лаплас тенгламаси ва эллиптик типдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун ярим доирада хамда чорак доирада хос қийматлар ҳақидаги баъзи масалаларнинг саноқли сондаги хос қийматларга ва хос функцияларга эга эканлигини исботлаш.

Илмий янгилиги.

Диссертацияда олинган илмий натижаларнинг барчаси янги. Унда эллиптик типдаги тенгламалар учун ярим доирада хамда чорак доирада хос қийматлари ва хос функцияларини топишга оид масалалар баён қилинган. Қўйилган масалалар саноқли сондаги хос қийматларга ва хос функцияларга эга эканлиги исботланган.

Тадқиқот усуллари.

Қўйилган масалаларнинг хос қийматларга ва хос функцияларга эга эканлигини исботлашда ўзгарувчиларни ажратиш, яъни Фурье усулидан фойдаланилган.

Илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосан назарий аҳамиятга эга. Лекин улар эллиптик типдаги тенгламалар учун спектрал масалалар назариясининг янада ривожлантиришда ва бакалавриатнинг «математика» йўналиши талабалари учун махсус курслар ўқишда фойдаланилиши мумкин.

Тадқиқотнинг мухокамаси.

Олинган илмий натижалар ФарДУ қошидаги «Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик соҳаларнинг долзарб муаммолари» илмий семинарида маъруза қилинган. Диссертация мавзуси бўйича 3 та илмий мақола эълон қилинган ва 1 та мақола чоп этиш учун топширилган (рўйхат илова қилинади).

Диссертациянинг тузилиши ва хажми.

Диссертация кириш, икки боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, боблар параграфларга бўлинган. Диссертация 54 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ МАЗМУНИ:

Диссертациянинг кириш қисмида тадқиқот мавзусининг долзарблиги ва унинг ўрганилганлик даражаси батафсил баён қилиниб, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари кўрсатиб ўтилган. Бундан ташқари олинган натижаларнинг илмий янгилиги ҳамда тадқиқот усуллари ҳақида ҳам маълумот берилиб, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, уларнинг апробацияси ҳамда диссертациянинг тузилиши ва хажми баён қилинган.

Биринчи бобда ярим доирада ва чорак доирада ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \qquad (1)$$

тенглама учун қўйилган нолокал масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари топилган.

1.1-§ да (1) тенглама учун ярим доирада A_λ^0, B_λ^0, C_λ^0 ва Γ_λ^0 деб аталган масалалар қўйилган ва ўрганилган. 1.2-§ да (1) тенглама учун чорак доирада A_λ^0, B_λ^0, C_λ^0 ва Γ_λ^0 масалаларнинг аналоглари бўлган A_λ^1, B_λ^1, C_λ^1 ва Γ_λ^1 ҳамда E_λ^1 деб номланган масалалар қўйилган ва ўрганилган.

Иккинчи бобда

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0 \qquad (2)$$

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0 \qquad (3)$$

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0 \qquad (4)$$

тенгламалар учун масалалар ўрганилган.

2.1-§ да (2) тенглама учун F_λ деб белгиланган спектрал масала ўрганилган. 2.2 ва 2.3 -§ ларда (3) ва (4) тенгламалар учун тўрттадан масалалар қўйилган ва ўрганилган. Баён қилинган масалаларни ечишда аввал қутб координаталар системасига ўтилиб, сўнгра ўзгарувчиларни ажратиш усули қўлланилган. Бунда қўйилган масалалар оддий дифференциал тенгламалар учун, жумладан, Бессель ва Гаусс тенгламалари учун хос қийматлари ва хос функцияларини топиш ҳақидаги масалага келтирилган.

I БОБ

ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН МАСАЛАЛАР

1.1-§. Лаплас тенгламаси учун ярим доирада қўйилган масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари.

1.1.1. A_λ^0 масала.

A_λ^0 **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

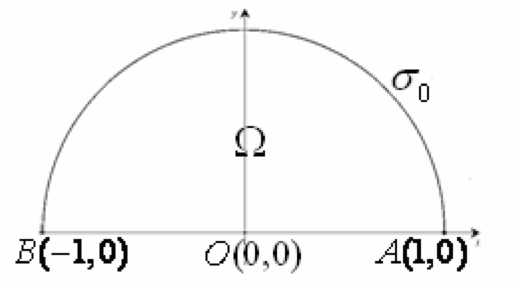
тенгламанинг $\overline{\Omega} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$ соҳада тривиал бўлмаган ва

$$u\big|_{(x,y)\in\overline{\sigma}} = 0\,; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\alpha u(x,0) + \beta u(-x,0) = 0\,, && 0 \le x \le 1\,; \\ &\gamma u_y^{'}(x,0) + \delta u_y^{'}(-x,0) = 0, && 0 < x < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y) \in C(\Omega) \cap C^1(\Omega UOA \cup OB) \cap C^2(\Omega))$ ечими топилсин.

Бу ерда α, β, γ, δ - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \ne 0$ шартларни қаноатлантиради, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(-1,0)$, $\sigma = \{(x,y) \vdots x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ (1-чизма).



1-чизма

Одатда A_λ^0 масалада топилиши талаб қилинаётган λ нинг қийматлари бу масаланинг хос қийматлари, уларга мос тривиал бўлмаган функциялар эса хос функциялари дейилади.

A_λ^0 масала ечимини

$$u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{4}$$

кўринишида қидирамиз.

Бу ерда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = arctg\frac{y}{x},$$

яъни

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

У холда

$$u(x,y) = \delta\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)$$

ва

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\delta_{rr} - \frac{2xy}{r^3}\delta_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4}\delta_{\varphi\varphi} + \frac{y^2}{r^3}\delta_r + \frac{2xy}{r^4}\delta_\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\delta_{rr} + \frac{2xy}{r^3}\delta_{r\varphi} + \frac{x^2}{r^4}\delta_{\varphi\varphi} + \frac{x^2}{r^3}\delta_r - \frac{2xy}{r^4}\delta_\varphi.$$

Буларни тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\delta_{rr} + \frac{1}{r^2}\delta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\delta_r + \lambda\delta = 0. \tag{5}$$

(4) ни (5) га қўйсак

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi''(\varphi)R(r) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0$$

келиб чиқади.

Бундан

$$\frac{r^2\left[R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r)\right]}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

тенгликни оламиз. Бу ифода

$R(r)$ ва $\Phi(\varphi)$ га нисбатан алоҳида-алоҳида тенгламаларга ажралади:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + (\lambda - \frac{\mu^2}{r^2})R(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

(2) шартдан

$$u\Big|_{r=1} = \Phi(\varphi)R(r)\Big|_{r=1} = 0,$$

яъни

$$R(1) = 0$$

тенгликни топамиз. (4) ни (3) га қўямиз:

$$\alpha R(x)\Phi(0) + \beta R(x)\Phi(\pi) = 0,$$

$$\gamma R(x)\Phi'(0) + \delta R(x)\Phi'(\pi) = 0.$$

Бу ердан $R(x) \neq 0$ эканлигини эътиборга олиб, тенгликларнинг ҳар икки томонини $R(x)$ га бўлиб,

$$\alpha\Phi(0) + \beta\Phi(\pi) = 0,$$

$$\gamma\Phi'(0) + \delta\Phi'(\pi) = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. $u(0,0)$ чегараланган бўлганлиги учун $\left|R(0)\right| < +\infty$ шарт ҳам ўринли бўлади. Натижада $\Phi(\varphi)$ ва $R(r)$ функцияларга нисбатан хос қиймат ва хос функциялар хақида қуйидаги масалаларга эга бўламиз:

1-масала. μ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi \tag{6}$$

тенгламанинг $[0;\pi]$ да тривиал бўлмаган ва

$$\alpha\Phi(0) + \beta\Phi(\pi) = 0, \qquad \gamma\Phi'(0) + \delta\Phi(\pi) = 0 \tag{7}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

2-масала. μ ва λ нинг шундай қийматлари топилсинки,

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r - \mu^2)\Phi(r), \qquad 0 < r < 1 \tag{8}$$

тенгламанинг $[0,1]$ да тривиал бўлмаган ва

$$|R(0)| < +\infty, \qquad R(1) = 0 \tag{9}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Аввал 1-масалани ечамиз. Маълумки (6) тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi(\varphi) = k_1\cos\mu\varphi + k_2\sin\mu\varphi \tag{10}$$

кўринишга эга [4], бу ерда k_1 ва k_2 ихтиёрий сонлар. (10) ни (7) га қўйиб, k_1 ва k_2 га нисбатан

$$\begin{cases} k_1(\alpha + \beta\cos\mu\pi) + k_2\beta\sin\mu\pi = 0, \\ k_1\delta\sin\mu\pi - k_2(\gamma + \delta\cos\mu\pi) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Агар бу система тривиал бўлмаган ечимига эга бўлса, (10) функция ҳам тривиал бўлмайди.

(11) система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун, унинг асосий детерминанти нол бўлиши керак, яъни

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta\cos\mu\pi & \beta\sin\mu\pi \\ \delta\sin\mu\pi & \gamma - \delta\cos\mu\pi \end{vmatrix} = 0,$$

ёки

$$(\alpha\delta+\beta\gamma)\cos\mu\pi=-(\alpha\gamma+\beta\delta) \qquad (12).$$

Бу ерда қуйидаги холлар бўлиши мумкин:

1. $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$.

Бунда (12) тенглама ечимга эга эмас. Демак, 1-масала ечимга эга эмас.

2. $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, $\alpha\gamma+\beta\delta=0$.

Бунда (12) ихтиёрий μ учун ечимга эга. Демак, 1-масала, ихтиёрий μ учун тривиал бўлмаган ечимга эга. Бунда, ихтиёрий μ_0 ни олиб, уни (10) га қўйиб,

$$k_1\cos\mu_0\pi+k_2\sin\mu_0\pi\neq 0$$

шартни қаноатлантирувчи k_1, k_2 ларни танлаб, 1-масаланинг тривиал бўлмаган ечимга эга бўламиз.

3. $\alpha\delta+\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$, $\left|\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right|>1$.

Бунда (12) тенглама ечимга эга эмас. Демак, 1-масала ечимга эга эмас.

4. $\alpha\delta+\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$, $\left|\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right|\leq 1$.

Бунда (12) тенглама чексиз кўп

$$\mu_m=\frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right]+(2n-1), \quad n\in N$$

ечимларга эга бўлиб, 1-масала чексиз кўп хос қиймат ва хос функцияларга эга бўлади. Бу ерда α, β, γ, δ ни турли вариантларда танлаш мумкин. Биз хусусий холларни кўриб ўтамиз.

а) $\alpha=\beta=\gamma\neq\delta$.

Бунда $\mu_n=2n-1$, $n\in N$ бўлади. μ нинг бу қийматлари учун (11) системани

$$k_1^2+k_2^2\neq 0$$

шартни қаноатлантирувчи $\forall k_1^2, k_2$ лар қаноатлантиради. У ҳолда, (10) га асосан 1-масала

$$\Phi_n(\varphi)=k_1\cos\left[(2n-1)\varphi\right]+k_2\sin\left[(2n-1)\varphi\right],\ n\in N$$

тривиал бўлмаган, ечимларга эга бўлади. Бу ерда k_1, k_2 лар $k_1^2+k_2^2\neq 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий ўзгармаслар.

б) $\alpha=-\beta=\gamma=-\delta\neq 0$.

Бунда $\mu_n=2n$, $n\in N$ бўлиб, 1-масала

$$\Phi_n(\varphi)=k_1\cos(2n\varphi)+k_2\sin(2n\varphi),\ n\in N$$

тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлади. Бу ерда k_1, k_2 лар

$$k_1^2+k_2^2\neq 0$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий ўзгармаслар.

в) $\alpha=\beta\neq 0$, $\gamma\neq\delta$.

Бунда $\mu_2=2n-1$, $n\in N$ бўлиб, (11) дан $k_2=0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, 1-масала

$$\Phi_n(\varphi)=k_1 cos(2n-1)\varphi, \qquad n\in N$$

хос функцияларга эга, бу ерда $k_1\neq 0$ ихтиёрий сон.

2) $\gamma=\delta\neq 0$, $\alpha\neq-\beta$.

Бунда $\mu_n=2n-1$, $n\in N$ бўлиб, 1-масала

$$\Phi_n(\varphi)=k_2\sin[(2n-1)\varphi], \qquad n\in N$$

хос функцияларга эга бўлади.

д) $\alpha=-\beta\neq 0$, $\gamma\neq\delta$.

Бунда $\mu_n = 2n-1$, $n \in N$ бўлиб, (12) дан $k_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун 1-масала

$$\Phi_n(\varphi) = k_1 cos\left((2n-1)\varphi\right),\ n \in N$$

хос функцияларга эга бўлади.

е) $\alpha \neq \beta$, $\gamma = -\delta \neq 0$.

Бунда $\mu_n = 2n-1$, $n \in N$ бўлиб, (12) дан $k_1 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун 1-масала

$$\Phi_n(\varphi) = k_2 \sin[(2n-1)\varphi], \qquad n \in N$$

хос функцияларга эга бўлади.

Энди 2-масалани ечишга ўтамиз. (8) – Бессель тенгламаси бўлиб, унинг умумий ечими

$$R(r) = l_1 J_\mu\left(\sqrt{\lambda r}\right) + l_2 Y_\mu\left(\sqrt{\lambda r}\right) \tag{13}$$

кўринишга эга [2], бу ерда l_1 ва l_2 - ихтиёрий ўзгармаслар бўлиб, $J_\mu(z)$ ва $Y_\mu(z)$ мос равишда биринчи ва иккинчи тур Бессель функцияларидир.

(13) функциялар ичида (9) нинг биринчи шартини қаноатлантирувчиси

$$R(r) = J_\mu\left(\sqrt{\lambda r}\right), \qquad \mu \geq 0$$

функциядан иборат. Хусусий холда, бу ерда $\mu = \mu_n$ (μ_n- 1-масалада топилган мусбат сонлар) деб олсак, яъни (8) тенгламанинг (9) шартлардан биринчисини қаноатлантирувчи

$$R_n(r) = J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda r}\right)$$

функцияга эга бўламиз.

Бу функцияни (9) нинг 2-шартига бўйсундириб, яъни $r = 1$ деб,

$$J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0, \qquad n\in N \qquad (14)$$

тенгламага эга бўламиз. Маълумки бундай тенгламалар саноқли сондаги ҳақиқий ечимларига эга [4]. (14) нинг m- мусбат илдизини $\theta_m^{(\mu_n)}$ деб белгиласак, 2-масаланинг хос қийматларга эга бўламиз:

$$\lambda_{n,m}=\left[\theta_m^{(\mu_n)}\right]^2,\ n,m\in N .$$

Бу хос қийматларга мос хос функциялар

$$R_{n,m}=J_{\mu_n}\left[\theta_m^{(\mu_n)}r\right], \qquad m,n\in N \qquad (15)$$

функциялардан иборат.

(15) ва 1-масаланинг μ_n- хос қийматига мос $\Phi_n(\varphi)$ хос ечимини (5) га қўйиб, A_λ^0 масаланинг

$$\lambda_{n,m}=\left[\theta_m^{(\lambda_n)}\right]^2, \qquad n,m\in N$$

хос қийматларга мос хос функцияларга эга бўламиз:

$$u_{n,m}(x,y)=k_{n,m}J_{\mu_m}\left[\theta_m^{(\mu_n)}r\right]\Phi_n(\varphi),\ m,n\in N,$$

бу ерда $k_{n,m}\neq 0$ ихтиёрий ўзгармаслар.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремани исботладик:

1-теорема. Қуйидаги шартлардан бири бажарилган бўлсин:

1) $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, $\alpha\gamma+\beta\delta=0$;

2) $\alpha\delta+\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$, $\left|\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right|\leq 1$.

У холда A_λ^0 масала саноқли сондаги хос қийматларга ва хос функцияларга эга.

1.1.2. B_λ^0 масала.

B_λ^0 **масала.** λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг $C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\cup OA\cup OB\right)\cap C^2\left(\Omega\right)$ синфга тегишли ва (2) ҳамда

$$u\left(x,0\right)=0, \qquad -1\le x\le 0; \tag{16}$$

$$u(x,0)=\int_0^x u_y(t,0)J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, \quad 0\le x\le 1 \tag{17}$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Бу масалани ҳам ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечамиз.

(4) ни (2), (16) ва (17) га қўйиб,

$$R(1)\Phi(\varphi)=0,\ 0\le\varphi\le\pi;$$

$$R(x)\Phi(\pi)=0\ \ 0\le x\le 1;$$

$$\Phi(0)R(r)=\Phi'(0)\int_0^r R(t)\cdot\frac{1}{t}J_0\left[\sqrt{\lambda}(r-t)\right]dt, \qquad 0\le r\le 1$$

ларни ҳосил қиламиз.

Булардан ташқари, $u(0,0)=0$ эканини эътиборга олиб, $\Phi(\varphi)R(0)=0$ шартни топамиз.

Юқоридаги тенгламаларда $\Phi(\varphi)\not\equiv 0$, $R(r)\not\equiv 0$ эканини эътиборга олиб қуйидаги иккита масалага келамиз:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\mu^2)R(r)=0, & 0<r<1, \quad (18)\\ R(0)=0,\ R(1)=0, & (19)\end{cases}$$

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, & 0 < \varphi < \pi, \qquad (20) \\ \Phi(\pi) = 0, & (21) \\ R(x)\Phi(0) = \Phi'(0) \int\limits_0^x R(t) t^{-1} J_0 \left[\sqrt{\lambda}(x-t) \right] dt, & 0 \le x \le 1. \qquad (22) \end{cases}
$$

Аввал (18) - (19) масаланинг ечимини топамиз. Маълумки (18) тенгламанинг умумий ечими

$$
R(r) = c_1 J_\mu \left(\sqrt{\lambda} r \right) + c_2 Y_\mu \left(\sqrt{\lambda} r \right)
$$

формула билан берилади, бу ерда c_1, c_2 - ихтиёрий ўзгармас сонлар. Бу ерда c_1 ва c_2 ўзгармасларни шундай танлаймизки, $R(r)$ (19) шартларни қаноатлантирсин. Шунинг учун бу ифодада $c_2 = 0$ деймиз, акс холда $Y_\mu(x)$ функция $x = 0$ нуқтада чегараланган эмас. Бундан ташқари, $\mu \ge 0$ дейиш керак, чунки шу холдагина $J_\mu(0) = 0$ бўлади. $c_1 \ne 0$ ни эътиборга олсак ва умумийликни чегараламай $c_1 = 1$ деб, (18) тенгламанинг (19) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$
R(r) = J_\mu \left(\sqrt{\lambda} r \right), \qquad \mu > 0 \tag{23}
$$

эканини топамиз.

Энди иккинчи масала ечимини топамиз. (23) ни (22) га қўйиб,

$$
J_\mu \left(\sqrt{\lambda} r \right) \Phi(0) = \Phi'(0) \int\limits_0^r \frac{1}{t} J_\mu \left(\sqrt{\lambda} r \right) J_0 \left[\sqrt{\lambda}(r-t) \right] dt
$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$
\int\limits_0^a \frac{1}{t} J_k(ca - cx) J_\nu(cx) dx = \frac{1}{\nu} J_{k+\nu}(ac), \ a, \mathrm{Re}\,\nu > 0, \ \mathrm{Re}\,k > -1 \tag{24}
$$

формуладан фойдаланиб [4],

$$\Phi(0)=\frac{1}{\mu}\Phi'(0), \qquad \mu>0 \tag{25}$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, (II) масаланинг ечими (25) тенгликни қаноатлантирар экан, яъни (II) масала {(20), (21), (25)} масалага тенг кучли экан.

Охирги масалани ечамиз. (20) тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi(\varphi)=c_1\cos\mu\varphi+c_2\sin\mu\varphi \tag{26}$$

кўринишда бўлади.

Буни (21) ва (25) га қўйиб, c_1 ва c_2 ларни топамиз:

$$\Phi(0)=c_1,\ \Phi'(0)=\left(-\mu c_1\sin\mu\varphi+\mu c_2\cos\mu\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}=\mu c_2.$$

Буларни (25) га қўйиб $c_1=c_2$ га эга бўламиз. Буни (26) га қўйиб эса

$$\Phi(\varphi)=c_1(\cos\mu\varphi+\sin\mu\varphi)$$

ни хосил қиламиз. Бу ерда $\varphi=\pi$ десак, (21) га асосан

$$\Phi(\pi)=c_1(\cos\mu\pi+\sin\mu\pi)=0, \qquad c_1\neq 0$$

бўлади. Бундан эса

$$\cos\mu\pi+\sin\mu\pi=0$$

тригонометрик тенглама келиб чиқади. Бу тенглама чексиз кўп ечимларга эга:

$$\mu=k-\frac{1}{4}, k=0,\pm 1,\pm 2,....$$

Бу ечимлар ичидан $\mu>0$ шартни қаноатлантирувчи қийматларини ажратамиз, яъни

$$k-\frac{1}{4}>0 \tag{27}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи k ларга мос μ ларни оламиз. (27) дан кўринадики, агар $k=1,2,....$ бўлса, (27) тенгсизлик бажарилади.

$$\mu_k = k - \frac{1}{4}, \qquad k=1,2,... \qquad (28)$$

қийматларда {(20), (21), (22)} масала тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлади. Бу ечимлар ушбу кўринишга эга:

$$\Phi_k(\varphi) = c_{1k}\left(\cos\mu_k\varphi + \sin\mu_k\varphi\right), \qquad k=1,2,... \qquad (29)$$

$\mu_k(k=1,2,...)$нинг (28) қийматларида (23) ни (19) шартларнинг иккинчисига қўйиб λ га нисбатан қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$J_{\mu_k}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \qquad k=1,2,... \qquad (30).$$

Маълумки [4], бу тенглама чексиз кўп ечимларга эга ва у ечимлар хақиқийдир. (30) тенгламанинг m- мусбат илдизини α_{mk} билан белгиласак, B_λ масаланинг хос қийматларни

$$\lambda_{mk} = \alpha_{mk}^2, \quad k=1,2,...; \quad m=1,2,... \qquad (31)$$

кўринишида эканлигини топамиз. λ нинг бу қийматларини (23) га қўйиб,

$$R_{mk}(r) = J_{\mu k}(\alpha_{mk} r) \qquad (32)$$

функцияларга эга бўламиз. (29), (31) ва (32) ларга асосан, B_λ^0 масаланинг тривиал бўлмаган саноқли сондаги ечимлари мавжудлигини ва улар

$$u_{mk}(x,y) = c_{mk}\left(\cos\mu_k\varphi + \sin\mu_k\varphi\right) J_{\mu k}\left(\sqrt{\lambda_{mk}}\, r\right), \qquad m,k=1,2... \qquad (33)$$

тенглик билан аниқланишини топамиз, яъни қуйидаги теорема ўринли эканлигини топамиз:

2-теорема. B_λ^0 масала саноқли сондаги хос қийматлари ва хос функцияларига эга. Хос қийматлар (31) тенглик билан, хос функциялар эса (33) тенгликлар билан аниқланади. Бу ерда

$$\mu_k = k - \frac{1}{4}, \qquad k \in N,$$

$\alpha_{m,k}$ эса (30) тенгламанинг m - чи мусбат илдизи.

1.1.3. C_λ^0 масала.

C_λ^0 **масала.** λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega \cup OA \cup OB\right) \cap C^2\left(\Omega\right)$ синфга тегишли ва (2), (16) ва

$$u_y(x,0) = 0, \qquad -1 \le x \le 0 \tag{34}$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Бу масалани ечишда ҳам ечимни

$$u(x,y) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

кўринишда қидирамиз, сўнгра юқорида бажарилган ишларни амалга ошириб, (21) шарт ўрнига

$$\Phi'(\pi) = 0 \tag{35}$$

шартни оламиз. (20) нинг умумий ечимини (25) ва (35) га қўйиб,

$$\sin \mu\pi - \cos \mu\pi = 0$$

кўринишдаги тригонометрик тенгламани хосил қиламиз.

Бу тенглама

$$\mu = k + \frac{1}{4}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

кўринишидаги ечимга эга бўлиб, уларнинг ичидан $\mu > 0$ шартни қаноатлантирувчиларини ажратиб оламиз:

$$\mu_k = k + \frac{1}{4}, \qquad k = 0,1,2,\dots .$$

У холда (20), (25), (35) масаланинг ечими

$$\Phi_k(\varphi) = c_{1k}(\cos\mu_k\varphi + \sin\mu_k\varphi), \qquad k = 0,1,2,...$$

кўринишда бўлади.

μ_k нинг шу қийматларида (26) ни (19) нинг иккинчисига қўйиб, λ га нисбатан (30) кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама хар бир μ_k $(k = 0,1,2,...)$ учун саноқли сондаги ечимларга эга. Уларнинг m- чи мусбат ечимини $\alpha_{m,k}$ билан белгиласак, қўйилган масаланинг хос сонлари (31) кўринишда бўлади. У холда масаланинг Ω сохадаги хос функцияларини

$$u_{mk}(x,y) = C_{mk}(\cos\mu_k\varphi + \sin\mu_k\varphi)J_{\mu_k}\left(\alpha_{m,k}r\right)$$

кўринишида ёзишимиз мумкин, бу ерда $k = 0,1,2,\dots$, $m = 1,2,\dots$.

Демак, бу ерда ҳам 2-теорема ўринли экан, фақат бу холда

$$\mu_k = k + \frac{1}{4}, \qquad k = 0,1,2,\dots .$$

1.1.4. Γ_λ^0 масала.

Γ_λ^0 масала. λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг Ω сохада аниқланган ва (2), (17) ва

$$u(x,0) = \int_0^x u_y(t,0)J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt, \qquad -1 \le x \le 0 \qquad (35)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Бу масалани ечишда ҳам аввал қутб координаталар системасига ўтиб, сўнгра ўзгарувчиларни ажратамиз. Натижада

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r-\mu^2)R(r)=0, & 0<r<1; \\ \left|R(0)\right|<+\infty, \qquad R(1)=0; \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0, & 0<\varphi<\pi; \\ R(x)\Phi(0)=\Phi'(0)\int\limits_0^x R(t)t^{-1}J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, & 0\le x\le 1; \\ R(x)\Phi(\pi)=-\Phi'(\pi)\int\limits_0^x R(t)t^{-1}J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, & 0\le x\le 1 \end{cases} \tag{37}$$

масалаларга эга бўламиз, бу ерда μ^2 - номаълум ўзгармас.

(36) масаланинг дастлабки икки шартини қаноатлантирувчи

$$R(r)=J_\mu\left[\sqrt{\lambda}r\right], \quad \mu>0$$

ечимидан фойдаланиб, (24) формула ёрдамида (37) масалани

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0, \quad 0<\varphi<\pi; \\ \mu\Phi(0)=\Phi'(0); \\ \mu\Phi(\pi)=-\Phi'(\pi) \end{cases} \tag{38}$$

кўринишга келтириш мумкин. (38) даги тенгламанинг умумий ечими бўлган (26) функцияни (38) нинг 2- ва 3- шартларига қўйиб ва μ га бўлиб,

$$\begin{cases} c_1=c_2\ , \\ c_1\cos\mu\pi+c_2\sin\mu\pi=c_1\sin\mu\pi-c_2\cos\mu\pi, \end{cases}$$

яъни

$$\begin{cases} c_1 = c_2, \\ c_1(\cos\mu\pi - \sin\mu\pi) + c_2(\sin\mu\pi + \cos\mu\pi) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз.

Бу система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун $\cos\mu\pi = 0$ бўлиши зарур. Бу тригонометрик тенглама чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, улар

$$\mu = \pm\frac{1}{2} + 2k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

формула билан топилади. Уларнинг ичида $\mu > 0$ шартни қаноатлантирувчилари эса

$$\mu_n = k - \frac{1}{2}, \; k = 1, 2, ...$$

тенглик билан аниқланади. Буни ва $c_1 = c_2$ тенгликни эътиборга олиб, (26) дан (37) масаланинг ечимларини топамиз:

$$\Phi_k(\varphi) = c_k\left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi\right], \quad k = 1, 2, ... \tag{39}$$

(36) масалада

$$\mu = \mu_k = k - \frac{1}{2}$$

деб, бу масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиш шартига эга бўламиз:

$$J_k(\sqrt{\lambda}) = 0, \; k \in N.$$

Бу тенгламалар саноқли сондаги хақиқий илдизларга эга бўлиб, уларнинг m-чи мусбат илдизини α_{km} билан белгиласак, (37) масаланинг хос қийматларига эга бўламиз:

$$\lambda_{k,m} = \alpha_{km}^2, \qquad k, m = 1, 2, ... \tag{40}$$

Бу хос қийматларга (37) масаланинг

$$R_{k,m}(r) = J_{k-\frac{1}{2}}(\alpha_{km} r) \tag{41}$$

хос ечимлари мос келади.

Энди (4), (39) ва (41) ларни эътиборга олиб, (40) сонлар Γ_λ^0 масаланинг ҳам хос қийматлар эканлигини ва унга мос хос функциялар

$$u_{k,m}(x,y) = \left[C_{k,m} J_{k-\frac{1}{2}}\left[\alpha_{k,m}\sqrt{x^2+y^2} \right] \cos\left(k-\frac{1}{2} \right)\varphi + \right.$$

$$\left. + \sin\left(k-\frac{1}{2} \right)\varphi \right], \qquad k,m = 1,2,... \tag{42}$$

тенгликлар билан аниқланишни топамиз.

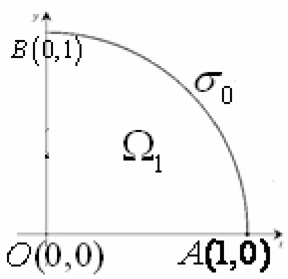
3-теорема. Γ_λ^0 масала саноқли сондаги хос қийматлари ва хос функцияларига эгадир ва улар мос равишда (40), (42) тенгликлар билан аниқланади, бу ерда

$$\mu_k = k - \frac{1}{2},\ k \in N$$

α_{km} - эса $J_{k-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0$ тенгламанинг m - чи мусбат илдизи.

1.2-§. Лаплас тенгламаси учун чорак доирада қўйилган масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари.

Ω_1 орқали xOy текислигининг $\sigma_0 = \left\{(x,y): x^2+y^2=1, y>0, x>0\right\}$ ёй ва



2-чизма

$OA = \left\{(x,y): y=0, 0<x<1\right\}$, $OB = \left\{(x,y): x=0, 0<y<1\right\}$ кесмалар билан чегараланган сохасини белгилайлик (2-чизма). Бу сохада Лаплас тенгламаси учун қўйилган бир неча масалаларнинг хос қийматлари ва хос функцияларини топиш билан шуғулланамиз.

1.2.1. A_λ^1, B_λ^1, C_λ^1 ва Γ_λ^1 масалалар.

A_λ^1 **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг $\overline{\Omega}_1$ сохада аниқланган ва

$$u\big|_{(x,y)\in\overline{\sigma_0}\cup\overline{OB}} = 0; \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha u(t,0) + \beta u(0,t) = 0, & 0 \le t \le 1; \\ \gamma u_y'(t,0) + \delta u_x'(0,t) = 0, & 0 < t < 1 \end{cases} \qquad (3)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1)\cap$ $\cap C^1(\Omega_1\cup OA\cup OB)\cap C^2(\Omega_1)$ ечими мавжуд бўлсин, α, β, γ, δ – берилган сонлар бўлиб, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$.

Бу масала ечимини хам

$$u(x,y)=R(r)\Phi(\varphi) \tag{4}$$

кўринишида қидирсак, $R(r)$ га нисбатан A_λ^0 даги 2-масалага келамиз, $\Phi(\varphi)$ га нисбатан эса қуйидаги масалага келамиз:

$1'$**-масала.** μ_1 параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$\Phi''(\varphi)+\mu_1^2\Phi(\varphi)=0, \qquad 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

тенгламанинг $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ да тривиал бўлмаган ва

$$\alpha\Phi(0)+\beta\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \gamma\Phi'(0)+\delta\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{6}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Бу масала ечимини

$$\Phi(\varphi)=k_1\cos\mu_1\varphi+k_2\sin\mu_1\varphi \tag{7}$$

кўринишида қидирамиз. (7) ни (6) шартларга бўйсундирсак,

$$\begin{cases} k_1\left(\alpha+\beta\cos\mu_1\frac{\pi}{2}\right)+k_2\beta\sin\frac{\mu_1\pi}{2}=0, \\ k_1\delta\sin\frac{\mu_1\pi}{2}-k_2\left(\gamma+\cos\frac{\mu_1\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \tag{8}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. (8) системада $\left(\frac{\mu_1}{2}\right)=\mu$ белгилаш

киритсак, (8) система 1-§ даги (11) система кўринишига келади. $1'$-масаланинг тадқиқотининг қолган қисми 1-масаладаги каби амалга

оширилади. 1-масаланинг якуний натижаларида $\mu=\frac{\mu_1}{2}$ десак, $1'$- масала

натижаларига эга бўламиз. Жумладан:

1. $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$ да масала ечимга эга эмас.

2. $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, $\alpha\gamma+\beta\delta=0$ да масала чексиз кўп ечимларга эга.

3. $\alpha\delta+\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$, $\left|\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right|>1$ да масала ечимга эга эмас.

4. $\alpha\delta+\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\gamma+\beta\delta\neq 0$, $\left|\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right|\leq 1$ да масала чексиз кўп ечимларга эга.

Агар $1'$-масаланинг хос қийматларини μ_{1n} билан белгиласак, $\mu_{1n}=2\mu_n$ бўлиб, $1'$ масаланинг хос функциялари $\Phi_n(2\varphi)$ бўлади, бу ерда μ_n ва $\Phi_n(\varphi)$ 1-масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари. У холда $R(r)$га нисбатан

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\left[\lambda^2-(2\mu_n)^2\right]R(r)=0, & 0<r<1, \\ |R(0)|<+\infty, \quad R(1)=0 \end{cases} \tag{9}$$

масалага эга бўламиз.

Бу масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун

$$J_{2\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0, \qquad n=1,2,... \tag{10}$$

тенгликлар бажарилиши керак. $\mu_n > 0$ бўлганлиги учун бу тенгламалар саноқли сондаги хақиқий илдизларга эга бўлиб, уларни биз $\alpha_{n,m}$ деб белгиласак, A_λ^1 масаланинг

$$\lambda_{n,m} = \alpha_{n,m}^2, \qquad\qquad n,m = 1,2,...$$

хос қийматларга эга бўламиз. Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз: A_λ^1 масала саноқли сондаги хос сонларга ва хос функцияларга эга бўлиб, унинг хос сонлари (10) тенгламанинг ечимлари сифатида топилади, хос функциялари эса

$$u_{n,m}(x,y) = C_{n,m}\Phi_n(\varphi)R_{n,m}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right), \quad n,m = 1,2,...$$

тенглик орқали аниқланади, бу ерда $\Phi_n(\varphi)$ ва $R_{n,m}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)$ функциялар мос равишда $\{(5),(6)\}$ ва (9) масалаларнинг тривиал бўлмаган ечимлари.

Худди шу усулда B_λ^0 ва C_λ^0 масалалардан фойдаланиб, қуйидаги масалаларнинг ҳам саноқли сондаги хос қийматлари ва хос функциялари мавжуд эканлигини исботлаш мумкин.

B_λ^1 **масала.** λ нинг шундай қийматларини топингки, (1) тенгламанинг $\overline{\Omega}_1$ да аниқланган ва (2),

$$u(0,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 1,$$

$$u(x,0) = \int_0^x u_y(t,0)J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (11)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}_1) \cap$ $\cap C^1(\Omega_1 \cup OA \cup OB) \cap C^2(\Omega_1)$ ечими мавжуд бўлсин.

C_λ^1 **масала.** λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламани $\overline{\Omega}_1$ да аниқланган ва (2), (11) ва

$$u_x(0,y)=0\,,\ 0<y<1$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1)\cap C^1(\Omega_1\cup OA\cup OB)\cap C^2(\Omega_1)$ тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Γ_λ^1 **масала.** λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламани (2), (11) ва

$$u(0,y)=\int_0^y u_x(0,t)J_0[\sqrt{\lambda}(y-t)]dt\,,\ 0\le y\le 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1)\cap C^1(\Omega_1\cup OA\cup OB)\cap C^2(\Omega_1)$ тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлсин.

Бу масалаларда $\lambda_{n,m}$ хос қийматларни олиш учун $J_{\mu_{1n}}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$ тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда $\mu_{1n}=2\mu_n$ бўлиб, μ_n лар мос равишда B_λ^0, C_λ^0 ва Γ_λ^0 масалаларда топилган сонлар.

1.2.2. E_λ **масала.**

E_λ **масала.** λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг $C(\overline{\Omega}_1)\cap C^1(\Omega_1\cup OA\cup OB)\cap C^2(\Omega_1)$ синфга тегишли ва (2),

$$u(x,0)-u(0,x)=\int_0^x u_y(t,0)J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt\ ,\ \ 0\le x\le 1,$$

$$u(0,y)=\int_0^y u_x(0,t)J_0[\sqrt{\lambda}(y-t)]dt\ ,\qquad 0\le y\le 1$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Бу масалани ечишда ҳам ечимни

$$u(x,y)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$$

кўринишида қидирамиз. Натижада $R(r)$ га нисбатан (9) масалага, $\Phi(\varphi)$ га нисбатан эса қуйидаги масалага келамиз:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0, & 0\le\varphi\le\pi; \quad (12) \\ R(y)\Phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\Phi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\displaystyle\int_0^y R(t)t^{-1}J_0[\sqrt{\lambda}(y-t)]dt, & 0\le y\le 1; \quad (13) \\ R(x)\left[\Phi(0)-\Phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\Phi'(0)\displaystyle\int_0^x R(t)t^{-1}J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt, & 0\le x\le 1. \quad (14) \end{cases}$$

Бессель тенгламаси ечимидан, 1-§ даги (4) тенгликдан фойдаланиб (13) ва (14) лардан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\mu\left[\Phi(0)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\Phi'(0),\ \mu\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Бу тенгликларга (12) нинг умумий ечими бўлган (7) функцияни қўйиб ва μ га бўлиб,

$$\begin{cases} c_1-c_1\cos\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)-c_2\sin\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)=c_2, \\ c_1\cos\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)=-c_1\sin\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)+c_2\cos\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right) \end{cases}$$

системага, яъни

$$
\begin{cases}
c_1\left[1-\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]-c_2\left[1+\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]=0, \\
c_1\left[\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]+c_2\left[\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]=0
\end{cases}
\qquad (15)
$$

бир жинсли тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$
\left[1-\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]+
$$

$$
+\left[1+\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\right]=0\,.
$$

Бу тенгламани соддалаштириб

$$
\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}
$$

кўринишидаги тригонометрик тенгламани хосил қиламиз. Бу тенглама чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, уларнинг ичидан $\mu>0$ шартни қаноатлантирувчиларини танлаб оламиз:

$$
\mu_{1k}=4k-\frac{1}{3}, \qquad k=1,2,...,
$$

$$
\mu_{2k}=4k-\frac{5}{3}, \qquad k=1,2,....
$$

Энди μ_{1k}, μ_{2k} ни (15) системага қўйиб, c_1 ва c_2 ларни топамиз. (15) нинг биринчи тенгламасидан

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{1-\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}$$

келиб чиқади. Демак, $\mu=\mu_{1k}$ да

$$c_1=c_{1k}\left[1+\sin\left(\frac{\mu_{1k}\pi}{2}\right)\right],$$

$$c_2=c_{1k}\left[1-\cos\left(\frac{\mu_{1k}\pi}{2}\right)\right] \tag{16}$$

ва $\mu=\mu_{2k}$ да эса

$$c_1=c_{2k}\left[1+\sin\left(\frac{\mu_{2k}\pi}{2}\right)\right],$$

$$c_2=c_{2k}\left[1-\cos\left(\frac{\mu_{2k}\pi}{2}\right)\right] \tag{17}$$

деб олиш мумкин, бу ерда c_{1k} ва c_{2k} нолдан фарқли ихтиёрий ўзгармаслар.

(16) ва (17) ларни (7) га қўйиб, $\{(12),(13),(14)\}$ масаланинг тривиал бўлмаган ечимларига эга бўламиз:

$$\Phi_{jk}(\varphi)=c_{jk}\left\{\cos\left(\mu_{jk}\varphi\right)\left[1+\sin\left(\frac{\mu_{jk}\pi}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\mu_{jk}\varphi\right)\left[1-\cos\left(\frac{\mu_{jk}\pi}{2}\right)\right]\right\}, \qquad k=1,2,...,\ j=1,2. \tag{18}$$

Буни соддалаштирамиз:

$$1+\sin\left(\frac{\mu_{1k}\pi}{2}\right)=1+\sin\left[\left(4k-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=1+\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$1-\cos\left(\frac{\mu_{1k}\pi}{2}\right)=1-\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

$$1+\sin\left(\frac{\mu_{2k}\pi}{2}\right)=1+\sin\left(2k\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=1-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$1-\cos\left(\frac{\mu_{2k}\pi}{2}\right)=1-\cos\left(2k\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=1-\cos\frac{5\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Буларни (18) га қўямиз:

$$\Phi_{1k}(\varphi)=\frac{1}{2}c_{1k}\left[(2-\sqrt{3})\cos\left(\mu_{1k}\varphi\right)+\sin\left(\mu_{1k}\varphi\right)\right],$$

$$\Phi_{2k}(\varphi)=\frac{1}{2}c_{2k}\left[(2+\sqrt{3})\cos\left(\mu_{2k}\varphi\right)+\sin\left(\mu_{2k}\varphi\right)\right].$$

Демак,

$$\Phi_{jk}\left(\varphi\right)=\tilde{c}_{jk}\left[(2\mp\sqrt{3})\cos\left(\mu_{jk}\right)+\sin\left(\mu_{jk}\varphi\right)\right],\ k=1,2,...$$

Энди (9) масалада $\mu=\mu_{1k}$, $\mu=\mu_{2n}$ деб λ га нисбатан тенгламага эга бўламиз:

$$J_{\mu_{1n}}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0,\qquad J_{\mu_{2n}}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0. \tag{19}$$

Бу тенгламалар саноқли сондаги хақиқий ечимларга эга бўлиб, уларни

$$\lambda_{k,m}^{(1)}=\alpha_{k,m}^{2},\qquad k,m=1,2,..., \tag{20}$$

$$\lambda_{k,m}^{(2)}=\beta_{k,m}^{2},\qquad k,m=1,2,... \tag{21}$$

кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $\lambda_{k,m}$, $\beta_{k,m}$ - мос равишда (19) даги 1 ва 2-тенгламанинг m - инчи мусбат илдизлари.

λ нинг бу қийматларида (9) масала

$$R_{k,m}^{(j)}(n) = J_{\mu,j}(\alpha_{k,m}r), \qquad k,m = 1,2,...; \qquad j = 1,2$$

ечимларга эга бўлади.

Юқоридагиларни эътиборга олиб, қуйидаги теорема ўринли эканлигини топамиз.

4-теорема. E_{λ} масала саноқли сондаги хос қийматларга эга ва улар (20) ва (21) тенгликлар билан аниқланади, буларга мос хос функциялар эса

$$u_{k,m}^{(j)}(x,y) = c_{k,m}^{(j)} J_{\mu,j}(\alpha_{k,m}r) \cdot \left[\left(2 + (-1)^{j} \sqrt{3} \right) \cos\left(\mu_{jk}\varphi \right) + \sin\left(\mu_{jk}\varphi \right) \right],$$

$$k,m = 1,2,...; \qquad j = 1,2$$

тенгликлар билан аниқланади.

II БОБ

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН МАСАЛАЛАР

2.1-§. Битта сингуляр коэффициентли тенглама учун бир спектрал масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари.

Юқори ярим текисликда ётувчи ва $AB=\{(x,y): y=0, -1<x<1\}$, $\sigma=\{(x,y): x^2+y^2=1, y>0\}$ чизиқлар билан чегараланган соҳани Ω билан белгилайлик. Ω соҳада эллиптик типга тегишли сингуляр коэффициентли

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0 \tag{1}$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $0<\beta=cont<\frac{1}{2}$, λ эса сонли параметр.

F_λ **масала:** λ параметрнинг шундай қийматини топингки, (1) тенгламанинг $C(\Omega)\cap C^1(\Omega\cup AB)\cap C^2(\Omega)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\sigma; \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0} y^{2\beta}u_y(x,y)=0, \qquad -1<x<0; \tag{3}$$

$$u(x,0)=u(-x,0), \qquad 0\le x\le 1 \tag{4}$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Оддатда λ нинг F_λ масалада топилиши талаб этилаётган қийматлари хос қийматлар, масаланинг хос қийматларига мос тривиал бўлмаган функцияларни хос функциялари деб аталади.

Масаланинг хос функцияларини

$$u(x,y)=R(r)\Phi(\varphi) \tag{5}$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \varphi=\operatorname{arct}g\left(\frac{y}{x}\right),$$

яъни

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi\,,\ 0\le r\le 1\,,\quad 0\le\varphi\le\pi\,.$$

(5) ни (1) тенгламага қўйиб, $R(r)\Phi(\varphi)\neq 0$ га бўлсак,

$$\frac{\Phi''(\varphi)+2\beta ctg\varphi\Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+(1+2\beta)rR'(r)+\lambda r^2R(r)}{R(r)} \tag{6}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг чап томони r га, ўнг томони φ га боғлиқ эмас. Демак, тенгликнинг иккала томони ҳам r ва φ га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сонга тенг. Шу сонни $\left(-\mu^2\right)$ деб олсак, (6) тенгликдан $\Phi(\varphi)$ ва $R(r)$ функцияларга нисбатан қуйидаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз:

$$\Phi''(\varphi)+2\beta ctg\varphi\Phi'(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0\,, \qquad 0<\varphi<\pi\,, \tag{7}$$

$$r^2R''(r)+(1+2\beta)rR'(r)+(\lambda r^2-\mu^2)R(r)=0\,,\ 0<r<1\,. \tag{8}$$

(5) ни (2), (3), (4) шартларга қўйиб ва масала ечимини $\overline{\Omega}$ да узлуксизлигини инобатга олиб, (7) ва (8) тенгламалар ечимлари учун шартларга эга бўламиз:

$$\lim_{\varphi\to\pi}(\sin\varphi)^{2\beta}\Phi'(\varphi)=0\,, \qquad \Phi(0)-\Phi(\pi)=0\,; \tag{9}$$

$$|R(0)| < +\infty, \qquad R(1) = 0. \tag{10}$$

Шундай қилиб, қўйилган масала $\{(7),(9)\}$ ва $\{(8),(10)\}$ масалаларга ажралди. Аввал $\{(7),(9)\}$ масалани ўрганамиз. $\psi = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ алмаштириш қилсак, (7) тенглама

$$\psi(1-\psi)\Phi''_{\psi\psi} + \left[\beta + \frac{1}{2} - (1+2\beta)\psi\right]\Phi'_{\psi} + \mu^2\Phi = 0 \tag{11}$$

кўринишни олади. Бу Гаусснинг гипергеометрик тенгламаси бўлиб [4],

$$\Phi = c_1F(a,b,c;\psi) + c_2\psi^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;\psi) \tag{12}$$

кўринишдаги умумий ечимга эга, бу ерда

$$a = \beta + \omega, \qquad b = \beta - \omega, \qquad c = \beta + \frac{1}{2},$$

$$\omega = \sqrt{\beta^2 + \mu^2}, \ \mathrm{Re}\,\mu^2 > 0,$$

$F(a,b,c,z)$ - Гаусснинг гипергеометрик функцияси [4], c_1 ва c_2- ихтиёрий ўзгармаслар.

ψ ни $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ билан алмаштириб, (12) дан (7) тенгламанинг умумий ечимига эга бўламиз:

$$\Phi(\varphi) = c_1F\left(a,b,c:\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \\ +c_2\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1-2\beta}F\left(a+1-c,b+1-c,2-c;\sin^2\frac{\varphi}{2}\right). \tag{13}$$

Бевосита ҳисоблаб ва

$$F(\alpha,\delta,\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\delta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\delta)}$$

формуладан фойдаланиб [4] топиш мумкинки,

$$\lim_{\varphi\to\pi}\left[\left(\sin\varphi\right)^{2\beta}\Phi'(\varphi)\right]=$$

$$=c_1\frac{ab}{c}F\left(c-a,c-b,c+1;1\right)+c_2(1-c)F\left(-a,-b,1-c,1\right)=$$

$$=c_1\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}+c_2\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}. \qquad (14)$$

$$\Phi(0)=c_1 \qquad (15)$$

$$\Phi(\pi)=c_1F(a,b,c;1)+c_2F(a+1-c,b+1-c,2-c;1)=$$

$$=c_1\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+c_2\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \qquad (16)$$

бу ерда $\Gamma(z)$ - Эйлернинг гамма-функцияси [6].

(13), (14) ва (15) ларни (9) шартларга қўйиб, c_1 ва c_2 ўзгармасларга нисбатан қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} c_1\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}+c_2\dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}=0, \\ \\ c_1\left[1-\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right]-c_2\dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}=0. \end{cases} \qquad (17)$$

Бу система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нол бўлиши зарур, яъни:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)} \\ 1-\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & -\dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Бу ердан тегишли ҳисоблашлари бажариб,

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\left[\Gamma(a)\Gamma(1-a)\right]\left[\Gamma(b)\Gamma(1-b)\right]} -$$

$$-\frac{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)-\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\left\{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left[1-(c-a)\right]\right\}\left\{\Gamma(c-b)\Gamma\left[1-(c-b)\right]\right\}} = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Агар

$$c-a-b=\frac{1}{2}-\beta=1-c ,$$

$$c-b=\frac{1}{2}+\omega=1-(c-a)$$

эканлигини ва

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

формулани [6] эътиборга олсак, охиргидан

$$\frac{\dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{1}{2}-\beta\right)\pi}}{\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}\;\dfrac{\pi}{\sin b\pi}} - \frac{\dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{1}{2}-\omega\right)\pi} - \dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{1}{2}-\beta\right)\pi}}{\dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{1}{2}-\omega\right)\pi}\;\dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{1}{2}+\omega\right)\pi}} = 0$$

ёки

$$\sin\alpha\pi\sin b\pi-\cos\omega\pi\cos\beta\pi+\cos^2\omega\pi=0$$

тригонометрик тенгламага эга бўламиз.

$$\sin \alpha\pi \sin b\pi = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)\pi - \cos(a+b)\pi\right],$$

$$\cos^2 \omega\pi = \frac{1}{2}(1-\cos^2 \omega\pi)$$

формулаларни қўллаб ва $a=\beta+\omega$, $b=\beta-\omega$ эканлигини эътиборга олиб, охиргидан

$$\cos\omega\pi - \cos\beta\pi = 0$$

тенгламани оламиз. Косинуслар айирмасини кўпайтмага келтириб,

$$\sin\left(\frac{\omega-\beta}{2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega-\beta}{2}\pi\right)=0$$

тенгламаг эга бўламиз. Бу тенглама чексиз, кўп ечимларга эга бўлиб,

$$\omega = 2k+\beta, \qquad \omega = 2k-\beta, \qquad k\in \mathrm{Z}$$

тенгликлар орқали аниқланади. Бу ечимларнинг ичида $\omega>\beta$ шартни қаноатлантирувчиларини ажратиб, $\{(7),(9)\}$ масалага мос ечимларга эга бўламиз:

$$\omega = 2k+\beta, \qquad \omega = 2k-\beta, \qquad k\in N.$$

ω нинг бу қийматларини (17) га қўйиб ва $c_2\neq 0$ ни ихтиёрий сон деб ҳисоблаб, (17) нинг тривиал бўлмаган ечимларини топамиз:

$$c_1 = -\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a_{jk})\Gamma(b_{jk})}{\Gamma(c)\Gamma(1+a_{jk}-c)\Gamma(1+b_{jk}-c)}c_2, \qquad j=1,2; k\in N,$$

бу ерда

$$a_{jk}=\beta+\omega_{jk},\ b_{jk}=\beta-\omega_{jk}.$$

Буларни (13) формулага қўйиб, $\{(7),(9)\}$ масаланинг тривиал бўлмаган ечимларга эга бўламиз:

$$\Phi_{jk}(\varphi)=c_{jk}\left\{\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a_{jk})\Gamma(b_{jk})}{\Gamma(c)\Gamma(1+a_{jk}-c)\Gamma(1+b_{jk}-c)}\cdot F\left[a_{jk},b_{jk},c;sin^2\frac{\varphi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1-2\beta}F\left[1+a_{jk}-c,1+b_{jk}-c,2-c;\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]\right\},\quad j=1,2;k\in N\,. \quad (18)$$

Булардан келиб чиқадики, μ нинг

$$\mu_{1k}=\sqrt{(2k+\beta)^2}-\beta^2\,,$$

$$\mu_{2k}=\sqrt{(2k-\beta)^2}-\beta^2\,,\ k\in N$$

қийматларида $\{(7),(9)\}$ масала тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлар экан. (8) тенгламада $\mu=\mu_{jk}$ деб, $\{(8),(10)\}$ масалани ечамиз. (8) тенгламанинг (10) шартларнинг биринчисини қаноатлантирувчи ечимлари

$$R_{jk}(r)=r^{-\beta}J_{\omega_{jk}}(\sqrt{\lambda}r)\,,\ j=1,2;k\in N \quad (19)$$

функциялардан иборат, бу ерда $J_\upsilon(z)$ - биринчи тур Бессель функцияси [6].

(19) функцияларни (10) нинг иккинчи шартига қўйиб,

$$J_{\omega_{jk}}(\sqrt{\lambda})=0\,,\qquad j=1,2\,,\qquad k\in N \quad (20)$$

тенгламалар системасига эга бўламиз.

Бессель функциялари назариясидан маълумки $J_\nu(x)=0$ тенглама $\nu>-\dfrac{1}{2}$ да чексиз кўп илдизларга эга ва бу илдизлар хақиқийдир. $\omega_{jk}>\beta$ бўлгани учун (20) тенгламалар ҳам фақат хақиқий илдизларга эга бўлиб, улар саноқли сондадир. (20) тенгламанинг ω_{jk} га мос n- мусбат илдизини $\theta_{\omega_{jk}}^{(n)}$ билан белгилаб, қўйилган масаланинг хос сонига эга бўламиз:

$$\lambda_{jkn}=\left[\theta_{kn}^{(j)}\right]^2,\qquad j=1,2;\qquad k,n\in N\,. \quad (21)$$

(18) ва (21) функцияларни (5) тенгликка қўйиб, қўйилган масаланинг λ_{jkn} хос сонига мос хос функцияларига эга бўламиз:

$$u_{jkn}(x,y)=c_{jkn}r^{-\beta}J_{\omega jk}\left(\sqrt{\lambda_{jkn}}r\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}-\cos\left(\beta\pi\right)\Gamma(a_{jk})\Gamma(b_{jk})F\left(\beta+\omega_{jk},\beta-\omega_{jk},\beta+\frac{1}{2};\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1-2\beta}F\left(\frac{1}{2}+\omega_{jk},\frac{1}{2}-\omega_{jk},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\quad j=1,2;\qquad k,n\in N,\ (22)$$

бу ерда $c_{jkn}\neq 0$ - ихтиёрий хақиқий сонлар.

Демак, қўйилган масала саноқли сондаги хақиқий хос қийматларга эга бўлиб, улар (20) тенгламалар ечимларининг квадрати шаклида аниқланади. Ҳар бир хос қийматга биттадан хос функциялар мос келиб, улар (22) тенгликлар билан аниқланади.

Таъкидлаш лозимки, эллиптик типдаги тенглама учун бу ерда ўрганилган масалага ўхшаш бир масала [5] да ўрганилган.

2.2-§. Иккита сингуляр коэффициентли ва иккита тенг параметрли тенглама учун масалалар.

xOy текислигининг $\overline{\sigma} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ёй ва $OA = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$, $OB = \{(x, y): x = 0, 0 < y < 1\}$ кесмалар билан чегараланган Ω соҳасида

$$L_{\beta,\beta}[u] = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0 \tag{1}$$

тенгламани қарайлик., бу ерда $0 < \beta < (1/2)$, λ - параметр.

(1) тенглама учун Ω соҳа чегарасида қуйидагича шартлар қўйиш мумкин:

$$u(x, y)\big|_{\overline{\sigma}} = 0, \qquad u(x, y)\big|_{\overline{OA}} = 0, \qquad u(x, y)\big|_{\overline{OB}} = 0; \tag{2}$$

$$u(x, y)\big|_{\overline{\sigma}} = 0, \qquad \lim_{y \to 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = 0, \qquad u(x, y)\big|_{\overline{OB}} = 0; \tag{3}$$

$$u(x, y)\big|_{\overline{\sigma}} = 0, \qquad u(x, y)\big|_{\overline{OA}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x^{2\beta} u_x(x, y) = 0; \tag{4}$$

$$u(x, y)\big|_{\overline{\sigma}} = 0, \qquad \lim_{y \to 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x^{2\beta} u_x(x, y) = 0. \tag{5}$$

(2) – (5) шартлар ёрдамида (1) тенглама учун хос қийматлар ҳақидаги қатор масалалар баён қилиниши мумкин. Масалан:

$D_{\beta,\beta}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ синфга тегишли ва (2) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

$DN_{\beta,\beta}$, $ND_{\beta,\beta}$, $N_{\beta,\beta}$ масалалар ҳам худди шундай баён қилинади, фақат (1) шартлар ўрнига мос равишда (3), (4), (5) шартлар олинади.

Одатда l нинг бундай масалаларда топилиши талаб этилган қийматлари мазкур масаланинг хос қийматлари, тенгламанинг уларга мос тривиал бўлмаган ечимлар эса хос функциялар дейилади.

Қўйилган масалани татқиқ қилишда (1) тенгламанинг $\overline{W}$ да узлуксиз бўлган ечимларининг умумий кўринишидан фойдаланилади. [5] да ўзгарувчиларни ажратиш усули билан бундай функциялар

$$u(x,y)=r^{-2\beta}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}r\right)\left\{C_1F\left(\beta+\frac{\omega}{2},\beta-\frac{\omega}{2},\beta+\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+C_2\left(\sin\varphi\right)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\omega}{2},-\frac{1-\omega}{2},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)\right\} \tag{6}$$

кўринишда эканлиги топилган, бу ерда C_1, C_2 - ихтиёрий сонлар, $J_w(z)$ ва $F(a,b,c;z)$- Бессель ва Гаусс функциялари [6], w эса $\operatorname{Re}w > 2b$ шартни қаноатлантирувчи параметр;

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\; j = arctg(y/x).$$

(6) функцияни (2) – (5) шартларнинг иккинчи ва учинчисига қўйиб, C_1, C_2 ва w ни топиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{llll}
D_{\beta,\beta}\ \text{масалада} & C_1=0,\,C_2\neq 0, & \omega_n=2n-2\beta, & n\in N;\\
DN_{\beta,\beta}\ \text{масалада} & C_2=0,\,C_1\neq 0, & \omega_n=2n-1, & n\in N;\\
ND_{\beta,\beta}\ \text{масалада} & C_1=0,\,C_2\neq 0, & \omega_n=2n-1, & n\in N;\\
N_{\beta,\beta}\ \text{масалада} & C_2=0,\,C_1\neq 0, & \omega_n=2n+2\beta, & n\in N.
\end{array}\right\} \tag{7}$$

C_1, C_2 ва w нинг бу қийматларини (6) га қўйиб ва ҳосил бўлган функцияларни

$$u(x,y)\big|_{\bar{\sigma}} = 0$$

шартга бўйсиндириб, масаланинг хос қийматларини топиш учун

$$J_{\nu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right),\; n \in N$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламаларнинг m - чи мусбат илдизини $\theta_{\nu}^{(m)}$ билан белгиласак, тегишли масаланинг

$$\lambda_{n,m} = \left[\theta_{\nu}^{(m)}\right]^2,\; n,m \in N$$

хос қийматларини топамиз. (6) – (7) ларга асосан $D_{\beta,\beta}$, $DN_{\beta,\beta}$ ва $ND_{\beta,\beta}$, $N_{\beta,\beta}$ масалаларнинг хос функциялари

$$u_{n,m}(x,y) = C_{n,m}\rho^{-2\beta} J_{\nu_n}\left[\theta_m^{(n)}\rho\right](\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[1+\nu_n/2,(1-\nu_n)/2,3/2-\beta;\sin^2\varphi\right],$$

$$u_{n,m}(x,y) = C_{n,m}\rho^{-2\beta} J_{\nu_n}\left[\theta_m^{(n)}\rho\right] F\left(\beta+\nu_n/2,\beta-\nu_n/2,\beta-1/2,\sin^2\varphi\right)$$

тengliклар билан аниқланади.

Демак, қўйилган масалалар саноқли сондаги хос қийматларга ва хос функцияларга эга экан.

2.3-§. Иккита сингуляр коэффициентли ва иккита турли параметрли тенглама учун масалалар.

xOy текислигининг $\overline{s} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, x\,\text{i}\ 0, y\,\text{i}\ 0\}$ ёй ва $OA = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$, $OB = \{(x, y): x = 0, 0 < y < 1\}$ кесмалар билан чегараланган соҳасини W билан белгилайлик.

W соҳада эллиптик типдаги ушбу

$$L_{a,b}[u] = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2a}{x}u_x + \frac{2b}{y}u_y + l\,u = 0$$

тенглама учун $0 < a, b < (1/2)$ бўлганда хос қийматлар ҳақидаги қуйидаги масалаларни ўрганамиз.

$D_{a,b}$ **масала.** l параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$L_{a,b}[u] = 0$$

тенгламанинг $C(\overline{W})З\ C^2(W)$ синфга тегишли ва

$$u(x, y)\big|_{\overline{s}\,И\overline{OA}И\overline{OB}} = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи тиривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

$DN_{a,b}$ **масала.** l параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$L_{a,b}[u] = 0$$

тенгламанинг $C(\overline{W})З\ C^2(W)$ синфга тегишли ва

$$u(x, y)\big|_{\overline{s}\,И\overline{OB}} = 0,$$

$$\lim_{y ® 0} y^{2b}u_y(x, y) = 0,\ 0 < x < 1$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

$ND_{\alpha,\beta}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$L_{\alpha,\beta}[u] = 0$$

тенгламанинг $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)\big|_{\overline{\sigma} \cup \overline{OA}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} x^{2\beta} u_x(x,y) = 0, \; 0 < y < 1$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

$N_{\alpha,\beta}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$L_{\alpha,\beta}[u] = 0$$

тенгламанинг $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)\big|_{\overline{\sigma}} = 0,$$

$$\lim_{y \to 0} y^{2\beta} u_y(x,y) = 0, \; 0 < x < 1,$$

$$\lim_{x \to 0} x^{2\beta} u_x(x,y) = 0, \; 0 < y < 1$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Бу масалаларда топилиши талаб этилаётган λ параметрнинг қийматлари тегишли масаланинг хос қийматлари, тенгламанинг уларга мос тривиал бўлмаган ечимлар эса хос функциялари деб аталади.

Қуйилган масалаларнинг λ хос сонлари мавжуд ва $\lambda \neq 0$ деб фараз қилайлик. Унга мос хос функцияларни

$$u(x,y) = R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{1}$$

кўринишда қидирайлик, бу ерда

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad \varphi=arctg\left(y/x\right).$$

У ҳолда берилган тенглама қуйидаги

$$r^2R''(r)+\left(1+2\alpha+2\beta\right)rR'(r)+\left(\lambda r^2-\mu^2\right)R(r)=0\,,\qquad 0<r<1,\qquad (2)$$

$$\Phi''(\varphi)+\left(2\beta ctg\varphi-2\alpha tg\varphi\right)\Phi'(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0\,,\;\;0<\varphi<\pi/2\quad (3)$$

оддий дифференциал тенгламаларга ажраб кетади. Бу ерда μ^2 - қандайдир параметр.

(2) тенгламанинг $r=0$ да узлуксиз ечими

$$R(r)=r^{-\alpha-\beta}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)\qquad (4)$$

функциядан иборат, бу ерда

$$\omega=\sqrt{\left(\alpha+\beta\right)^2-\mu^2}\,,$$

$J_{\omega}(r)$- биринчи тур Бессел функцияси бўлиб,

$$\mathrm{Re}\,\omega>\alpha+\beta\,.$$

(3) тенгламанинг умумий ечими эса

$$\Phi\left(\varphi\right)=C_1F\left(a,b,c;\sin^2\varphi\right)+$$

$$+C_2\left(\sin\varphi\right)^{1-2\beta}F\left(1+a-c,1+b-c,2-c;\sin^2\varphi\right)\qquad (5)$$

кўринишга эга, бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар,

$$2a=\alpha+\beta+\omega\,,\;2b=\alpha+\beta-\omega\,,\;2c=\beta+1/2\,;$$

$F\left(a,b,c;z\right)$- гипергеометрик функция.

(4) ва (5) ни (1) га қўйиб,

$$L_{\alpha,\beta}\left[u\right]=0$$

тенгламанинг $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган ечимларининг умумий кўринишига эга бўламиз:

$$u(x,y)=r^{-\alpha-\beta}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}r\right)\left[C_1F\left(a,b,c;\sin^2\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\left(\sin\varphi\right)^{1-2\beta}F\left(1+a-c,1+b-c,2-c;\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{6}$$

(6) дан бевосита ҳисоблашлар орқали

$$u(x,0)=C_1x^{-\alpha-\beta}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right), \tag{7}$$

$$\lim_{y\to 0}y^{2\beta}u_y(x,y)=C_2(1-2\beta)x^{\beta-\alpha-1}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right), \tag{8}$$

$$u(0,y)=y^{-\alpha-\beta}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\,y\right)\left[C_1F(a,b,c;1)+\right.$$

$$\left.+C_2F(1+a-c,1+b-c,2-c;1)\right], \tag{9}$$

$$\lim_{y\to 0}y^{2\beta}u_x(x,y)=2y^{\alpha-\beta-1}J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}r\right)\left[C_1\frac{ab}{c}F(c-a,c-b,1+c,1)+\right.$$

$$\left.+C_2(1-c)F(-a,-b,1-c;1)\right] \tag{10}$$

эканлиги келиб чиқади.

(6) функциялар ичидан қўйилган масалалар шартларини қаноатлантирувчиларини ажратамиз. Бунда (7) – (10) тенгликларни эътиборга олсак, (6) дан $D_{\alpha,\beta}$ масалада $C_1=0$, $C_2\neq 0$ ва

$$F(1+a-c,1+b-c,2-c,1)=0 \tag{11}$$

тенглик, $DN_{\alpha,\beta}$ масалада $C_1\neq 0$, $C_2=0$ ва

$$F(a,b,c,1)=0 \tag{12}$$

тенглик, $ND_{\alpha,\beta}$ масалада $C_1=0$, $C_2\neq 0$ ва

$$(1-c)F(-a,-b,1-c)=0; \tag{13}$$

тенглик, $N_{\alpha,\beta}$ масалада эса $C_1\neq 0$, $C_2=0$ ва

$$\left(\frac{ab}{c}\right)F\left(c-a,c-b,1+c;1\right)=0 \tag{14}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур эканлиги келиб чиқади.

(11) – (14) тенгликларда

$$F\left(a,b,c,1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}$$

формулани қўллаб, сўнгра

$$\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(1-a\right)=\frac{\pi}{\sin\left(a\pi\right)}$$

формуладан фойдаланиб, w нинг (11) – (14) тенгликлар бажариладиган қийматларини топамиз:

$$\omega_n=\begin{cases} 2n-\left(\alpha+\beta\right), & n\in N, \quad D_{\alpha,\beta} \ \textit{масалада}, \\ 2n-1+\left(\beta-\alpha\right), & n\in N, \quad DN_{\alpha,\beta} \ \textit{масалада}, \\ 2n-1+\left(\alpha+\beta\right), & n\in N, \quad ND_{\alpha,\beta} \ \textit{масалада}, \\ 2n+\left(\alpha+\beta\right), & n\in N, \quad N_{\alpha,\beta} \ \textit{масалада}. \end{cases}$$

w нинг бу қийматларини (6) га қўйиб, сўнгра

$$u(x,y)\big|_{\bar{s}}=0$$

шартга бўйсундирсак,

$$J_{w_n}\left(\sqrt{l}\right)=0\ ,\ n\,\mathrm{O}\,N$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламаларнинг m- чи мусбат илдизни $q_m^{(n)}$ билан белгилаб, тегишли масаланинг хос қийматларига эга бўламиз:

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \left[\theta_m^{(n)}\right]^2 \quad n,m \in N .$$

Бу қийматларни (6) га қўйиб, $D_{\alpha,\beta}$ ва $DN_{\alpha,\beta}$ масалаларда $C_1 = 0$, $ND_{\alpha,\beta}$ ва $N_{\alpha,\beta}$ масалаларда $C_2 = 0$ эканлигини эътиборга олсак, мос равишда бу масалаларнинг $\lambda_{n,m}$ хос қийматларга тўғри келувчи хос функцияларга эга бўламиз:

$$u(x,y) = C_{n,m} r^{-\alpha-\beta} J_{\omega_n}\left[\theta_m^{(n)} r\right](\sin\varphi)^{1-2\beta} \times$$

$$\times F\left(1+a-c, 1+b-c, 2-c; \sin^2\varphi\right), \qquad n,m \in N,$$

$$u(x,y) = C_{n,m} r^{-\alpha-\beta} J_{\omega_n}\left[\theta_m^{(n)} r\right] F\left(a,b,c;\sin^2\varphi\right), \qquad n,m \in N .$$

Демак, қўйилган масалалар саноқли сондаги хос қийматларга ва хос функцияларга эга экан.

Хулоса

Мазкур магистрлик диссертацияси Лаплас тенгламаси ва бош қисми Лаплас операторидан иборат бўлган сингуляр коэффициентли тенгламалар учун спектрал масалаларни баён қилиш ва қўйилган масалаларнинг хос сонлари ва хос функцияларини топишга бағишланган.

Бу ерда уч типдаги масалалар қўйилган ва ўрганилган. Уларнинг биринчиси типида тенглама қаралаётган соҳа чегарасида функция ёки ҳосиласининг қиймати берилган. Улар тегишли тенглама учун қўйиладиган классик масалаларнинг хос қийматлари ва хос функцияларини топиш имконини беради (II боб 2.2-§ ва 2.3-§)

Иккинчи типдаги масалалар тенглама қаралаётган соҳа чегарасида функция ва унинг ҳосиласидан ташкил топган чизиқли комбинацияларнинг қийматлари берилган бўлиб, улар кўплаб классик масалалар хос сонлари ва хос функцияларини топиш ҳақидаги масалаларни ўз ичига олади (A_λ^0, A_λ^1 ва Γ_λ масалалар).

Диссертацияда ўрганилган учинчи типдаги масалаларда нафақат тенглама, балки чегаравий шартлар ҳам спектрал параметрга боғлиқ бўлиб, бундай масалалар кўпроқ аралаш типдаги эллиптико – гиперболик тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар хос сонлари ва хос функцияларини топишга имкон беради (B_λ^0, C_λ^0, Γ_λ^0, B_λ^1, C_λ^1, Γ_λ^1, E_λ масалалар).

Хулоса қилиб айтганда, ишда Лаплас тенгламаси учун янги нолокал шартли спектрал масалалар, бош қисми Лаплас операторидан иборат бўлган сингуляр коэффициентли тенгламалар учун классик спектрал масалалар қўйилган ва ўрганилган. Олинган натижалар дифференциал тенгламалар назарияси ривожида фойдаланилиши мумкин.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Каримов И.А. Юксак маънавият-енгилмас куч. Тошкент., Ўзбекистон. 2008.
2. Каримов И.А. “Ўзбекистон XXI аср бўсағасида” Тошкент., Ўзбекистон. 1992.
3. Каримов И.А. 2009-йилнинг якунлари 2010-йилнинг биринчи чорагида Ўзбекистон ижтимоий, иқтисодий ривожланишининг энг муҳим устивор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг мажлисидаги маъруза. Фарғона ҳақиқати газетаси, 2010-йил 3-феврал.
4. Салохиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. Тошкент, 2002.
5. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона, 2005.
6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Москва. «Наука», Том II, 1965.
7. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона, 2005.
8. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Тошкент. “Университет”. 2006.
9. Уринов А.К. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом// Узбекский математический журнал. 2005 г. №1, 70-78 бетлар.
10. Хурсанова Д.Х. Лаплас тенгламаси учун қўйилган бир масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари // ФДУ. Илмий хабарлар журнали. Фарғона, 2007. №3.
11. Хурсанова Д.Х. Эллиптик типдаги сингуляр коэффициентли тенглама учун бир спектрал масала хақида // Илм-фан тараққиётида олималарнинг ўрни. Илмий-амалий анжуман материаллари. Фарғона, 2008, 138-143 бетлар.
12. Хурсанова Д. Сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги дифференциал тенгламалар учун хос қийматлар ҳақидаги масалалар. I // Иннавацион

ғояларни таълим – тарбия жараёнига татбиқ этишнинг илмий – услубий муаммолари. Фарғона. 2011. 200-202 бетлар.

13. Хурсанова Д. Сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги дифференциал тенгламалар учун хос қийматлар ҳақидаги масалалар. II // ФДУ. Илмий хабарлар журнали. Фарғона. 20___ йил. №__.