ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

5480100 – амалий математика ва информатика йўналиши

09.306-гуруҳ талабаси Маматова Ҳуснуданинг

ҳисболаш усуллари фанидан

КУРС ИШИ

Мавзу: Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш

Фарғона – 2012

Мавзу: Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш.

Режа

Кириш.

I. Оддий дифференциал тенгламалар.

I.1. Асосий тушунча ва таърифлар.

I.2. Энг содда кўринишдаги ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.

I.3.Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар.

II. Каср тартибли интеграл ва ҳосилалар.

II.1. Каср тартибли интеграллар.

II.2. Каср тартибли ҳосилалар.

II.3. Каср тартибли интегро дифференциал операторлар ва уларнинг баъзи хоссалари

III. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш.

III.1. Гипергеометрик функция.

III.2. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш.

Хулоса.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

Кириш

Математиканинг ҳозирги замон фан ва техникасининг хилма-хил соҳаларидаги тадбиқларидан, одатда, шундай типик математик масалаларга дуч келинадики, уларни классик методлар билан ечиш мумкин эмас ёки ечиш мумкин бўлган тақдирда ҳам ечим шундай мураккаб кўринишда бўладики, ундан самарали фойдаланишнинг иложи бўлмайди.

Математиканинг, айнан дифференциал тенгламалар ва математик физика масалаларининг доираси ниҳоятда кенг бўлиб, улар турли физик, механик, техник, биологик ва бошқа жараёнларни ўрганиш билан узвий боғлиқдир. Бу битирув малакавий ишида биз оддий дифференциал тенгламаларнинг асосий тушунча ва таърифларини келтиришга, энг содда кўринишдаги ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ҳамда иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни тушунтиришга ҳаракат қиламиз ва мисоллар ёрдамида уларни тўлдирамиз. Булардан ташқари асосий урғуни каср тартибли интеграл ва ҳосилаларга қаратамиз. Сўнгра гипергеометрик функциянинг хоссалари ҳамда бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечишни кўриб чиқамиз.

I.1. Асосий тушунча ва таърифлар.

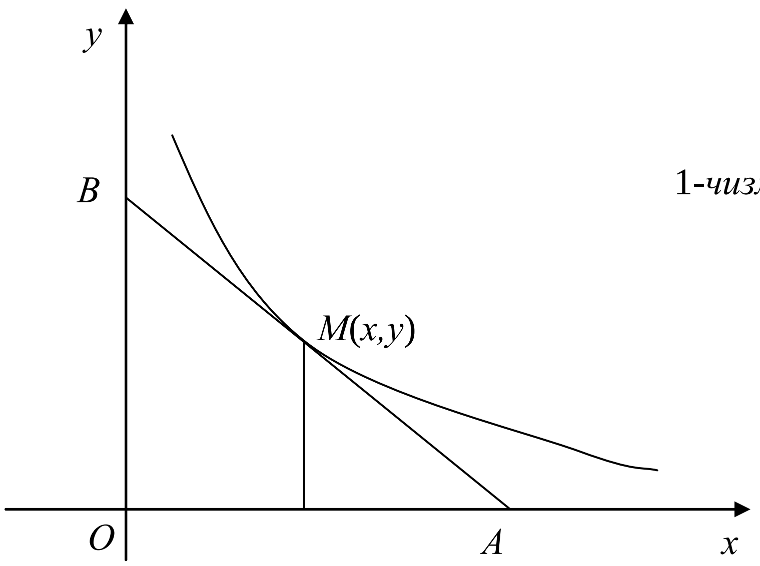
Фикримизни баён қилишдан олдин оддий дифференциал тенгламага келадиган бир масала билан танишиб ўтайлик.

Масала. Эгри чизиққа унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан кесган кесмаси уриниш нуқтаси ординатасининг иккиланганига тенг. Шу эгри чизиқ тенгламасини топинг.

Масалани ечишга ўтамиз. Изланаётган эгри чизиқда ихтиёрий $M \;\; x; y$ нуқта оламиз (1-чизма). M нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y - y = y' \;\; X - x$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда X, Y уринма нуқталарининг ўзгарувчи координаталари, y' – изланаётган функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи (уринманинг бурчак коэффициенти). Уринманинг Oy ўқдан ажратадиган кесмасини топиш учун $X = 0$ деймиз. У ҳолда $OB = Y = y - xy'$. Иккинчи томондан масаланинг шартига кўра $OB = 2y$.



1-*чизма*

OB кесма учун топилган иккала ифодани таққослаб,

$$y - xy' = 2y$$

ёки

$$xy' + y = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, уни дифференциал иштирок этган тенгламага келтирамиз:

$$xdy + ydx = 0. \tag{2}$$

(2) тенгламанинг чап томони ўзгарувчилар кўпайтмасининг дифференциали

$$d(xy) = 0$$

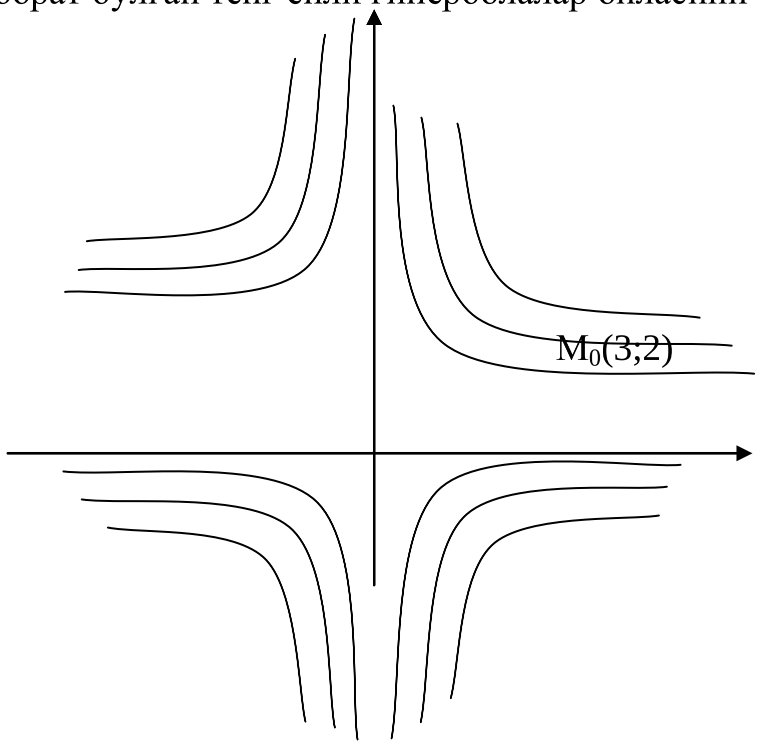
кўринишда ёзиш мумкин, бундан:

$$xy = C, \tag{3}$$

бу ерда C –ихтиёрий ўзгармас сон. (3) тенглик изланаётган эгри чизичнинг тенгламасини беради, уни ошкор ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \frac{C}{x}. \tag{4}$$

Аслини олганда (3) тенглама ҳам (4) каби битта эгри чизиқни эмас, балки эгри чизиқларнинг бутун бир оиласини–асимтоталари координаталар ўқларидан иборат бўлган тенг ёнли гиперболалар оиласини ташкил этади (2 чизма).



2-чизма

Бу эгри чизиқлар оиласидан бирини ажратиб олиш учун аргументнинг бирорта тайин қийматига функциянинг мос қийматини бериш керак. Айтайлик, изланаётган эгри чизиқ М(3;2) нуқтадан ўтсин, яъни x=3 да функция $y=2$ қийматга эга бўлсин. Бу қийматларни (3) ёки (4) формулага қўйиб, $C=6$ ни опамиз, шу сабабли изланаётган эгри чизиқ бу ҳолда

$$xy=6, \tag{5}$$

ёки

$$y=\frac{6}{x} \tag{6}$$

кўринишга эга бўлади.

Энди асосий тушунчаларни таърифлашга ўтайлик. *Дифференциал тенглама* деб эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг турли тартибли ҳосилалари ёки дифференциалларини ўзаро боғловчи тенгламага айтилади.

Тенгламадаги номаълум функция битта эркли ўзгарувчининг функцияси бўлса, бундай дифференциал тенглама оддий дифференциал тенглам дейилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб икки ёки бир неча $x, y, ...$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган номаълум z функция, $x, y, ...$ эркли ўзгарувчилар ҳамда z нинг $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ва ҳоказор хусусий ҳосилаларни ўзаро боғловчи тенгламага айтилади. n–тартибли дифференциал тенгламани ушбу

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0 \tag{7}$$

кўринишда ёки агар мумкин бўлса, юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \quad (8)$$

Кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $y = y(x)$ изланаётган номаълум функция, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ функциянинг x буйича k тартибли ҳосиласидир $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

n–тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими деб n та ихтиёрий ўзгармас сонларни ўз ичига олган

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \quad (9)$$

ечимга айтилади.

(8) дифференциал тенгламанинг умумий ечими формуласи (9) дан $C_1, C_2, ..., C_n$ ларга маълум қийматлар бериб ҳосил қилинадиган ҳар бир ечими (8) тенгламанинг хусусий ечими дейилади. Агар (8) дифференциал тенгламанинг ечими $\Phi(x, y) = 0$ кўринишда берилган бўлса, бу муносабат берилган дифференциал тенгламанинг хусусий интеграли деб аталади. Агар умумий ечим $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ кўринишда ёзилган бўлса, бу муносабат (8) тенгламанинг умумий интеграли дейилади.

I.2. Энг содда кўринишдаги ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.

Агар **I.1.** параграфдаги (7) тенгламанинг чап томони фақат x, y ва y' га боғлиқ бўлса, бундай тенглама *биринчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (10)$$

Одатда (10) тенгламани ҳосилага нисбатан ечиб

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

кўринишда ёки дифференциаллар иштирок этган

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{12}$$

Кўринишда ифодалаб олишга ҳаракат қилинади. (11) дан (12) га ва аксинча, ўтиш осон. Ҳақиқатан ҳам агар (11) тенгламада y' ни $\frac{dy}{dx}$ билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, ҳамма ҳадларини бир томонга ўтказсак, (12) тенгламага ўхшаш қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f(x, y)dx - dy = 0,$$

бу ерда $M(x, y) = f(x, y)$, $N(x, y) = -1$.

Асинча, агар (12) тенгламанинг биринчи ъадини ўнг томонга ўтказиб ва $N(x, y) \neq 0$ деб фараз қилиб, тенгламанинг ҳар иккала томонини $N(x, y)dx$ га бўлсак,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ни, яъни (11) муносабатни ҳосил қиламиз, бу ерда $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$.

Шундай қилиб, (11) ва (12) муносабатларбутунлай тенг кучли; келгусида аниқ ҳол учун уларнинг қайси бири қулай бўлса, шунисидан фойдаланамиз.

Фикримизни аниқ битта мисол билан давом эттирамиз.

$y' = 5x^4 - 6x^2 + 2$ дифференциал тенгламанинг $y(1) = 7\frac{1}{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламани

$$dy = (5x^4 - 6x^2 + 2)dx$$

кўринишда ёзамиз. Сўнгра интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$y = x^5 - 2x^3 + 2x + C.$$

Хусусий ечимни топиш учун умумий ечимда $x = 1,\ y = 7\frac{1}{2}$ деймиз ва $C = 6\frac{1}{2}$ ни топамиз. Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y = x^5 - 2x^3 + 2x + \frac{13}{2}$$

кўринишда бўлади.

Агар $f(x, y)$ функцияда *x* ва *y* ўзгарувчиларни мос равишда t_x ва t_y га алмаштирилганда (бу ерда *t*–ихтиёрий катталик, параметр) t^n га кўпайтирилган ўша функция ҳосил бўлса, яъни

$$f(t_x, t_y) = t^n f(x, y)$$

шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция *n* ўлчовли бир жинсли функция дейилади.

Бир хил ўлчовли бир жинсли функция қанташган тенглама *x* ва *y* га нисбатан бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. Бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилиб ечилади.

Агар биринчи тартибли (12) дифференциал тенгламанинг чап томони бирорта $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du(x, y),$$

бўлса, (12) тенглама тўлиқ дифференциал тенглама дейилади.

I.3.Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар.

$y'' = f(x)$ ёки $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ кўринишдаги тенглама энг содда кўринишдаги иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. Бу тенглама бевосита икки марта интеграллаш йўли билан ечилади.

Ушбу

$$y'' + P(x)y' + g(x)y = 0 \quad (13)$$

кўринишдаги тенглама иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади. Бу ерда $P(x)$ *ва* $g(x)$ узлуксиз функциялар.

Агар $P(x)$ *ва* $g(x)$ функциялар ўзгармас сонлардан иборат бўлса, у ҳолда (13) тенглама ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама дейилади. Бу тенгламанинг хусусий ечимлари $y = e^{kx}$ кўринишида изланади. Бу ҳолда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ бўлганлиги учун қаралаётган тенгламадан

$$e^{kx}(k^2 + pk + g) = 0$$

ҳосил бўлади. Аммо e^{kx} нолдан фарқли бўлганлиги учун

$$k^2 + pk + g = 0. \quad (14)$$

Демак, (14) квадрат тенгламани қаноатлантирувчи k лар учун $y = e^{kx}$ кўринишдаги функция фаралаётган тенгламанинг хусусий ечими бўлади. (14) эса қаралаётган тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади.

§. Каср тартибли интеграл ва ҳосилалар.

1. Каср тартибли интеграллар.

каррали интеграл учун қуйидаги формула ўринли

$$\int\limits_a^x dx \int\limits_a^x dx ... \int\limits_a^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)dt \quad , n \in N$$

) тенгликнинг ўнг томонини нинг каср қийматлари учун ҳам аниқлаш мумкин.

) га мос равишда каср тартибли интегралларни қуйидаги тартибда аниқлаймиз.

Та риф. $\varphi(x) \in L_1(a,b) \quad a < b < +\infty$) бўлсин. Ушбу

$$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt, \ \alpha > 0$$

$$D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \ \alpha > 0$$

кўринишдаги ифодалар $\alpha \ (0 < \alpha < \infty)$ каср тартибли (Риман Лиувилл ма носида) интеграллар дейилади.

$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x)$ ва $D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x)$ функциялар (a,b) оралиқнинг деярли барча нуқталарида аниқланган бўлиб, $L_1(a,b)$ синфга тегишли бўлади.

Агар $0 < \alpha_1 \ \ \alpha_2 < \infty$ бўлса, деярли ҳамма $x \in \ \ a,b$ учун

$$D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f \quad x \ = D_{ax}^{-\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_2} f \quad x \ = D_{ax}^{- \ \alpha_1+\alpha_2} \ f \quad x$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} D_{ax}^{-\alpha_2} \int_a^x (x-t)^{\alpha_1 - 1} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x \left(\int_a^t (t-s)^{\alpha_1-1} f(s)\,ds \right) (x-t)^{\alpha_2-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x f(s)\,ds \int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1} (t-s)^{\alpha_1-1} dt$$

Охирги ички интегралда $t = (x-s)\tau + s$ алмаштириш бажариш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1} (t-s)^{\alpha_1-1} ds = (x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 \tau^{\alpha_1-1} (1-\tau)^{\alpha_2-1} d\tau =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} (x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}$$

Бу эса ( ) тенгликнинг тўғри эканлигини кўрсатади.

Таърифга асосан

$$D_{ax}^{0} f(x) = f(x)$$

деб ҳисоблаймиз.

2. Каср тартибли ҳосилалар.

Та риф. $\varphi(x)$ функция [ ] кесмада аниқланган бўлсин.

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1$$

кўринишдаги ифодалар α каср) тартибли (Лиувилл ма носидаги) ҳосилалар дейилади.

Эслатиб ўтамизки каср тартибли интеграллар ихтиёрий $\alpha>0$ тартибгача аниқланган. Лекин ( ) каср тартибли ҳосилалар фақатгина $0<\alpha<1$ бўлганда аниқланган. Каср тартибли ҳосилаларни $\alpha\geq 1$ бўлганда аниқлашга ўтишдан олдин каср тартибли ҳосилалар мавжудлигининг етарли шартини келтирамиз.

Лемма. Агар $\varphi(x)\in AC([a,b])$ бўлса, $[a,b]$ кесманинг деярли барча нуқталарида $\varphi(x)$ функциянинг каср тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиб, қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int_a^x\frac{\varphi'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\right],\ 0<\alpha<1$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(b)}{(b-x)^{\alpha}}-\int_x^b\frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right],\ 0<\alpha<1$$

Мисол. $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha-1}$ бўлсин. У ҳолда, ( ) га асосан, $D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)\equiv 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha-1}$ функция каср тартибли ҳосила учун ўзгармас сон вазифасини бажаради.

Энди $\alpha\geq 1$ бўлиб, α унинг бутун қисми, α эса каср қисми бўлсин. Агар α бутун сон бўлса, α тартибли ҳосилалар сифатида оддий ҳосилаларни оламиз:

$$D_{ax}^{\alpha}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\ D_{xb}^{\alpha}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}\quad,\quad \alpha=1,2,3,...$$

Агар α бутун сон бўлмаса, α тартибли ҳосилаларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}D_{ax}^{\{\alpha\}}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}D_{ax}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x)$$

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}D_{xb}^{\{\alpha\}}\varphi(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}D_{ax}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x)$$

Демак, умумий холда, $\alpha\geq 1$ бўлганда

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x)\ ,\qquad n=[\alpha]+1$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=(-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{xb}^{\alpha-n}\varphi(x) \quad , \quad n=[\alpha]+1$$

Каср тартибли ( ) ва ( ) ҳосилалар мавжуд бўлиши учун

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\in AC^{[\alpha]}([a,b]), \qquad \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{\{\alpha\}}}\in AC^{[\alpha]}([a,b])$$

бунинг учун эса $\varphi\ x \in AC\ \ a,b$ бўлиши етарли. Бу ерда $AC^{\ \alpha}\ \ a,b$ $\ a,b$ кесмада $\alpha\ -1$ тартибгача ҳосилалари мавжуд ва $\varphi\ x^{\ \ \alpha\ -1} \in AC\ \ a,b$ бўлган функциялар синфи.

Кўрсатиш қийин эмаски, агар $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha-k}$ $k=1,2,...,1+[\alpha]$ бўлса, у ҳолда $D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)\equiv 0$ тенглик ўринли бўлади.

$\alpha\quad(\alpha>0)$ каср тартибли интеграллар кўринишида ифодаланувчи функциялар синфини $D_{ax}^{-\alpha}(L_p)$ билан белгилаймиз, яъни

$$D_{ax}^{-\alpha}\ \ L_p\ \ =\ \ f\ \ x\ :f(x)=D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)\ ,\ \ \varphi(x)\in L_p(a,b),\ 1\le p<\infty$$

теорема $f(x)$ функция $D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$ синфга тегишли бўлиши учун

$$f_{n-\alpha}(x)=D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x)\in AC^n([a,b])$$

$$\varphi_{n-\alpha}^{(k)}(a)=0 \quad , \qquad k=0,1,2,...,n-1$$

бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $n= \alpha +1$

теорема $\alpha>0$ бўлсин. У ҳолда

$$D_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x)$$

тенглик барча $\varphi(x)\in L_1(a,b)$ функциялар учун,

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\varphi(x)$$

тенглик эса барча

$$\varphi(x)\in D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$$

функциялар учун бажарилади.

Агар ( ) ўрнига $\varphi(x)\in L_1(a,b)$ бўлса, ( ) тенглик умуман олганда нотўғри бўлади ва у қуйидаги формула билан алмаштирилади:

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a)$$

бу ерда $n=[\alpha]+1$ $\varphi_{n-\alpha}(x)=D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x)$

§. Каср тартибли интегро дифференциал операторлар ва уларнинг баъзи хоссалари

) ва ( ) тенгликлар билан аниқланган операторлар, каср тартибли интегро дифференциал операторлар дейилади. 2 теоремадан келиб чиқадики, $\alpha > 0$ да $L_1(a,b)$ синфда D_{ax}^{α} оператор $D_{ax}^{-\alpha}$ операторга, $D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$ синфда эса $D_{ax}^{-\alpha}$ оператор D_{ax}^{α} операторга тескаридир. Бундан ташқари бу операторлар қуйидаги хоссаларга эга.

1) Агар $0 < \alpha, \beta < 1$ ва $(x-a)^{-\alpha} f(x)$, $(x-a)^{-\beta} f(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, у ҳолда деярли ҳамма $x \in (a,b)$ учун

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta} D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} f(x) =$$

$$= D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta} f(x)$$

муносабат ўринли бўлади.

Та рифга асосан операторларнинг ёйилмасини қўйиб ва интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Дирихле формуласини э тиборга олсак,

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta} D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} f(x) =$$

$$= D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-a)^{-\alpha} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}ds\int_a^x (t-a)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (t-a)^{-\alpha}f(t)\,dt\int_t^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}ds$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ички интегралда $s=t+(x-t)\xi$ алмаштириш бажариб,

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

формуладан фойдаланамиз, у ҳолда

$$\int_t^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}ds=$$

$$=(t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\left(1-\frac{t-x}{t-a}\xi\right)^{-\beta}d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-a}\right).$$

Шундай қилиб,

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}f(x)=$$

$$
=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)\,F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-\alpha}\right)dt
$$

Бу тенгликдан, гипергеометрик функция биринчи икки параметрга нисбатан симметрик бўлгани учун, (   ) айният келиб чиқади.

2) Агар $0<2\alpha<1$ ва $(x-a)^{-\alpha} f(x)$, $(b-x)^{-\alpha} f(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, у ҳолда деярли ҳамма $x\in(a,b)$ учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$
D_{ax}^{\alpha}(x-a)^{2\alpha-1}D_{ax}^{\alpha-1}(x-a)^{-\alpha}f(x)=(x-a)^{\alpha-1}D_{ax}^{2\alpha-1}f(x),
$$

$$
D_{xb}^{\alpha}(b-x)^{2\alpha-1}D_{xb}^{\alpha-1}(b-x)^{-\alpha}f(x)=(b-x)^{\alpha-1}D_{xb}^{2\alpha-1}f(x).
$$

(   ) формулалар биринчисининг чап томонини $g(x)$ орқали белгилаб, (   ) ва (   ) формулаларга асосан

$$
g(x)=\frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}dt\int_a^t (s-a)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}f(s)\,ds=
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (s-a)^{-\alpha}f(s)\,ds\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}dt=
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (s-a)^{\alpha-1}(x-s)^{1-2\alpha}f(s)\,ds\times
$$

$$\times\int_0^1 \xi^{-\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}\left(1-\frac{s-x}{s-a}\xi\right)^{2\alpha-1}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (s-a)^{\alpha-1}(x-s)^{1-2\alpha}f(s)\,ds\times$$

$$\times F\left(1-\alpha,1-2\alpha,2-2\alpha,\frac{s-x}{s-a}\right)ds$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан,

$$F(a,b,c;x)=(1-x)^{-b}F\left(c-a,b,c;\frac{x}{x-1}\right)$$

формулага асосан

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (s-a)^{-\alpha}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha}\times$$

$$\times F\left(1-\alpha,1-2\alpha,2-2\alpha,\frac{x-s}{x-a}\right)f(s)\,ds.$$

Энди

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha}F\left(1-\alpha,1-2\alpha,2-2\alpha,\frac{x-s}{x-a}\right)=$$

$$= (1-2a)\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{-2\alpha} F\left(1-\alpha, 2-2\alpha, 2-2\alpha, \frac{x-s}{x-a}\right)\frac{s-a}{(x-s)^2}$$

ва $\quad F(a,b,b;x) = (1-x)^{-a} \qquad \Gamma(2-2a) = (1-2a)\Gamma(1-2a)$

муносабатлардан фойдалансак, ушбу

$$g(x) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(1-2\alpha)}\int_a^x (x-s)^{-2\alpha} f(s)\,ds = (x-a)^{\alpha-1} D_{ax}^{2\alpha-1} f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз

Худди шунга ўхшаш формулаларнинг иккинчиси исботланади

$f(x) \in C^{(0,\lambda)}(a,b)$ $0<\lambda\leq 1$ ва $0<\alpha<1$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$D_{ax}^{\alpha} D_{xb}^{-\alpha} f(x) = \cos(\pi\alpha) f(x) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

$$D_{xb}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} f(x) = \cos(\pi\alpha) f(x) - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_a^b \left(\frac{b-t}{b-x}\right)^{\alpha}\frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

айниятлар ўринли бўлади.

Бу ерда интеграллар Кошининг бош қиймати ма носида тушунилади.

Ҳақиқатан ҳам, ( ) ва ( ) тенгликларга асосан

$$F(x)=D_{ax}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}D_{ax}^{-(1-\alpha)}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}dt\int\limits_t^b (s-t)^{\alpha-1}f(s)ds=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}dt\left[\int\limits_t^x (s-t)^{\alpha-1}f(s)ds+\int\limits_x^b (s-t)^{\alpha-1}f(x)ds\right]$$

Бу ерда биринчи жуфт интегралга Дирихле формуласини қўллаймиз, иккинчисининг эса ўринларини алмаштирамиз, у ҳолда

$$F(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int\limits_a^x f(s)ds\int\limits_a^s (x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^b f(s)ds\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}dt\right]$$

Ички интегралларда $\xi=\dfrac{s-t}{x-t}$ алмаштиришни бажариб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$F(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int\limits_a^x f(s)ds\int\limits_a^{(s-a)/(x-a)}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}d\xi-\right.$$

$$-\int_{x}^{b} f(s)\,ds \int_{(s-a)/(x-a)}^{x} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi \Bigg]$$

Ушбу

$$J_{\varepsilon}(x)=\int_{a}^{x-\varepsilon} f(s)\,ds \int_{0}^{(s-a)/(x-a)} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi-\int_{x+\varepsilon}^{b} f(s)\,ds \int_{(s-a)/(x-a)}^{\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi$$

интегрални қараймиз. $J_{\varepsilon}(x)$ ни бўйича дифференциаллаймиз, у ҳолда

$$J_{\varepsilon}'(x)=f(x-\varepsilon)\int_{a}^{(x-\varepsilon-a)/(x-a)} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+$$

$$+f(x+\varepsilon)\int_{(s+\varepsilon-a)/(x-a)}^{\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+$$

$$+\int_{a}^{x-\varepsilon}\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(s)\,ds}{s-x}+\int_{x+\varepsilon}^{b}\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(s)\,ds}{s-x}.$$

Бу тенгликда $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$F(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} J_{\varepsilon}'(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}f(x)\int_{0}^{\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+$$

$$+\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_a^b \left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha} \frac{f(s)\,ds}{s-x}$$

Ма лумки,

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi = \pi\, ctg(\pi\alpha)$$

Бунга асосан, аввалги тенглик

$$F(x) = \cos(\pi\alpha) f(x) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_a^b \left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha} \frac{f(s)\,ds}{s-x}$$

кўринишга келади.

Бундан ( ) формулаларнинг биринчиси келиб чиқади. Иккинчиси ҳам худди шундай исботланади.

4) Агар $v(x) \in C^{0,\lambda}(-1,1)$, $0<\lambda\le 1$, $0<2\beta<1$ бўлса, у ҳолда қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} (x-\xi)^{2\beta-1}\,d\xi \int_{-1}^{1}\left[\,|\xi-t|^{-2\beta} - (1-\xi t)^{-2\beta}\right] v(t)\,dt =$$

$$= \pi tg(\beta\pi)\, v(x) + \int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right) v(t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{1} (\xi-x)^{2\beta-1}\,d\xi \int_{-1}^{1}\left[\,|\xi-t|^{-2\beta} - (1-\xi t)^{-2\beta}\right] v(t)\,dt =$$

$$=-\pi tg\ \ \beta\pi\ \ \nu\ \ x\ \ +\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{1-xt}\right)\nu\ \ t\ \ dt$$

Бу ерда ҳам худди айниятлардаги каби айниятларнинг ўнг томонидаги интеграллар Кошининг бош қиймати ма носида тушунилди

Ушбу ифодани қараймиз:

$$J_1\ \ x\ \ =\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}\ x-\xi\ ^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}\left|\xi-t\right|^{-2\beta}\ \nu\ \ t\ \ dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^{x}\ x-\xi\ ^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{\xi}\ \xi-t\ ^{-2\beta}\nu\ \ t\ \ dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{x}\ x-\xi\ ^{2\beta-1}d\xi\int_{\xi}^{1}\ t-\xi\ ^{-2\beta}\nu\ \ t\ \ dt\right]=$$

$$=\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\left[\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{-1x}^{2\beta-1}\nu(x)+\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x)\right].$$

4) формулаларга ва $\Gamma\ \ 2\beta\ \ \Gamma\ \ 1-2\beta\ \ =\dfrac{\pi}{\sin\ \ 2\beta\pi}$

тенгликка асосан

$$J_1\ \ x\ \ =\frac{\pi}{\sin\ \ 2\beta\pi}\left[\ \nu\ \ x\ \ +D_{-1x}^{1-2\beta}D_{x1}^{-(1-2\beta)}\nu\ \ x\ \ \right]$$

тенгликни ҳосил қиламиз айниятдан фойдаланамиз

Унда $a=-1, \quad b=1, \quad \alpha=1-2\beta$ десак ушбу

$$J_1(x)=\frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}\Big[v(x)+\cos((1-2\beta)\pi)v(x)+$$

$$+\frac{\sin((1-2\beta)\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)}{t-x}dt=$$

$$=\pi tg(\beta\pi)v(x)+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)}{t-x}dt$$

формулага эга бўламиз. Энди

$$J_2(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}(1-\xi t)^{-2\beta}v(t)dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}v(t)dt\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}(1-\xi t)^{-2\beta}dt$$

функцияни текширамиз. $x\in(-1,1)$ бўлганда $s=(x-\xi)/(1-\xi t)$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда,

$$J_2(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}v(t)dt+\int_{0}^{\frac{1+x}{1+t}}\frac{s^{2\beta-1}}{1-ts}ds=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)dt}{1-xt}$$

) ва ( ) тенгликлардан ( ) айниятларнинг биринчиси келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш ( ) нинг иккинчиси исботланади.

5) Каср тартибли D_{ax}^{α} **ва** D_{xb}^{α} $0<\alpha<1$**) дифференциал операторлар учун экстремум принципи** a,b кесмада $\omega\ t$ камаймайдиган мусбат узлуксиз функция ва $f\ t$ узлуксиз функция бўлсин.

Агар a,b сегмантнинг $t=x$ $a<x<b$, нуқтасида $f\ t$ функция мусбат максимум (манфий минимум)га эришса ва бу нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида $\omega\ t\ \ f\ t$ кўпайтма $\gamma>\alpha$ кўрсаткич билан Гёл дер шартини қаноатлантирса, у ҳолда $D_{ax}^{\alpha}\omega f>0$ $D_{ax}^{\alpha}\omega f<0$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma\ 1-\alpha\ D_{ax}^{\alpha}\omega f=\Gamma\ 1-\alpha\ \frac{d}{dx}\left[D_{ax}^{-\ 1-\alpha}\ \omega f\ \right]=$$

$$=\Gamma\ 1-\alpha\ \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma\ 1-\alpha}\int_a^x\frac{\omega\ t\ \ f\ t}{x-t\ ^{\alpha}}dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\omega\ t\ \ f\ t\ -\omega\ x\ \ f\ x}{x-t\ ^{\alpha}}dt+\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\omega\ x\ \ f\ x}{x-t\ ^{\alpha}}dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{d}{dx}\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega\;t\;\;f\;\;t\;\;-\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{x-t\;\;^{\alpha}}dt+\frac{d}{dx}\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{x-t\;\;^{\alpha}}dt\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\omega\;\;x-\varepsilon\;\;f\;\;x-\varepsilon\;\;-\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{\varepsilon^{\alpha}}-\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\left[\omega\;\;x\;\;f\;\;x\;\;\right]'}{x-t\;\;^{\alpha}}dt-\right.$$

$$-\alpha\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega\;\;t\;\;f\;\;t\;\;-\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{x-t\;\;^{1+\alpha}}dt+\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\left[\omega\;\;x\;\;f\;\;x\;\;\right]'}{x-t\;\;^{\alpha}}dt-$$

$$\left.-\alpha\int_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{x-t\;\;^{1+\alpha}}dt+\frac{\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{\varepsilon^{\alpha}}\right\}$$

Энди

$$\int_a^{x-\varepsilon}\frac{dt}{x-t\;\;^{1+\alpha}}=\frac{1}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha\;\;x-a\;\;^{\alpha}}$$

тенгликни эътиборга олсак, ( ) қуйидагича ёзилади:

$$\Gamma\;\;1-\alpha\;\;D_{ax}^{\alpha}\omega f=\frac{\omega\;\;x\;\;f\;\;x}{x^{\alpha}}+\alpha\int_a^{x}\frac{\omega\;\;x\;\;f\;\;x\;\;-\omega\;\;t\;\;f\;\;t}{x-t\;\;^{1+\alpha}}dt$$

Бу айниятдан юқорида баён қилинган экстремум принципи дарҳол келиб чиқади.

Агар $\omega\ t \quad a,b$ да ўсмайдиган мусбат узлуксиз функция бўлса, исботланган экстремум принципида айтилган фикр D_{xb}^{α} оператор учун ҳам ўринли бўлади.

6) Каср тартибли интеграл операторлар учун қуйидаги тасдиқлар ҳам ўринли:

Агар $p>1 \quad (1/p)<\alpha<1+(1/p)$ ёки $p=1 \quad 1\le\alpha<2$ бўлиб, $f(x)\in L_p(a,b)$ бўлса, у ҳолда $D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ функция (a,b) интервалда $\alpha-1/p$ кўрсаткич билан Гёл дер шартини қаноатлантиради;

Агар $k\ge 0 \quad \alpha>0 \quad k+\alpha<1$ ва $f(x)$ (a,b) интервалда k кўрсаткич билан Гёл дер шартини қаноатлантирувчи ҳамда етарли кичик $x-a$ лар учун $f(x)=O((x-a)^{k})$ тенгликни қаноатлантирувчи функция бўлса, у ҳолда $D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ функция (a,b) интервалда $k+\alpha$ тартибли Гёл дер шартини қаноатлантиради ва етарли кичик $x-a$ лар учун $D_{ax}^{-\alpha}f(x)=O((x-a)^{k+\alpha})$ тенглик ўринли бўлади.

Одатда хосса Харди Литтлвуд теоремаси дейилади.

III. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш.

III.1. Гипергеометрик функция

1. Асосий та рифлар. Ушбу

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$$

гипергеометрик тенглама ёки *Гаусс тенгламаси* деб аталувчи тенгламани текширамиз. Бу ерда $a,\ b,\ c$ ихтиёрий параметрлар, улар ҳақиқий ёки комплекс сонлар бўлиши мумкин. Булардан a ва b параметрлар тенгламада симметрик иштирок этади.

5) тенглама учта 0, 1, ∞ махсус нуқталарга эга. Бу тенгламанинг =0 махсус нуқта атрофидаги ечимини

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nA_n x^{n-1}$$

ёки

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^n$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)A_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)A_{n+2}x^{n}$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва y ни (35) тенгламага кўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)\ \ n+1\ \ \ n+2\ \ A_{n+2}x^{n}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[c-\ \ a+b+1\ \ x\right](n+1)A_{n+1}x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} abA_{n}x^{n}=0.$$

Нома лум $A_1,...,A_n,...$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз бунга асосан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш керак x^n олдидаги умумий коэффициентларни нол га тенглаб, ушбу

$$-\ \ n-1\ \ nA_{n}+n\ \ n+1\ \ A_{n+1}-n\ \ \ a+b+1\ \ A_{n}+$$

$$+c\ \ \ n+1\ \ A_{n+1}-abA_{n}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$A_{n+1}=\frac{a+n\ \ \ b+n}{(n+1)\ \ c+n}A_{n}$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ деб ҳисоблаймиз.

5) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими y_1 ни $F(a,b,c;x)$ орқали белгилаб, A_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (6) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F(b,a,c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n$$

Бунда

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1) \qquad (a)_0 = 1,\ n = 1,2,3,\ldots$$

7) қатор *гипергеометрик қатор,* бу қаторнинг йиғиндиси бўлган $F(a,b,c;x)$ функция эса *гипергеометрик функция* дейилади.

Даламбер принципига асосан,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}x\right| = |x|$$

Демак, (7) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи бўлади. Исботсиз эслатиб ўтамизки,
$x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (7) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq 0$ бўлса, узоқлашувчи, $x = -1$ бўлганда эса, агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар

$-1 < c-a-b \le 0$ бўлса, абсолют бўлмай яқинлашувчи, агар $c-a-b \le -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (7) формулада $b = c$ бўлса,

$$(a)_n = (-1)^n (-a)(-a-1)...(-a-n+1) = (-1)^n \binom{-a}{n} n!$$

тенгликка асосан

$$F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1,\ b = c$ бўлса, (7) формула ушбу

$$F(1,b,b,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади я ни $a = 1,\ \ b = c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор геометрик прогрессияга айланади шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган

тенгламанинг иккинчи хусусий умуман айтганда га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун тенгламада $y = x^{\rho}\eta$ алмаштиришни бажарамиз У ҳолда тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$x\ 1-x\ \eta'' + \left[\ c+2\rho\ -\ a+b+1+2\rho\ x\right]\eta' -$$

$$-\left[ab+\rho\ a+b+\rho\ -\frac{\rho\ \rho+c-1}{x}\right]\eta=0.$$

Бу тенглама тенглама типига тегишли тенглама бўлиши учун $\rho=0$ албатта бу ҳол бизни қизиқтирмайди ёки $\rho=1-c$ бўлиши керак У ҳолда

$$x\ 1-x\ \eta''+\ 2-c\ -\left[(a-c+1)+\ b-c+1\ +1\right]x\ \ \eta'-$$

$$-\ a-c+1\ \ b-c+1\ \eta=0$$

тенгламага эга бўламиз Шундай қилиб $\rho=1-c$ бўлганда $y=x^{\rho}\eta$ алмаштириш тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказади фақат a,b,c ларни мос равишда $a-c+1,\ \ b-c+1,\ \ 2-c$ ларга алмаштириш зарур Демак берилган тенглама y_1 га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2=x^{1-c}F\ a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c;x$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, y_2

$$2-c\neq 0,\ \ -1,-2,...,-n,...$$

бўлгандагина ма нога эга бўлади Шундай қилиб тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$y=C_1F\ \ a,b,c;x\ +C_2x^{1-c}F\ \ a-c+1,b-c+1,2-c;x\ ,$$

бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган a ва b параметрлардан биттаси манфий бутун сон $-n$ га тенг бўлса, (

гипергеометрик қатор узилиб қолади ва y n даражали кўпҳадга айланади.

Агарда $a=-n_1$, $b=-n_2$, бунда $n_1>0$, $n_2>0$ бутун сонлар бўлса, у ҳолда гипергеометрик қатор кўпҳадга айланиб, унинг даражаси n_1, n_2 сонларнинг кичигига тенг бўлади.

7) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида

$$\frac{d}{dx}F(a,b,c;x)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;x)$$

формулани ҳосил қиламиз

қаторни аввал x^a, x^b ёки x^{c-1} га кўпайтириб сўнгра ҳадлаб дифференциалласак қуйидаги формулалар келиб чиқади

$$\frac{d}{dx}\left[x^a F(a,b,c;x)\right]=ax^{a-1}F(a+1,b,c;x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^b F(a,b,c;x)\right]=bx^{b-1}F(a,b+1,c;x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1}F(a,b,c;x)\right]=(c-1)x^{c-2}F(a,b,c-1;x).$$

2. Гипергеометрик функциянинг интеграл ифодаси.

7) қаторни

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$$

тенгликни э тиборга олиб, ушбу

$$F(a,b,c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)\,n!}x^n =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!}x^n\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!}x^n$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бундан $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ формулага асосан

$$B(b+n, c-b) = \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!}x^n B(b+n, c-b)$$

кўринишда ёзилади ёки $B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ га асосан

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!}x^n\int\limits_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt$$

Бу ердаги интеграл нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлгани учун

$$b>0,\quad c-b>0 \quad \text{ёки} \quad c>b>0$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)}\int\limits_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}x^n dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(xt)^n\right]dt$$

кўринишда ёзиб оламиз Интеграл остидаги йиғинди $(1-xt)^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйилмасидан иборат бўлгани учун

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

формулага эга бўламиз. Бу эса гипергеометрик функциянинг интеграл ифодасидир.

(*) шартларни битта $c-a-b>0$ шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a<0$ бўлса, $-a>0$ бўлади ва бу тенгсизликнинг (*) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $a-b-c>0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a>0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (*) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c-b>a$ тенгсизликка эга бўламиз.

Энди гипергеометрик функциянинг $x=1$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Шу мақсадда, (8) формуладаги интеграл $b>0,\ c>0$ ва $|x|<1$ бўлганда текис яқинлашувчи бўлгани сабабли $x\to 1$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to 1} F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\lim_{x\to 1}\int_0^1\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\lim_{x\to 1}\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}dt=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}B(b,c-b-a)=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 1} F(a,b,c;x) = F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-b)}$$

Агар ( ) формуладаги интегралда

$$t = \frac{1-s}{1-xs} \quad \text{ёки} \quad s = \frac{1-t}{1-xt}$$

алмаштириш бажарсак, интеграл қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt =$$

$$= (1-x)^{c-a-b}\int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}(1-xs)^{-(c-a)}ds =$$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;x)$$

Демак,

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,c;x)$$

Бу тенглик *автотрансформация формуласи* дейилади.

) интегралда ўзгарувчини $t = 1-s$ формула билан алмаштириб

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt =$$

$$= (1-x)^{-b}\int_0^1 s^{c-a-1}(1-s)^{a-1}\left(1-\frac{x}{x-1}s\right)^{-b}ds$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан ни э тиборга олсак,

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{-b}F\left(c-a,b,c;\frac{x}{x-1}\right)$$

формула ҳосил бўлади.

Гипергеометрик функция учун ушбу

$$F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,1-c+a+b;1-x) +$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,1+c-a-b;1-x)$$

$$c-a-b\notin Z$$

Бол ц формуласи ва

$$F(a,b,a+b;1-x) = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b,1;x)\ln x +$$

$$+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\times$$

$$\times\left[2\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]x^k,$$

$$F\left(a,b,b;x\right)=\left(1-x\right)^{-a}$$

формулалар ҳам ўринлидир.

III.2. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш.

Айтайлик иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама берилган ва бу тенгламанинг ечимини топиш талаб қилинган бўлсин:

$$\left(a_2+b_2x+c_2x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a_1+b_1x\right)\frac{dy}{dx}+a_0y=0, \tag{41}$$

бу ерда a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_2–берилган сонлар, $y=y(x)$.

Бу тенгламанинг еичмини каср тартибли ҳосила $y=D^p_{x_0}z(x)$ кўринишда қидирамиз, p тартибни эса ҳозирча номаълум, уни кейинчалик a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_2 сонлар ёрдамида аниқлаймиз. Каср тартибли ҳосилалар учун Лейбницнинг маълум формуласини қўллаймиз:

$$xD^{p+1}_{x_0}z(x)=D^{p+1}_{x_0}\left(xz(x)\right)-(p+1)D^p_{x_0}z(x),$$

$$xD^{p+2}_{x_0}z(x)=D^{p+2}_{x_0}\left(x^2z(x)\right)-2(p+2)D^{p+1}_{x_0}\left(xz(x)\right)+$$

$$+(p+1)(p+2)D^p_{x_0}z(x)$$

Натжада (41) дан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$D^{p+2}_{x_0}\left[a_2+b_2x+c_2x^2\right]z(x)+D^{p+1}_{x_0}\left[a_1+b_1x-2c_2(p+2)x-b_2(p+2)\right]z(x)+$$

$$+D^p_{x_0}\left[a_0-b_1(p+1)+(p+1)(p+2)c_2\right]z(x)=0.$$

Охирги тенгламанинг ечими $z(x)$ ни чекли интерваллар учун интегралланувчи функциялар синфидан қидирамиз. $D^p_{x_0}\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}D^p_{x_0}$ ва

$D^p_{x_0}\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}D^p_{x_0}$ $(p<0)$ муносабатларнинг ўринли бўлиши учун $z(x)$ функция $z(x_0)=z'(x_0)=0$ шартни қаноатлантириши талаб қилинади. У ҳолда охирги ёзилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$D_{x_0}^p\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(a_2+b_2x+c_2x^2\right)+\left(a_1+b_1x-2c_2(p+2)x-b_2(p+2)\right)\right]\right.$$
$$\left.+a_0-b_1(p+1)+c_2(p+1)(p+2)\right\}z(x)=0. \tag{42}$$

p параметрни

$$a_0+b_1(p+1)+c_2(p+1)(p+2)=0 \tag{43}$$

квадрат тенгламанинг илдизи сифатида аниқлаймиз.

У ҳолда (42) дан оддий дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{dz}{dx}\left(a_2+b_2x+c_2x^2\right)=z\left[a_1+b_1x-(1+p)(b_2+c_2x)\right],$$

бу тенгламанинг ечимини ўзгарувчилари ажратиш усули билан топамиз

$$z(x)=\left(a_2+b_2+c_2x^2\right)^{p+1}\exp\left\{-\int\frac{a_1+b_1x}{a_2+b_2x+c_2x^2}dx\right\}. \tag{44}$$

Шу аснода қидирилаётган (41) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишни олади

$$y(x)=D_{x_0}^p z(x) \tag{45}$$

бу ерда p параметр (43) дан аниқланади.

(44) кўринишда берилган интегрални турли формаларда ҳисоблангани, таниқли математик олим Х. Хольмгрен [6] ишида баён қилинган.

Хусусий ҳолда (41) тенгламани гипергеометрик тенгламага келтириш мумкин [1]. Агар $a_2=0, b_2=1, c_2=-1, a_1=c, b_1=-(a+b+1), a_0=-ab$ десак (43) тенгламадан $p_1=a-1,\ p_2=b-1$ ни ҳосил қиламиз. (44), (45) формулаларни бу қийматларнинг биринчисидан фойдаланадиган бўлсак гипергеометрик тенгламанинг яъни (35) нинг қуйидаги ечими кўринишига келамиз

$y(x)=D_0^{a-1}x^{a-c}(1-x)^{c-b-1}$, бу эса кўриниши ўзгартирилган Эйлер интеграли [1] ҳисобланади. Охирги интегрални ҳисоблаб, якунида гипергеометрик функция орқали ечимини ёзамиз:

$$y(x)=\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)}x^{1-c}F(1+a-c,a+b-c;2c;x).$$

Хулоса

Бу битирув малакавий иши кириш қисми, саккизта параграфни ўз ичига олган уч бобдан иборат бўлиб, биринчи бобда оддий дифференциал тенгламаларнинг асосий тушунча ва таърифлари келтирилган. Биринчи бобнинг иккинчи параграфида энг содда кўринишдаги ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар мисоллар орқали ёртарлича баён қилинди ва ўрганилди. Шу бобнинг учинчи параграфида эса иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга таъриф ва қисқача уларнинг хоссалари баён қилинди.

Ишнинг иккинчи боби тўлиғича каср тартибли интеграл ва ҳосилалар ҳамда уларнинг хоссаларини ўрганишга бағишланди.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида гипергеометрик тенглама, унинг ечими, ечим хоссалари ва гипергеометрик функция учун айрим айниятлар исботланган ва ўрганилган. Охирги параграфда эса бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларни каср тартибли интегродифференциал операторлар ёрдамида ечиш кўрсатилган ва у тўлиғича ўрганилган. Бу масалада қуйидаги

$$\left(a_2+b_2x+c_2x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a_1+b_1x\right)\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама қаралган ва пировардида тенгламада қатнашаётган маълум сонларнинг тайин қиймалларида яъни $a_2=0, b_2=1, c_2=-1, a_1=c, b_1=-\left(a+b+1\right), a_0=-ab$ бўлганда, тенглама гипергеометрик тенгламага келтирилган ва унинг ечими гипергеометрик функция орқали ёзилган:

$$y\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(a-c+1\right)}{\Gamma\left(2-c\right)}x^{1-c}F\left(1+a-c,a+b-c;2c;x\right).$$

Бу ишни бажариш давомида таниқли математиклар Х.Холмгрен [6], Кузнецов [2] ишлари билан танишиб чиқилди. Чет эллик математиклардан ташқари ўзимизнинг ватандош математик олимларимиз

М.С.Салоҳиддиновнинг [3], М.С.Салоҳиддинов ва А.Қ.Ўриновлар ҳаммуаллифлигида чиқарилган [4] ишлардан кенг фойдаланилди.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие транцендентные функции. –М.: Наука, 1965. Том I.-296.
2. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965.
3. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. Т. “Ўзбекистон”2002 й.
4. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар. Тошкент. 2007 й.
5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: Высшая школа. 1985 г. 304 стр.
6. Holmgren Hj. 1) Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som heist// Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm. 1865—1866. Bd 5, N 11. S. 1—83.