

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМНИНГ
Бакалавр бўйича ўқиётган талабалари учун

«ИҚТИСОДИЙ-МАТЕМАТИК УСУЛЛАР ВА МОДЕЛЛАР»

фанидан

МАРУЗА МАТНИ

Термиз - 2008 й.

Термиз давлат университети “Физика – математика ” факультети, Амалий математика ва информатика кафедраси доценти Садатов О.Х. нинг “Иқтисодий - математик усуллар ва моделлар” фанидан ёзган ўқув – услубий тавсияномасига

ТАҚРИЗ

Мамлакатимизда олиб борилаётган туб иқтисодий ислохатлар таълим соҳасида ҳам маълум ўзгаришларни талаб этмоқда Бугунги кунга келиб Ўзбекистон республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни ва Ўзбекистон Республикасининг “ Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” Қонунларидан келиб чиққан ҳолда янгидан – янги ўқув дарсликлари ва қўлланмалар ҳамда тавсияномалар яратилмоқда, қайсики ушбу ўқув – услубий тавсияномада ҳам муаллифлар давлат стандартларига риоя қилган ҳолда дастур асосида амалга оширган ишларидан биридир. “Иқтисодий–математик усуллар ва моделлар” курси талабаларнинг иқтисодий билимларини математик формулалар ва ахборот технологиялари асосида янада чуқурлаштириб , иқтисодий қонуниятларни етарлича тушуниб олишларига , турли хил иқтисодий ходиса ва жараёнлар математик моделларини тузишда яқиндан ёрдам беради.

Ушбу маъруза матнида муаллиф ўзининг кўп йиллик тажрибаларидан келиб чиққан ҳолда мавзуларни тартиблашда ўзгача ёндошиш қилишган , яъни масалан ҳар бир мавзунини ёритишда амалий масалалардан кенг фойдаланишган уларни кетма – кет алгоритмлар асосида кўрсатган.

Асосан 10 та мавзу ёритиб берилган ва амалий машғулотлар учун кўпроқ ўрин ажратилган. Бундан ташқари талабалар ушбу курсни ўрганиш давомида иқтисодий жараёнларнинг мураккаб эканлигини, ушбу жараёнлар таҳлилида математик усуллар ва моделларнинг анъанавий усуллардан афзалликларини тушуниб оладилар.

Ушбу маъруза матнида тақсимлаш масалаларини тадқиқ қилишда чизиқли дастурлаш усуллари алоҳида эътибор берилган.

Бундан ташқари муаллиф томонидан тавсияномада турли хил иқтисодий функцияларни тузишда, чизиқли дастурлаш масалалари , корреляцион-регрессион таҳлил масалаларини ечишда компьютерлардан фойдаланиш бўйича кўрсатмалар ҳам келтириб ўтилган. Бу эса талабаларнинг иқтисодий жараёнларни ўрганишда замонвий компьютер технологияларидан фойдаланиш мумкин эканлигига яна бир бор иқдор бўлишади.

Ушбу маъруза матнини иқтисодиёт ва молия йўналиши талабалари учун дарс давомида ўқишига тавсия қиламан.

Тақризчи:

Иқтисод фанлари номзоди, доцент

О.Қ.Хатамов

Кириш

“Иқтисодий- математик усуллар ва моделлар” фаннинг асосий мақсади халқ хўжалиги ва унинг тармоқлари каби мураккаб иқтисодий тизималарнинг моделлаштириш асосларини ўргатишдан, аниқ иқтисодий объектлар мисолида моделлашнинг қўйилиши, уларнинг иқтисодий мазмуни компьютерларда ечиш ва олинган натижаларни иқтисодий талқин қилиш каби боскичларни ўргатишдан иборатдир.

Дастурни тузиш халқ хужалигининг ҳозирги тизимига асосланган ва бу тизимга тааллуқли бўлган моделлар уни тўлиқ ифодалайди деган тушунчадан келиб чиқиб амалга оширилган.

Ҳозирги пайтда иқтисодий фан ва амалиёт мураккаб иқтисодий, хўжалик ва назарий масалаларни ҳал қилишда амалий математика ютуқларидан кенг фойдаланмоқда.

Қарорлар қабул қилиш тизими иқтисодий тизимнинг айрим бўғинларидаги ишлаб чиқариш ресурслари билан маҳсулот ишлаб чиқариш, уни сақлаш ва истеъмол қилишнинг энг мақбул вариантларини топишдан иборатдир.

“Иқтисодий-математик моделлар ва усуллар” фанини ҳамма иқтисодий мутахассисликларнинг бакалаврлари йўналиши бўйича ўрганади. Ўқув курси бўйича унга -108 соат ажратилган, улардан -36 соат маърузалар учун, 18 соат амалий машғулотлар учун, 18 соат тажриба машғулотлари учун ва 36 соат мустақил таълим учун.

Ушбу маъруза матни Ўзбекистон Республикаси Олий таълим Давлат стандартлари асосида тайёрланиб асосий мақсади халқ хўжалиги ва унинг тармоқлари каби мураккаб иқтисодий жараёнларни моделлаштириш асосларини ўргатишдан, аниқ иқтисодий фактлар мисолида моделлашнинг қўйилиши, уларнинг

иқтисодий мазмунини компьютерларда ечиш ва олинган натижаларни иқтисодий талқин қилиш босқичларини ўргатишдан иборатдир.

Ушбу курс ёрдамида иқтисодий муаммоларни ўрганадиган ва таҳлил қиладиган талабалар аввалам бор қуйдагиларни амалга ошириш керак: кўриб чиқиладиган иқтисодий жараённи мантиқий жиҳатдан тасаввур қилиш; моделлар ёрдамида амалга ошириладиган иқтисодий ечимнинг мақсадини аниқлаш; зарур иқтисодий-математик моделни танлаш ва унинг хусусиятларини иқтисодий баҳолаш.

Ўқитиш турлари - маъруза, амалий ва лабаратория дарслари. Тажриба дарсларида албатта компьютерлардан фойдаланилади.

Назорат тури - рейтинг ва қуйидагиларга бўлинади:

- жорий баҳолаш
- оралиқ баҳолаш
- якуний баҳолаш

Якуний баҳолашда ёзма иш ўтказилади. Мазкур маъруза матни курс буйича намунавий дастурнинг бўлимларини ва масалаларни қамраб олган.

Мундарижа

1-боб. Иқтисодий-математик моделлар

1.1. Иқтисодий-математик модел ва моделлаштириш

1.2. Моделларни синфлаштириш

1.3. Моделлаштириш босқичлари

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

2-боб. Истеъмолни моделлаштириш

2.1. Фойдалиқ функцияси

2.2. Лимит фойдалиқ ва алмаштиришнинг лимит нормаси ..

2.3. Элементар истеъмол назарияси.....

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

3-боб. Ишлаб чиқариш моделлари

3.1. Ишлаб чиқариш функциялари

3.2. Ишлаб чиқариш функциянинг изокванта, изоклина ва
изокосталари

3.3. Ишлаб чиқариш функцияларининг турлари

3.4. Ишлаб чиқаришнинг элементар назарияси

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

4-боб. Бозор моделлари

4.1. Баҳо мувозанати ва баҳо динамикаси.....

4.2. Биринчи тартибли рекуррент тенгламалар

4.3. Ўргамчик тўрисимон модел.....

4.4. Умумий мувозанат модели

4.5. Икки – секторли ишлаб чиқариш модели.....

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

5-боб. Макроиқтисод жараёни моделлари

5.1. Миллий иқтисоднинг соддалаштирилган модели

5.2. Ўсишнинг макромоделли

5.3. Иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар

5.4. Иқтисод динамикаси

5.5. Бизнес цикллари

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

6-боб. Тармоқларaro баланс моделлари

6.1. Кўп тармоқли иқтисод

6.2. Харажат коэффициентларини ҳисоблаш

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

7-боб. Чегаравий оптимизация моделлари

7.1. Шартли экстремумга доир масалаларни ечишда

Лагранж усули

7.2. Фирманинг элементар назарияси

7.3.Тармо=лараро оптимизацион моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

8-боб. Тармо=лараро динамик моделлар

8.1. Текис пропорционал ўсиш траекторияси. Нейман

траекторияси

8.2. Нейман баҳолари

8.3. Магистрал моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

9-боб. И=тисодий-статистик усуллар ва эконометрик моделлар.

9.1. Башоратлаш усуллари91

9.2. Эконометрик моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

10- боб. Чизиқли программалаштириш масалалари.Симплекс ва транспорт масалаларининг қўйилиши.

10.1 Чизиқли программалаштириш масаласининг умумий қўйилиши.....

10.2. Чизиқли программалаштиришнинг Симплекс масаласи.....

10.3.Чизиқли программалаштиришнинг Траспорт масаласи.....

Фойдаланилган адабиётлар.....

Маъруза матни и=тисод соҳасида =ўлланадиган и=тисодий-математик моделлар ва усулларга ба'ишланган. Унда бош=а бир =атор

моделлар билан биргаликда микрои=тисодга оид истеъмол ва ишлаб чи=аришни оптимал ташкил этиш моделлари, макрои=тисодий ўсиш моделлари, тармо=лараро баланс моделлари, эконометрик моделлар ҳамда чизиқли программалаштиришнинг умумий қўйилиши Сипмлекс ва Траспорт масалалари кўрилган.

Бундан ташқари ўшбу маъруза матни “И=тисодиёт” йўналишидаги бакалавриат тизимига мўлжалланган бўлиб, ундаги мавзулар “И=тисодий-математик усуллар ва моделлар” фанининг мазмунини белгиловчи давлат ў=ув стандартлари асосида танланган. Шу билан бирга бу =ўлланма и=тисодга математиканинг тадби=и билан шу\улланувчи мутахассислар учун ҳам =изи=арли бўлади деб умид =иламиз.

Мазкур маъруза матни Республикада и=тисодиёт соҳасида мутахассисларни тайёрлаш сифатини кўтаришда кўмак бўлади деган умиддамиз.

1 боб. И=тисодиётда математик моделлар

Режа:

1.1. И=тисодий-математик модел ва моделлаштириш

1.2. Моделларни синфлаштириш

1.3. Моделлаштириш бос=ичлари

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

1.1 И=тисодий математик модел ва моделлаштириш

Моделлаштиришдан илмий-тад=и=от ишларида анча илгари ва=тлардан бери фойдалана бошланган. У техник конструкция, =урилиш ва архитектура, астрономия, физика, химия, биология ва ижтимоий фанларда ўз ифодасини топган.

Англиялик итисодчи Вильям Петти XVII асрда "Сиёсий арифметика" номли асарида моделлаштириш масалаларига тўхталган эди.

XX асрдаги моделлаштириш усуллари ҳозирги замон фанларининг ҳамма соҳаларига муваффақият келтирди.

"*Модел*" сўзи латинча бўлиб (modulus), ўлчов, намуна, норма каби маъноларни билдиради. Модел сифатида уйнинг, шаҳардаги урилишларнинг, ракетанинг ва ҳоказоларнинг лойиҳаси ёки макетини олиш мумкин.

Моделларни турли хил усуллар ёрдамида ҳосил қилинади. Масалан, бирор объектнинг формасини-предметли модел (макет) шаклида, информацион алоқалар -информацион модел, математик формулалар ёрдамида аниқланган функционал боғланишлар-математик модел шаклида ифодаланади.

Математик моделлар-ўрганилаётган объект ёки жараёнларнинг асосий хоссаларини математик формулалар, тенгламалар ва тенгламалар системаси, тенгсизликлар ва тенгсизликлар системаси орқали ифодасидир.

Объект ёки ҳодиса моделини ҳосил қилиш ва уни модел остида таҳлил этиш жараёни *моделлаштириш* дейилади.

Математик моделларни итисодий қонуниятларни ўрганишга тадбиқ этишни - *итисодий математик моделлаштириш*, бу моделларни амалиётга ўрнатишни эса *итисодий-математик усуллар* дейилади.

Математик моделлар кўп нарсани ўз ичига олиш хусусиятига эга. Буни қуйидаги тенгламалар системаси мисолида кўриш мумкин:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

Бу шартлар нимани ифодалайди? Турли соҳа мутахассислари турли хил изоҳлайдилар. Масалан, физикада бу муносабат электр занжиридаги актив қаршилик, кучланиш ёки ток кучи тенгламасини ёки станокнинг юк ортиш тенгламасини ифодалайди. Шунингдек, бу система товарларни тақсимлаш, озиқ-овқат рақсонини ҳисоблаш ва бошқа бир-анча соҳалардаги шартларни ифодалаши мумкин.

Итисодий тадқиқотларда ҳам моделлаштириш усуллари муҳим роль уйнайди.

1.2. Моделларни синфлаштириш

Моделлаштириш ва моделлар ўзининг турли соҳалардаги тадбиқларига қараб моддий ва абстракт деб аталувчи синфларга бўлинади.

Моддий моделлар асосан ўрганилаётган объект ва жараёни геометрик, физик, динамик ёки функционал характеристикаларини ифодалайди. Масалан, объектнинг кичиклаштирилган макети (масалан, лицей, коллеж, университет) ва турли хил физик, химик ва бошқа хилдаги макетлар бунга мисол бўла олади. Бу моделлар ёрдамида турли хил технологик жараёнларни оптимал бошқариш, уларни жойлаштириш ва фойдаланиш йўллари ўрганилади. Умуман олганда,

моддий моделлар тажрибавий характерга эга бўлиб, техника фанларида кенг =ўлланилади.

Аммо моддий моделлаштиришдан и=тисодий масалаларни ечиш учун фойдаланишда маълум чегараланишлар мавжуд. Масалан, хал= хўжалигини бирор соҳасини ўрганиш билан бутун и=тисодий объект ҳа=ида хулоса чи=ариб бўлмайди. Кўпгина и=тисодий масалалар учун эса моддий моделлар яратиш =ийин бўлади ва кўп харажат талаб этади.

Абстракт (идеал) моделлар инсон тафаккурининг маҳсули бўлиб, улар тушунчалар, гипотезалар ва турли хил =арашлар системасидан иборат. И=тисодий тад=и=отларда, бош=ариш соҳаларида асосан абстракт моделлаштиришдан фойдаланилади.

Илмий билишда абстракт моделлар маълум тилларга асосланган белгилар мажмуидан иборат. Ўз навбатида белгили абстракт моделлар математик ва логик тиллар шаклидаги математик логик моделларни ифодалайди.

Математик моделлаштириш турли хил табиатли, аммо бир хил математик боғланишларни ифодаладиган во=еа ва жараёнларга асосланган тад=и=от усулидир.

Ҳозирги пайтда математик моделлаштириш и=тисодий тад=и=отларда, амалий режалаштиришда ва бош=аришда етакчи ўрин эгаллаб, компьютерлаштириш билан чамбарчас боʻланган.

Математика, компьютерлаштириш соҳалари, умумуслубий ва предмет фанларининг ривожланиши натижасида математик моделлаштириш узлуксиз ривожланиб, янги-янги математик моделлаштириш шакллари вужудга келмо=да.

Объект (жараён, во=еа)нинг математик модели камида иккита гуруҳ элементларни ўз ичига олган математик масаладан иборат бўлади. Улардан биринчиси-объектнинг ани=ланиши керак бўлган элементи ($\vec{y} = (y_i)$ векторнинг координаталари), иккинчиси эса маълум шартлар асосида ўзгарадиган элементлар ($\vec{x} = (x_i)$ вектор элементлари).

Математик моделлар ўзининг таш=и шартлари, ички ва топилиши зарур булган элементлари бўйича функционал ва структурали =исмларга бўлинади.

Функционал модел-Х га =иймат бериб, Y нинг =ийматини олиш бўйича объектнинг ўзгаришини ифодалайди. Бунда $Y = D(X)$ боʻланиш мавжуд бўлади.

Структурали моделлар объектнинг ички тузилишини, унинг тузилиш =исмларини, ички параметрларини, улар орасидаги боʻланишларни ифодалайди.

Структурали моделларнинг энг кўп тар=алгани =уйидагилардан иборат:

а) ҳамма номаълумлар объектнинг таш=и шартлари ва ички параметрлари функциялари шаклида ифодаланади:

$$y_i = f_i(A, X), \quad i \in J \quad (1)$$

б) номаълумлар i тартибли (тенгламалар, тенгсизликлар ва ҳоказо) системалар ёрдамида аниқланади:

$$\Phi_i(A, X) = 0, \quad i \in J \quad (2)$$

бу ерда A -параметрлар тўплами.

Ҳар доим ҳам (2) кўринишдаги масалалар (1) кўринишга келтирилавермайди. Масалан, 5-нчи ёки ундан ортиқ тартибли алгебраик тенгламаларнинг умумий ечимини (1) кўринишда ифодалаб бўлмайди.

Функционал ва структуралӣ моделлар бир-бирини тўлдиради. Функционал моделларни ўрганишда ўрганилаётган объектнинг структураси ҳақида гипотезалар пайдо бўлади ва шу билан структуралӣ моделга йўл очилади. Иккинчи томондан эса, структуралӣ моделларни таҳлил қилиш объектнинг ташқи ўзгариш шартларини такомиллаштиради.

ЭҚМнинг вужудга келиши билан моделлаштиришнинг янги йўналиши пайдо бўлади. Модел яратиш ва унда тажрибалар ўтказишда ЭҚМ катта рол ўйнайди. Бундай моделларни *иммитацион моделлар* дейилади.

Иқтисодий жараёнлар ва воқеаларнинг математик моделларини қисқача *иқтисодий-математик моделлар* дейилади.

Амалий мақсадларда иқтисодий-математик моделлар иқтисодий жараёнларнинг умумий хоссалари ва қонуниятлари бўйича *назарий-аналитик моделларга*, конкрет иқтисодий масалаларни ечиш (иқтисодий таҳлил, башоратлаш ва бошқариш моделлари) бўйича эса *тадбиқий моделларга* бўлинади.

Иқтисодий-математик моделлардан ҳал қўжалигининг турли соҳаларини ва айрим қисмларини тадқиқ этишда фойдаланиш мумкин. Масалан, савдо жараёнларини моделлаштиришда статистик усуллар ёрдамида статистик моделлар қурилади. Назарий статистика асослари ёрдамида эса индексли, балансли ва корреляцион-регрессион моделлар қурилади.

Мисол учун, товароборот динамикасини қуйидаги индекс модели шаклида ёзиш мумкин:

$$J_{pq} = J_p \cdot J_q$$

бу ерда J_{pq} - товароборот динамикаси индекси, J_p - баҳо индекси, J_q - товароборот ҳажми индекси.

Баланс усули ёрдамида дўкondaги моддий ресурслар баланси, савдо ташкилоти доирасида товарлар ҳаракати балансини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\sum_i a_i + \sum_j b_j = \sum_k c_k + \sum_m k_m$$

бу ерда $\sum_i a_i$ - йил бошидаги =олди=, $\sum_i b_i$ -йил давомида олиб келинган
 моддий ресурслар, $\sum_{*} c_{*}$ -йил давомида харажат =илинган моддий ресурслар,
 $\sum_{**} k_{**}$ -йил охиридаги =олди=.

Корреляцион-регрессион таҳлил ёрдамида белгилар ўртасидаги боғланишни ифодаловчи регрессия тенгламаси ани=ланади ва уни маълум эҳтимол (ишонч даражаси) билан баҳолаш, боғланиш зичлигини ани=лаш ўрганилади.

Масалан, тумандаги оила аъзоларининг ўртача бир ойлик даромади (X) билан бир суткада ҳар бир оила аъзоси томонидан истеъмол =илинадиган ёлми=дори (Y) ўртасидаги корреляцион боғланиш учун регрессия тенгламаси $Y = a + kx$ кўринишда бўлиши мумкин, бу ерда a, k – кузатиш натижалари асосида ани=ланадиган регрессия тенгламаси коэффициентлари.

1.3. Моделлаштириш бос=ичлари

Бу бўлимда и=тисодий-математик моделлаштириш бос=ичларининг мазмуни ва унинг кетма-кетлигини баён =иламиз.

Бос=ичлар =уйидагилардан иборат:

1. И=тисодий муаммони =ўйилиши ва уни таҳлил =илиш.

Ма=саднинг =ўйилиши моделлаштиришда муҳим ўрин эгаллайди. Ани= =ўйилган ма=сад асосий элементлар ва улар орасидаги боғланиш таркиби ва ми=дорий характеристикасини ани=лайди.

Моделлаштиришнинг дастлабки бос=ичида маълумотлар тўпланади ва таҳлил =илинади. Таҳлил учун танланган маълумотларнинг тўрилиги бу моделлаштиришнинг сўнгги натижаларига боғли=. Тўпланган маълумотлар абсолют ми=дорларда ва ягона ўлчов бирликларда ифодаланиши керак. Бу бос=ичда моделлаштириладиган объект ва уни абстракциялашнинг муҳим томонлари ва хоссалари белгиланади. Объектнинг структураси ва элементлари орасидаги асосий боғланишлар, унинг ўзгариши ва ривожланиши бўйича гипотезаларни шакллантириш масалалари ўрганилади.

2. Математик моделлар =уриш.

Бунда и=тисодий муаммолар конкрет математик боғланишлар ва муносабатлар (функция, тенгсизлик ва ҳоказо) шаклида ифодаланади.

Математик моделлар =уриш жараёни математика ва и=тисодиёт бўйича илмий билимларнинг ўзаро уй\унлашуvidан иборат. Албатта, бунда математик моделни яхши ўрганилган математик масалалар синфига тегишли бўлиши учун ҳаракат =илинади. Биро=, шундай бўладик, и=тисодий масалани моделлаштириш олдиндан маълум бўлмаган математик структураларга олиб келиши ҳам мумкин. XX аср ўрталаридан бошлаб и=тисодиёт фани ва унинг амалиёти эҳтиёжларидан келиб чи=иб, математик дастурлаш, ўйинлар назарияси, функционал анализ, ҳисоблаш математикаси фанлари ҳам ўз

ривожини топди. И=тисодиёт фанларининг ривожланиши, айтиш жоизки, математиканинг янги бўлимларини очилиши учун муҳим восита бўлиши мумкин.

3. Моделни математик таҳлил =илиш.

Бу бос=ичнинг ма=сади-моделнинг умумий хоссаларини ифодалашдан иборат. Бу ерда тад=и=отларнинг математик усуллари =ўлланилади. Энг муҳим жойи-тузилган моделларнинг ечимга эгалигини исботлашдир. Агар математик масаланинг ечимга эга эмаслиги исбот =илинса, у ҳолда =ўйилган математик модел рад этилади. Шунга мувофи=, и=тисодий масаланинг =ўйилиши ёки математик моделини бош=ача кўринишлари тад=и= этилади. Моделларни аналитик тад=и= этиш уларни эмпирик (сонли) тад=и= =илишга нисбатан устунликка эга, чунки, олинган хулосалар моделлардаги ички ва таш=и параметрларнинг ҳар хил =ийматларида ҳам ўз кучини са=лайди.

Умуман олганда, мураккаб и=тисодий масалалар =ийинчиликлар билан аналитик тад=и=отларга келтирилади. Агар уларни аналитик усулларга келтириб бўлмаса, у ҳолда масалани сонли усулларида фойдаланиб ечилади.

4. Дастлабки маълумотларни тайёрлаш.

Моделлаштиришда маълумотлар тизимига муҳим талаблар =ўйилади. Шу билан биргаликда маълумотларни олиш учун реал имкониятлар амалий ма=садларга мўлжалланган моделларни танлаш учун маълум чегаралар =ўяди. Маълумотларни тайёрлаш жараёнида эҳтимоллар назарияси, математика, статистика, назарий статистика усулларида кенг кўламда фойдаланилади.

5. Сонли ечимлар.

Бу бос=ич =ўйилган масалани сонли ечиш учун алгоритмлар, компьютер учун дастурлар тузиш ва бевосита ҳисоблашлар ўтказиш учун мўлжалланган. Одатда и=тисодий-математик моделларда ҳисоб-китоб ишлари кўпвариантли характерга эга. Замонавий компьютерларнинг пайдо бўлиши бу

6. Сонли натижалар таҳлили ва унинг тадби=лари.

Бу сўнгги бос=ичда моделлаштириш натижаларининг тў\рилиги ва тўлалиги ҳа=идаги саволларга жавоб олинади. Назарий хулосалар ва модел ёрдамида бевосита олинган сонли натижалар ўзаро та==осланади. Шунга =араб =ўйилган и=тисодий масала ва моделларининг юту= ёки камчиликлари ани=ланади.

И=тисодий-математик модел ани=лангандан сўнг, унда иштирок этаётган омилларнинг натижавий белгига таъсирининг мукамаллиги баҳоланади. Агар модел ва унга киритилган барча омиллар талаб этилган эҳтимол билан моҳиятли бўлса, у адекват модел дейилади. Адекват модел бўлмаган ҳолда унинг кўриниши ўзгартирилади. Янги модел олдингисидан моҳиятсиз омилларини чи=ариш йўли билан ани=ланади.

Шу натижалар асосида моделларни такомиллаштириш, уларни ахборот ва математик таъминлаш йўналишлари ани=ланади.

Моделлаштиришдан амалий маъсадларда фойдаланишда итисодий таҳлил, бошқариш, режалаштириш соҳасидаги мутахассислар муҳим рол ўйнайдилар.

Асосий мавзулар

- модел ва моделлаштириш тушунчалари
- математик модел тушунчаси, унинг хусусиятлари
- моделларни синфлаштириш
- итисодий-математик модел хусусиятлари, аҳамияти
- моделлаштириш босқичлари

Таянч иборалар, формулалар

- модел
- математик модел
- моделлаштириш
- итисодий-математик модел
- итисодий-математик моделлаштириш
- моддий моделлар
- абстракт моделлар
- функционал модел $Y = D(X)$
- структуралӣ моделлар $\Phi_i = (A, X), i \in J$
- имитацион моделлар
- назарий-аналитик моделлар
- тадбиқий моделлар

2-боб. Истеъмолни моделлаштириш

Режа:

- 2.1. Фойдалиқ функцияси
- 2.2. Лимит фойдалиқ ва алмаштиришнинг лимит нормаси
- 2.3. Элементар истеъмол назарияси

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

2.1. Фойдалик функцияси

И=тисодий-математик моделларни ўрганишни микрои=тисод жараёнларидан бошлаймиз. Микрои=тисодий таҳлил истеъмолчиларнинг товарларга бўлган талаби билан ишлаб чи=арувчиларнинг шу товарларни бозордаги мувозанатини баҳолаб ёрдамида ўрнатилиши асосида олиб борилади. Талаб ва таклиф ишлаб чи=ариш ва истеъмол билан боли=дир. Агар ишлаб чи=аришни корхоналар энг катта фойдани мўлжаллаб, ташкил =илишса, истеъмолчилар истеъмолни энг фойдалилигини танлайдилар.

Истеъмол товарлари векторини $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ деб белгилаймиз. Буни *истеъмол режаси* вектори дейилади. Бу векторларни бир-биридан фар=лашда *афзаллик функцияси* деб аталувчи $u(x)$ функция ишлатилади. Агар x ва y товар векторлари учун $u(x) > u(y)$ бўлса, x вектор y га нисбатан афзалро= деб =абул =илинади. Шунинг учун ҳам $u(x)$ ни x режанинг фойдалилик ўлчови сифатида =араш мумкин. Афзаллик функцияни бу маънода *фойдалик функцияси* деб ҳам аталади. Истеъмолчи товарларни шу функция =ийматига =араб танлашга ҳаракат =илади.

Истеъмолчининг товарларга бўлган талабини ани=ловчи фойдалик функцияси =уйидаги шартларни =аноатлантириши табиийдир: x -векторнинг координаталари манфий бўлмаган =ийматларни =абул =илсин ва $u(x)$ функция ўсувчи ёки ҳеч бўлмаганда товарлар сони ўсиши билан, камаювчи бўлмасин: яъни $x \leq y$ бўлганда ($x \leq y$ тартибни $x_i \leq y_i, i = \overline{1, n}$ деб тушунилади),

$$u(x) \leq u(y) \quad (1)$$

бўлсин. Агар $u(x)$ дифференциалланувчи бўлса, бу шартни =уйидагича ёзиш мумкин:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

(1) шарт фойдалик функциясини ўрганишда ва уни =уришда муҳим аҳамиятга эга. Шу асосда бефар=лик сирти тушунчасини киритамиз:

$$u(x) = c \quad (3)$$

шартни =аноатлантирувчи x -векторлар тўпламини *бефар=лик сирти* дейилади. Бефар=лик сирти-бу истеъмолчи учун бир хил фойдаликка эга бўлган истеъмол режаси векторларидан ташкил топган тўплamdир.

Бефар=лик сиртлари хоссаларини кўриб чи=амиз. Фойдалик функцияси дифференциалланувчи бўлиб, =уйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Яъни, $u(x)$ функция ҳар бир аргумент бўйича афзалият ўсувчи бўлсин. Аргументларнинг кичик ўзгаришлари бўйича афзалият функциясининг ўзгариши тўла дифференциал оралиқда баёнланади:

$$du(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n u_i dx_i$$

(3) шартга кўра бафзалият сиртида ётувчи x нуқтадан $x + \Delta x$, $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ нуқтага ўтилса, бафзалият функцияси баиймати ўзгармайди, яъни:

$$u(x + \Delta x) = u(x).$$

Демак,

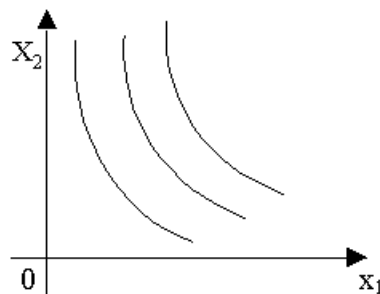
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n u_i \Delta x_i = 0 \quad (5)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар j -нчи ва k -нчи баҳсулотлардан бошласи ўзгармаса, у ҳолда (5) дан $u_k \Delta x_k + u_j \Delta x_j = 0$ келиб чиқади. Бундан эса

$$\frac{\Delta x_j}{\Delta x_k} = - \frac{u_k(x)}{u_j(x)} \quad (6)$$

ўринли бўлади. $-\frac{u_k(x)}{u_j(x)}$ миқдорни j -нчи ва k -нчи баҳсулотларни эквивалент алмаштириш коэффициентлари дейилади. (4) шартга кўра бу коэффициент манфий бўлади.

Агар моделда иккита баҳсулот бааралаётган бўлса, бафзалият чизмаларини текисликда тасвирлаш мумкин (2.1-расм).



2.1-расм.

Бифар=лик чизи=лари $\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{u_2(x)}{u_1(x)} < 0$ муносабатни =аноатлантиради ва ўзаро кесишмайди.

Фойдалиқ функцияларини тузиш истеъмолчиларнинг товарларни сотиб олишга =илган харажатлари, аҳолининг турмуш тарзи, аҳоли даромадлари ва ҳоказоларга боғлиқ бўлиб, уни кўринишини ахтаришда математиканинг турли усулларида, масалан, корреляция-регрессия таҳлилидан фойдаланилади. Дастлабки фойдалиқ функциялари =уйидаги квадратик функция кўринишида топилган:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (7)$$

бу ерда b_i, b_{ij} ($i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, n}$) -маълум коэффициентлар.

Ҳозирги пайтда фойдалиқ функцияларнинг ҳар хил кўринишлари мавжуд. Кўп =ўлланадиган фойдалиқ функцияларидан бири

$$u(x) = \alpha_i \ln(x_i - x_i^0), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

бўлиб, бу ерда $x_i > x_i^0 > 0$ ва x_i^0 -истеъмол =илинадиган товарнинг энг кичик =иймати, α_i коэффициентлар корреляцион назарияси усуллари ёрдамида топилади.

+уйида маҳсулотлар сони иккита бўлган ҳолда и=тисодиёт назариясида ва амалиётида кенг фойдаланадиган функциялар билан танишамиз. (2.2-расм)

1. Маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалиқ функцияси:

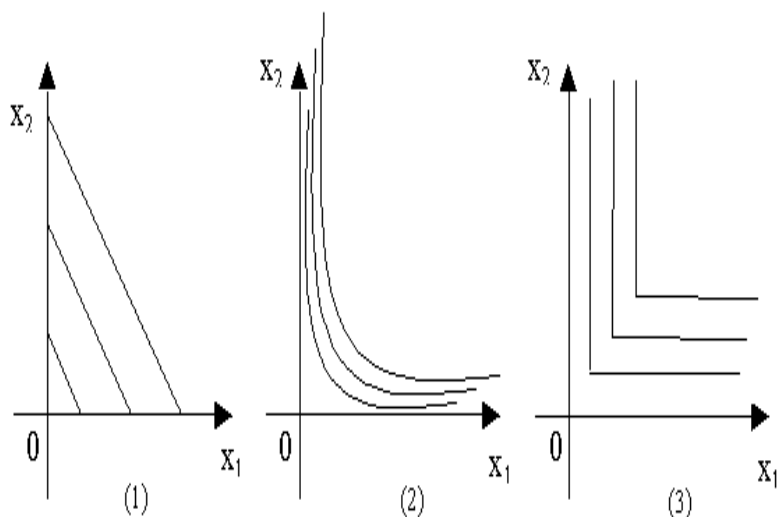
$$U = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad b_1, b_2 > 0$$

2. Неоклассик фойдалиқ функцияси:

$$U = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \quad \text{бу ерда} \quad 0 \leq b_1 + b_2 \leq 1$$

3. Маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалиқ функцияси:

$$U = \min \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right), \quad b_1, b_2 \geq 0$$



2.2-расм. Фойдалик функцияларнинг бефар=лик чизи=лари.

2-кўринишдаги фойдалик функциялар микрои=тисодиёт назариясида, 1., 3. Кўринишдаги функциялар чизи=ли и=тисодиётда, жумладан, чизи=ли дастурлашда ўрганилади.

2-кўринишдаги неоклассик фойдалик функцияси учун камаювчи лимит фойдалиги гипотезаси ўринли, яъни агар фа=ат биринчи турдаги маҳсулотни истеъмол =илиб, иккинчиси ўзгармаса, истеъмолчи учун фойдалик ошиб боради. Аммо бу фойдаликнинг ўсиши истеъмолнинг ўсишидан кичик бўлади:

$$\frac{dU}{dx_i} > 0, \frac{d^2U}{dx_i^2}, i = 1, 2 \quad (9)$$

Бу шартни =олган 1., 3. функциялар =аноатлантirmайди. Лекин ҳар бири учун бефар=лик чизи=лари узаро кесишмайди ва бу чизи=лар боти= бўлади. Алоҳида истеъмолчи учун фойдалик функциясини топиш и=тисодиётнинг муҳим муаммоларидан ҳисобланади.

Иккита маҳсулотдан бирига бўлган талабнинг ортиши иккинчисига бўлган талабнинг пасайишига олиб келса, у ҳолда бу маҳсулотларни ўзаро алмашинувчи маҳсулотлар дейилади (масалан, чой ва кофе). 1.-кўринишдаги фойда функцияси =иймати ўзгармас бўлган ҳолда x_1 нинг ортиши, x_2 нинг камайишига олиб келади. (3) кўринишдаги фойда функциясида эса

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{b_1}{b_2} = \text{const}$$

бўлса, x_1 нинг ортиши x_2 нинг ҳам пропорционал равишда ортишини келтириб чи=аради. Бундай маҳсулотларни ўзаро тўлдирувчи маҳсулотлар дейилади (масалан чой ва шакар).

2.2. Лимит фойдалик ва алмаштиришнинг лимит нормаси

Истеъмол назариясининг асосий тушунчаларидан лимит фойдалик ва алмаштиришнинг лимит нормасидир. $U = U(x_1, x_2)$ фойдалик функцияси берилган бўлсин. Биринчи маҳсулотни истеъмол =илиш ўзгармас бўлганда иккинчи маҳсулот истеъмолини кичик ўзгариши ҳисобига фойдалик функцияси

Ўзгаришининг лимит теъминини иккинчи махсулотнинг *лимит фойдалиги* дейилади. Фойда функциясининг x_1, x_2 лар бўйича хусусий ҳосилалари биринчи ва иккинчи махсулотнинг лимит фойдалигини беради.

Биринчи махсулотни dx_1 га камайтирилса, фойдалилик олдинги даражага чиқиши учун иккинчи махсулотни dx_2 га ортириш керак. Шундай теълиб, биринчи махсулотни иккинчи махсулотга алмаштирилади. Ушбу

$$M = -\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{U=\text{const}} \quad (1)$$

нисбат *алмаштиришнинг лимит нормаси* дейилади.

Маълумки, $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Унда $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ бўлинмани биринчи махсулотни иккинчисига *алмаштириш нормаси* дейилади. Бу норма биринчи махсулот истеъмоли 1 бирликка камайса (кўпайса), иккинчи махсулот истеъмоли теъанчага кўпайиш (камаийиш) кераклигини кўрсатади. Албатта, бунда истеъмолнинг умумий фойдалиги ўзгармаслиги талаб теъилинади.

Агар $A(x_1, x_2)$ ва $B(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ ну=талар битта бефар=лик чизи\ида ётса, у ҳолда

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) \quad (2)$$

ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3)$$

ўринли, ва бу тенгликка асосан алмаштиришнинг лимит нормаси учун теъуйидаги формула келиб чи=ади:

$$M = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \quad (4)$$

Демак, алмаштиришнинг лимит нормаси лимит фойдаликларнинг нисбати билан ифодаланар экан.

Мисол. $u = 4 \ln x_1 + 6 \ln x_2$ фойда функцияси берилган бўлсин.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{4}{x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{6}{x_2}$$

бўлгани учун алмаштиришнинг лимит нормаси $M = -\frac{2}{3}$ бўлади.

x_1 ва x_2 ларнинг теъиматлари бўйича алмаштиришнинг лимит нормасини топиш мумкин.

Фойдалиқ функцияси кўп омилларга бўли= бўлган ҳолда одатда статистик маълумотлар асосида ахтарилади.

Масалан, математик модел сифатида квадратик функция олинган бўлсин. Фараз =илайлик, а-бирор оиланинг аъзолари сони, x_1 —шу оилада ози=—ов=ат маҳсулотларини истеъмол =илиш, x_2 —саноат товарларини истеъмол =илиш, x_3 —пулли хизматлар тўловини (пулда) ифодалаган бўлсин. У ҳолда статистик маълумотларга биноан фойдалиқ функцияси учун =уйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x) = (1 - 1,841a)x_1 + (1 - 2,054a)x_2 + (1 - 2,116a)x_3 + 0.668 \cdot 10^{-4} x_1^2 + 1.23 \cdot 10^{-4} x_1 x_2 + 1.243 \cdot 10^{-4} x_1 x_3 + 0.506 \cdot 10^{-4} x_2^2 + 1.104 \cdot 10^{-4} x_2 x_3 + 0.492 \cdot 10^{-4} x_3^2$$

2-боб. Истеъмолни моделлаштириш

2.1. Фойдалиқ функцияси

И=тисодий-математик моделларни ўрганишни микрои=тисод жараёнларидан бошлаймиз. Микрои=тисодий тащил истеъмолчиларнинг товарларга бўлган талаби билан ишлаб чи=арувчиларнинг шу товарларни бозордаги мувозанатини башоқар ёрдамида ўрнатилиши асосида олиб борилади. Талаб ва таклиф ишлаб чи=ариш ва истеъмол билан бўли=дир. Агар ишлаб чи=аришни корхоналар энг катта фойдани мўлжаллаб, ташкил =илишса, истеъмолчилар истеъмолни энг фойдалилигини танлайдилар.

Истеъмол товарлари векторини $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ деб белгилаймиз. Буни *истеъмол режаси* вектори дейилади. Бу векторларни бир-биридан фар=лашда *афзаллик функцияси* деб аталувчи $u(x)$ функция ишлатилади. Агар x ва y товар векторлари учун $u(x) > u(y)$ бўлса, x вектор y га нисбатан афзалро= деб =абул =илинади. Шунинг учун шам $u(x)$ ни x режанинг фойдалилик ўлчови сифатида =араш мумкин. Афзаллик функцияни бу маънода *фойдалиқ функцияси* деб шам аталади. Истеъмолчи товарларни шу функция =ийматига =араб танлашга щаракат =илади.

Истеъмолчининг товарларга бўлган талабини ани=ловчи фойдалиқ функцияси =уйидаги шартларни =аноатлантириши табиийдир: x -векторнинг координаталари манфий бўлмаган =ийматларни =абул =илсин ва $u(x)$ функция ўсувчи ёки щеч бўлмаганда товарлар сони ўсиши билан, камаювчи бўлмасин: яъни $x \leq y$ бўлганда ($x \leq y$ тартибни $x_i \leq y_i, i = \overline{1, n}$ деб тушунилади),

$$u(x) \leq u(y) \quad (1)$$

бўлсин. Агар $u(x)$ дифференциалланувчи бўлса, бу шартни =уйидагича ёзиш мумкин:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

(1) шарт фойдалиқ функциясини ўрганишда ва уни ўришда мушм ашамиятга эга. Шу асосда бефар=лик сирти тушунчасини киритамиз:

$$u(x) = c \quad (3)$$

шартни аноатлантирувчи x -векторлар тўпламини *бефар=лик сирти* дейилади. Бефар=лик сирти-бу истеъмолчи учун бир хил фойдалиқка эга бўлган истеъмол режаси векторларидан ташкил топган тўпландир.

Бефар=лик сиртлари хоссаларини кўриб чи=амиз. Фойдалиқ функцияси дифференциалланувчи бўлиб, ўйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Яъни, $u(x)$ функция шар бир аргумент бўйича атий ўсувчи бўлсин. Аргументларнинг кичик ўзгаришлари бўйича афзаллик функциясининг ўзгариши тўла дифференциал ор=али ифодаланади:

$$du(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n u_i dx_i$$

(3) шартга кўра бефар=лик сиртида ётувчи x ну=тадан $x + \Delta x$, $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ ну=тага ўтилса, фойдалиқ функцияси иймати ўзгармайди, яъни:

$$u(x + \Delta x) = u(x)$$

Демак,

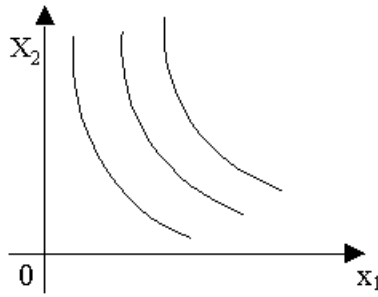
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n u_i \Delta x_i = 0 \quad (5)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар j -нчи ва k -нчи мащсулотлардан бош=аси ўзгармаса, у шолда (5) дан $u_k \Delta x_k + u_j \Delta x_j = 0$ келиб чи=ади. Бундан эса

$$\frac{\Delta x_j}{\Delta x_k} = - \frac{u_k(x)}{u_j(x)} \quad (6)$$

ўринли бўлади. $-\frac{u_k(x)}{u_j(x)}$ ми=дорни j -нчи ва k -нчи мащсулотларни эквивалент алмаштириш коэффициенти дейилади. (4) шартга кўра бу коэффицент манфий бўлади.

Агар моделда иккита мащсулот аралаётган бўлса, бефар=лик чизи=ларини текисликда тасвирлаш мумкин (2.1-расм).



2.1-расм.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{u_2(x)}{u_1(x)} < 0$$

Бефар=лик чизи=лари муносабатни =аноатлантиради ва ўзаро кесишмайди.

Фойдалиқ функцияларини тузиш истеъмолчиларнинг товарларни сотиб олишга =илган харажатлари, аҳолининг турмуш тарзи, аҳоли даромадлари ва шозаоларга боли= бўлиб, уни кўринишини ахтаришда математиканинг турли усулларида, масалан, корреляция-регрессия тащилидан фойдаланилади. Дастлабки фойдалиқ функциялари =уйидаги квадратик функция кўринишида топилган:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (7)$$

бу ерда b_i, b_{ij} ($i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, n}$) -маълум коэффициентлар.

Шозирги пайтда фойдалиқ функцияларнинг шар хил кўринишлари мавжуд. Кўп =ўлланадиган фойдалиқ функцияларидан бири

$$u(x) = a_i \ln(x_i - x_i^0), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

бўлиб, бу ерда $x_i > x_i^0 > 0$ ва x_i^0 -истеъмол =илинадиган товарнинг энг кичик =иймати, a_i коэффициентлар корреляцион назарияси усуллари ёрдамида топилади.

+уйида машсулотлар сони иккита бўлган шолда и=тисодиёт назариясида ва амалиётида кенг фойдаланадиган функциялар билан танишамиз. (2.2-расм)

1. Машсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалиқ функцияси:

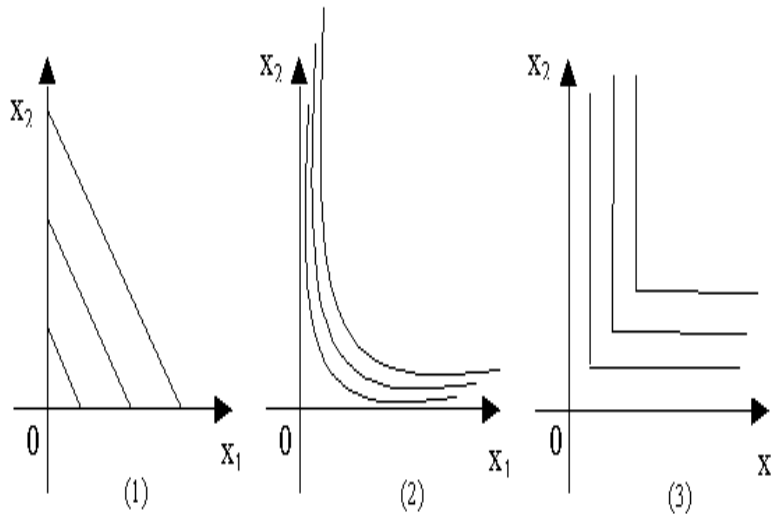
$$U = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad b_1, b_2 > 0$$

2. Неоклассик фойдалиқ функцияси:

$$U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad \text{бу ерда } 0 \leq b_1 + b_2 \leq 1$$

3. Машсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалиқ функцияси:

$$U = \min \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right), \quad b_1, b_2 \geq 0$$



2.2-расм. Фойдалик функцияларнинг бефар=лик чизи=лари.

2-кўринишдаги фойдалик функциялар микрои=тисодиёт назариясида, 1., 3. Кўринишдаги функциялар чизи=ли и=тисодиётда, жумладан, чизи=ли дастурлашда ўрганилади.

2-кўринишдаги неоклассик фойдалик функцияси учун камаювчи лимит фойдалиги гипотезаси ўринли, яъни агар фа=ат биринчи турдаги маъсулотни истеъмол =илиб, иккинчиси ўзгармаса, истеъмолчи учун фойдалик ошиб боради. Аммо бу фойдаликнинг ўсиши истеъмолнинг ўсишидан кичик бўлади:

$$\frac{dU}{dx_i} > 0, \quad \frac{d^2U}{dx_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

Бу шартни =олган 1., 3. функциялар =аноатлантirmайди. Лекин шар бири учун бефар=лик чизи=лари узаро кесишмайди ва бу чизи=лар боти= бўлади. Алоҳида истеъмолчи учун фойдалик функциясини топиш и=тисодиётнинг мушм муаммоларидан шисобланади.

Иккита маъсулотдан бирига бўлган талабнинг ортиши иккинчисига бўлган талабнинг пасайишига олиб келса, у шолда бу маъсулотларни ўзаро алмашинувчи маъсулотлар дейилади (масалан, чой ва кофе). 1.-кўринишдаги фойда функцияси =иймати ўзгармас бўлган шолда x_1 нинг ортиши, x_2 нинг камайишига олиб келади. (3) кўринишдаги фойда функциясида эса

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{b_1}{b_2} = \text{const}$$

бўлса, x_1 нинг ортиши x_2 нинг шам пропорционал равишда ортишини келтириб чи=аради. Бундай маъсулотларни ўзаро тўлдирувчи маъсулотлар дейилади (масалан чой ва шакар).

2.2. Лимит фойдалик ва алмаштиришнинг лимит нормаси

Истеъмол назариясининг асосий тушунчаларидан лимит фойдалики ва алмаштиришнинг лимит нормасидир. $U = U(x_1, x_2)$ фойдалики функцияси берилган бўлсин. Биринчи мащсулотни истеъмол =илиш ўзгармас бўлганда иккинчи мащсулот истеъмолини кичик ўзгариши щисобига фойдалики функцияси ўзгаришининг лимит =ийматини иккинчи мащсулотнинг *лимит фойдалиги* дейилади. Фойда функциясининг x_1, x_2 лар бўйича хусусий щосилалари биринчи ва иккинчи мащсулотнинг лимит фойдалигини беради.

Биринчи мащсулотни dx_1 га камайтирилса, фойдалики олдинги даражага чи=иши учун иккинчи мащсулотни dx_2 га орттириш керак. Шундай =илиб, биринчи мащсулотни иккинчи мащсулотга алмаштирилади. Ушбу

$$M = - \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{U=const} \quad (1)$$

нисбат *алмаштиришнинг лимит нормаси* дейилади.

Маълумки, $\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Унда $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ бўлинмани биринчи мащсулотни иккинчисига *алмаштириш нормаси* дейилади. Бу норма биринчи мащсулот истеъмоли 1 бирликка камайса (кўпайса), иккинчи мащсулот истеъмоли =анчага кўпайиш (камайиш) кераклигини кўрсатади. Албатта, бунда истеъмолнинг умумий фойдалиги ўзгармаслиги талаб =илинади.

Агар $A(x_1, x_2)$ ва $B(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ ну=талар битта бефар=лик чизи\ида ётса, у шолда

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) \quad (2)$$

ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3)$$

ўринли, ва бу тенгликка асосан алмаштиришнинг лимит нормаси учун =уйидаги формула келиб чи=ади:

$$M = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \quad (4)$$

Демак, алмаштиришнинг лимит нормаси лимит фойдаликларнинг нисбати билан ифодаланар экан.

Мисол. $u = 4 \ln x_1 + 6 \ln x_2$ фойда функцияси берилган бўлсин.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{4}{x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{6}{x_2}$$

бўлгани учун алмаштиришнинг лимит нормаси $M = \frac{2}{3}$ бўлади.

x_1 ва x_2 ларнинг эийматлари бўйича алмаштиришнинг лимит нормасини топиш мумкин.

Фойдалиқ функцияси кўп омилларга бўли= бўлган шолда одатда статистик маълумотлар асосида ахтарилади.

Масалан, математик модел сифатида квадратик функция олинган бўлсин. Фараз =илайлик, а-бирор оиланинг аъзолари сони, x_1 —шу оилада ози=-ов=ат мащсулотларини истеъмол =илиш, x_2 -саноат товарларини истеъмол =илиш, x_3 -пулли хизматлар тўловини (пулда) ифодалаган бўлсин. У шолда статистик маълумотларга биноан фойдалиқ функцияси учун =уйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x) = (1 - 1,841a)x_1 + (1 - 2,054a)x_2 + (1 - 2,116a)x_3 + 0.668 \cdot 10^{-4} x_1^2 + 1.23 \cdot 10^{-4} x_1 x_2 + 1.243 \cdot 10^{-4} x_1 x_3 + 0.506 \cdot 10^{-4} x_2^2 + 1.104 \cdot 10^{-4} x_2 x_3 + 0.492 \cdot 10^{-4} x_3^2$$

2.3. Элементар истеъмол назарияси

Бюджет чизи\и

Щар бир истеъмолчининг афзаллик муносабатлари бефар=лик чизи=лар ёрдамида, истеъмол имкониятлари эса бюджет чегаралашлар ор=али ифодаланади.

Фараз =илайлик, =андайдир оиланинг бюджети 30000 сўм бўлсин ва бу бюджет 2 хил товар: уст-бош ва ози=-ов=атлар орасида та=симлансин. Кийим-кечак (товар у) бирлигининг нархи 3000 сўм, ози=-ов=атники (товар х) эса 750 сўм бўлсин. У шолда =уйидаги муносабатни ёзиш мумкин:

$$3000y + 750x = 30000. (1)$$

Бу тенглама билан ани=ланадиган тў\ри чизи=ни *бюджет чизи\и* деб аталади.

Бу ерда x га =иймат бериб, y ни ёки аксинча y га =иймат бериб, x ни топиш мумкин.

Масалан: $x = 20$ бўлсин, y шолда $3000y = 30000 - 750 \cdot 20$ ёки $y = 5$ бўлади.

Демак, $x = 20$ бўлса $y = 5$ бўлади ёки x товардан 20 та, y товардан 5 та сотиб олиш мумкин.

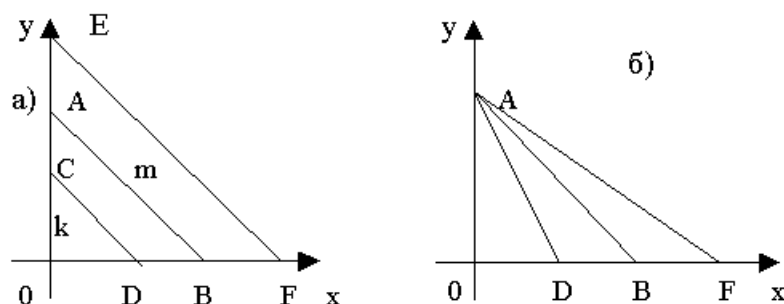
Бюджет чизи\ининг умумий кўриниши =уйидагича ифодаланади:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = d, (2)$$

бу ерда p_i, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — истеъмол =илинадиган товарлар бащоси ва ми=дори, d — оила бюджети (даромади).

Икки хил истеъмол товарлар учун бюджет чизиғи

графикини ясаймиз:



2.3 – расм. Бюджет чизиғининг оила даромади ва товар баъноси шархил бўлгандаги ўзгариши.

Чизмадан кўринадики, оила бюджет чизиғидан пастда жойлашган (масалан, k нуқтаси) хошлаган вариант билан кўрсатилган товарларни сотиб олиш мумкин, аммо m нуқтадаги вариантдан фойдаланиш мумкин эмас, чунки оила бюджети чегараланган.

Агар оила даромади камайса, бюджет чизиғи, баъдо ўзгармаганда, AB чизиғига параллел равишда пастдан ўтади: CD -чизиғи. Бунда оила озроқ товар сотиб олишига тўғри келади. Оила даромади кўпайганда эса, баъдо ўзгармас бўлганда, кўпроқ товар сотиб олиш имконияти пайдо бўлади ва EF бюджет чизиғи AB чизиғига параллел равишда юқоридан ўтади.

Агар даромад ва баъдо бир хил ўзгарса (пропорционал равишда), бюджет чизиғи ўзгармайди.

Агар оила даромади ўзгармасдан, x ва y товарларга баъдо камайса, кўпроқ товар сотиб олиниши мумкин бўлади, шунинг учун бюджет чизиғи ўнгга силжийди, ва аксинча, x ва y товарларга баъдо кўтарилса, товар сотиб олиш имконияти пасаяди ва бюджет чизиғи чапга силжийди, масалан, б) расмдаги AD бюджет чизиғи товарлар баъносини ортириши, AF эса товарлар баъносини камайтириши тўғрисида шўхил бўлди.

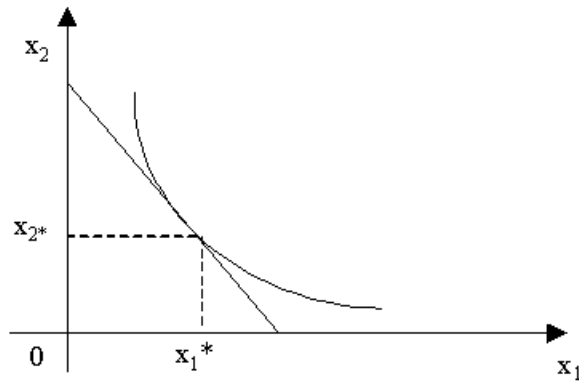
Шундай қилиб, даромад ва баъдони ўзгариши бюджет чизиғи шўлатини ўзгартиради.

Истеъмолни оптимал режалаш модели

Истеъмолчи учун бюджет чегараларида энг афзал товарлар аралашмаси (x_1^*, x_2^*) - оптимал истеъмол режаси дейилади. Истеъмолни оптимал режалаш модели =уйидаги чизиқли дастурлаш масаласига келади:

$$U \rightarrow \max, (p, x) \leq d, \quad p, x \geq 0 \quad (3)$$

бу ерда U – фойдалиқ, m -сад функцияси; p, x – товарларнинг баъдолари ва истеъмоли, d – бюджет шўжми. (3) масаланинг ечими (x_1^*, x_2^*) - оптимал истеъмол режаси- график усулида топилиши мумкин. Бу ечимга бефарқлик чизиғига бюджет чизиғининг уриниш нуқтаси мос келади (2.4-расм):



2.4 – расм.

Ю=орида айтилганларга асосан оптимал истеъмол режаси бащолар ва даромаднинг ўзгаришига боʻли= равишда шар хил бўлади. Бош=ача =илиб айтганда,

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, d), \quad x_2^* = D_2(p_1, p_2, d) \quad (4)$$

бу ерда D_1 ва D_2 лар =авс ичида кўрсатилган катталикларнинг =андайдир функцияларидир. (4) функцияларни *хўжаликнинг талаб функциялари* дейилади. Бу функциялар ёрдамида бащолар ўзгармас бўлганда, даромаднинг ўзгаришига =араб, товарлар истеъмоли ўзгаришини, ёки даромад ўзгармаганда, бащолар ўзгаришининг товарлар истеъмолига таъсир этишини ўрганилиши мумкин.

Асосий мавзулар

- истеъмол режалари, бефар=лик чизи=лар, фойдалиқ функцияларини микрои=тисодий тащлилда =ўллаш
- лимит фойдалиқ ва алмаштиришнинг лимит нормаси
- элементар истеъмол назарияси; оила (якка тартибдаги хўжалик) бюджети чизи\и, оптимал истеъмол модели, истеъмолчиларнинг талаб функциялари

Таянч иборалар, формулалар

- истеъмол режаси, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- фойдалиқ функцияси, $u(x)$
- бефар=лик сирти, чизи\и, $\{x : u(x) = const\}$

$$\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{u_k(x)}{u_j(x)}$$

- мащсулотларни эквивалент алмаштириш коэффиценти,
- мащсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалиқ функцияси, $U = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad b_1, b_2 \geq 0$

- неоклассик фойдалик функцияси, $U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, $b_1 + b_2 = 1$,
- махсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалик функцияси,

$$U = \min \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right) \quad b_1, b_2 > 0$$

- камаювчи лимит фойдалиги гипотезаси,

$$\frac{dU}{dx_i} > 0, \frac{d^2U}{dx_i^2} < 0 \quad i = 1, 2$$

- лимит фойдалик, $\frac{dU}{dx_i}$

$$M = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

- алмаштиришнинг лимит нормаси,

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

- алмаштириш нормаси,
- бюджет чизиғи, $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = d$
- оптимал истеъмол режаси, (x_1^*, x_2^*)
- истеъмолни оптимал режалаш модели,

$$U \rightarrow \max, (p, x) \leq d, \quad p, x \geq 0$$

- ҳўжаликнинг талаб функциялари,

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, d), \quad x_2^* = D_2(p_1, p_2, d)$$

Саволлар

- Фойдалик функцияларнинг энг муҳим хоссалари нимадан иборат?
- Нима учун бефарзлик чизиғлари ўзаро кесишмайди?
- Неоклассик функцияси хусусиятлари қандай?
- Камаювчи лимит фойдалиги гипотезасини шарҳлаб беринг.
- Алмаштиришнинг лимит нормаси ва алмаштириш нормаларнинг иқтисодий маъноси қандай?
- Даромад ва баёни ўзгариши бюджет чизиғи шолатига қандай таъсир этади?

- Истеъмолни оптимал режалаш модели доим ечимга эга бўладими? Ечим ягона бўладими?

Маш=лар

1-маш=, $u = 15 \ln x_1 + 24 \ln x_2$ фойда функцияси берилган бўлсин.

Алмаштиришнинг лимит нормасини топинг.

2-маш=, $y = \alpha x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$ Кобб-Дуглас функцияси ва $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ чизи=ли ишлаб чи=ариш функцияси учун алмаштиришнинг лимит нормаларни топинг.

3-маш=, $150y + 500x = 10000$ бюджет тенгламаси графигини тузинг ва бир нечта ечимларини топинг.

4-маш=, Ю=оридаги тенгламада бюджет икки баробар ортганда графигини ясанг.

5-маш=, Ю=оридаги тенгламада бацолар 75 ва 250 бўлганда графигини ясанг.

6-маш=, $u = 10 \ln x_1 + 15 \ln x_2 \rightarrow \max$, $150x_1 + 200x_2 \leq 5000$, $x_1, x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

7-маш=, $u = 10x_1 + 25x_2 \rightarrow \max$, $150x_1 + 200x_2 \leq 5000$, $x_1, x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

2.3. Элементар истеъмол назарияси

Бюджет чизи\и

Ҳар бир истеъмолчининг афзаллик муносабатлари бефар=лик чизи=лар ёрдамида, истеъмол имкониятлари эса бюджет чегаралашлар ор=али ифодаланади.

Фараз =илайлик, =андайдир оиланинг бюджети 30000 сўм бўлсин ва бу бюджет 2 хил товар: уст-бош ва ози=-ов=атлар орасида та=симлансин. Кийим-кечак (товар у) бирлигининг нархи 3000 сўм, ози=-ов=атники (товар х) эса 750 сўм бўлсин. У ҳолда =уйидаги муносабатни ёзиш мумкин:

$$3000y + 750x = 30000. \quad (1)$$

Бу тенглама билан ани=ланадиган тў\ри чизи=ни *бюджет чизи\и* деб аталади.

Бу ерда х га =иймат бериб, у ни ёки аксинча у га =иймат бериб, х ни топиш мумкин.

Масалан: $x = 20$ бўлсин, у ҳолда $3000y = 30000 - 750 \cdot 20$ ёки $y = 5$ бўлади. Демак, $x = 20$ бўлса $y = 5$ бўлади ёки х товардан 20 та, у товардан 5 та сотиб олиш мумкин.

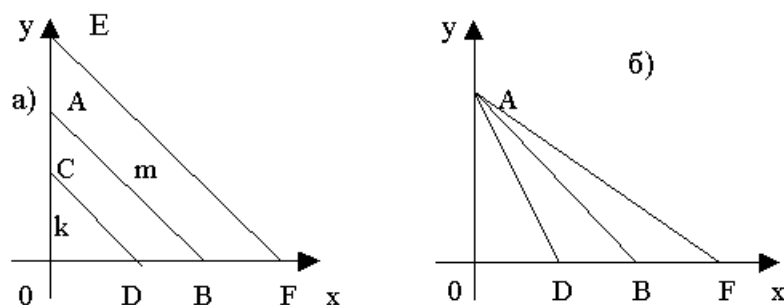
Бюджет чизи\ининг умумий кўриниши =уйидагича ифодаланади:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = d, \quad (2)$$

бу ерда p_i, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – истеъмолчи надиған товарлар баҳоси ва миқдори, d – оила бюджети (даромади).

Икки хил истеъмол товарлар учун бюджет чизиғи

графикини ясаймиз:



2.3 – расм. Бюджет чизиғининг оила даромади ва товар баҳоси ҳар хил бўлгандаги ўзгариши.

Чизмадан кўринадикки, оила бюджет чизиғидан пастда жойлашган (масалан, k нуқтаси) хоҳлаган вариант билан кўрсатилган товарларни сотиб олиш мумкин, аммо m нуқтадаги вариантдан фойдаланиш мумкин эмас, чунки оила бюджети чегараланган.

Агар оила даромади камайса, бюджет чизиғи, баҳо ўзгармаганда, AB чизиғига параллел равишда пастдан ўтади: CD -чизиғи. Бунда оила озроқ товар сотиб олишига тўғри келади. Оила даромади кўпайганда эса, баҳо ўзгармас бўлганда, кўпроқ товар сотиб олиш имконияти пайдо бўлади ва EF бюджет чизиғи AB чизиғига параллел равишда юқоридан ўтади.

Агар даромад ва баҳо бир хил ўзгарса (пропорционал равишда), бюджет чизиғи ўзгармайди.

Агар оила даромади ўзгармасдан, x ва y товарларга баҳо камайса, кўпроқ товар сотиб олиниши мумкин бўлади, шунинг учун бюджет чизиғи ўнгга силжийди, ва аксинча, x ва y товарларга баҳо кўтарилса, товар сотиб олиш имконияти пасаяди ва бюджет чизиғи чапга силжийди, масалан, б) расмдаги AD бюджет чизиғи товарлар баҳосини ортиши, AF эса товарлар баҳосини камайиши туфайли ҳосил бўлди.

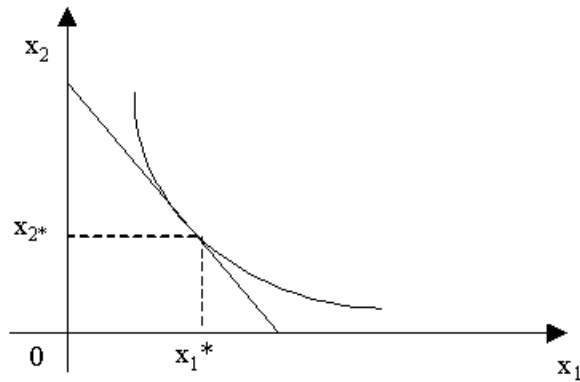
Шундай қилиб, даромад ва баҳони ўзгариши бюджет чизиғи ҳолатини ўзгартиради.

Истеъмолчи оптимал режалаш модели

Истеъмолчи учун бюджет чегараларида энг афзал товарлар аралашмаси (x_1^*, x_2^*)- оптимал истеъмол режаси дейилади. Истеъмолчи оптимал режалаш модели – уйдаги чизиқли дастурлаш масаласига келади:

$$U \rightarrow \max, (p, x) \leq d, \quad p, x \geq 0 \quad (3)$$

бу ерда U – фойдалик, маъсад функцияси; p, x – товарларнинг баҳолари ва истеъмоли, d – бюджет ҳажми. (3) масаланинг ечими (x_1^*, x_2^*) – оптимал истеъмол режаси- график усулида топилиши мумкин. Бу ечимга бефарзлик чизиғига бюджет чизиғининг урилиш нуқтаси мос келади (2.4-расм):



2.4 – расм.

Юзорида айтилганларга асосан оптимал истеъмол режаси баҳолар ва даромаднинг ўзгаришига боғлиқ равишда ҳар хил бўлади. Бош-ача қилиб айтганда,

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, d), \quad x_2^* = D_2(p_1, p_2, d) \quad (4)$$

бу ерда D_1 ва D_2 лар тавассути ичида кўрсатилган катталикларнинг қандайдир функцияларидир. (4) функцияларни *хўжаликнинг талаб функциялари* дейилади. Бу функциялар ёрдамида баҳолар ўзгармас бўлганда, даромаднинг ўзгаришига қараб, товарлар истеъмоли ўзгаришини, ёки даромад ўзгармаганда, баҳолар ўзгаришининг товарлар истеъмолига таъсир этишини ўрганилиши мумкин.

Асосий мавзулар

- истеъмол режалари, бефарзлик чизиқлари, фойдалик функцияларини микроиқтисодий таҳлилда қўллаш
- лимит фойдалик ва алмаштиришнинг лимит нормаси
- элементар истеъмол назарияси; оила (якка тартибдаги хўжалик) бюджети чизиғи, оптимал истеъмол модели, истеъмолчиларнинг талаб функциялари

Таянч иборалар, формулалар

- истеъмол режаси, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- фойдалик функцияси, $u(x)$
- бефарзлик сирти, чизиғи, $\{x : u(x) = \text{const}\}$

$$\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{u_k(x)}{u_j(x)}$$

- маҳсулотларни эквивалент алмаштириш коэффициенти,
- маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалиқ функцияси,
 $U = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad b_1, b_2 \geq 0$

- неоклассик фойдалиқ функцияси, $U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad b_1 + b_2 = 1$,

- маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалиқ функцияси,

$$U = \min \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right), \quad b_1, b_2 > 0$$

- камаювчи лимит фойдалиги гипотезаси,

$$\frac{dU}{dx_i} > 0, \quad \frac{d^2 U}{dx_i^2} < 0, \quad i = 1, 2$$

- лимит фойдалиқ, $\frac{dU}{dx_i}$

$$M = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

- алмаштиришнинг лимит нормаси,

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

- алмаштириш нормаси,

- бюджет чизиғи, $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = d$

- оптимал истеъмол режаси, (x_1^*, x_2^*)

- истеъмолни оптимал режалаш модели,

$$U \rightarrow \max, \quad (p, x) \leq d, \quad p, x \geq 0$$

- ҳўжалиқнинг талаб функциялари,

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, d), \quad x_2^* = D_2(p_1, p_2, d)$$

Саволлар

- Фойдалиқ функцияларнинг энг муҳим хоссалари нимадан иборат?
- Нима учун бефарзлик чизиғлари ўзаро кесишмайди?
- Неоклассик функцияси хусусиятлари қандай?
- Камаювчи лимит фойдалиги гипотезасини шарҳлаб беринг.

- Алмаштиришнинг лимит нормаси ва алмаштириш нормаларнинг итисодий маноси андай?
- Даромад ва баҳони ўзгариши бюджет чизиғи ҳолатига андай таъсир этади?
- Истеъмолни оптимал режалаш модели доим ечимга эга бўладими? Ечим ягона бўладими?

Машлар

1-маш. $u = 15 \ln x_1 + 24 \ln x_2$ фойда функцияси берилган бўлсин. Алмаштиришнинг лимит нормасини топинг.

2-маш. $y = \alpha x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$ Кобб-Дуглас функцияси ва $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ чизиғи ишлаб чиқариш функцияси учун алмаштиришнинг лимит нормаларни топинг.

3-маш. $150y + 500x = 10000$ бюджет тенгламаси графигини тузинг ва бир нечта ечимларини топинг.

4-маш. Ю=оридаги тенгламада бюджет икки баробар ортганда графигини ясанг.

5-маш. Ю=оридаги тенгламада баҳолар 75 ва 250 бўлганда графигини ясанг.

6-маш. $u = 10 \ln x_1 + 15 \ln x_2 \rightarrow \max$, $150x_1 + 200x_2 \leq 5000$, $x_1, x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

7-маш. $u = 10x_1 + 25x_2 \rightarrow \max$, $150x_1 + 200x_2 \leq 5000$, $x_1, x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

3- боб. Ишлаб чи=ариш моделлари

Режа:

3.1. Ишлаб чи=ариш функциялари

3.2. Ишлаб чи=ариш функциянинг изокванта, изоклина ва
изокосталари

3.3 Ишлаб чи=ариш функцияларининг турлари

3.4. Ишлаб чи=аришнинг элементар назарияси

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

3.1. Ишлаб чи=ариш функциялари

Америкалик и=тисодчи олимлар П.Дуглас ва Д.Коббнинг "Ишлаб чи=ариш назарияси" номли ма=оласида А+Ш саноатининг 1899-1922 йиллардаги статистик маълумотлар асосида =айта ишлаш саноатидаги ишлаб чи=арилган маҳсулот ва унга таъсир этувчи капитал ва меҳнат харажатларининг боʻланишини акс эттирувчи математик моделни топиш масаласи ҳал =илинган.

Улар статистик маълумотларга асосланган ҳолда ишлаб чи=арилган маҳсулот ҳажми Y , асосий капитал ҳажми K ва меҳнат харажатлари орасидаги боʻланишни $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ кўринишда таклиф этганлар. Бу ерда $A > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

A, α, β нинг сонли =ийматлари Y, K ва L нинг ю=орида кўрсатилган йиллар мобайнида кузатилган =ийматлари бўйича энг кичик квадратлар усули ёрдамида топилиб, $Y = 1,01K^{0,25}L^{0,75}$ эканлиги ани=ланган. Топилган муносабатнинг амалдаги боʻланишдан катта фар= =исмаслиги текширилган.

Дуглас-Коббларнинг бу тад=и=оти кўп и=тисодчиларнинг ди==атини ўзига тортди. Бу тад=и=отга асосланган ҳолда и=тисодий жараёнларни математик моделларини топишда муҳим рол ўйновчи ишлаб чи=ариш функциялари назарияси яратилди. +уйида ишлаб чи=ариш функцияси тушунчаси ва унинг хоссалари устида тўхталиб ўтамиз.

Ишлаб чи=ариш функцияси аналитик ёки жадвал кўринишда берилиши мумкин. Фараз =илайлик $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 1$ ишлаб чи=ариш ресурслари ми=дорларини, $y_1, y_2, \dots, y_m, m \geq 1$ ишлаб чи=арилган маҳсулотлар ҳажмини

билдирсин, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ эса =андайдир параметрлар бўлсин. $x = (x_1, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, \dots, y_m)$ ва $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ векторларни =арайлик. x -ресурслар вектори, y -ишлаб
 чи=ариш вектори, α эса ишлаб чи=ариш функциясининг параметрлари вектори
 деб аталади. Бу белгилашлар бўйича ишлаб чи=ариш функциясини умумий

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Хусусан (1) ни y га нисбатан ечиш мумкин бўлса,
 ишлаб чи=ариш функцияси

$$y = f(x, \alpha) \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

+уйида соддалик учун ишлаб чи=ариш функцияларини 1 та маҳсулот ва бир
 нечта ресурслар, ҳамда α параметрнинг =иймати маълум бўлган ҳолда
 ўрганамиз. Бу ҳолда ишлаб чи=ариш функцияси

$$y = f(x) \quad (3)$$

кўринишни олади. Ишлаб чи=ариш функцияларини умумий тарзда ўрганишда
 уларга нисбатан ҳар хил шартлар: узлуксизлик, ҳосилаларга эга бўлишлик ва
 х.к. шартлари =ўйилади. +уйида мисоллар кўрамыз.

- I. Фараз =илайлик, ишлаб чи=аришга жалб этилган (меҳнат)
 ресурсларининг ҳар бирисиз маҳсулот етиштириб бўлмайди, уларни
 бош=а ресурслар билан алмаштириш эса маъносиз. Бош=ача =илиб
 айтганда, жалб этилган ресурслардан энг камида биттаси йў=лигидан
 $y = 0$ бўлади.

Бундай шартни =аноатлантирувчи ишлаб чи=ариш функциялари кўп,
 масалан

$$y = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, x_i \geq 0, 0 < \alpha_i < 1, i = \overline{1, n}.$$

- II. Ишлаб чи=ариш харажатлари кўпайиши билан маҳсулот ишлаб чи=ариш
 камаймасин. Бош=ача айтганда,

$$x_i \leq z_i, i = 1, 2, \dots, n \text{ дан } f(x) \leq f(z), z = (z_1, \dots, z_n). \quad (4)$$

Бундай ишлаб чи=ариш жараёнига мос келувчи ишлаб чи=ариш функцияси
 $f(x)$ (кўриниши маълум бўлмасада)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0, i = \overline{1, n} \quad (5)$$

шартни аноматлантиради. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mu_i$ ми=дорни *i-ресурснинг лимит самарадорлиги* дейилади. Лимит самарадорлик x_i - ресурс ми=дорини ўзгаришини ишлаб чи=ариш маҳсулот ми=дорини ўзгаришига таъсирини кўрсатади.

Шуни таъкидлаш керакки, (4) шарт табиий бўлсада, лекин у ҳар доим ҳам бажарилавермайди. Масалан, =ишло= хўжалигида \алла етиштиришда минерал ўитни кўпайтирилса, аввалига \алла ишлаб чи=арилиши кўпаяди, кейин эса камайиб кетиши мумкин.

Ресурслардан фойдаланиш самарадорлигини ўрганиш учун =ўйидаги *ресурснинг ўртача самарадорлиги* (унумдорлиги) тушунчаси киритилади:

$$\mu_i = \frac{f(x)}{x_i} \quad (6)$$

Албатта, ўртача самарадорлик лимит самарадорликдан фар= илади. Масалан, $y = x^\alpha$, $x \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ ишлаб чи=ариш функцияси учун лимит самарадорлик $\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} > 0$, ўртача самарадорлик $\mu = \frac{f(x)}{x} = x^{\alpha-1}$. Бу ишлаб чи=ариш функцияси учун $0 < \alpha < 1$ бўлганда, лимит самарадорлик ўртача самарадорликдан кичик бўлади.

Маҳсулотнинг ишлаб чи=ариш ўзгаришини характерлайдиган лимит ва ўртача самарадорликдан таш=ари ишлаб чи=ариш эластиклиги тушунчасидан ҳам фойдаланилади. *i-нчи ресурснинг лимит самарадорлигини ўртача самарадорликка нисбатини ишлаб чи=аришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклиги* дейилади ва =ўйидагича ёзилади:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\mu_i}{\mu} = \frac{x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}{f(x)} \quad (7)$$

$\varepsilon_i \approx \left(\frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} \right)$ та=рибий формуладан келиб чи=адик, эластиклик-ресурс харажатлари 1% ортганда, ишлаб чи=ариш ҳажми =анча фоизга ошишини кўрсатади.

$\varepsilon_i(x)$ ми=дорни унга тенг кучли бўлган бош=а формула ор=али ҳам ифодалаш

мумкин. Агар $x_i > 0$ ва $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{dx_i}{x_i} = d(\ln x_i)$ ва $\frac{dx}{f(x)} = d(\ln f(x))$ бўлгани учун (7) муносабатни

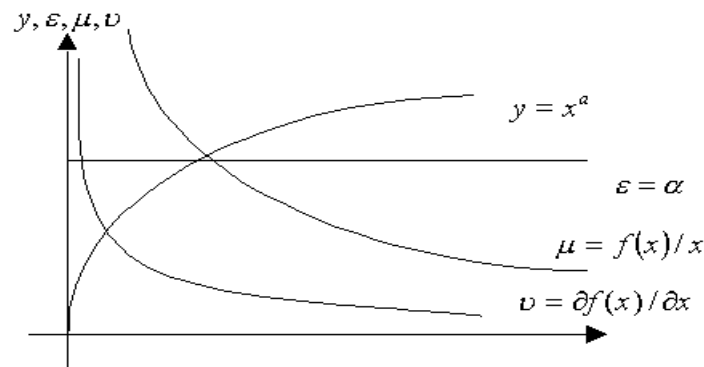
$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial(\ln f(x))}{\partial(\ln x_i)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Масалан, $y = x^\alpha$, $x > 0$ бир ресурсли ишлаб чи=ариш функцияси учун ишлаб чи=ариш эластиклигини ҳисоблайлик:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial(\ln f(x))}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial(\ln x)}{\partial(\ln x)} = \alpha$$

Демак, бу ишлаб чи=ариш функцияси ресурснинг ўзгаришига нисбатан ўзгармас ишлаб чи=ариш эластикликка эга экан. 3.1-расмда

$y = x^\alpha$ ($x > 0, 0 < \alpha < 1$) ишлаб чи=ариш функцияси, унинг лимит ва ўртача эффективлиги, ҳамда ресурс бўйича ишлаб чи=ариш эластиклиги тасвирланган.



3.1-расм

III. Маълумки, битта(i-нчи) ресурс ми=дорини кўпайтириб, =олган ресурсларни ўзгартирмаганда, бу ресурсдан фойдаланиш лимит самарадорлиги ошмайди. Бу =оидани *камаювчи лимит самарадорлик =оидаси* дейилади. Унинг математик ифодаси

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

кўринишда бўлади. Кўриш мумкинки, $y = x^\alpha$ ($x > 0, 0 < \alpha < 1$) функция учун (7) шарт бажарилади.

Демак, ишлаб чи=ариш воситаларини ўсиши маҳсулот ишлаб чи=аришнинг ўсишига олиб келади, аммо бу ҳолда маҳсулот ишлаб чи=аришнинг ўсиш суръати камаяди. Мисол учун, $y = x^\alpha$ ($x > 0, 0 < \alpha < 1$) функция ор=али ифодаланган ишлаб чи=аришда станоклар сони кўпайиб, уларни ишлатаётган ишчилар сони ошмаса, бир ишчига тўри келаётган станоклар сони(=уролланганлик даражаси) ошади ва ишлаб чи=ариш ҳам маълум даражада ошади, аммо бу станоклардан фойдаланиш унумдорлиги камаяди: баъзи бир станоклар ишчилар етишмаганидан тўхтаб =олади.

(7) муносабат ўрнига кучлироқ бўлган, мусбат $x^{(1)}$ ва $x^{(2)}$ =ийматларда $f(x)$ функциянинг =абари=лиги (=абари=лиги ю=ориға) талаби =ўйилиши мумкин, яъни ҳар =андай $\alpha, \beta \geq 0$ ва $\alpha + \beta = 1$ учун =ўйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

$$f(\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}) \geq \alpha f(x^{(1)}) + \beta f(x^{(2)}) \quad (9)$$

Агар ягона ресурсдан фойдаланилса, у ҳолда (8), (9) шартлар бир-бирига тенг кучли бўлади.

IV. Ишлаб чи=ариш функциянинг бир жинслилиги. Агар t -скаляр функция учун

$$f(tx) = t^k f(x), \quad k > 0 \quad (10)$$

муносабат бажарилса, $f(x)$ функцияни k -даражали бир жинсли функция дейилади. Бу шарт, махсулот ишлаб чи=ариш ну=таи назаридан, ишлаб чи=аришнинг ресурс харажатлари пропорционал ўзгарганда (ҳар бир x_i мусбат t скалярга кўпайтирилганда), ишлаб чи=ариш ҳажми =ай даражада ўзгаришини ифодалайди. Бу ўзгариш даражаси $k > 1$ бўлса-ўсувчи, $k = 1$ бўлганда-ўзгармас, $k < 1$ да камаювчи бўлади.

1-мисол. $y = x^\alpha$ ишлаб чи=ариш функцияси берилган бўлсин. У ҳолда $f(tx) = (tx)^\alpha = t^\alpha x^\alpha = t^\alpha f(x)$ ва бу функция бир жинсли бўлиб, $0 < \alpha < 1$ да ишлаб чи=ариш харажатлари пропорционал ошганда, ишлаб чи=аришнинг ўзгариш даражаси камаяди.

2-мисол. $f(x) = (x_1)^{\frac{2}{3}}(x_2)^{\frac{2}{3}}$ иккита ресурсли ишлаб чи=ариш функция берилган бўлсин. Бу функция учун $f(tx) = (tx_1)^{\frac{2}{3}}(tx_2)^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{4}{3}} f(x)$ бўлади. $k = \frac{4}{3} > 1$ бўлгани учун, ишлаб чи=ариш харажатлари пропорционал ошганда, ишлаб чи=аришнинг ўзгариш даражаси ҳам ортади.

Шуни таъкидлаш керакки, (10) шарт барча ишлаб чи=ариш функциялари учун ҳам бажарилавермайди. Шу ма=садда ишлаб чи=аришнинг ўзгариш масштабини характерлайдиган =уйидаги *ишлаб чи=ариш эластиклиги* деб аталувчи кўрсаткич киритилади:

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{f(tx)} \cdot \frac{\partial f(tx)}{\partial x} \quad (11)$$

Бу кўрсаткич, x -ресурсларнинг структураси ўзгармасдан, ишлаб чи=ариш харажатлари 1% га ўзгарганда, махсулот ишлаб чи=арилиши неча фоизга ўзгаришини ифодалайди. Текшириб кўриш мумкинки, (10) шартни =аноатлантирувчи функциялар учун $\mathcal{A}(x) = k$ бўлади.

Ишлаб чи=ариш эластиклиги билан харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклик орасида бо\ланиш =уйидагича:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i(x) \quad (12)$$

3.2.Ишлаб чи=ариш функциянинг

изокванта, изоклина

ва изокосталари

Фараз =илайлик, ишлаб чи=ариш жараёнида маълум ресурсларни бош=а ресурслар билан алмаштириш мумкин бўлсин. Жумладан, бир хил ишлаб чи=ариш ми=дорини ресурсларнинг ҳар хил =ийматлар аралашмасида ташкил =илиш мумкин. Бу ҳолатни

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C = \text{const} \quad (1)$$

тенглик билан ифодалаш мумкин. (1) тенгликни =аноатлантирадиган

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторлар тўплами $F(x)$ функция изоквантаси дейилади. Агар икки факторли $F(L, K)$ ишлаб чи=ариш функцияси берилган бўлса, бу функция учун

$$F(L, K) = C = \text{const} \quad (2)$$

C -га нисбатан эгри чизи=лар оиласи ҳосил бўлади, бу ерда L -меҳнат ресурси, K -капитал (асосий фонд) ресурси. Эгри чизи=лар оиласининг ҳар бир эгри чизи\и ишлаб чи=ариш функция изоквантаси бўлади.

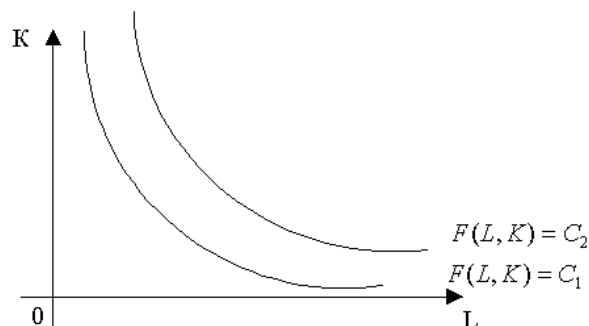
Берилган (2) изокванталар оиласи учун дифференциал тенгламасини келтириб чи=арамиз. Бунинг учун (2) муносабатнинг икки томонини дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F(L, K)}{\partial K} dK + \frac{\partial F(L, K)}{\partial L} dL = 0, \quad (3)$$

бундан:

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{\frac{\partial F(L, K)}{\partial L}}{\frac{\partial F(L, K)}{\partial K}} \quad (4)$$

ҳосил бўлади. Топилган (4) дифференциал тенглама изокванталарнинг дифференциал тенгламасидир. (3.2-расм, унда L -горизонтал, K -вертикал ў=лар).



3.2-расм

(2) изокванталарнинг умумий хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. Берилган ишлаб чиқариш функциянинг изокванталари ўзаро кесишмайди.

2-хосса. Ҳар бир (2) изокванта бўйлаб $K = K(L)$ функция камаювчи ва ботиқ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, (4)га асосан $\frac{dK}{dL} < 0$ (ишлаб чиқариш функциялар ўсувчи) ва шунга кўра $K = K(L)$ функция камаювчи. Энди иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$\frac{d^2 K}{dL^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} - \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial K} \right)^2} \cdot \frac{dK}{dL}$$

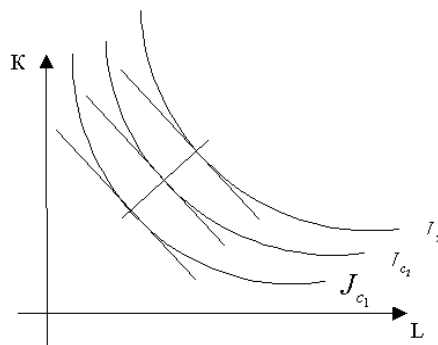
Бу формуладаги каср суратида манфий ифода турибди, чунки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ бўлгани учун, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} < 0$, шунга ўхшаш, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{dK}{dL} < 0$ бўлгани учун $\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \cdot \frac{dK}{dL} > 0$. Юқоридагиларга асосан $\frac{d^2 K}{dL^2} > 0$, бундан $K = K(L)$ функциянинг ботиқлиги келиб чиқади.

3-хосса. Агар ишлаб чиқаришда ҳар икки ресурслар алоқадор бўлса, у ҳолда изокванталар координата ўқлари билан кесишмайди.

4-хосса. Юқоридаги 3-хосса ўринли бўлган изокванталар учун координата ўқлари асимптота вазифасини бажаради.

$F(L, K) = C$ изоквантани J_C каби белгилаймиз.

Таъриф. Агар J_C изокванталарнинг шундай нуқталари мавжуд бўлсаки, бу нуқталарда уларнинг ҳар бирига ўтказилган уринмалар ўзаро параллел бўлса, бундай нуқталар тўплами *изоклина* дейилади. Мос параллел уринмалар эса, *изокосталар* дейилади.



3.3-расм.

Бу таърифга кўра, изоклиналар асосий фонд ва меҳнат ресурсларининг ваътинча

алмашишнинг лимит нормаси $S = -\frac{dK}{dL}$ бир хил бўлган жуфтликлар тўпламини билдиради. Изоклинани ишлаб чиқаришни узоқ муддатли кенгайтириш йўли деб ҳам юритилади. Агар $(L_i, K_i) \in J_c$ бўлса, изокосталар тенгламасини ёзиш мумкин:

$$K - K_i = \frac{dK}{dL} (L - L_i) \quad (5)$$

$\frac{dK}{dL}$ ни γ билан белгиласак ($\gamma = const$), (5) тенгламани $K - K_i = L - L_i$ ёки $K - L = K_i - L_i$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама

ёйидаги умумий кўринишда ифодаланади:

$$a_1 K + a_2 L = \omega \quad (6)$$

Бу ерда $a_1 K + a_2 L$ - ишлаб чиқариш харажатларини ифодалайди. Демак, изокосталар ишлаб чиқариш харажатлари ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат.

3.3. Ишлаб чиқариш функцияларининг турлари

Иккита ресурсли ишлаб чиқариш функцияларнинг кенг ишлатиладиган тўртта хилини ажратиш мумкин.

1. Маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш функцияси:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

2. Неоклассик ишлаб чиқариш функцияси:

$$y = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \text{ бу ерда } b_1 + b_2 \leq 1.$$

3. Маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш функцияси:

$$y = \min \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right)$$

бу ерда b_1, b_2 - функциянинг мусбат параметрлари.

Бу функциялар истеъмолда (2-боб) қўрилган фойда функцияларнинг ўзи. Масалан, неоклассик ишлаб чиқариш функциясига нисбатан истеъмол назариясидаги лимит фойдалиқка ишлаб чиқариш назариясида лимит унумдорлик мос келади. Камаювчи лимит фойдалиқ ва истеъмол товарларнинг камаювчи лимит алмаштириш нормаси оидалари эса бу ерда камаювчи лимит унумдорлик, ҳамда ресурсларнинг камаювчи лимит алмаштириш нормаси оидалари билан ифодаланади.

Энди конкрет ишлаб чи=ариш функцияси учун муҳим характеристикаларни кўриб чи=амиз, хусусан, ҳар бир ресурс бўйича лимит унумдорлигини ва ресурсларни алмаштириш лимит нормасини ҳисоблаймиз.

Кобб-Дуглас функциясини кўриб чи=амиз:

$$y = x_1^{0.75} x_2^{0.25}$$

Бу функция учун меҳнатнинг лимит унумдорлиги (эфективлиги)

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0.75 x_1^{-0.25} x_2^{0.25},$$

капиталнинг лимит унумдорлиги (эфективлиги)

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.25 x_1^{0.75} x_2^{-0.75}$$

бўлади.

Ресурсларни алмаштириш лимит нормаси

$$-\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{y=\text{const}} = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

билан белгиланади. Бу норма у-ишлаб чи=аришни ўзгартирмаган ҳолда биринчи ресурсни иккинчиси билан алмаштиришнинг лимит нисбатини ифодалайди. Биздаги Кобб-Дуглас функцияси учун ресурсларни алмаштириш лимит нормаси =уйидагича ифодаланади:

$$\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = (0.75 x_1^{-0.25} x_2^{0.25}) / (0.25 x_1^{0.75} x_2^{-0.75}) = 3(x_2/x_1)$$

3.4. Ишлаб чи=аришнинг элементар назарияси

Бу бўлимда =ис=а муддатли ишлаб чи=ариш жараёни ўрганилади. Бу муддатда корхонадаги ишлаб чи=ариш факторлар ўзгармас деб ҳисобланади.

Харажатлар функцияси

3.3-расмда изоклинада ётган, ҳамда изокванталар ва изокосталарнинг кесишган ну=талари берилган ишлаб чи=аришга эришиш учун минимал харажатга эга ресурсларни ифодалайди. Агар ишлаб чи=ариш ми=дори y^* га мос келадиган

бундай ну=та координаталари $(L^*, K^*) = (x_1^*, x_2^*)$ бўлса, у ҳолда ишлаб чи=ариш

харажатларининг ўзгарувчи =исми $\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*$ ни топиш мумкин. Бунга ўзгармас харажатлар =ўшилса, умумий ишлаб чи=ариш харажатлари келиб чи=ади.

Ўртача ва лимит харажатлар

Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг 1 бирлигига тўғри келадиган ишлаб чиқариш харажатларини *ўртача харажат* C дейилади. Агар ишлаб чиқариш функцияси

$$y = Ax_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2}$$

ва харажатлар функцияси

$$\omega = a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + a_0$$

берилган бўлса, ўртача харажат учун қуйидаги формулани келтириб чиқариш мумкин:

$$C = \frac{\omega}{y} = (a_1 \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{\delta_1 + \delta_2}} + a_0) / y,$$

$$Q = A \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}\right)^{\delta_2}.$$

бу ерда

Лимит харажат (LC) деб умумий харажатларнинг ишлаб чиқариш бўйича

ҳосиласига $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$ айтилади. Юқоридаги ишлаб чиқариш ва харажат функциялар учун

$$LC = \frac{d\omega}{dy} = \frac{a_1}{b_1 \cdot Q} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{\delta_1 + \delta_2} - 1}.$$

Асосий мавзулар

- ишлаб чиқариш функциялар тарихи, Кобб-Дуглас функцияси
- ишлаб чиқариш функцияси ва унинг хоссалари, асосий тушунчалар
- ишлаб чиқариш функциянинг изокванталари, изоклиналари ва изокосталари
- ишлаб чиқариш функцияларининг турлари, ресурсларнинг лимит унумдорлиги ва алмаштириш нормаси
- ишлаб чиқаришнинг элементар назарияси, харажатлар функцияси, ҳамда ўртача ва лимит харажатлар тушунчаси

Таянч иборалар, формулалар

- ишлаб чиқариш функцияси, $F(x, y, a) = 0, \quad y = f(x)$
- ресурс бўйича лимит эффективлик (унумдорлик), $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

- ресурснинг ўртача эффективлиги(унумдорлиги), $\mathcal{A}_i = \frac{f(x)}{x_i}$
- ишлаб чиқаришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклиги,

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\nu_i}{\mathcal{A}_i} = \frac{x_i \partial f}{f(x) \cdot \partial x_i}$$

- камаювчи эффективлик оидаси, $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$

- бир жинсли ишлаб чиқариш функцияси, $f(tx) = tkf(x), k > 0$

- ишлаб чиқариш эластиклиги,

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{f(tx)} \cdot \frac{\partial f(tx)}{\partial x}, \quad \varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)$$

- функция изоквантаси, $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad F(L, K) = C$

- изоклина, $S = -\frac{dK}{dL}$

- изокоста, $a_1 K + a_2 L = \omega$

- маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш функцияси, $y = b_1 x_1 + b_2 x_2$

- неоклассик ишлаб чиқариш функцияси, $y = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2}, \delta_1 + \delta_2 \leq 1$

- маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш функцияси, $y = \ln \left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2} \right)$

- Кобб-Дуглас функцияси, $y = x_1^{0,75} x_2^{0,25}$

- ресурсларни алмаштириш лимит нормаси, $-\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{y=const} = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$

- харажатлар функцияси, $\omega = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0$

- ўртача харажат, $C = \frac{\omega}{y} = (a_1 \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \left(\frac{y}{Q} \right)^{\frac{1}{\delta_1 + \delta_2}} + a_0) / y$

- лимит харажат, $LC = \frac{d\omega}{dy} = \frac{a_1}{b_1 \cdot Q} \cdot \left(\frac{y}{Q} \right)^{\frac{1}{\delta_1 + \delta_2} - 1}$

Саволлар

- Ишлаб чи=ариш функция фойдалиқ функциядан нима билан фар=аилади?
- Ўртача ва лимит эффективликлар орасида аандай фар=бор?
- Эластиклик коэффициентининг и=тисодий маъноси аандай?
- Камаювчи эффективлик оидасини шарҳлаб беринг
- Изоклина ва изокостанинг и=тисодий маъноси аандай?

Маш=лар

1-маш=. $y = 5x^{0.75}$ ишлаб чи=ариш функциянинг ўртача ва лимит эффективлигини топинг, ҳамда уларни ресурс $x = 12$ аийматида та=осланг.

2-маш=. Аввалги маш=даги ишлаб чи=ариш функцияси учун ишлаб чи=аришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклигини ҳисобланг.

3-маш=. $y = 3x_1^{0.4} x_2^{0.3}$ ишлаб чи=ариш функцияси учун ишлаб чи=аришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклигини, ҳамда ишлаб чи=ариш эластиклигини ҳисобланг.

4-маш=. $y = 3x_1^2 + 5x_1x_2$ функцияни биржинслилигини текширинг ва пропорционаллик даражасини топинг.

5-маш=. $y = 4x_1 + 6x_2$ ишлаб чи=ариш функция изокванталарини ишлаб чи=ариш ҳажми 12, 24, 36 аийматлар учун чизинг.

6-маш=. $y = x_1^{0.75} x_2^{0.25}$ ишлаб чи=ариш функцияси, ҳамда $w = 12x_1 + 8x_2$ харажатлар функцияси берилган. (3;5) ну=тада ўртача ва лимит харажатларни топинг.

7-маш=. $y = ax_1^a \cdot x_2^b$ Кобб-Дуглас функцияси берилган. Берилган функция учун $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ ларни ҳисобланг.

8-маш=. $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ чизи=ли ишлаб чи=ариш функцияси учун $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ ларни ҳисобланг.

9-маш=. Кобб-Дуглас функцияси ва $y = a_1x_1 + a_2x_2$ чизи=ли ишлаб чи=ариш функцияси учун $\epsilon_1(x)$, $\epsilon_2(x)$ ва $\epsilon(x)$ эластиклиларни ҳисоблаш.

10-маш=. Фирманинг ишлаб чи=ариш функцияси $Z = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2$ берилган, бу ерда x_1, x_2 -ресурс харажатлари. Бу харажатлар ресурслари бўйича максимал ишлаб чи=ариш аийматини топинг.

Режа:

- 4.1. Баҳо мувозанати ва баҳо динамикаси
- 4.2. Биринчи тартибли рекуррент тенгламалар
- 4.3. Ўргамчик тўрисишон модел
- 4.4. Умумий мувозанат модели
- 4.5. Икки – секторли ишлаб чиқариш модели

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

4.1. Баҳо мувозанати ва баҳо динамикаси

Истеъмол билан ишлаб чиқариш ўртасида мувозанат ўрнатишда бозор муҳим воситачи ҳисобланади. Бу бобда бозор жараёнига оид асосий тушунчалар, жумладан баҳо ва унинг бозордаги ўрни кўриб чиқиладиган, баъзи бир кенг тарқалган иқтисодий математик моделлар ўрганилади

Маълумки баҳо бозор иқтисодиётининг асосий категориялардан бири бўлиб, у оят муҳим иқтисодий восита, бозор иқтисодиётнинг удратли урули ҳисобланади. Баҳонинг маълум вазифалари (функциялар) мавжуд.

Бозорнинг мувозанатини таъминлаш функцияси

Раобат воситаси функцияси.

Ҳисоб-китоб ва ўлчов функцияси.

Иқтисодий тартиблаш каби маълум вазифалари функциялари мавжуд.

Баҳонинг мувозанатни таъминлаш функцияси талаб ва таклиф мувозанати орқали амалга оширилиб, бозордаги талаб ва таклифини хажмини шунга мос келишини таъминлайди. Баҳо туфайли амалга ошириладиган мувозанат товарларнинг йиғилиб қолмай сотилиб кетишини, таъминлайди, ҳамда шу билан бирга товар тақчиллигига йўл қўймайди. Баҳо орқали ишлаб чиқариш билан истеъмол ўртасида мослик ўрнатилади.

Раобатнинг асосий тури бу баҳо воситасида раобат қилишдир. Бозорда раобатчилар нархларни тез-тез ўзгартириб турадилар. Маълум товар ишлаб чиқарувчилар ўз рақибларини бозордан сиқиб ва харидорларни ўзларига олиб олишлари мақсадида имкони борича баҳони пасайтиришдан фойдаланишга ҳаракат қилидилар.

Баҳо бозорнинг тартибга солинишида катта ўрин эгаллайди. Муайян товар нархининг ошиши унга талаб кўплигини, яхши фойда келтиришини билдиради. Баҳонинг пасайиб кетиши товарга талаб камлигини ёки унинг талабга нисбатан кўплигини, ундан фойда камлигини кўрсатади. Баҳонинг ошиб бориши товар ишлаб чиқариладиган соҳаларга ресурсларнинг кўплаб олиб келинишини таъсир этади, чунки бунда фойда кўп бўлади, натижада товарлар таклифи кўпайиб, кейинчалик баҳо пасаяди. Шу билан ресурслар бу ердан чиқиб, бошқа соҳага кўчади. Демак, баҳонинг тебраниб туриши ресурсларни керакли соҳаларга буриб туради. Шу билан баҳо ортади ишлаб чиқариш тартибланади.

Умуман олганда, баҳо иқтисодий тартибга солишда, моддий бойликлар ва хизматлар ўлчовини бажаришда катта аҳамиятга эга.

Уйида бозордаги мувозанатга эришилади, бунда баҳонинг таъсири эришилади – деган саволларга тўхталамиз, аввал моделлаштириш жараёнида рекуррент тенгламалар ҳақида маълумотлар келтирилади, кейин эса конкрет бозор модели кўриб чиқилади.

4.2. Биринчи тартибли рекуррент тенгламалар

Кўп ҳолатларда иқтисодий жараёнларни тенгламалар ёрдамида ифодалашда унинг эришиди хусусиятини белгиловчи t -вақт бўли

$y(t)$ миқдори $y(t-1)$ ва $y(t-2)$ ва ҳоказолар ортади бўловчи рекуррент тенгламалар деб аталувчи муносабатларни ўрганиш муҳим аҳамиятга эгадир.

$$y(t) = ky(t-1) + b \quad (1)$$

бу ерда k, b – ўзгармас коэффициентлар. Бу тенгламанинг умумий ечими эришдаги формула билан аниқланади:

$$y(t) = y^* + Akt \quad (2)$$

бу ерда $y^* = \frac{b}{1-k}$ -вақтга бўли бўлмаган ечим, A -параметр. Агар бошланғич шарт $y(0) = y_0$ берилган бўлса, юқоридаги ечим эришдаги кўринишда бўлади:

$$y(t) = y^* + (y_0 - y^*)kt \quad (3)$$

1-масала. $y(t) = \frac{3y}{t-1} = 2$ Рекуррент тенгламанинг $y_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Ечиш. $k = 3, b = 2$ Демак, $y^* = \frac{2}{1-3} = -1$. (3) формулага кўра

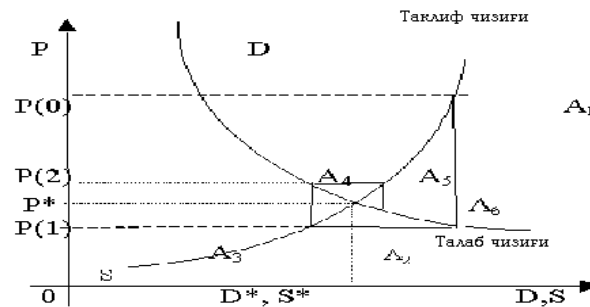
$$y(t) = -1 + (1 - (-1))3t = -1 + 2 \cdot 3t$$

4.3. Ўргамчик тўрисишон модел

Умумий ҳолат

Бу бўлимда якка маҳсулотли бозор модели кўрилади. Бунда биз бозордаги маҳсулот баҳоси, таклифи ва унга бўлган талаб орасидаги боʻланишларни ўрганамиз. Бозор иқтисодиётида талаб ва таклиф мувозанати муҳим рол ўйнайди. Талаб ва таклиф баҳо ортали бир-бири билан боʻланади. Асосий кўриладиган масаламиз, берилган шароитда қандай қилиб бозор мувозанатига эришилади, деган саволга жавоб топишдан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, бозордаги якка маҳсулот қандайдир вақт давомида кўрилмоқда. Унга бўлган талаб D , унинг баҳоси P ва таклифи S қуйидаги чизмадагидек бўлсин:



4.1-расм

Идеал ҳолатда бозордаги баҳо, таклиф ва талаб P^*, S^*, D^* қийматларга тенглашади. Бунда $D^* = S^*$ мувозанат тенглиги бажарилади. Аммо аслида ҳар хил сабабларга кўра (Мисол учун, қишлоқ хўжалиги маҳсулоти учун сув танқислиги туфайли етиштирилган ҳосил камайиши мумкин ва унинг бозордаги баҳоси кўтарилиб кетади) бозор бу идеал ҳолатда бўлмайди. Фараз қилайлик, биз кузатишган T_0 вақтда баҳо $P(0)$ бўлсин. Бу баҳодан келиб чиққан таклиф $T_1 = T_0 + 1$ вақтда $S(1)$ га тенг бўлади (Расм 4.1.да A_1 нуқта) ва натижада унга тенг бўлган талаб $D(1)$ (A_2 нуқта) ва мос баҳо $P(1)$ бўлади. Бу баҳога нисбатан кейинги $T_2 = T_1 + 1$ вақтдаги таклиф яна ўзгаради (A_3 нуқта) ва яна янги талаб (A_4 нуқта) ва янги $P(2)$ баҳо ҳосил бўлади. Кейинги даврларда юзоридаги циклик ўзгаришлар Расм 4.1.да кўрсатилгандек ўрганишчи тўриси монотон бўлади. Кўришиб турибдики, биз ўрганиётган жараёнда баҳолар $P(0), P(1), P(2), \dots$ кетма-кетликни ташкил қилиб, мувозанат P^* баҳога яқинлашмоқда.

Чизиqli ҳолат

Фараз қилайлик, бозор жараёни маълум.

Бозорда муайян бир товарга бўлган эҳтиёжнинг t моментдаги ёки ундан олдинги моментдаги талаб ва таклиф функциялари $(P(t))$ баҳодан ёки $P(t-1)$ баҳодан қуйидагича бўлсин:

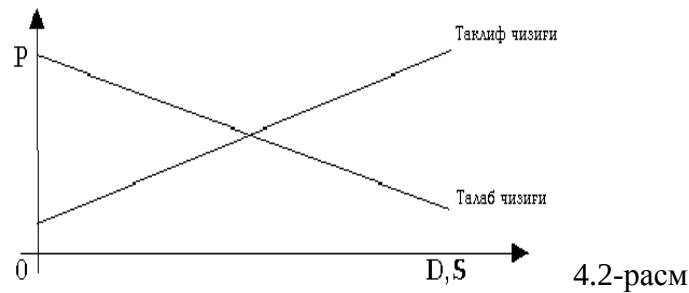
талаб функцияси $D(t) = a - bP(t), (1)$

бу ерда a, b - ўзгармас мусбат параметрлар ва $P(t)$ - t моментдаги маҳсулот баҳоси;

таклиф функцияси $S(t) = -c + dP(t-1)$, (2)

бу ерда c, d - ўзгармас мусбат параметрлар, $P(t-1)$ - $(t-1)$ моментдаги маҳсулот баҳоси. $S(t)$ таклиф аввалги $t-1$ даврдаги $P(t-1)$ баҳога араб шаклланади, $D(t)$ талаб эса кўрилатган t даврдаги $P(t)$ баҳога боʻланади.

(1) ва (2) функцияларнинг текисликдаги графикларини ясаймиз:



4.2-расм

(1) ва (2) талаб ва таклиф функцияларини тенг-ласак, баҳога нисбатан тенглама ҳосил бўлади:

$$P(t) = -\frac{d}{b} P(t-1) + \frac{c+a}{b}. \quad (3)$$

$P(t) = P(t-1)$ бўлгандаги P^* - баҳо мувозанати учун уйидаги формула ҳосил бўлади:

$$P^* = \frac{c+a}{b+d}.$$

Юзоридагиларга асосан, $t \rightarrow \infty$ да $P(t) \rightarrow P^*$ бўлиши учун $d < b$ тенгсизлик асос бўлади. Шунга араб бозордаги ўзгариш жараёнлар яинлашувчи (стабилланувчи) ёки узолашувчи (стабиллашмайдиган) бўлади.

Бозор жараёнини стабиллантирувчи $d < b$ шартнинг итисодий маъноси уйидагича: агар таклифнинг ўзгариш тезлиги (d параметр) талабникидан (b параметр) кичик бўлса, ёки бошача айтганда, таклиф талабга нисбатан секинро ўзгарса, бозор стабилланувчи бўлади, акс ҳолда, бозор мувозанатдан узолашиб бораверади.

2-масала. Бозордаги талаб ва таклиф $D(t) = 4P(t) - 4$, $S(t) = 8 - 2P(t-1)$ кўринишда бўлсин. $P(t)$ нарх учун рекуррент формулани топинг ва бошланғич нарх $P_0 = 3$ бўлганда ихтиёрий t учун таклиф мидорини аниланг.

Ечиш. $4P(t) - 4 = 8 - 2P(t-1)$ Бундан $P(t) = 3 - 0.5P(t-1)$

рекуррент тенглама келиб чиади. Вагга боли бўлмаган ечим $P^* = \frac{3}{1.5} = 2$ ва керакли ечим $P(t) = P^* + (P_0 - P^*)(-0.5)^t = 2 + (-0.5)^t$ бўлади. Нархлар камаювчи

амплитуда билан тебранади ва ошиб борган сари $P^* = 2$ га якин бўлади. Таклиф учун формула уйидаги топилади:

$$S(t) = 8 - 2P(t-1) = 8 - 2\left(2 + (-0,5)^{t-1}\right) = 4 - 2(-0,5)^{t-1}.$$

4.4. Умумий мувозанат модели

Умумий мувозанат модели ҳам ўргамчик тўрисишон модели каби бозор фаолиятини ифодалайди. Бу моделни микроиқтисодий таҳлил асосчиларидан бири Л.Вальрас номи билан юритилади.

Моделни ўрганишда содда ҳолатни кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, бозорда иккита корхона ўз маҳсулоти билан атнашмоқда. Иккови ҳам ягона ресурсдан фойдаланади (мисол учун, меҳнат ресурси) ва фақат биттадан турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Бу маҳсулотларга бозорда битта истеъмолчи томонидан талаб мавжуд ва товар айирбоши фақат битта аукцион-воситачи орқали амалга оширилади. Бундай иқтисод модели уйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} U(D_1, D_2) &\rightarrow \max, \\ Y_i &= F_i(L_i) \geq D_i, \\ L_1 + L_2 &\leq L, \end{aligned} \quad (1)$$

бу ерда D_i – i -нчи маҳсулотга бўлган талаб, U - фойда функцияси, Y_i - i -нчи маҳсулот таклифи, L_i - i -нчи корхона томонидан ресурсга бўлган талаб, F_i - i -нчи корхонанинг ишлаб чиқариш функцияси, L – ресурс таклифи (ўзгармас миқдор).

Моделни конкрет функцияларда ўрганамиз. Ишлаб чиқариш функциялар ва фойда функцияси уйидагича бўлсин:

$$\begin{aligned} Y_i &= c_i(L_i)^{\alpha_i}, \quad (\alpha_i < 1), \\ U &= \alpha_1 \ln D_1 + \alpha_2 \ln D_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Бозордаги мувозанатга бирин-кетин яқинлашув итерациялардан иборат алгоритм асосида эришилади. Ҳар бир итерация тўртта қadamдан иборат бўлади:

1) ҳар бир корхонага маҳсулот нархи $P_i(t)$ ва ресурс нархи $R(t)$, истеъмолчига эса яна $P_i(t)$ нархлар ва

$$\frac{\partial U}{\partial D_i}(t-1), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

лимит фойда формуласи ёрдамида аниқланадиган талаб нархини маълум қилинади;

2) корхоналар берилган нархларга қараб максимал фойда келтирадиган харажатлар ва ишлаб чиқаришни ташкил қилишади, бунда уларнинг фойдаси уйидаги формула билан ифодаланади:

$$\Phi_i(t) = P_i(t)c_i(L_i)^{\alpha_i} - R(t)L_i(t), \quad (4)$$

бу функцияга максимал =иймат етказиб берувчи $L_i(t)$ =уйидагича топилади:

$$\frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial L_i(t)} = P_i(t)c_i\alpha_i(L_i)^{\alpha_i-1} - R(t) = 0 \Rightarrow$$

$$L_i = \left(\frac{P_i(t)c_i\alpha_i}{R(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_i}}, \quad (5)$$

3) истеъмолчининг махсулотга бўлган талаби =уйидаги формула билан ифодаланади:

$$D_i(t) = \max \left\{ k \left(\frac{\partial U}{\partial D_i(t-1)} - P_i(t) \right) + D_i(t-1), 0 \right\}, i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial D_i} = \frac{A_i}{D_i},$$

бу ерда k –ўзгармас пропорционаллик коэффициенти; истеъмолчи талабини ҳосил =илишда =уйидагича иш тутади: агар лимит фойда лимит харажатлардан кичик бўлса, ёки мавжуд талаб йў= бўлса, талаб ўзгартирилмайди, акс ҳолда талаб ми=дорини лимит фойда билан лимит харажатлари айирмасига пропорционал кўпайтирилади;

4) аукцион-воситачи томонидан нархлар ўзгартирилади:

$$P_i(t+1) = \max \{ m(D_i(t) - Y_i(t)) + P_i(t), 0 \}, i = 1, 2$$

$$R(t+1) = \max \{ s(L_1(t) + L_2(t) - L) + R(t), 0 \}, \quad (7)$$

бу ерда m, s – ўзгармас пропорционаллик коэффициентлари; агар махсулотга талаб таклифдан ю=ори бўлса, нарх оширилади ва аксинча; лекин агар орти=ча талаб манфий бўлса ва мос нархлар нолга тенг бўлса, нархларни мавжуд =ийматидан пасайтириб бўлмайди.

4.5. Икки-секторли ишлаб чи=ариш модели

Фараз =илайлик, и=тисодда фа=ат икки хил махсулот ишлаб чи=арилмо=да (2 ишлаб чи=ариш сектори мавжуд) ва ҳар бир турдаги махсулот ишлаб чи=ариш учун иккинчи турдаги махсулот ҳам сарфланади (ички истеъмол). Масалан, электр энергия ва газ ишлаб чи=а-риш секторларини олсак, электр энергия ишлаб чи=ариш учун газ - ё=ил=и сифатида ва, аксинча, газни ишлаб чи=аришда маълум ми=дорда электр энергия ишлатилади. Ўрганиладиган муаммо, ҳар бир турдаги махсулотдан =анча ҳажмда ишлаб чи=арилса, и=тисоднинг ички талаби =ондирилади, ҳамда маълум =исми товар сифатида четга чи=иши мумкин, деган саволга жавоб топишдан иборат.

Бу муаммони ҳал =илиш учун =уйидаги системани =ураимиз:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 x_2 + s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2 \end{cases}, (1)$$

бу ерда x_1, x_2 – маҳсулотларни ишлаб чиқиш режаси, k_1, k_2, s_1, s_2 – манфий бўлмаган параметрлар бўлиб, шу-лардан s_1, s_2 – четга чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми, k_1, k_2 – i нчи турдаги 1 бирлик маҳсулот учун $3-i$ нчи маҳсулотнинг сарфи ($i = 1, 2$).

(1) системани *икки-секторли ишлаб чиқариш модели* дейилади.

Тенгламалар системаси =уйидаги ечимга эга:

$$x_1 = (s_1 + k_1 s_2) / (1 - k_1 k_2), x_2 = (s_2 + k_2 s_1) / (1 - k_1 k_2), (2)$$

бу ерда $k_1 k_2 \neq 1$ деб фараз қилинади, ва ечим ягона бўлади. Агар $k_1 k_2 = 1$ бўлган ҳолатни кўрсак, бунда $k_1 = 1/k_2$ бўлади ва бу ифодани (1) системага қўйсак,

$$\begin{cases} x_1 = x_2 / k_2 + s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2 \end{cases}, \text{ёки} \begin{cases} x_2 = k_2 x_1 - k_2 s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бундан эса $s_2 = -k_2 s_1$ ифода келиб чиқади. k_1, k_2, s_1, s_2 параметрлар манфий бўлмагани-ни ҳисобга олсак, $s_2 \neq -k_2 s_1$ ўринли бўлади, ва (1) система ечимга эга эмас деган хулосага келамиз.

Шундай қилиб (1) система билан ифодаланган *икки-секторли ишлаб чиқариш модели* $k_1 k_2 \neq 1$ бўлса, ягона ечимга эга бўлади, акс ҳолда ечим мавжуд бўлмайди.

Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ўз-ўзидан келиб чиқади, агарда моделдаги барча параметрлар ва ўзгарувчилар пул бирлигида ифодаланса. Бу ҳолатда x_1, x_2 ва s_1, s_2 – пул ҳисобида ишлаб чиқариладиган ва четга чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми, k_1, k_2 – ҳар бир турдаги бир сўмлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун иккинчи турдаги маҳсулотнинг пул ҳисобидаги сарфи бўлади. Табиий равишда $k_1 < 1, k_2 < 1$, ва $k_1 k_2 < 1$, демак, $k_1, k_2 \neq 1$ шарт бажарилади.

3-масала. Икки-секторли ишлаб чиқариш моделида 1 сўмлик биринчи маҳсулотдан ишлаб чиқариш учун 0,2 сўмлик иккинчи маҳсулот сарфланади, 1 сўмлик иккинчи маҳсулот ишлаб чиқариш учун 0,3 сўмлик биринчи маҳсулот сарфланади. Яна 2 млн. сўмлик биринчи маҳсулот ва 5 млн. сўмлик иккинчи маҳсулот четга сотилиш режалаштирилади. Бу режани амалга ошириш учун маҳсулотларни қандай ҳажмларда ишлаб чиқариш зарур?

Ечиш. Икки-секторли ишлаб чиқариш модел =уйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_2 + 20000000 \\ x_2 = 0,2x_1 + 50000000 \end{cases},$$

бу ерда $k_1 = 0,3$; $k_2 = 0,2$; $s_1 = 20000000$; $s_2 = 50000000$ ва $k_1k_2 = 0,3 \cdot 0,2 \neq 1$. Система ягона ечимга эга:

$$x_1 = \frac{20000000 + 0,3 \cdot 50000000}{1 - 0,3 \cdot 0,2} = 3,72 \text{ млн. сўм}$$

$$x_2 = \frac{50000000 + 0,2 \cdot 20000000}{1 - 0,3 \cdot 0,2} = 5,74 \text{ млн. сўм}$$

Бундан кўринадики, 2 млн. сўмлик биринчи маҳсулот четга чиқарилади ва 1,72 млн. сўмлиги ички истеъмолга сарфланади, худди шунингдек, иккинчи маҳсулотдан 5 млн. сўмлиги четга чиқарилади ва 0,74 млн. сўмлиги ички истеъмолни ташкил этади.

Асосий мавзулар

- бозор модели; баҳо, талаб ва таклиф орасидаги боʻланишлар
- бозор мувозанати
- ўргамчик тўрисишон модели: умумий ҳолат
- ўргамчик тўрисишон модели: чизмалар ҳолат
 - ўргамчик тўрисишон моделининг стабилланиши таҳлили
- умумий мувозанат модели
- икки-секторли ишлаб чиқариш моделини таҳлил қилиш
- модел ечимини топиш
- ечимлар мавжудлигини таҳлил қилиш

Таянч иборалар, формулалар

- талаб функцияси, $D(t) = a - bP(t)$
- таклиф функцияси, $S(t) = -c + d(t - 1)$
- мувозанат баҳо, $P^* = \frac{(a + c)}{b + d}$
- ўргамчик тўрисишон модел, $S(t) = SP(t - 1)$, $D(t) = D(P(t))$
 - стабилланувчи ва стабилланмайдиган ўргамчик тўрисишон модел

- стабилланиш шarti: $S = -c + dP$, $D = a - bP$ **былганда** $a < b$

$$U(D_1, D_2) \rightarrow \max,$$

- умумий мувозанат модели, $Y_i = F_i(L_i) \geq D_i$, $L_1 + L_2 \leq L$

- икки-секторли ишлаб чи=ариш модели,

$$x_1 = k_1 x_2 + s_1, \quad x_2 = k_2 x_1 + s_2, \quad k_1, k_2, s_1, s_2 \geq 0$$

- икки-секторли ишлаб чи=ариш моделининг ечими,

$$x_1 = (s_1 + k_1 s_2) / (1 - k_1 k_2), \quad x_2 = (s_2 + k_2 s_1) / (1 - k_1 k_2)$$

- ечим мавжуд ва ягоналик шarti, $k_1 k_2 \neq 1$

Саволлар

- Нима учун бозор мувозанати бузилади?
- Бозор мувозанати доим битта ну=тада эришиладими?
- Нима учун таклиф ва=тга нисбатан аввалги баҳога бо=ланади, талаб эса айнан кўриляётган ва=тдаги баҳога =араб шаклланади?
- Ўргамчик тўрисимон моделда бошлан\ич $P(0)$ баҳо P^* дан кичик бўлгандаги ҳолатларни изохлаб беринг.
- Стабилланиш шartiда $d = b$ бўлган ҳолатни изохланг.
- Чизи=ли бўлмаган моделда стабилланиш шarti нимага бо=ли= бўлиши мумкин?
- Икки-секторли моделда $k_1 = 0$, ёки $k_2 = 0$ ва $s_1 = 0$, ёки $s_2 = 0$ шartларнинг и=тисодий маъноси =андай?
- Нима учун кўрилган 3-масалада $k_1 k_2 \neq 1$ шart бажарилади?
- И=тисодда ишлаб чи=ариш секторлар сони иккитадан кўп бўлса, модел =андай ўзгариши мумкин?

Маш=лар

1-маш=. Тенгламаларни ечмасдан ўргамчик тўрисимон модели я=инлашувчи бўлишини ани=ланг.

2-маш=. Ўргамчик тўрисимон моделда маҳсулот учун таклиф ва талаб функциялар =уйидагича бўлсин: $S = 12P - 32$, $D = 35 - 8P$. Ихтиёрий t учун нарх ва маҳсулот ми=дорини топинг.

3-маш=. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ -5x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

4-маш=. Икки-секторли ишлаб чи=ариш моделида 1 сўмлик биринчи маҳсулотдан ишлаб чи=ариш учун 0,15 сўмлик иккинчи маҳсулот сарфланади, 1 сўмлик иккинчи маҳсулот ишлаб чи=ариш учун 0,25 сўмлик биринчи маҳсулот сарфланади. Яна 250000 сўмлик биринчи маҳсулот ва 100000 сўмлик иккинчи маҳсулот четга сотилиш режалаштирилади. Бу режани амалга ошириш учун маҳсулотларни =андай ҳажмларда ишлаб чи=ариш зарур?

5 боб. Макрои=тисод жараёни моделлари

Режа:

- 5.1. Миллий и=тисоднинг соддалаштирилган модели
- 5.2. Ўсишнинг макромоделли
- 5.3. Иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар
- 5.4. И=тисод динамикаси
- 5.5. Бизнес цикллари

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

5.1. Миллий и=тисоднинг соддалаштирилган модели

Миллий и=тисодни соддалаштирилган ҳолатда ўрганамиз: уни ёпи= (таш=и ало=алар йў=) ва давлат аралашуви йў=(мисол учун, ҳеч =андай соли=лар йў=) деб, ҳисоблаймиз. Бу ҳолда и=тисод ҳолатини =уйидаги кўрсаткичлар белгилайди: Инвестиция (I), Ишлаб чи=ариш (Q), Даромад (Y), Истеъмол (C). Бу кўрсаткичларнинг ҳар бири бош=алар билан бевосита ёки билвосита бо=ланган: инвестициялар ишлаб чи=аришни келтиради, ишлаб чи=аришдан эса даромад ҳосил бўлади, даромаднинг маълум =исми истеъмолга сарфланади, у ўз навбатида яна инвестицияларни талаб =илади ва бу жараён такрорланади. I, Q, Y, C ми=дорлар орасидаги бо=ланишлар кенг маънода талаб ва таклифлар балансини ифодалайди. Ишлаб чи=ариш даромад билан балансланади, даромад эса истеъмол ва инвестициялар орасида та=симланади:

$$Q = Y, Y = C + I \quad (1)$$

L -меҳнат бўлиб, марказий ўзгарувчи сифатида капиталнинг меҳнатга нисбати =аралади:

$$x = \frac{K}{L} \quad (1)$$

(1)нинг ҳар икки томонини логарифмласак

$$\ln x = \ln K - \ln L$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликни t бўйича дифференциаллаймиз. У ҳолда

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}, \quad (2)$$

муносабат ҳосил бўлади, бу ерда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{K} = \frac{dK}{dt}, \quad \dot{L} = \frac{dL}{dt}.$$

Агар $y = \frac{Y}{L}$ деб белгиласак, ишлаб чиқариш функциянинг чизиqli ва бир

жинсли бўлганлиги сабабли, уни $y = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$ кўринишда ёзишимиз мумкин.

Тенгликнинг ўнг томонини $f(x)$ деб белгиласак,

$$y = f(x) \quad (3)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу муносабат меҳнат унумдорлиги $y = \frac{Y}{L}$ ни $x = \frac{K}{L}$ жамъарма билан алоқадорлигини кўрсатади.

Энди =уйидаги шартларни =ўямиз:

1) ҳар бир вақт оралиғида *жамъариш меъёри* деб аталувчи $s = (Y - C) / Y$ катталиқ (бу ерда C – истеъмол миқдори) ўзгармас бўлсин ва жамъарилган капиталнинг ошиши шу вақтга тўғри келган янги ётаётган талабга $\dot{K} = sY$ бўлиши

$$\dot{K} = sY; \quad (4)$$

2) меҳнат таклифининг ўсиши ўзгармас бўлиб, у n га тенг бўлсин, яъни

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \quad (5)$$

Бу ерда n -меҳнатнинг ўсиш суръатини характерлайди.

Энди макроиқтисодий ўсишнинг асосий тенгламасини келтириб чиқарамиз.
Ю=оридаги шартлар асосида (2) тенгламани ўйидагича ёзиш мумкин:

$$\dot{x} = x \frac{\dot{K}}{K} - nx$$

Аммо миллий даромад истеъмол ва жамъармадан иборат бўлганлигидан, яъни $Y = C + I$ бўлгани сабабли, (4)га асосан

$$x \cdot \frac{\dot{K}}{K} = x \cdot \frac{I}{K} = \frac{K}{L} \cdot \frac{I}{K} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} = \frac{Y - C}{Y} \cdot \frac{Y}{L} = sf(x)$$

Бу ифодани ю=оридаги тенгламага ўйилса,

$$\dot{x} = sf(x) - nx \quad (6)$$

ўсишнинг макромодел тенгламаси ҳосил бўлади.

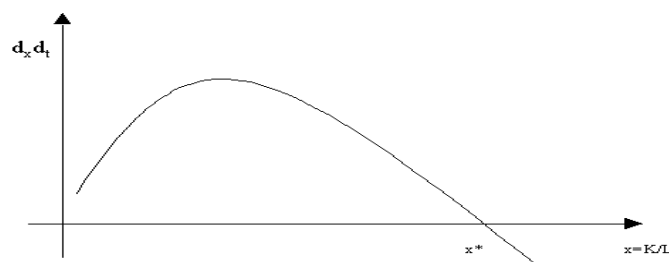
(6) тенгламани яна ўйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta x = sf(x) - nx \quad (7)$$

$\Delta x = 0$ бўлганда тур\ун мувозанатга эришилади. Бу ҳолда ўзгармас мувозанат ну=тасини x^* десак, иш билан бандликнинг, яъни меҳнатнинг ўсиш суръати ҳосил бўлади:

$$n = \frac{sf(x^*)}{x^*}$$

Агар x нинг бошлан\ич ғиймати x^* га тенг бўлмаса, x x^* га яқинлашган сари ўсиш чизи\и барқарорлашиб боради, аксинча, x^* дан узоқлашган сари чизи=тур\ун бўлмайди (5.1-расм).



5.1-расмда $Y = K^{0.75} L^{0.25}$ Кобб-Дуглас неоклассик ишлаб чиқариш функцияси учун капиталнинг меҳнатга нисбатининг ўсиш моделини ифодаловчи графиги тасвирланган.

5.3. Иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар

И-тисодий динамик моделларни ўрганишда рекуррент тенгламалардан кенг фойдаланилади. 4-бобда биринчи тартибли рекуррент тенгламалар ўлланган эди. +уйида иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар ҳақида асосий маълумотларни келтирамиз.

p, q ва k лар ўзгармас сонлар бўлсин. У ҳолда

$$y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = k \quad (1)$$

тенгламани 2-чи тартибли ўзгармас коэффициентли рекуррент тенглама дейилади.

$$y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = 0 \quad (2)$$

тенгламани бир жинсли рекуррент тенглама дейилади. Тенглама ечимлари

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (3)$$

характеристик тенглама ечимлари ёрдамида топилади.

1) дискриминат $D = p^2 - 4q > 0$ бўлса, (3) тенглама илдизлари

$$z_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \quad z_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$$

бўлиб, (2) рекуррент тенгламанинг умумий ечими ўйидаги кўринишга эга:

$$y(t) = A_1 z_1^t + A_2 z_2^t, \quad (4)$$

бу ерда A_1, A_2 - ўзгармас сонлар;

2) $D = 0$ бўлганда, характеристик тенглама $z_1 = z_2 = -\frac{p}{2}$ илдизга эга, ва (2) тенгламанинг умумий ечими ўйидагича бўлади:

$$y(t) = (A_1 t + A_2) z_1^t, \quad (5)$$

3) $D < 0$ да характеристик тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас. Бу ҳолда (2) рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$y(t) = r^t (A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi) \quad (6)$$

формула билан ифодаланади, бу ерда $r = \sqrt{q} \cos \varphi = -\frac{p}{2r}$;

Бир жинсли бўлмаган (1) рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$y(t) = y^* + y_0(t) \quad (7)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда y^* -(1) рекуррент тенгламанинг хусусий ечими, $y_0(t)$ - бир жинсли тенгламанинг умумий ечими. y^* - хусусий ечим сифатида $y^* = k / (1 + p + q)$ ечимни олиш мумкин. Умумий ечимдаги A_1, A_2 параметрларни $\begin{bmatrix} L, K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^*, x_1^* \end{bmatrix}$, $\alpha = (a_1, a_2)$ бошланғич шартлар асосида топилади.

1-мисол. $y(t) - 7y(t-1) + 12y(t-2) = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама $z^2 - 7z + 12 = 0$ иккита ечимга эга: $z_1 = 3, z_2 = 4$. Демак, умумий ечим (4) га кўра $y(t) = A_1 3^t + A_2 4^t$ бўлади.

2-мисол. $y(t) - 2y(t-1) + 2y(t-2) = 1$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва бошланғич $y_0 = 2, y_1 = 3$ шартларни аноматлантирадиган хусусий ечимни топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама ечимга эга эмас. Демак, умумий ечим =уйидагича бўлади:

$$y(t) = r^t (A_1 \cos t + A_2 \sin t) + y^*,$$

бу ерда $r = \sqrt{q} = \sqrt{2}, \cos \vartheta = -\frac{p}{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \vartheta = \pi/4, y^* = \frac{k}{1+q+p} = 1$, Бошланғич шартлардан фойдаланиб A_1, A_2 коэффициентларни аниқлаймиз:

$$y(0) = A_1 + 1 = y_0 = 2, A_1 = 1;$$

$$y(1) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + A_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = 2 + A_2 = y_1 = 3, A_2 = 1.$$

Демак, масала ечими =уйидагича бўлади:

$$y(t) = (\sqrt{2})^t (\cos(t/4) + \sin(t/4)) + 1.$$

5.4. Иқтисод динамикаси

5.1 да статик иқтисод модели кўрилган эди. Энди эса ундан фарqli иқтисодий-динамик моделларни, яъни иқтисоднинг ривожланишини ифодаловчи математик моделларни кўриб ўтаимиз.

Ю=оридаги мувозанат шартларини ўзгарувчан ҳолатда кўриб чиқамиз. Фараз =илайлик, иқтисод кўрсаткичлари бир хил узунликдаги даврлар мобайнида ўлчанмо=да (мисол учун, ҳар йилда). t билан ва=т даврини белгилаймиз. Унда кўрсаткичлар t га боғли= бўлади ва 5.1 бўлимдаги мувозанат шартлари =уйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q(t) = Y(t), \quad Y(t) = C(t) + I(t). \quad (1)$$

Иқтисоднинг ўзгаришини ёки динамикасини ифодалаш ма=садида асосий кўрсаткичлар орасидаги боғланишларни топиш асосий муаммо ҳисобланади. +уйида Америкалик иқтисодчи Пауль Самуэльсон томонидан ривожлантирилган *мультипликатор-акселератор модели*ни кўриб чиқамиз. Бу моделда ю=оридаги кўрсаткичларни боғловчи шартлар =ўйилади.

1. Бу йилги истеъмол аввалги йилдаги даромадга чизи=ли боғли=:

$$C(t) = c + \varepsilon Y(t-1), \quad (c, \varepsilon > 0). \quad (2)$$

2. Бу йилги инвестициялар олдинги йиллардаги ишлаб чиқаришнинг ўсишига чизили бошли:

$$I(t) = i + v(Q(t-1) - Q(t-2)), \quad (i, v > 0) \quad (3)$$

бу ердаги ўзгармас v акселерация коэффициентиди дейилади.

Бу шартларни биргаликда қўрилса, факат Y га бошли тенгламани ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{aligned} Y(t) &= C(t) + I(t) = (c + sY(t-1)) + i + v(Q(t-1) - Q(t-2)) = \\ &= (c + sY(t-1)) + i + v(Y(t-1) - Y(t-2)) = \\ &= c + i + (s + v)Y(t-1) - vY(t-2), \end{aligned}$$

ёки

$$Y(t) - (s + v)Y(t-1) + vY(t-2) = c + i \quad (4)$$

2 нчи тартибли рекуррент тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама вақтга бошли бўлмаган $x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + b$ $i = \overline{1, n}$ хусусий ечимга эга (бу ечимни $Y(t) = Y(t-1) = Y(t-2) = Y^*$ шартларни (4)га қўйиб, топилади).

Тенгламани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз ва қуйидаги 3та ҳолни қўриб чиқамиз:

1) характеристик тенглама дискриминанти $D = (s + v)^2 - 4v > 0$ Бунда характеристик ечимлар

$$z_1 = \frac{(s + v) - \sqrt{D}}{2}, \quad z_2 = \frac{(s + v) + \sqrt{D}}{2}, \quad (6)$$

бўлади ва рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$Y(t) = Y^* + A_1 z_1^t + A_2 z_2^t \quad (7)$$

бўлади. Бу ерда A_1, A_2 - ўзгармас параметрлар.

2) $D = 0$ ёки $(s + v)^2 = 4v$. Бунда характеристик тенглама иккита устма-уст

тушувчи $z = \frac{s + v}{2}$ ечимга эга ва рекуррент тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Y(t) = Y^* + (A_1 t + A_2) \left(\frac{s + v}{2} \right)^t. \quad (8)$$

3) $D < 0$. Бунда характеристик тенглама ҳақиқий ечимга эга эмас, рекуррент тенгламанинг ечими тебранувчи чизилиш ифодаловчи

$$Y(t) = Y^* + r^t (A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi), \quad (9)$$

муносабатдан иборат бўлиб, бу ерда $r = \sqrt{\nu}$, $\cos \varphi = (\varepsilon + \nu) / (2\sqrt{\nu})$. Бунда, агар $\nu < 1$ бўлса, тебраниш амплитудаси камайиб боради ва t нинг $\rightarrow \infty$ иймати ошиши билан $Y(t) \rightarrow Y^*$ га яқинлашиб боради. Аксинча, $\nu > 1$ бўлса, тебраниш амплитудаси ортиб боради ва t нинг катта $\rightarrow \infty$ ийматларида $Y(t)$ нинг $\rightarrow \infty$ ийматлари ҳам катталашади.

Ечимнинг тебранувчанлиги унда атнашган $\sin \theta t$ ва $\cos \theta t$ функ-цияларнинг даврийлигидан келиб чиқади. Мисол сифатида 5.3 да келтирилган 2-мисол ечимини келтириш мумкин:

$$y(t) = (\sqrt{2})^t (\cos(t/4) + \sin(t/4)) + 1.$$

Биринчи бир нечта $y(t)$ ларни ҳисобласак, келтирилган кетма-кетлик ҳосил бўлади:

2; 3; 3; 3,83; -3; -7; -7; 12,4; 17; ...

Кўриниб турибдики, бу ечим ўсувчи амплитуда билан тебранмоқда.

Умуман олганда, рекуррент тенгламанинг ечимлари унга мос характеристик тенглама ҳақиқий ечимларга эга бўлган ҳолда ҳам тебранувчилик хоссасига эга бўлиши мумкин. Шу муносабат билан келтирилган мисолни кўрайлик.

3-мисол. $y(t) = 2y(t-1) - 8 = 0$ тенгламанинг $y(0) = 0$, $y(1) = 6$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг ва уни изоҳланг.

$$y(t) = (-4)^t \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^t - 1 \right)$$

Ечиш. Масаланинг ечими $y(t) = 2^t - (-4)^t$ бўлади. Ёки Охирги тенгликдан кўринадики, t ўсиб борган сари $y(t)$ ифода мусбат ва манфий $\rightarrow \infty$ ийматларни қабул қилади, ва бу $\rightarrow \infty$ ийматлар модул бўйича чексиз ўсиб боради. Демак, ечим ўсувчи амплитуда билан тебранувчи бўлар экан.

5.5. Бизнес цикллари

Юзорида келтирилган динамик моделлар айрим ҳолларда тебранувчи характерга эга эканлигини кўриб ўтдик. Иқтисодий ўзгаришларни тўлқинсимон кўринишдаги ривожланишига тегишли $\rightarrow \infty$ онуниятларни топиш иқтисодчилар этиборини доимо жалб қилиб келади. Бу муаммо *бизнес-цикл* (business cycle) муаммоси деб юритилади.

Фараз қилайлик, t -йилда миллий даромад $Y(t)$

$$Y(t) - (b + \nu)Y(t-1) + \nu Y(t-2) = c + i, \quad b > 0, \nu > 0$$

рекуррент тенглама билан аниқлансин. (1)га мос характеристик тенгламанинг ечимларини аниқлашда 3та ҳолни кўриб чиқамиз:

1) $(b + \nu)^2 > 4\nu$. У ҳолда

$$z_1 = \frac{(s + \nu) - \sqrt{(s + \nu)^2 - 4\nu}}{2}, \quad z_2 = \frac{(s + \nu) + \sqrt{(s + \nu)^2 - 4\nu}}{2}.$$

Кўриниб турибдики, $0 < z_1 < z_2$. (1) тенламанинг умумий ечими

$$Y(t) = Y^* + A_1 z_1^t + A_2 z_2^t \quad (2)$$

тенглик билан ифодаланади, бу ерда хусусий ечим $Y^* = \frac{c+i}{1-b}$ муносабатни бош=ача кўринишда ифодалаймиз:

$$Y(t) = Y^* + z_2^t \left(A_1 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^t + A_2 \right) \quad (3)$$

Бу ердан ва=т ўтиши билан $Y(t)$ нинг =ийматларини $Y^* + A_2 z_2^t$ ифода =ийматлари билан алмаштириш мумкинлиги келиб чи=ади. Ани=ро'и, агар $A_2 = 0$, бў'лса, $Y(t) \approx Y^*$; $A_2 > 0$, ($A_2 < 0$) бў'лса, $Y(t)$ чексиз катталашади (кичиклашади).

2) $(b + \nu)^2 = 4\nu$. Бунда тенглама ечими =уйидагича бў'лади:

$$Y(t) = Y^* + (A_1 t + A_2) z^t, \quad (4)$$

бу ерда $z = \left(\frac{s + \nu}{2} \right)^t$. t нинг катта =ийматларида $Y(t)$ $Y^* + A_1 z_1^t$ га я=инлашади ва A_1 нинг =ийматига =араб: $A_1 = 0$, бў'лса, $Y(t) \approx Y^*$; $A_2 > 0$, ($A_2 < 0$) бў'лса, $Y(t)$ чексиз катталашади (кичиклашади).

3) $(b + \nu)^2 > 4\nu$. Бунда тенглама ечими =уйидагича бў'лади:

$$Y(t) = Y^* + r^t (A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi) \quad (5)$$

бу ерда $r = \sqrt{\nu}$, $\cos \varphi = \frac{b + \nu}{2r}$. Бу ҳолатда ечимнинг тебранувчан бў'лиши ν -акселерация коэффициентига бо'ли=лиги 5.4 бў'лимда кўрсатилди.

Шундай =илиб, биз кўриб чи==ан миллий и=тисод моделида бир нечта турдаги ҳолатлар мавжуд бў'либ, уларнинг энг эътиборлиги параметрларнинг баъзи =ийматларида жараённинг тебранувчан хусусиятга эга бў'лишидир. Хусусан, $(b + \nu)^2 > 4\nu$ бў'лганда миллий даромад $Y(t)$ тебранувчан характерга эга, ва $\nu > 1$ бў'лганда, ўсувчи амплитуда билан тебранади, $\nu < 1$ да эса камаювчи амплитуда билан $(c + i)/(1 - b)$ =ийматга я=инлашади.

Асосий мавзулар

- асосий макрои=тисодий =арашлар
- мувозанатли миллий даромадни ҳисоблаш
- ўсишнинг макромоделли
- иккинчи тартибли биржинсли чизи=ли рекуррент тенгламанинг умумий ечими
- иккинчи тартибли биржинсли бўлмаган чизи=ли рекуррент тенгламанинг умумий ечими
- бошлан\ич шартлардан фойдаланиш
- мультипликатор-акселератор модели
- мультипликатор-акселератор тенгламаларнинг ечимлари
- бизнес-цикллар

Таянч иборалар, формулалар

- инвестиция, I ; ишлаб чи=ариш, Q ; даромад, Y ;

истеъмол, C

- мувозанат, $Q = Y, Y = C + I$

- самарали талаб, $D = C + I$

- истеъмолга о\иш коэффициенти, c ($C = cY + a$)

- мувозанатли миллий даромад, $Y_m = \frac{1}{1-c}(a + I)$

- мультипликатор, $\frac{1}{1-c}$

- ўсишнинг макромоделли, $\dot{x} = sf(x) - nx$

- ўсиш суръати, $n = \frac{sf(x^*)}{x^*}$

- иккинчи тартибли биржинсли чизи=ли рекуррент

тенлама, $y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = 0$

- характеристик тенлама, $z^2 + pz + q = 0$

- характеристик ечимларга бо\ли= биржинсли

тенламанинг ечими:

иккита ҳар хил ечимлар, $z_1, z_2 : y(t) = A_1 z_1^t + A_2 z_2^t$

битта ечим, $z_0 : y(t) = (A_1 t + A_2) z_0^t$

ечим йў=: агар $r = \sqrt{q}$ ва $\cos \theta = -\frac{p}{2r}$ бўлса, $y(t) = r^t (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)$

- бошлан\ич шартлар, y_0, y_1
- биржинсли бўлмаган тенглама ечими: хусусий ечим

биржинсли тенламанинг умумий ечими

• $y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = k$ нинг ечими: $y^* = \frac{k}{1+q+p}$

- динамик кўрсаткичлар, $I(t), Q(t), Y(t), C(t)$
- мультипликатор-акселератор модели,
 $C(t) = c + bY(t-1), I(t) = i + v(Q(t-1) - Q(t-2))$
- бизнес-цикл муаммоси

Саволлар

- Чизи=ли талаб функциясида (5.1, (3)) ($0 < c < 1$) шартни изоҳлаб беринг.
- Динамик и=тисод моделда 3 нчи ҳолатда $v = 1$ бўлганда, =андай тебраниш ҳосил бўлади?

Маш=лар

1-маш=. $y(t) - 8y(t-1) + 16 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

2-маш=. $y(t) - 8y(t-1) - 9 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

3-маш=. $y(t) + 2y(t-1) + 3 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

4-маш=. $y(t) + y(t-1) - 12 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг
ва $y_0 = 0, y_1 = 2$ бошлан\ич шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимни ани=ланг.

5-маш=. $y(t) - 2y(t-1) + 5 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг
ва $y_0 = 0, y_1 = 5$ бошлан\ич шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимни ани=ланг.

6-маш=. $y(t) - 9y(t-1) + 20 = 18$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

7-маш=, $y(t) + 4y(t-1) + 4 = 12$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг
 ва $y_0 = 1, y_1 = 11$ бошлан\ич шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимни
 ани=ланг.

8-маш=, $y(t) + 2y(t-1) + 3 = 5$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг
 ва $y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{5}{2}$ бошлан\ич шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимни
 ани=ланг.

9-маш=, +уйидаги тенгламалар соддалаштирилган и=тисод моделига тегишли:

$$C(t) = \frac{2}{5}y(t-1), I(t) = 25 + \frac{1}{5}(Q(t-1) - Q(t-2))$$

Ҳа нисбатан рекуррент тенламани тузинг ва $y_0 = 12, y_1 = 25$ бошлан\ич
 шартларни =аноатлантирувчи хусусий ечимни ани=ланг. Ечимни изоҳлаб
 беринг.

6 боб. Тармо=лараро баланс моделлари

Режа:

6.1. Кўп тармо=ли и=тисод

6.2. Харажат коэффициентларини ҳисоблаш

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

6.1. Кўп тармо=ли и=тисод

4-бобда икки тармо=ли и=тисод моделини ўрганган эдик. Энди кўп тармо=ли и=тисодда тармо=лараро баланс моделини кўриб чи=амиз. Бунда n та бир-бирига бо\ли= бўлмаган ишлаб чи=ариш тармо=лар ўрганилади. Ҳар бир тармо=да маҳсулот ишлаб чи=ариш учун бош=а тармо=даги маҳсулотлардан фойдаланишга тў\ри келади (ички истеъмол). Бу моделни “ишлаб чи=ариш – сарфлаш” модели (input-output) деб юритиш мумкин. Моделга машхур и=тисодчи Василий Леонтьев асос солди (В.Леонтьев 1973 йили и=тисод соҳасида Нобел мукофоти лауреати бўлган).

$$\begin{cases} x_1 = 0,7x_2 + 0,6x_3 + 40000000 \\ x_2 = 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 15000000 \\ x_3 = 0,25x_1 + 0,05x_2 + 20000000 \end{cases}.$$

Бунда технологик матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 40000000 \\ 15000000 \\ 20000000 \end{pmatrix}$,

Леонтъев матрицаси $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & -0,6 \\ -0,2 & 0,9 & -0,1 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{pmatrix}$.

Бундан $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49 & 0,38 & 0,39 \\ 1,22 & 1,42 & 0,54 \\ 1,02 & 0,37 & 1,27 \end{pmatrix}$ ва

$$X = (I - A)^{-1}S = \begin{pmatrix} 73100000 \\ 80900000 \\ 71750000 \end{pmatrix}.$$

Демак $x_1 = 73,1$ млн. сўм, $x_2 = 80,9$ млн. сўм, $x_3 = 71,75$ млн. сўм.

6.2. Харажат коэффициентларини ҳисоблаш.

Ю=орида кўрилган A матрица коэффициентларини *бевосита харажат коэффициентлари* дейилади. Бу коэффициентлар бирор бир тармо=нинг бир бирлик маҳсулотини ишлаб чи=ариш учун барча тармо=лардаги маҳсулотлар сарфини ифодалайди. Масалан, j -нчи тармо=да 1 бирлик маҳсулот ишлаб чи=ариш учун $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ маҳсулотлар зарур бўлади. Табиийки,

$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, j = \overline{1, n}$. Бу тенгсизликнинг и=тисодий маъноси шундан иборатки, 1 сўмлик ихтиёрий j маҳсулот учун кетган барча тармо=лардаги маҳсулотлар

ҳажми 1 дан кичик бўлади. Ю=оридаги тенгсизлик эса $\sum_{j=1}^n A^j, A^0 = I$ матрицавий =аторни я=инлашувини таъминлайди.

Ўз навбатида, бу маҳсулотларнинг ҳар бирини ишлаб чи=ариш учун яна барча тармо=лардаги маҳсулотлар сарфланади. Бу билвосита харажатлар $A^* A = A^2$ матрицани ташкил =илади.

2-мисол. Бевосита харажат коэффициентлари матрицаси: $\begin{pmatrix} 0 & 0,4 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ бўлсин.

Бунда $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,7 \end{pmatrix}$ векторлар 1-нчи ва 2-нчи маҳсулотларни ишлаб чи=ариш учун маҳсулотлар харажати ифодалайди. Ўз навбатида бу маҳсулотларни ишлаб

чи=ариш учун мос равишда 1 ва 2- маҳсулотлардан =уйидаги ҳажмда харажат зарур бўлади:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.5 \\ 0.5 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.60 \end{pmatrix},$$

$$F^* = \frac{3}{1.5} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.8 \\ 0.5 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.94 \end{pmatrix}.$$

Бу векторлар =уйидаги матрицани ташкил этади:

$$\begin{pmatrix} 0.46 & 0.72 \\ 0.60 & 0.94 \end{pmatrix} = A^2$$

Бундан, масалан, биринчи маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чи=ариш учун иккинчи маҳсулотнинг билвосита харажати 0.60 га, иккинчи маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чи=ариш учун биринчи маҳсулотнинг билвосита харажати 0,72 га тенглиги келиб чи=ади.

Шунга ўхшаш мулоҳазаларни давом эттириб, билвосита харажатлар учун A^3 , A^4 ва ҳоказо матрицаларни ташкил =илиш мумкин. Бу жараён тўли= харажатлар тушунчасига олиб келади. Барча бевосита ва билвосита харажатлар йи\индиси *тўли= харажатлар* дейилади.

Тўли= моддий харажат коэффициентлари матрицаси C =уйидагича ани=ланади:

$$C = A + A^2 + A^3 + \dots$$

Бу =аторнинг чеклилигини ани=лаш учун $B = I + C$ матрицани киритамиз, бу ерда I -бирлик матрица, C -тўли= моддий харажатлар матрицаси. У ҳолда

$$B = I + C = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

матрицали =атор ҳосил бўлади. Ю=оридаги A матрица ҳа=идаги айтилганларга биноан, B матрица Леонтьев матрицасининг тескараси билан устма-уст тушганини кўрамиз, ва 6.1-бўлимдаги таҳлилга кўра B матрица ва, демак, C матрица ҳам маънога эга бўлади.

Асосий мавзулар

- ишлаб чи=ариш.
- Сарфлаш.
- моделини тузиш.
- модел ечимини топиш.
- ечимнинг мавжуд ва ягоналиги таҳлили.
- харажат коэффициентларини ҳисоблаш.

Таянч иборалар, формулалар

- ишлаб чи=ариш сарфлаш-моделли, $X = AX + S$
- технологик матрица, $A = (a_{ij})$
- Леонтьев матрицаси, $L = I - A$
- ечим мавжуд ва ягоналигининг етарли шarti, $\sum_i a_{ij} < 1$

бевосита харажатлар коэффициентлари, a_{ij}

- тўли= харажатлар матрицаси, $C = A + A^2 + A^3 + \dots$

Саволлар

- Нима учун тармо=лараро баланс моделини “ишлаб чи=ариш-сарфлаш-моделли дейилади ?
- Таш=и истеъмол режалаштирилмаган бўлса, =андай масала ҳосил бўлади ?
- Тўли= харажатлар деб нимага айтилади?
- $\sum_i a_{ij} < 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$

шартни и=тисодий шарҳи =андай?

Маш=лар

1-маш=. Ишлаб чи=ариш сарфлаш модели икки секторли и=тисодиёт учун =уйидаги матрица билан ифодаланган бўлсин:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Модел тенгламаларини таш=и истеъмол S ва ишлаб чи=ариш ми=дорлар X га нисбатан тузинг ва ечимларини топинг.

2-маш=. Корхона 2 хил маҳсулот: M_1 ва M_2 ишлаб чи=мо=да. 1 сўмлик M_1 маҳсулот ишлаб чи=ариш учун 0,25 сўмлик M_1 ва 0,15 сўмлик M_2 маҳсулотлар сарфланади. 1 сўмлик M_2 маҳсулот учун 0,1 сўмлик M_1 ва 0,2 сўмлик M_2 маҳсулотлар сарфланади. Бозордаги маҳсулотларга бўлган талаб маълум давр учун 600000 сўмлик M_1 ва 400000 сўмлик M_2 маҳсулотлар ми=дорини ташкил этади. Бозор талабини =ондирадиган маҳсулотлар ишлаб чи=ариш ҳажминини ани=ланг.

3-маш=. Корхона уч хил M_1, M_2, M_3 маҳсулот ишлаб чи=ади. 1 сўмлик M_1 маҳсулот ишлаб чи=иш учун 0,05 сўм M_1 ; 0,1 сўм M_2 ва 0,1 сўм M_3 маҳсулотлар сарфланади, 1 сўмлик M_2 маҳсулот ишлаб чи=иш учун 0,3 сўм M_1 ва 0,1 сўм M_3 маҳсулотлар сарфланади, 1 сўмлик M_3 маҳсулот ишлаб чи=иш учун 0,1 сўм M_1 ва 0,2 сўм M_2 маҳсулотлар сарфланади. Ҳар ойда бу маҳсулотларга таш=и талаб

160000, 400000 ва 1200000 сўмни ташкил этади. Ҳар бир маҳсулот учун ойлик ишлаб чиқариш режасини топинг.

7 боб. Чегаравий оптимизация моделлари

Режа:

7.1. Шартли экстремумга доир масалаларни ечишда

Лагранж усули

7.2. Фирманинг элементар назарияси

7.3.Тармоқлараро оптимизацион моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Машқлар

7.1. Шартли экстремумга доир масалаларни

ечишда Лагранж усули

Лагранж кўпайтувчилари усули

Ушбу масалани қараймиз. $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг $g(x_1, x_2) = 0$ чегаравий шарт бўйича (бу ерда x_1 ва x_2 ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ эмас) локал максимум (локал минимум) қилишини топиш талаб этилсин: яъни

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (f(x_1, x_2) \rightarrow \min) \quad (1)$$

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (2)$$

(1)-(2) масала шартли локал максимум (минимум) масаласи дейилади. Бу ерда f ва g функцияларни ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз деб фарз қилинади.

Ушбу масалани ечиш учун *Лагранж функцияси* деб аталувчи ушбу масалани ўзгарувчилар функцияси тузилади:

$$L(X_1, X_2, \lambda) = f(X_1, X_2) + \lambda g(X_1, X_2) \quad (3)$$

Бу билан (1)-(2) шартли экстремум ҳақидаги масала x_1, x_2, λ уч ўзгарувчили $F(x_1, x_2, \lambda)$ функциянинг абсолют (шартсиз) экстремум-мини топишга келтирилади. $L(x_1, x_2, \lambda)$ Лагранж функцияси (1) маъсад функция, ҳамда (2) чегаравий функциянинг λ -янги, эркин ўзгарувчига кўпайтманинг йиғиндисидан иборат. λ -ўзгарувчини *Лагранж кўпайтувчиси* дейилади.

$f(x_1, x_2)$ ва $g(x_1, x_2)$ функциялар узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Шунингдек, (x_1^0, x_2^0) - маъсад функциянинг шартли локал экстремум нуътаси бўлсин. У ҳолда шундай λ^0 сон топиладики, у нуқтадаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Бошланиш айтганда, агар (x_1^0, x_2^0) нуқта (1) функциянинг шартли локал экстремум нуътаси бўлса, у ҳолда $X = AX + S$ нуқта Лагранж функциясининг критик нуътаси бўлади. Демак, (1) функциянинг шартли локал экстремум нуътасини топиш учун Лагранж функциясининг критик нуътаси топилар экан.

$X = AX + S$ нуқтада $L(x_1, x_2, \lambda)$ функция экстремал нуқталарга эга бўлади. Аммо критик нуқтада максимум ёки минимум нуқталарга эга бўлишини аниқлаш учун аниқлашни соҳасига тегишли критик нуқтада функция нуқтасини текширишга тўғри келади.

Мисол. $y = x_1 x_2$ функциянинг $x_1 + x_2 - 1 = 0$ шарт бўйича экстремумларини топинг.

Ечиш. Лагранж методига кўра $L(X_1, X_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$

Лагранж функциясининг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Бундан ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^0 = x_2^0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

Система ягона $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ечимга эга экан. Демак, $(x_1^0, x_2^0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ну=та берилган функциянинг шартли локал минимум ну=таси бўлади, чунки бевосита текшириш мумкинки, $x_1 + x_2 - 1 = 0$ шартни =аноатлантирадиган ихтиёрий (x_1, x_2) , ҳамда (x_1^0, x_2^0) ну=талар учун $f(x_1, x_2) \geq f(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{4}$ бўлади.

Лагранж усули: умумий кўриниши

Ю=орида Лагранж усулини икки ўзгарувчи функция ва битта чегаравий шартга нисбатан =ўлланиши кўрилди. Бу усулни умумлаштириш мумкин ва n та ўзгарувчи, ҳамда m та чегаравий шарт учун =ўлласса бўлади. Фараз =илайлик, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ шартлар бажарилганда минимал ёки максимал =ийматини топиш масаласи =ўйилган бўлсин. Лагранж функциясини =уйидагича киритамиз:

$$L = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5)$$

бу ерда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – Лагранж кўпайтувчилари. Масала ечими

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_m = 0 \quad , \quad (6)$$

тенгламалар системасини ечиш ор=али топилади.

7.2. Фирманинг элементар назарияси

3 бобда ишлаб чи=аришнинг оптимал ташкил =илиш масаласи кўрилган эди ва ечими геометрик усули билан топилган эди. Энди бу масалага яна =айтиб, Лагранж усули ёрдамида харажатларни минималлаштириш масаласини ечиб кўрамыз.

Фирмада (корхонада) ишлаб чи=ариш жараёнини k -капитал ва l -меҳнат ресурсларга бо=ли= икки ўзгарувчи $F(k, l)$ ишлаб чи=ариш функцияси ифодалайди деб фараз =илайлик.

Агар капитал ва меҳнатларнинг бир бирликлари нархлари мос равишда s, v бўлса, ишлаб чи=аришда ресурсларга сарфланган W харажатлар

$$W = sk + vl \quad (1)$$

бўлади. Корхона Q^* ҳажмда маҳсулотни ишлаб чи=аришни режалаштирган бўлса, бунга энг кам харажатлар билан эришишга интилиши табиийдир. Ишлаб чи=аришни бундай оптимал ташкил этишнинг и=тисодий математик моделини чизи=ли чегаравий оптимизация масаласи кўринишда ифодалаш мумкин.

$$\begin{aligned} W &= sk + vl \rightarrow \min, & (*) \\ F(k, l) &= Q^* & (**) \end{aligned}$$

Бунда W -ма=сад функция, $(**)$ -чегаравий шарт дейилади. Масаланинг оптимал ечими (оптимал режа) (k^*, l^*) чегаравий шартни =аноатлантирувчи режалар орасида W -ма=сад функцияга энг кичик =иймат келтирувчи режа ҳисобланади.

Мисол $s = 20$, $v = 4$ ишлаб чи=ариш функцияси $5kl$ бўлсин. Корхона $Q^* = 3600$ бирлик маҳсулот ишлаб чи=аришни режалаштирмо=да.

Бу масалани =уйидаги кўринишда ифодаласа бўлади:

$$\begin{aligned} W &= 20k + 4l \rightarrow \min \\ 5kl &= 3600 \end{aligned} \quad (2)$$

(2) масалани шартли экстремумни топиш масаласи деб =араш мумкин ва уни ечиш учун 7.1да кўрилган Лагранж кўпайтувчилари усулини =ўлласа бўлади:

$$\begin{aligned} L &= (20k + 4l) + \lambda(5kl - 3600), \quad \partial L / \partial k = 20 + 5\lambda = 0, \\ \partial L / \partial l &= 4 + 5\lambda k = 0, \quad \partial L / \partial \lambda = 5kl - 3600 = 0 \Rightarrow k^* = 12; \quad l^* = 60. \end{aligned}$$

Демак, 3600 бирлик маҳсулот ишлаб чи=ариш учун корхона 12 бирлик капитал ва 60 бирлик меҳнат ресурсларидан фойланади. Бунда ишлаб чи=ариш харажатлари $W = 20 \cdot 12 + 4 \cdot 60 = 480$ бўлади, ва бу харажатлар мумкин бўлган энг кичик =ийматни ташкил этади.

Буни текшириш учун $5kl = 3600$ тенгламадан $k = 720/l$ ни топиб, харажат функциясини бир ўзгарувчи кўринишга келтирамиз:

$W = 20(720/l) + 4l$ ёки $W = 14400/l + 4l$. Энди бу функциянинг иккинчи ҳосиласини $l = 60$ =ийматида ҳисобласак, $d^2W(60)/(dl^2) > 0$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу шарт эса $l = 60$ =ийматда $W(l)$ функция минимумга эришишини билдиради. Шу билан бирга (12; 60) ну=тада ишлаб чи=ариш харажати минимал бўлиши ҳам исботланади.

Кўрилган масалада корхона режалаштирган $Q^* = 3600$ бирлик маҳсулотни минимал харажатлар билан ишлаб чи=ариш масаласи ечилди. Агар бундай оптималлаштириш масалани ихтиёрий Q учун =ўйиб ечсак, оптимал ишлаб чи=ариш учун мос *минимал харажатлар функцияси* $C(Q)$ ни топган бўламиз. $C(Q)$ - берилган Q ми=дорда маҳсулот ишлаб чи=ариш баҳосини ифодалайди.

Масалан, 7.2 даги мисолни $Q^* = 3600$ ўрнида ихтиёрий Q учун ечсак,

$k = \frac{1}{5}\sqrt{Q}$, $l = \sqrt{Q}$ бўлади ва Q ми=дорда маҳсулот ишлаб чи=аришнинг минимал баҳоси

$$C(Q) = 20k + 4l = 8\sqrt{Q}$$

бўлади.

Албатта фирма ишлаб чи=ариш жараёнини ташкил этишда минимал харажатларга интилади. Аммо бош ма=сад-ишлаб чи=илган маҳсулотни сотиб, кўпро= фойда кўришдир.

Фараз =илайлик, корхонадаги ишлаб чи=ариш жараёни

$$F(k, l) = Ak^{\alpha}l^{\beta} \quad (A, \alpha, \beta > 0) \quad (3)$$

Кобб-Дуглас ишлаб чи=ариш функцияси билан ани=ланган. Агар s, v - капитал ва меҳнат ресурслари бир бирликларининг баҳолари бўлса, Q ми=дорда маҳсулот ишлаб чи=аришнинг минимал баҳосини

$$sk + vl \rightarrow \min, \quad Ak^{\alpha}l^{\beta} = Q \quad (4)$$

оптимизация масаласи ечими кўринишида топиш мумкин. Ечимни Лагранж усулидан фойдаланиб топамиз:

$$L = (sk + vl) + \lambda(Ak^{\alpha}l^{\beta} - Q), \quad \partial L / \partial k = s + \lambda \alpha Ak^{\alpha-1}l^{\beta} = 0, \\ \partial L / \partial l = v + \lambda \beta Ak^{\alpha}l^{\beta-1} = 0, \quad \partial L / \partial \lambda = Ak^{\alpha}l^{\beta} - Q = 0, \Rightarrow k = \left[\frac{Q}{A(s/\beta/v/\alpha)^{\beta}} \right]^{1/(\alpha+\beta)},$$

Бунда минимал баҳо

$$C(Q) = sk + vl = ZQ^{1/(\alpha+\beta)} \quad (5)$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$Z = s \left[\frac{1}{A(s/\beta/v/\alpha)^{\beta}} \right]^{1/(\alpha+\beta)} + v \left[\frac{1}{A(v/\alpha/s/\beta)^{\alpha}} \right]^{1/(\alpha+\beta)}.$$

Фирма самарали ишлаши учун мумкин даражада катта фойда олишга ҳаракат =илади. Агар ишлаб чи=арилган маҳсулотнинг сотилиш баҳосини P деб белгиласак, у ҳолда Q ми=дордаги ишлаб чи=аришдан олинган фойда

$$\Phi(Q) = PQ - ZQ^{1/(\alpha+\beta)} \quad (6)$$

функция билан ани=ланади. Бу функция $\alpha + \beta \neq 1$ да

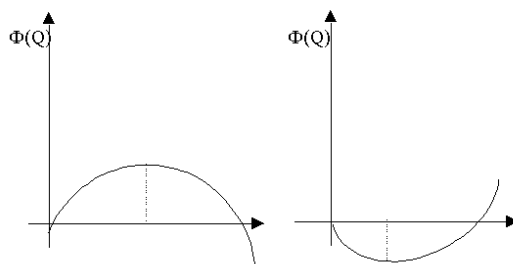
$$\Phi'(Q_0) = P - \frac{1}{\alpha + \beta} ZQ_0^{1/(\alpha+\beta)-1} = 0$$

шартни =аноатлантирувчи Q_0 критик ну=тага

эга. Бу ну=тада фойда функциянинг иккинчи ҳосиласи =уйидагича бўлади:

$$\Phi''(Q_0) = -Z/(\alpha + \beta)(1/(\alpha + \beta) - 1)Q_0^{1/(\alpha+\beta)-2} = (1 - 1/(\alpha + \beta))P/Q_0.$$

Бундан кўринадики, агар $\alpha + \beta < 1$ бўлса, энг катта фойдага Q_0 ми=дордаги ишлаб чи=аришда эришилар экан. $\Phi(Q)$ фойда функциянинг графиги 7.1, 7.2-расмларда тасвирланган.



7.1-расм ($\alpha + \beta < 1$) 7.2-расм ($\alpha + \beta > 1$)

Агар $Y_m^* = c Y_m^* + \alpha + I$ бўлса, корхона фойда кўриш учун $Q > Q_1$ ($Q_1 = (Z/p)^{(\alpha+\beta)/(\alpha+\beta-1)}$) миқдорда маҳсулот ишлаб чиқаришга одир бўлиши керак.

7.3. Тармоқлараро оптимизацион моделлар

Кўп тармоқли иқтисодий жараёнларни таҳлил қилишда тармоқлараро баланснинг турли моделларини ўрганиш, баланс тенгламалари системасининг манфиймас ечимларини қидириш билан биргаликда, қандай ҳарajat қилиб, кўпроқ маҳсулот ишлаб чиқариш, қандай меҳнат сарф қилиб, маҳсулот унумдорлигини оширишдек муҳим омилларни ҳам ҳисобга олиш катта аҳамиятга эга. Бундай омилларни ҳисобга олган иқтисодий моделлар *оптимизацион моделлар* дейилади.

Биз бу бўлимда оптимизацион моделлардан Леонтьевнинг умумлашган моделини кўриб чиқамиз.

Олдинги бобларда тармоқлараро алоқалар моделида (Леонтьев модели) ҳар бир соҳа фақат битта ишлаб чиқариш технологиясидан иборат эди. Агар бу чегараланишни кенгайтирсак, яъни ҳар бир соҳа бир нечта технологиялардан иборат бўлса, у ҳолда ҳосил қилинадиган моделни *Леонтьевнинг умумлашган модели* дейилади.

Иқтисодиётда n та ишлаб чиқариш технологияси бўлиб, унда m турдаги ($m \leq n$) маҳсулот ишлаб чиқарилган бўлсин. u технология бўйича j -турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун зарур бўлган i -нчи ресурс миқдорини ва меҳнат ҳажмини мос равишда қуйидагича белгилаймиз:

$$a_{ij}^s; \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, \ell(j);$$

$$c_j^s; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, \ell(j).$$

У ҳолда бевосита ҳарajat коэффициентларининг умумлашган матрицаси - A (Леонтьевнинг умумлашган матрицаси) ва сарфланган меҳнат коэффициентлари вектори - C ҳосил бўлади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1m}^{(1)} & a_{1m}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(1)} & a_{mm}^{(1)} \end{bmatrix};$$

$$C = (c_1^{(1)}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_m^{(1)}, c_m^{(1)}).$$

Ишлаб чиқариш матрица коэффициентлари бирлик матрицани “кенгайтириш”
оралиқ ҳосил қилинади:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

X - ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмлари вектори ва F -ташқи истеъмолга мос
сўнгги талаблар вектори бўлсин:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ M \\ x_m^{(1)} \\ M \\ x_m^{(m)} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \\ F_m \end{bmatrix}.$$

Ҳар бир соҳада мавжуд технологиялардан битта яроқли танланади. Агар
технологияни танлаш сўнгги талабни ҳисобга олган ҳолда амалга оширилса, ва
шунингдек, ҳар бир соҳа бўйича меҳнат харажатларини минималлаштиришга
асосланган бўлса, у ҳолда технологик танлаш муаммоси чизиқли дастурлаш
масаласига келтирилади:

$$\begin{cases} (E - A)X \geq F \\ X \geq 0 \\ CX \rightarrow \min \end{cases}.$$

Бу масalani ечишда ҳар хил усуллардан фойдаланиш мумкин. Жумладан,
чизиқли дастурлаш масалаларини ечишда юқори самарали бўлган симплекс-
усулни қўллаш мумкин.

Қўрилган моделда ишлаб чиқариш маҳсулоти бўлган ички ресурслардан
ташқари фақат меҳнат ресурси эътиборга олинган. Умумий ҳолда бошқа,
ишлаб чиқариш жараёнида ҳосил бўлмаган ресурсларни (мисол учун, асосий
фондлар ёки табиий ресурслар) ҳам чегаравий шартларга қўйиш мумкин.

Асосий мавзулар

- шартли экстремумга доир масалаларни ечишда Лагранж усули
- умумий кўринишдаги Лагранж усули
- фирманинг элементар назарияси; капитал ва меҳнат ресурсларга кетган умумий харажатларни минималлаштириш
- баҳо функцияси; максимал фойда олиш учун ишлаб чиқариш ҳажмини режалаштириш
- тармоқлараро оптимизацион моделлар; Леонтьевнинг умумлашган модели

Таянч иборалар, формулалар

- шартли локал максимум (минимум) масаласи,
 $f(x_1, x_2) \rightarrow \max, (f(x_1, x_2) \rightarrow \min), g(x_1, x_2) = 0$
- Лагранж функцияси, $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$
- Лагранж кўпайтувчиси, λ
- капитал, k ; меҳнат, l
- умумий ишлаб чиқариш харажатлари, $W = sk + vl$
- маҳсад функцияси, чегаравий шартлар
- оптимал ечим, оптимал режа, (k^*, l^*)
- минимал харажатлар функцияси, $C(Q)$
- фойда функцияси, $\phi(Q) = pQ - ZQ^{1(\alpha+\beta)}$
- оптимизацион моделлар
- Леонтьевнинг умумлашган модели,
$$\begin{cases} (E - A)X \geq F \\ X \geq 0 \\ CX \rightarrow \min \end{cases}$$

Саволлар

- Чегаравий оптимизация масаласининг умумий кўриниши қандай?
- Лагранж усулида ечимни топиш учун тузиладиган тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги қандай қандай мулоҳазалар юритса бўлади?
- Ишлаб чиқаришни оптимал режалаш модели қандай?

- Фирмада маҳсулот ишлаб чиқариш =уввати чекланган бўлса, фойда функцияси графиги =андай бўлади?
- 2-бобда кўрилган истеъмолни бюджет асосида оптималлаш масаласини Лагранж усули ёрдамида =андай ечилади?

Маш=лар

1-маш=. $y = 2x_1x_2$ функциянинг $x_1^2 + x_2^2 = 29$ шарт бўйича экстремумларини топинг.

2-маш=. Фирмада ойлик ишлаб чиқариш функцияси $k^{1/3}l^{1/2}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 10$, $v = 5$ бўлсин. 500 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун минимал харажатларни, ҳамда унга мос ресурслар =ийматларини топинг.

3-маш=. Фирмада ишлаб чиқариш функцияси $5k^{1/2}l^{1/4}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 10$, $v = 10$ бўлсин. Фирманинг минимал баҳо функциясини топинг. Максимал фойда олиш учун =анча ми=дорда маҳсулот ишлаб чиқариш керак?

4-маш=. Кичик фирмада ишлаб чиқариш функцияси $k^{1/4}l^{1/4}$ капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 4$, $v = 3$ бўлсин. Агар фирманинг ишлаб чиқариш =уввати R ми=дордан ошмаса, ишлаб чиқаришнинг оптимал таклифи =андай бўлади?

5-маш=. Кичик фирмада ишлаб чиқариш функцияси $2k^{1/3}l^{1/3}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 6$, $v = 2$ бўлсин. Агар фирманинг ишлаб чиқариш =уввати ҳафтасига 500 бирлик ми=дордан ошмаса, Максимал фойда олиш учун =анча ми=дорда маҳсулот ишлаб чиқариш керак?

8 боб. Тармо=лараро моделлар

Режа:

8.1. Текис пропорционал ўсиш траекторияси.

Нейман траекторияси

8.2. Нейман баҳолари

8.3. Магистрал моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

8.1. Текис пропорционал ўсиш траекторияси

Нейман траекторияси

Ишлаб чи=аришнинг ўсиш моделини кўриб чи=амиз. Бу моделда ишлаб чи=ариш ҳажми текис пропорционал ўзгаради деб фараз =илинади. Бу бўлимда барча маҳсулотлар учун ишлаб чи=аришнинг ўсиш суръати ўзгармас бўлгандаги тармо=лараро динамик моделни кўриб чи=амиз. Бу модел текис пропорционал ўсиш модели бўлади.

7-боб даги тармо=лараро моделни ва=тга бо'лаб, =уйидагича ифодалаш мумкин:

$$X(t) = AX(t) + F(t), \quad (1)$$

бу ерда t - ва=т моменти.

Иккита компонентадан: яъни C -талаб вектори ва I - инвестиция векторидан ташкил топган сўнггги талаб вектори учун

$$F(t) = C(t) + I(t) \quad (2)$$

мунасабат ўринли. Агар t -ва=т моментидаги даромадни $y(t)$ деб белгиласак, у ҳолда алоҳида турлар бўйича товарларнинг *истеъмол функцияси* =уйидагича бўлиши мумкин:

$$C_i(t) = k_i y(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$y(t)$ даромадни =уйидагича тасвирлаш мумкин:

$$y(t) = \varepsilon_1^x x_1(t) + \varepsilon_2^x x_2(t) + \dots + \varepsilon_n^x x_n(t) \quad (4)$$

бу ерда ε_i - i -нчи маҳсулот учун =ўшилган =ийматнинг улуши. +уйидаги векторларни киритамиз:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^p = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \dots \\ \varepsilon_n^p \end{pmatrix}$$

(3) ва (4) формулалардан $\Rightarrow$ уйидаги муносабатни келтириб чи $\Rightarrow$ ариш мумкин:

$$C(t) = h \varepsilon^p X(t) \quad (5)$$

j-нчи маҳсулотни ишлаб чи $\Rightarrow$ ариш учун зарур бўлган i-нчи турдаги капитал ми $\Rightarrow$ дорини b_{ij} деб белгиласак, B капитал матрицанинг коэффицентлари $\Rightarrow$ уйидагича ёзилади:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Фараз $\Rightarrow$ илайлик, маҳсулот ишлаб чи $\Rightarrow$ ариш ва хом ашё харажати, ҳамда капитал орасидаги бо $\backslash$ ланиш пропорционал бўлсин. Агар маҳсулот ишлаб чи $\Rightarrow$ ариш ўсишини $\Rightarrow$ уйидагича белгиланса:

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+1) - x_i(t),$$

у ҳолда i-нчи маҳсулотга t-ва $\Rightarrow$ t давомидаги инвестицион талаб

$$I_i(t) = b_{i1}\Delta x_1(t) + b_{i2}\Delta x_2(t) + \dots + b_{in}\Delta x_n(t) \quad (6)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $i = 1, 2, \dots, n$

Агар $\Delta x_i(t)$ элементлардан тузилган n-ўлчовли векторни $\Delta X(t)$ деб белгиласак, у ҳолда (6) формулани матрица кўринишда ёзиш мумкин:

$$I(t) = B \Delta X(t) = B(X(t+1) - X(t)) \quad (7)$$

(1),(2),(5),(7) тенгламалардан тармо $\Rightarrow$ лараро динамик моделнинг асосий тенгламаси келиб чи $\Rightarrow$ ади:

$$X(t) = (A + h \varepsilon^p) X(t) + B(X(t+1) - X(t)) \quad (8)$$

Агар $\bar{A} = A + h \varepsilon^p$ деб белгиласак, у ҳолда (8) тенглама $\Rightarrow$ уйидаги кўринишда ёзилади:

$$X(t) = \bar{A} X(t) + B(X(t+1) - X(t)) \quad (9)$$

Ю $\Rightarrow$ орида таъкидланганидек, ишлаб чи $\Rightarrow$ аришнинг ўсиш суръати ўзгармас деб фараз $\Rightarrow$ илинади. Агар ўсиш суръатини g деб белгиласак, $\Rightarrow$ уйидаги тенламани тузиш мумкин:

$$X(t+1) - X(t) = gX(t).$$

Агар маҳсулотнинг бирор йилдаги ишлаб чиқариш векторини X деб қабул қилсак, у ҳолда *текис пропорционал ўсишнинг динамик модели* тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X = [\bar{A} + gB]X. \quad (10)$$

Бундан

$$(I - \bar{A})^{-1}BX = \frac{1}{g}X \quad (11)$$

келиб чиқади.

(11) тенгламада $(I - \bar{A})^{-1} > 0$ ва B матрицанинг ҳар бир қаторида энг камида битта мусбат элемент бўлсин. У ҳолда $(I - \bar{A})^{-1}B > 0$ бўлгани учун, мусбат аниқланган матрицалар ҳақидаги теоремага асосан $(I - \bar{A})^{-1}B$ матрица учун характеристик илдизи λ^* ва X^* - ўнг мусбат характеристик вектори бир қийматли аниқланади. Демак, иқтисодий талвинга эга бўлган текис пропорционал ўсиш траекторияси (уни *Нейман траекторияси – магистрالي* дейилади) $\{\alpha X^*, \alpha \geq 0\}$ векторни ифодалайди, g^* ўсиш суръати эса бу моделда λ^* га тесқари миқдор сифатида аниқланади.

8.2. Нейман баҳолари

Нейман баҳолари аввалги бўлимдаги Нейманнинг ўсиш моделига мос келади. P – баҳолар вектори бўлсин. У ҳолда текис ўсишга мос *Нейман баҳолари модели*ни

$$P = P(\bar{A} + rB) \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда r -фойда нормаси.

Асосий масала P ва r ларнинг қийматини ҳисоблашдан иборат. (1) тенгламани бошқачарок кўринишда ёзиш мумкин:

$$PB(I - \bar{A})^{-1} = \frac{1}{r}P \quad (2)$$

Фойда нормаси қиймати $(I - \bar{A})^{-1}B$ матрицанинг характеристик қийматига тесқари миқдор сифатида, $P = P^*$ баҳо вектори эса бу матрицанинг чап характеристик векторига тенг бўлади.

P^* ва r^* ларни қуйидаги алгоритм ёрдамида топиш мумкин:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)}\bar{A} + r^{(k)}P^{(k)}B,$$

$$r^{(k)} = \frac{P^{(k)}(I - \bar{A})X}{P^{(k)}BX}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

бу ерда X -ихтиёрий мусбат ишлаб чиқариш вектори (=иймати фиксирланган). Баҳо векторининг ихтиёрий бошланғич мусбат =ийматида бу алгоритм ёрдамида мувозанатли P^* ва r^* ларни ҳисоблаш мумкин (алгоритм P^* ва r^* ларга яқинлашувчи бўлади).

8.3. Магистрал моделлар

Жамғариш магистрал модели

Магистрал назариясининг асосий оёяси энг яхши эффектив иқтисодий ўсишга ўтиш учун иқтисодиётни магистрал йўлга олиб чиқиш (Нейман траекторияси), ва шу асосида мақсадга эришишдан иборат. Магистрал моделлар асосан икки турга бўлинади: жамғариш магистрал модели; истеъмол магистрал модели. Жамғариш магистрал моделини кўриб чиқамиз.

Жамғариш магистрал моделининг мақсади, жамғарилган капитал суммасини режалаштирилган даврда максималлаштиришдан иборат. Уни кўп ўлчовли чизиqli дастурлаш масаласи сифатида қараш мумкин:

$$PBX(T) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X(t) \geq \bar{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t)), & t = 0, 1, 2, \dots, T \\ X(t) \geq 0, & t = 0, 1, 2, \dots, T \end{cases} \quad (*)$$

бу ерда $X(t) - t = 0, 1, 2, \dots, T$ ва t давомида ишлаб чиқарилган ($n \times 1$) ўлчовли маҳсулот вектори, $\bar{A}$ ва B лар мос равишда манфий бўлмаган харажатларни орттириш коэффициентлар матрицаси ва капитал коэффициентлар матрицаси. Ҳар иккала матрицанинг ўлчови ($n \times n$)дан иборат. P - охириги даврдаги захиралар баҳоси бўйича ўлчови ($1 \times n$) бўлган вектор.

Шунга мувофиқ, $X(0)$ вектор берилган ҳисобланади ва $[(I - \bar{A}) + B]X(0) > 0, PB \geq 0$ шартлар бажарилади. $\bar{A}$ ва B матрицалар =уйидагича аниқланади :

$$\bar{A} = A + h, \quad A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad B = B^{(1)} + B^{(2)}.$$

Бу ерда A , $A^{(1)}$ ва $A^{(2)}$ - ($n \times n$) ўлчовли манфий бўлмаган матрицалар бўлиб, A -барча турдаги ресурслар, $A^{(1)}$ -жорий харажатлар, $A^{(2)}$ - асосий капитал амортизацияси матрицаларини ифодалайди.

B , $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ матрицалар ($n \times n$) ўлчовли манфий бўлмаган матрицалар бўлиб, B -хамма актив турлари бўйича коэффициентлар матрицаси, $B^{(1)}$ -асосий фондлар кўринишидаги активлар бўйича, $B^{(2)}$ -товар захиралари кўринишидаги активлар

бўйича коэффициентлардан тузилган матрицалар. h - истеъмол бўйича $(n \times 1)$ ўлчовли устун-вектор, θ - ўшимча =иймат нормаси мусбат вектори.

(*) масалага тегишли мумкин траекториялар сифатида =араладиган *ишлаб чи=ариш магистрали тенгламаси*

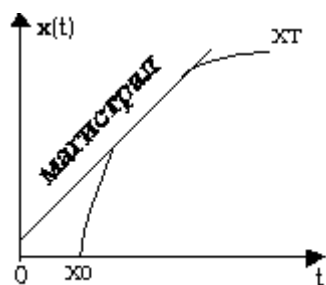
$$X = (\bar{A} + gB)X, \quad eX = 1$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда e - бирлик вектор, яъни $e = (1, 1, \dots, 1)$. X -текис пропорционал ишлаб чи=ариш ҳажми вектори, g -текис пропорционал ишлаб чи=аришдаги ўсиш суръатининг мусбат =иймати. Ю=орида келтирилган тенгламани =уйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$g^{-1}X = (I - \bar{A})^{-1}BX$$

$(I - \bar{A})^{-1} > 0$ ва B да ҳар бир сатрда камида битта мусбат элемент мавжуд деб фараз қиламиз. Бу фаразга кўра $(I - \bar{A})^{-1}B > 0$ ва у ҳолда $(I - \bar{A})^{-1}B$ матрица учун абсолют =иймат бўйича максимал λ * характеристик илдиши ва унга тегишли X^* мусбат ўнг характеристик вектор бир =ийматли ани=ланади.

И=тисодий нуктаи назаридан, магистрал модел $\{aX; a \geq 0\}$ шарт билан ифодаланади. g^* -текис ўсиш суръати эса λ * ми=дорга тескари ми=дор сифатида ани=ланади.



И=тисодий динамик моделлар татби=ларида *магистрал ҳа=идаги теоремалар* исботланади. Унга кўра, режалаштирилган даврнинг етарлича узо= ва=т давомида, маълум T_0 даврдан таш=ари (T_0 режалаштирилган давр узунлигига бо=ли= эмас), динамик моделнинг оптимал траекторияси бошлан\ич ҳолат ва P баҳолар векторига бо=ли= бўлмаган ҳолда магистралга я=ин келади (кучсиз магистрал теоремаси). Кучли магистрал теоремага кўра ихтиёрий X_0 бошлан\ич ҳолати ва X_T сўнгги ҳолати бўйича траектория учта соҳадан иборат бўлади: 1) X_0 дан магистрал томонига ҳаракат; 2) магистрал бўйича ёки бевосита унга я=ин ҳаракат; 3) магистралдан X_T -ҳолатга томон ҳаракат.

Магистрал ҳа=идаги теоремаларга кўра траекторияларнинг бошланиши ва якуни унинг режалаштирилган даврдаги давомийлигига бо=ли= эмас.

Истеъмолнинг магистрал модели

Маълумки, жам\ариш магистрал модели режалаштирилган даврда жам\арилган капиталнинг максималлаштириш билан ифодаланар эди. Биро=, и=тисодиётни

режалаштиришнинг ма=сади истеъмол даражасини оширишдан иборат бўлиши керак. Истеъмол даражасини максималлаштиришни ма=сад =илиб =ўйган режалаштириш моделларидан бири-бу *истеъмол магистрал модели*дир.

$L(t)$ -t-ва=t давомида таклиф =илинган ишчи кучи бўлсин. $L(0)$ -берилган бўлиб, g -ўсиш суръати (ўзгармас ми=дор) бўлса, у ҳолда =уйидаги тенглама ўринли бўлади:

$$L(t) = (1 + g)L(0).$$

g -нинг =иймати g_1 -иш билан банд бўлган аҳолининг ўсиш суръати ва g_2 -меҳнат унумдорлигининг ўртача ўсиш суръати билан ани=ланади: $g = g_1 + g_2 + g_1 g_2$.

Ю=оридагиларга асосан *истеъмолнинг магистрал модели*ни =уриш мумкин:

$$\sum_{t=0}^T (1 + \delta)^{-1} A(t) \rightarrow \max$$

$$X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t)) + A(t)q;$$

$$LX(t) \leq (1 + g)^t L(0)$$

$$X(t) \geq 0, A(t) \geq 0, (t = 0, 1, 2, \dots, T) \quad . (**)$$

$X(0), X(T+1)$ векторлар берилган бўлиб,

$$(I - A + B)X(0) > 0, X(T+1) \geq 0.$$

Бу ерда q –бир бирлик даврдаги манфий бўлмаган истеъмол структурасининг $(n \times 1)$ ўлчовли вектори, $\theta(t)$ -t-ва=tдаги истеъмол ҳажми, δ -чегириш проценти.

Бу моделда ҳам, жам\ариш магистрал модели каби, =уйидагича шартлар =ўйилади:

$$(I - A)^{-1} > 0, (I - A - gB)^{-1} > 0 \quad \text{ва} \quad \det(B) \neq 0.$$

У ҳолда =уйидаги тасди= ўринли: (**) ечимни ифодаловчи ишлаб чи=ариш ва истеъмолнинг оптимал траекториялари ва ишлаб чи=ариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари орасида магистрал ҳа=идаги “кучли” ва “кучсиз” теоремалардан келиб чи=адиган муносабатлар мавжуд бўлади.

Ишлаб чи=ариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари

$$X = AX + gBX + Aq, LX = L(0)$$

тенгламанинг X^* ва θ^* мусбат ечимлари асосида =уйидаги формулалар ёрдамида топилиши мумкин:

$$X^*(t) = (1 + q)^t X^*, \theta^*(t) = (1 + g)^t \theta^*$$

Бу ерда $X(T+1) = X^*(T+1) = (1 + g)^{T+1} X^*$

деб олинади.

Асосий мавзулар

- тармо=лараро динамик модел; текис пропорционал ўсиш (Нейман)
- модели
- текис ўсишга мос Нейман баҳоларини ва фойда нормасини ҳисоблаш
- жам\ариш магистрал модели
- истеъмол магистрал модели

Таянч иборалар, формулалар

- истеъмол функцияси, $C_i(t) = h_i y(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$
- тармо=лараро динамик модел, $X(t) = (A + h)X(t) + B(X(t+1) - X(t))$
- текис пропорционал ўсишнинг динамик модели, $X = (\bar{A} + gB)X$
- Нейман траекторияси-магистрал, $\{\alpha X; \alpha \geq 0\}$
- Нейман баҳолари модели, $P = P(\bar{A} + rB)$
- жам\ариш магистрал модели, $PBX(T) \rightarrow \max$

$$\begin{cases} X(t) \geq \bar{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t)), & t = 0, 1, 2, \dots, T \\ X(t) \geq 0, & t = 0, 1, 2, \dots, T \end{cases}$$

- ишлаб чи=ариш магистрالى тенгламаси, $X = (\bar{A} + gB)X$, $eX = 1$
- магистрал теоремалар

- истеъмолнинг магистрал модели, $\sum_{t=0}^T (1 + \delta)^{-1} \alpha(t) \rightarrow \max$

$$X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t)) + A(t)q;$$

$$LX(t) \leq (1+g)^t L(0)$$

$$X(t) \geq 0, A(t) \geq 0, (t = 0, 1, 2, \dots, T)$$

- ишлаб чиқариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари,
 $X^*(t) = (1+q)^t X^*, A^*(t) = (1+g)^t A^*$

Саволлар

- Нима учун текис пропорционал ўсиш модели дейилади?
- қандай траекторияни Нейман траекторияси дейилади?
- Магистрал нима?
- Магистрал теоремалар мазмуни нимадан иборат?
- Нейман баҳолар - бу қандай баҳолар?
- Оптимал баҳо ва фойда нормасини қандай топилади?
- Жамғариш магистрал модел маънаси нимадан иборат?
- Истеъмол магистрал модел маънаси нимадан иборат?

1-маш. А-бевосита харажатлар матрицаси, В-капитал матрица бўлсин:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1269 & 0,0695 & 0,0014 \\ 0,2312 & 0,4884 & 0,1958 \\ 0,0547 & 0,1065 & 0,1374 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,2170 & 0,0033 & 0,0081 \\ 1,7287 & 0,6067 & 1,0710 \\ 0,0702 & 0,0424 & 0,0987 \end{bmatrix}$$

$$C = [0,0142 \quad 0,3589 \quad 0,3962] \text{ - истеъмол коэффициентлари ва}$$

$V = [0,6591 \quad 0,3351 \quad 0,7523]$ - ўшимча қиймат улуши бўлса, маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўсиш суратини топинг.

2-маш. А, В, С, V. Агар А-ресурслар матрицаси, В-капитал матрица коэффициентлари, С-истеъмол вектори, V-ўшимча қиймат нормасини вектори бўлса, ўсишнинг оптимал траекториясини ҳисобланг.

9 боб. Итисодий-статистик усуллар ва эконометрик моделлар

Режа:

9.1. Башоратлаш усуллари

9.2. Эконометрик моделлар

Асосий мавзулар

Таянч иборалар, формулалар

Саволлар

Маш=лар

9.1. Башоратлаш усуллари

Итисодий математик услублар ёрдамида итисодий жараёнларни белгиловчи кўрсаткичлар ва уларга таъсир этувчи омиллар орасидаги миодорий бо'ланишларни (кўрсатувчи) ифодаловчи моделлар муҳим ўринга эга.

Итисодий жараёнларни ана шундай миодорий томонларини ҳамда итисоднинг назарий таҳлилларини математик статистиканинг усуллари ор=али тал=ин =илувчи фанни эконометрия деб юритилади. Эконометриянинг асосида параметрлари математик статистиканинг усуллари ор=али баҳоланадиган омиллар таҳлилининг итисодий математик модели ётади. Бу модел статистик асосида у ёки бу итисодий жараёнларни башоратлар, таҳлил этиш каби тад=и=отлар юритиш учун хизмат =илади. Бундай моделларни эконометрик моделлар деб юритилади.

Ушбу бобда баъзи итисодий масалаларнинг эконометрик моделлари таҳлил этилади.

Ҳозирги шароитда хал= хўжалиги жараёнларининг тара==иётини
режалаштирида илмий асосланган башоратлар ёрдамида бошлан'ич
марраларнинг ани=ланиши муҳим аҳамиятга эгадир.

Башоратлаш о=ибатида хал= хўжалигини келгусида эгаллаши мумкин бўлган ҳолати ани=ланади, ҳозирги кунда =абул =илинадиган =арорларнинг натижалари тахминан белгилаб чи=илади.

*И=тисодий башоратлаш*да и=тисодиётни ривожлантириш масалаларини хал =илиш ва=тида биз дуч келишимиз мумкин бўлган муаммолар ва вазифалар маълум бўлади. Биз и=тисодиётнинг келажакдаги аҳолини ани=лар эканмиз, хал= хўжалигини ривожлантиришдаги ижобий ва салбий томонларини башоратлаш ор=али кўраоламиз.

Биз, башоратлаш ва=тида ани=ланган ва хал этилиши лозим бўлган бир =атор вазифаларга эга бўлиб, конкрет тадбирларни турли дастурлар шаклида ишлаб чи=аоламиз, бу дастурлардан эса режа топшири=ларини ишлаб чи=ариш ва=тида фойдаланишимиз мумкин бўлади.

Ижтимоий ҳодисалар ва жараёнларнинг бир-бирига боʻли= равишда ва бир-бирини та=озо этиб ривожланиш принципи социал-и=тисодий башоратлаш назариясининг бошланʼич шарт-шароитидир.

Ижтимоий ҳаётдаги кўпгина жараёнлар ўз тара==иётида инерцион хоссаларга эга бўлиб, кўриб чи=илаётган тизим =анчалик мураккаб бўлса, унинг инерционлиги ҳам шунчалик кўп бўлади. Хал= хўжалиги и=тисодиётини режали ривожлантириш шароитида тара==иётнинг инерционлиги кўпроқ содир бўлади.

Бир хил ҳодисалар ҳа=идаги ахборотни тар=атиш усули, ахборот ҳажмини бир ҳодисадан иккинчисига ўтказиш, муайян шарт-шароитда *экстраполяция* усули дейилади. Экстраполяция тад=и=от объектининг ҳозирги ва=тда текшириш мумкин бўлган =исми учун =улай ахборотга, бутун объектнинг ани=ланишини таъмилайдиган умумий =онуниятларга асосланади. Экстраполяция усули билиш усули сифатида илмий башорат учун асос бўлади, чунки рўй бераётган ҳодисаларни башоратлаш ва=тида у тизимни (объектни) келгусида ривожлантириш =онуниятларига тадби= =илинади.

Башоратлашнинг ма=сади тизимнинг ўтмишдаги ва ҳозирги аҳолини,ўзгариш =онуниятларини ўрганиш ва таҳлил =илиш асосида унинг келгусидаги ривожланишини илмий асосланган ҳолда белгилаб чи=иш, содир бўладиган вазиятнинг характери ва мазмунини очиб беришдан иборат.

Башоратлаш ҳодисалар ва жараёнларнинг келажакдаги мумкин бўлган ривожланиш йўлини ва натижасини белгилаб беради, озми-кўпми узо=ро= исти=бол учун бу ҳодиса ва жараёнларни характерловчи кўсаткичларга баҳо беради.

Башоратлаш вазифалари кўп жиҳатдан башорат мўлжалланадиган даврнинг муддатига боʻли=дир. Башоратлаш даврининг муддати бўйича уч гурппага бўлинади: =ис=а муддатли башоратлар-даври 5 йилгача; ўртача муддатли башоратлар-15 йилгача; узо= муддатли башоратлар-30 йилгача; жуда узо= муддатга мўлжалланган башоратлар-30 йилдан кўпро= даврни ўз ичига олади.

Амалда башоратлашнинг барча усуллари 3 гурппага бўлиш мумкин:

-мутахассислар тузиб чи=адиган ва маълум ахборотларга асосланадиган эксперт усуллари;

-маълум маълумотлардан фойдаланишга асосланган, башоратлаш объектининг ўтмишини характерловчи маълумотга асосланган статистик (и=тисодий-математик) усуллари;

-мавжуд, ҳамда эксперт ахборотдан фойдаланишга асосланган аралаш усуллар.

Бир-бирига боʻланган тенгламалар тизимига асосланган энг оддий башоратлаш моделларидан бирини кўрамиз. Бу моделда кўрсаткичлар =иймати уларга таъсир этувчи омиллар бўйича тегишли тенгламалар ёрдамида ани=лаб чи=илади. +аралаётган омиллар одатда тасодифий характерга эга бўлганлиги сабабли ани=лашланинг кенг тар=алган усуллардан бири корреляцион-регрессион усулдан иборат бўлиб бу усул, яъни омиллар орасидаги боʻланишларни ўлчаш, ҳамда улардан бирининг ми=дорий ўзгариши бош=аларига =андай таъсир этиш даражасини ани=лашдан иборатдир.

Бош=ача =илиб айтганда, тад=и=от =илиши лозим бўлган кўрсаткичларни ўзаро боʻловчи ва улар орасидаги боʻланишларни ифодаловчи катталикларни ўз ичига олган математик муносабатларни келтириб чи=ариш ва уларни таҳлил этиш шу усулнинг моҳиятини ташкил этади.

Бу муносабатлар масаланинг =ўйилишига ҳамда талаб =илинаётган ани=ликка =араб хилма хил кўринишга эга бўлиши мумкин. Айтилганларни нормал равишда математик тил билан баён =илишга ҳаракат =иламиз.

Фараз =илайлик, $\alpha + \beta < 1$ =андайдир жараённинг ўзаро боʻли= тасодифий белгили омиллари бўлиб улар улар орасидаги муносабат

$$\{aX; a \geq 0\} \quad (1)$$

кўринишда бўлсин. Бу муносабатга асосан, бизни =изи=тираётган у-нинг =ийматларини бош=а $x_1, \dots, x_k$ омиллар =ийматлари бўйича f-оидани =ўллаб топиш мумкин. (1) даги f-“оидани” танлаш тад=и=отчининг ихтиёридаги мавжуд статистик маълумотларига таянган ҳолда эришилади.

+уйидаги содда ҳоллар билан чегаралинишга ҳаракат =илган ҳолда, уларга мос математик моделни =андай тузиш мумкинлигини кўрсатамиз. Шу боис,

масалани математик тилда ифодалаймиз. Фараз =илайлик, =араётган $y, x_1, \dots, x_k$ тасодифий белгили омиллар ўзаро корреляцион боʻлиқликда бўлиб, улар ҳа=идаги сонли статистик маълумотлар =уйидаги жадвал кўринишда берилган бўлсин.

у	x_1	x_2	...	x_k	=айтарилиш частотаси
y_1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	-	$x_k^{(1)}$	n_1

.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
y_m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	-	$x_k^{(m)}$	n_m

+аралаётган у ва $x_1, \dots, x_k$ белгилар орасидаги энг содда статистик боʻланиш-улар орасидаги чизиqli корреляцион боʻланишдир:

$$y = c + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \quad (2)$$

бунда $x_3 = 71,75$ - андайдир ўзгармас сонлар бўлиб, улар белгилар орасида ўзаро муносабатларга боʻлидирлар.

Агар (2) муносабат тадқиотчи томонидан танланган бўлса, унинг кейинги вазифаси $c, a_1, \dots, a_k$ ўзгармасларни шундай танлаши керакки, натижада у нинг (2) формула бўйича топилган ийматлари, амалда кузатилган ийматларига етарли даражада (тадқиотчини аноатлантирадиган) якин бўлсин. Бу масалани ҳал қилишда энг кичик квадратлар усули деб аталувчи усул қулай воситадир. Бу усулнинг мохиятини қуйидагича тушунтириш мумкин. (2) тенгликнинг ўнг томонига жадвалдаги $x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}, i = \overline{1, m}$ ларни қўйсак, умуман y_i лардан фарланувчи Y_i ийматларни ҳосил қиламиз.

У ҳолда $Y_i - y_i$ айирма (2) бўйича ҳисоблангандаги билан жадвалда унга мос иймат орасидаги фарқи билдиради. Энг кичик квадратлар усули бўйича $c, a_1, \dots, a_k$ ларнинг шундай ийматларини топиш лозимки, натижада

$$s = s(c, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j^{(i)} + c - y_i \right)^2 \cdot n_i$$

функция энг кичик ийматга эришсин.

Бу масалани ечиш ушбу

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial a_v} = 0, \quad v = \overline{1, k} \end{cases} \quad (3)$$

тенгламалар тизимини ечимларини топишга келтирилади.

$k + 1$ номаълумли бу тизимни ечиш учун қуйидаги белгалашларни киритамиз:

$$r_0 = \sum_{i=1}^m r_i$$

$$\begin{cases} c + a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_k \bar{x}_k = \bar{y} \\ C \bar{x}_j + a_1 \bar{x}_1 \bar{x}_j + a_2 \bar{x}_2 \bar{x}_j + \dots + a_j \bar{x}_j^2 + \dots + a_k \bar{x}_k \bar{x}_j = \bar{x}_j \bar{y} \\ j = \overline{1, k} \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \bar{y} + a_1(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + a_k(x_k - \bar{x}_k), \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_1(\overline{x_1 x_j} - \overline{x_1} \overline{x_j}) + m + a_{j-1}(\overline{x_{j-1} x_j} - \overline{x_{j-1}} \overline{x_j}) + a_j(\overline{x_j^2} - (\overline{x_j})^2) + \dots + \\ \quad + a_k(\overline{x_k x_j} - \overline{x_k} \overline{x_j}) = \overline{x_j y} - \overline{x_j} \overline{y_j} \quad j = \overline{1, k} \end{cases} \quad (7)$$

$i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, k} - x_i$ ва x_j -нинг корреляция коэффициентларини киритсак, (7)ни кўриниши =уйидагича бўлади.

[illegible]

(2) кўринишдаги чизиqli моделлар итисодиётининг кўп масалаларига мос келади. +ўйида шу моделни тадби= сифатида я=инда М./офуров рахбарлигида

бажарилган илмий тад=и=отдан намуналар келтирамиз (Ота=ўзиева З.М. Тошкент. Канд. Диссертацияси. 2000 й.).

Бу тад=и=отда хусусан чи=инди газларнинг атроф-муҳит ифлосланишига ва ҳар-хил касалликларнинг келиб чи=ишга салбий таъсир этиш даражасини и=тисодий баҳолаш услублари ишлаб чи=арилган.

Чи=инди газлар сифатида автомобилларникини оламиз. Уларнинг таъсирида пайдо бўладиган ва ю=умли бўлмаган 10 та касаллик турларининг ми=дорий ўзгаришларини таҳлилни кўрайлик.

Чи=инди газларни ташкил этувчилари орасида =уйидаги 5 хилини кўриш билан кифояланамиз:

x_1 -углерод оксиди, x_2 - азот оксиди, x_3 - углеводородлар, x_4 - олтингугурт оксиди, x_5 - урум.

$y_1, y_2, \dots, y_{10}$ ор=али =уйидаги касалликлар билан о\риган беморлар сонини белгилайлик:

1. Нафас олиш аъзолари сили;
2. Янги пайдо бўлган ўсимталар;
3. Асаб тизими ва сезги аъзолари касалликлари;
4. +он босими касаллиги;
5. +он босими билан келган кам=онлик;
6. +он босимисиз кам=онлик;
7. Нафаси олиш йўллариининг сурункали ялли\ланиши;
8. Нафас йўли бў\ма хафа=он касаллиги;
9. Нафас олиш аъзоларининг бош=а касалликлари;
10. Тери ва тери ости тў=ималар касалликлари.

Y_i - ларнинг x_1, x_2, x_3, x_4 ва x_5 лар ор=али ифодаланишини топиш муҳим аҳамиятга эга бўлиб, топилган муносабат ор=али башоратлаш жараёнини ҳам олиб бориш мумкин бўлади. y_i лар x_j -ларнинг функцияси эканлиги равшан. Ана шу функция =аралаётган омиллар устида кузатилган кўп йиллик маълумотлар асосида.

$y_i = c^{(i)} + a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + a_3^{(i)} x_3 + a_4^{(i)} x_4 + a_5^{(i)} x_5, \quad i = \overline{1, 80}$ кўринишда ахтарилган.

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида $y_i, \quad \{i = \overline{1, 10}\}$ ларнинг $x_j \quad (j = \overline{1, 5})$ ор=али ани= чизи=ли бо\ланишларини топиш мумкин.

Хусусан нафас олиш аъзолари сили бўйича касаллар сони

$$y_1 = 2046,3321 - 574,264x_1 - 3152,051x_2 + 4686,981x_3 - 4646,592x_4 - 170,936x_5$$

формула ор=али топилиши мумкин.

Шу аснода, =аралаётган омилларнинг бир-бирига бо\ли= равишда ми=дорий ўзгаришларини таҳлил =илувчи регрессил изланиши ҳам олиб борилган. Шу масала бўйича =илинган бош=а таҳлиллар ҳа=ида ю=орида эслатилган адабиётга мурожаат =илиш мумкин.

Умуман олганда, хал= хўжалигини ва тармо=ни и=тисодий-математик башоратлаш жараёни =уйидаги бос=ичларни ўз ичига олади:

-муайян ма=садга йўналтирилган концепцияни ишлаб чи=иш;

-башорат =илинаётган объектнинг дастлабки ҳолатини ани=лаш;

-башоратлаш усуллари танлаш;

- башоратлаш натижаларини тузатиб чи=иш ва баҳолаш;

-узо= муддатга мўлжалланган режалар ва комплекс дастурларни ишлаб чи=ишга доир хулосалар ва тавсиялар.

Башоратлаш бос=ичида и=тисодий объектларни ривожлантириш ма=садлари ани= муаммолар асосида белгилаб чи=илади.

2. Эконометрик моделлар.

И=тисодий-математик моделларни =уриш ва уларнинг татби=ларини чизи=ли регрессион моделлар, кўп факторли моделлар асосида кўриб чи=амиз.

Кўриладиган масалаларнинг асосий математик аппаратини математик статистика, корреляцион ва регрессион таҳлиллар ташкил этади. *Корреляцион-регрессион таҳлил усуллари* асосан =уйидагича 3 та масалани ечишни та=озо этади: натижавий ва фактор белгилар орасидаги бо\ланиш кўринишини ани=лаш; улар ўртасидаги бо\ланиш даражасини ани=лаш; ҳар бир фактор белгилар таъсирини ани=лаш. Бу масалаларни ечишни конкрет и=тисодий масалаларни таҳлил =илиш ор=али баён этамиз.

Жадвалда 9 та оиланинг ози=-ов=ат маҳсулотларига харажати ва киши бошига оладиган даромади, ҳамда келтирилган оила аъзоларининг сони берилган.

№	Ози=-ов=ат харажати (y)	Киши бошига даромад(x)	Оиланинг ўлчови
1	433	628	1,5
2	616	1574	2,1
3	900	2659	2,7

4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Бу ерда ози=-ов=ат харажатларини киши бошига даромад ва оила аъзоларининг сонига бо'ли=лигини таҳлил =илиш масаласини кўрайлик.

Натижавий белгини y билан, омил белгиларни x_1 ва x_2 ор=али белгилаймиз.

Дастлаб бир омилли чизи=ли моделни кўрамиз. y =уйидаги чизи=ли функция ор=али ифодаланади:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 \quad (1)$$

Бу формуладаги a_0 ва a_1 параметрларни олдинги боблардаги каби, нормал тенгламалар системасини ечиш ор=али ифодаланади. Нормал тенгламалар системаси бунда =уйдагича бўлади:

$$\begin{cases} na_0 + (\sum x_1)a_1 = \sum y \\ (\sum x_1)a_0 + (\sum x_1^2)a_1 = \sum yx_1 \end{cases} \quad (2)$$

Берилган жадвал асосида тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 = 11825 \\ 54725a_0 + 540789321a_1 = 98049159 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасидан модел коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = 549.68 ; a_1 = 0.1257 .$$

Шундай =илиб модел кўриниши

$$\hat{y} = 549.68 + 0.1257x_1 \quad (3)$$

бўлади.

(3) тенгламани *регрессия тенгламаси* дейилади, a_1 -коэффициентни *регрессия коэффициенти* дейилади. y ва x_1 ми=дорлар орасидаги бо'ланиш кучини *корреляция коэффициенти*ни ҳисоблаш ор=али топилади:

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{s_{yx_1}^2}{s_y^2}}, \quad (4)$$

бу ерда s_y -у танланманинг ўртача квадратик четланиши ва у = уийдаги формула билан топилади:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}}$$

бу ерда $\bar{y}$ -у миёдорларнинг ўртача арифметик ғиймати.

s_{yx_1} -(3) тенгламанинг n-2 озодлик даражалари бўйича ўртача квадратик хатоси:

$$s_{yx_1} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2}},$$

бу ерда $\hat{y}$ - (3) модел бўйича ҳисобланган озиёоват харажатларининг ғиймати.

Олдинги боблардаги каби ҳисоблашлар бажарилса, уийдагилар ҳосил бўлади

$s_y^2 = 454070$, $s_{yx_1}^2 = 63846$, бундан

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{63846}{454070}} = 0.927$$

r_{yx_1} нинг ғиймати кўрсатадики, озиёоват харажатлари ва киши бошига даромадлар кучли боғланишга эга экан.

Юёоридаги моделда эластиклик коэффиценти уийдаги формула билан топилади:

$$\varepsilon_{yx_1} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}} \quad (5)$$

Бизнинг мисолда $\bar{x}_1 = 6080,6$; $\bar{y} = 1313,9$. У ҳолда

$$\varepsilon_{yx_1} = \frac{0,1257 \cdot 6080,6}{1313,9} = 0,58$$

Бундан даромадни 1% кўтарилиши озиёоват харажатларининг 0,58% фоизга ошишини кўрсатади.

Энди ози=-ов=ат харажатларини даромад (x_1) ва оила аъзолари (x_2) сонига боʻли= бўлган икки омилли чизи=ли моделни кўрамиз. Модел кўриниши =уйидагича бўлади:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (6)$$

a_0, a_1, a_2 параметрлар куйидаги тенгламалар системасини ечиш ор=али топилади:

$$\begin{cases} n a_0 + (\sum x_1) a_1 + (\sum x_2) a_2 = \sum y \\ (\sum x_1) a_0 + (\sum x_1^2) a_1 + (\sum x_1 x_2) a_2 = \sum y x_1 \\ (\sum x_2) a_0 + (\sum x_1 x_2) a_1 + (\sum x_2^2) a_2 = \sum y x_2 \end{cases} \quad (7)$$

Берилган статистик маълумотлар асосида =уйидаги тенгламалар системасини ҳосил =иламиз:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 + 27,9a_2 = 11825 \\ 54725a_0 + 540789321a_1 + 194341,8a_2 = 98049159 \\ 27,9a_0 + 194341,8a_1 + 92,1a_2 = 40391,7 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечсак,

$$a_0 = 18,63; a_1 = 0,0985; \text{ u } (x)$$

бўлади ва у ҳолда (6) модел =уйидагича ифодаланади:

$$y = 18,63 + 0,0983x_1 + 224,6x_2$$

Боʻланиш кучини ани=лаш учун олдин =уйидаги корреляция коэффициентлари топилади:

$$r_{yx_1}, r_{yx_2}, r_{x_1x_2}$$

Корреляция коэффициентлари топилгандан сўнг =уйидагича кўп омилли корреляция коэффициенти топилади:

$$r_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}$$

Бизнинг мисолимиздаги ҳисоблашларни бажарилса, $r_{yx_1x_2} = 0,983$ бўлади. Бундан ози=-ов=ат харажатларини даромад ва оила аъзолари сонига боʻли=лиги ю=ори эканлиги келиб чи=ади.

Кўп омилли моделларда айрим омилларнинг таъсирини хусусий эластиклик коэффициентларини топиш ор=али ани=лаш мумкин:

$$\mathcal{E}_{yx_1(x_2)} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}}, \quad \mathcal{E}_{yx_2(x_1)} = \frac{a_2 \bar{x}_2}{\bar{y}}, \quad (8)$$

Бизнинг мисолимизда $a_1 = 0,0985$; $a_2 = 224,6$; $\bar{y} = 1313,9$; $\bar{x}_1 = 6080,6$; $\bar{x}_2 = 3,1$. у ҳолда (8) формулага асосан,

$$\mathcal{E}_{yx_1(x_2)} = \frac{0,0985 \cdot 6080,6}{1313,9} = 0,456; \quad \mathcal{E}_{yx_2(x_1)} = \frac{224,6 \cdot 3,1}{1313,9} = 0,53.$$

Бундан, оила аъзоларининг сони ўзгармаганда даромад 1%га ошиши ози-ов-ат харажатларининг 0,456%га кўпайишига, оила аъзоларининг сони 1 тага ортиши эса, ози-ов-ат харажатларининг 0,53% фоизга ошишига олиб келади.

Кобб-Дуглас ишлаб чиқариш функцияси асосидаги моделлар.

Омиллар орасидаги боғланишлар доимо чизиqli бўлавермайди. Шу ну=таи назардан мутахассисларга маълум бўлган Кобб-Дугласнинг ишлаб чиқариш функцияси ха=ида мулоҳаза юритамиз.

Айтайлик, у-ишлаб чиқариш индекси, К-асосий капитал индекси ва L-меҳнат индексини билдирсин. Американинг 1899-1922 йиллардаги айта ишлаш саноати бўйича ю=оридаги катталиклар учун Кооб ва Дуглас =уйидаги маълумотлар жадвалини тузган. (9.1- жадвал) [Paul H.Douglas, *The Theory of Wages*.-New York, 1934]:

9.1-жадвал

Йил	Y	K	L	Йил	y	K	L
1899	100.0	100.0	100.0	1912	177.0	226.0	155.0
1900	101.0	107.0	104.8	1913	184.0	236.0	156.2
1901	112.0	114.0	110.0	1914	189.0	244.0	152.2
1902	122.0	122.0	117.2	1915	189.0	266.0	155.8
1903	124.0	131.0	121.9	1916	225.0	298.0	183.0
1904	122.0	138.0	115.6	1917	227.0	335.0	197.5
1905	143.0	149.0	125.0	1918	223.0	366.0	201.1
1906	152.0	163.0	134.2	1919	218.0	387.0	195.9

1907	151.0	176.0	139.9	1920	231.0	407.0	194.4
1908	126.0	185.0	123.2	1921	179.0	417.0	146.4
1909	155.0	198.0	142.7	1922	240.0	431.0	160.5
1910	159.0	208.0	147.0				
1911	153.0	216.0	148.1				

Жадвалдаги маълумотлар асосида =илинган ҳисоб-китоблар =уйидаги натижаларни беради: $a = 0.956$; $\alpha = 0.245$; $\beta = 0.767$; $R^{*2} = 0.95$. Демак, $\alpha + \beta \approx 1$ тенглик бажарилмо=да.

Ишлаб чи=ариш саноатининг ривожланиш =онуниятларини башорат =илиш ма=садида, жадвалдаги берилганларга таянган ҳолда, у ва K, L орасидаги бо=ланишни

$$y = a K^{\alpha} L^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (9)$$

кўринишда изланади. Масала ю=оридаги жадвал берилганларга кўра номаълум a, α ва β ларни сонли =ийматини топишдан иборат. (9) кўринишдаги функциялар ҳозирги пайтда Кобб-Дуглас функцияси номи билан машҳур бўлиб, кўриниб турибдики, у чизи=ли функция эмас. Масалани соддалаштириш учун (9)ни ҳар икки томонини логарифмласак,

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln K + \beta \ln L \quad (10)$$

кўринишни ҳосил =иламиз. Агар $\alpha + \beta = 1$ $\ln y = Z$, $\ln K = x_1$, $\ln L = x_2$ белгиласак, (10) =уйидаги кўринишга келади:

$$Z = c + \alpha x_1 + \beta x_2$$

a, β, c ларни топиш учун энг кичик квадратлар усулини =ўлласак,

$$a \approx 0.956, \quad \alpha = 0.245, \quad \beta = 0.767 \text{ бўлади.}$$

Шундай =илиб Кобб-Дуглас моделини кўриниши

$$y = 0.956 K^{0.245} L^{0.767}$$

бўлар экан.

CES-функциясини ночизи=ли энг кичик квадратлар

усули бўйича баҳолаш

Ю=орида кўрилган Кобб-Дуглас функцияси билан бирга ресурсларни алмашишнинг ўзгармас эластиклиги функциясидан (CES-функция-constant elasticity of substitution) ҳам турли тад=и=отларда фойдаланилади. Бу функциянинг умумий кўриниши:

$$y = a_0 \left(\sum_{i \in I} a_i x_i^{-\rho} \right)^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_i > 0, i \in I,$$

бунда $\rho = \frac{1 - \sigma}{\sigma}$ бўлиб, $\rho > 0$ бўлганда $0 < \sigma < 1$, $-1 < \rho < 0$ бўлганда эса $\sigma > 1$ бўлади. CES-функцияни ўрганиш учун икки факторли макроэкономик функция деб юритиладиган

$$y = a_0 (a_1 K^\rho + a_2 L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$$

функцияни кўрамыз. Бу функция 1961 йилда К.Эрроу, Х.Ченери, Б.Минал ва Р.Солоу томонидан киритилган. Кўпинча $a_i + a_j = 1, a_i > 0, a_j > 0$, бўлган ҳол и=тисодий жараёнларда учрайди. Биз кейинги мулоҳазаларда шу шарт бажарилган деб =араймиз. (=улайлик учун $a_0 = a, a_1 = \delta, a_2 = 1 - \delta$ деб белгилаймиз). У ҳолда илмий-техник тара==иётни ҳисобга олинса, CES-функция =уйидагича ё илади:

$$y = a e^{\alpha} \left(\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (1)$$

Маълумки, ва=тинча алмашиш эластиклиги $y = F(K, L)$ чизи=ли бир жинсли ишлаб чи=ариш функцияси учун =уйидагича топила эди:

$$\epsilon = \left(\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \right) / \left(F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \right) \quad (2)$$

Кобб-Дуглас функцияси учун $\delta = 1$ CES-функция учун эса $\delta = \frac{1}{1 + \rho}$. Шундай =илиб, CES-функцияси учун $\delta \neq 1$ ва шунингдек, Кобб-Дуглас функцияси каби ўзгармасдир.

Агар $\rho \rightarrow 0$ бўлса, $\sigma \rightarrow 1$, яъни биз Кобб-Дуглас функциясига келамиз. Демак, CES-функция Кобб-Дуглас функциясининг умумлашган варианты экан.

(1) формулани логарифмланса ҳам у чизи=ли бўлмаган функцияни ифодалайди. Шунинг учун унинг параметрларини нозичи=ли дастурлаш усуллари ёрдамида ани=ланади. Ҳозирги пайтда уларни энг кичик квадратлар усули ёрдамида баҳолашда компьютер техникасидан кенг фойдаланилмо=да.

CES-функциясини логарифмлаш ёрдамида =уйидаги кўринишга келтирилади:

$f_i = \ln y_i = \ln \alpha + \lambda(i-1) + \frac{\sigma}{\sigma-1} \ln (\alpha K_i^\sigma + (1-\sigma)L_i^\sigma) + F_i$ бу ерда $y_i, K_i, L_i, = 1, 2, \dots, m$, -
кузатиш натижалари, $\sigma = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, F_i - олди=.

$$S = \sum_{i=1}^n F_i^2$$

Энг кичик квадратлар усулига кўра минималлаштирилади.

Асосий мавзулар

- И=тисодий-математик усуллар; башоратлаш усуллари; башоратлаш муддатлари.
- Истеъмол функциясини баҳолаш; регрессион анализ методлари; чизи=ли регрессион анализ; энг кичик квадратлар усули.
- Кобб-Дуглас ишлаб чи=ариш функциясини регрессион таҳлил усули энг кичик квадратлар усули ёрдамида баҳолаш.
- CES-функциясини очизи=ли энг кичик квадратлар усули бўйича баҳолаш.

Таянч иборалар, формулалар

- Эконометрия, эконометрик модел, башоратлаш, экстраполяция, башоратлаш турлари, энг кичик квадратлар усули, корреляция коэффициенти, эластиклик коэффициенти;

$$\sum_{k=1}^n [y_k - (\alpha + \lambda x_k)]^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{k=1}^n [y_k - \alpha - \lambda x_k] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \lambda} = -2 \sum_{k=1}^n [y_k - \alpha - \lambda x_k] x_k = 0 \end{cases}$$

- нормал тенгламалар системаси,
- чизи=ли регрессия тенгламаси, $y = \alpha + \lambda x$
- Кобб-Дуглас функцияси, $y = aK^\alpha L^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$y = \alpha_0 \left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i^{-\sigma} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

- CES-функция,
, $\alpha_i > 0$, $i \in I$

Саволлар:

- Эконометрия деб нимага айтилади?

- Башоратлаш усуллари таърифланг?
- Экстраполяция усули деб нимага айтилади?
- Корреляцион-регрессион усуллари таърифланг?
- Энг кичик квадратлар усули ва унинг мохиятини таърифланг?
- Эконометрик моделларга мисоллар келтиринг?
- Корреляция коэффициенти таърифланг?
- CES-функциясини хоссаларини айтинг

Машилар

1. Тасодифий равишда 8 та оила танлаб олинди. Шу оилага тегишли маълумотлар олинди:

1. оила аъзосига тўри келган бир ойлик ўртача даромад (x сўм);
2. оила аъзолари сони (y);
3. бир ойда ўртача жон бошига истеъмол қилинган гўшт (z-кг).

X	70	85	90	100	125	150	130	160
Y	4	4	3	3	2	2	1	1
Z	3	3,3	4,2	5	4,5	6,8	6,2	7

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида регрессия тенгламасини $z = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ кўринишда топинг.

2. Маълумотлар жадвалда Ўзбекистон Республикасида истеъмол молларини ишлаб чиқариш бўйича статистик маълумотлар берилган:

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Истеъмол моллари (миллион сўм)	24,7	178,3	1883,3	26873,7	77361,0

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида регрессия тенгламасини

$y = ax^2 + bx + c$ кўринишда топинг. Берилган жадвал маълумотларини ва унга мос квадрат функция графигини чизинг.

3. Кобб-Дуглас ишлаб чи=ариш функцияси учун алмаштиришнинг эластиклик коэффициенти топинг.

4. +уйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикаси =ишло= хўжалигини ривожлантириш бўйича статистик маълумотлар келтирилган:

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Донли экин майдонлари (минг га)	1079,9	1212,2	1280,3	1522,2	1656,5
Дон ишлаб чи=ариш (минг т)	1908,2	2257,2	2142,4	2466,9	3215,3
Гўшт ишлаб чи=ариш (минг т)	491,8	469,2	503,6	509,2	523,5

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида гўшт ишлаб чи=аришни (y) донли экин майдонлари (x_1) ва дон ишлаб чи=аришга (x_2) бо'ловчи икки параметрли регрессия тенгламасини $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0$ кўринишда топинг.

5. +уйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикаси аҳолисини сони ва структураси бўйича статистик маълумотлар келтирилган (минг киши):

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Жами аҳоли	20863	21360	21853	22282	22690
Меҳнатга =обилиятли ёшда	10234	10463	10707	10963	11157
Меҳнатга =обилиятли ёшга =адар	9005	9239	9462	9604	9788
Меҳнатга =обилиятли ёшдан ошганлар	1624	1658	1684	1716	1745

Жадвалда чап устундаги катталикларнинг ўзгариш динамикасини ифодаловчи чизиqli регрессия тенгламаларини тузинг. Ўзаро корреляция коэффициентларини ҳисобланг. Модел параметрларини баҳоланг.

6. +уйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикасида чет эл сармоялари иштирокидаги корхоналар фаолияти бўйича статистик маълумотлар берилган:

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Жами корхоналар	128	288	644	1039	1235
Маҳсулот ишлаб чи=ариш ҳажми (млн сўм)	7,7	112,6	1708,1	7344,3	10561,4
Экспорт (млн А+Ш дол.)	34,8	23,0	17,6	73,1	81,2
Ишловчилар сони	9126	16604	25016	33618	40000

Экспорт ҳажмини учта параметр: ишловчилар сони, жами корхоналар ва маҳсулот ишлаб чи=аришга бўловчи чизиqli модел тузинг. Ишлаб чи=ариш ҳажми билан ишловчилар сони орасидаги корреляцияни ани=ланг.

10-Мавзу . Чизиqli программалаштириш масалалари.

Симплекс масаласи ва транспорт масалаларининг қўйилиши.

10.1. Чизиqli программалаш масаласининг умумий қўйилиши;

10.2. Симплекс усули;

10.3. Транспорт масаласи.

10.1. Чизиqli программалаш масаласининг умумий қўйилиши

Режа:

1) Чизиqli программалаш масаласининг умумий қўйилиши.

- 2) Чизикли программалаш масаласининг турли формада ифодаланиши.
- 3) Тенг кучли алмаштиришлар.
- 4) Чизикли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечимлари. Таянч ечим.
- 5) Мумкин бўлган ечимлар тўпламининг қавариклиги.

Чизикли программалаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \geq (\leq) \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \geq (\leq) \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \geq (\leq) \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}_{\min(\max)} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (3)$$

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (3) чизикли функцияга минимал (максимал) қиймат берсин. Масаланинг (1) ва (2) шартлари унинг чегаравий шартлари деб, (3) чизикли функция эса масаланинг максади ёки максад функцияси деб аталади.

Масаладаги барча чегараловчи шартлар ва максад функция чизикли эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун ҳам (1)–(3) масала чизикли программалаш масаласи деб аталади.

Конкрет масалаларда (1) шарт тенгламалар системасидан, « $\geq$ » ёки « $\leq$ » кўринишдаги тенгсизликлар системасидан ёки аралаш системадан иборат бўлиши мумкин. Лекин кўрсатиш мумкинки, (1)–(3) кўринишдаги масалани осонлик билан қуйидаги кўринишга келтириш мумкин.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (6)$$

(4)–(6) кўриниш чизикли программалаш масаласининг каноник кўриниши деб аталади. (4)–(6) масала векторлар ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{P}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{X} \geq 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (9)$$

бу ерда

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{22} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix},$$

$C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – вектор–қатор.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – вектор–устун.

(4)-(6) масаланинг матрица кўринишдаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$AX = P_0, \quad (10)$$

$$X \geq 0, \quad (11)$$

$$Y_{\min} = CX, \quad (12)$$

бу ерда $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – қатор вектор, $A = (a_{ij})$ – (4) система коэффициентларидан ташкил топган матрица; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ва $P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – устун векторлар.

(4)-(6) масалани йиғиндилар ёрдамида ҳам ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad (15)$$

1-таъриф. Берилган (4)–(6) масаланинг мумкин бўлган ечими ёки режаси деб, унинг (4) ва (5) шартларни қаноатлантирувчи $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторга айтилади.

2-таъриф. Агар (7) ёйилмадаги мусбат x_i коэффициентли P_i ($i=1, \dots, m$) векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ режа таянч режа деб аталади.

3-таъриф. Агар $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таянч режадаги мусбат компоненталар сони m га тенг бўлса, у ҳолда бу режа айнимаган таянч режа, акс ҳолда айниган таянч режа дейилади.

4-таъриф. Чизиқли функция (6) га энг кичик қиймат берувчи $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таянч режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

Чизиқли программалаш масаласи устида қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин.

1) $Y_{\max}$ ни $Y_{\min}$ га айлантириш. Ҳар қандай чизиқли программалаш масаласини (4)–(6) кўринишга келтириш учун (1) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига ва $Y_{\max}$ ни $Y_{\min}$ га айлантириш керак. $Y_{\max}$ ни $Y_{\min}$ га келтириш учун $Y_{\max}$ ни тескари ишора билан олиш, яъни - $Y_{\max} = Y_{\min}$ ёки $Y_{\max} = -Y_{\min}$ кўринишда олиш етарлидир.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг минимуми тескари ишора билан олинган шу функция максимумининг қийматига тенг, яъни $\min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $-\max[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $-\min[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ ифодалар номаълумларнинг бир хил қийматларидагина ўзаро тенг бўлишини кўрсатиш мумкин. 2) Тенгсизликларни тенгламага айлантириш. n номаълумли

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b \quad (16)$$

чизиқли тенгсизликни қараймиз. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига номанфий номаълум сонни, яъни $x_{n+1} \geq 0$ ни қушамиз. Натижада $n+1$ номаълумли чизиқли тенгламага эга бўламиз: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + x_{n+1} = b$ (17)

(16) тенгсизликни тенгламага айлантириш учун қўшилган x_{n+1} ўзгарувчи қўшимча ўзгарувчи деб аталади. (16) тенгсизлик ва (17) тенгламанинг ечимлари бир хил эканлиги қуйидаги теоремада кўрсатилган.

5-таъриф. $A_1, A_2, \dots, A_n$ векторларнинг қавариқ комбинацияси деб шартларни қаноатлантирувчи

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

векторга айтилади. n -ўлчовли фазодаги ҳар бир $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ векторга координаталари $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ бўлган нуқта мос келади. Шунинг учун бундан кейин $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ векторни n -ўлчовли фазодаги нуқта деб қараймиз.

6-таъриф. Агар n -ўлчовли вектор фазодаги C тўплам ўзининг ихтиёрий A_1 ва A_2 нуқталари билан бир қаторда бу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$) нуқтани ҳам ўз ичига олса, яъни $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ бўлса, бу тўплам қавариқ тўплам деб аталади.

2-теорема. Чизикли программалаш масаласининг ечимларидан ташкил топган тўплам қавариқ тўплам бўлади.

Исботи. Чизикли программалаш масаласининг ихтиёрий иккита ечимининг қавариқ комбинацияси ҳам ечим эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, x_1 ва x_2 берилган чизикли программалаш масаласининг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$AX_1 = P_0, \quad X_1 \geq 0, \quad (30)$$

$$\text{ва} \quad AX_2 = P_0, \quad X_2 \geq 0, \quad (31)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Энди x_1 ва x_2 ечимларнинг қавариқ комбинациясини тузамиз.

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

ҳамда уни ечим эканлигини кўрсатамиз:

$$AX = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1-\alpha)Ax_2$$

Энди (30) ва (31) тенгламаларни инобатга олиб топамиз.

$$AX = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0.$$

Бу муносабат X вектор ҳам ечим эканлигини курсатади.

3-теорема. Чизикли программалаш масаласининг чизикли функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг ечимларидан ташкил топган қавариқ тўпламнинг четки нуқтасида эришади.

Агар чизикли функция K қавариқ тўпламнинг бирдан ортиқ четки нуқтасида оптимал қийматга эришса, у шу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам ўзининг оптимал қийматига эришади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

4-теорема. Агар k та ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган $P_1, P_2, \dots, P_k$ векторлар берилган бўлиб, улар учун

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_k x_k = P_0$$

тенглик барча $x_i \geq 0$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ вектор K қавариқ тўпламнинг четки нуқтаси бўлади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

5-теорема. Агар $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ четки нуқта бўлса, у ҳолда мусбат x_i ларга мос келувчи векторлар ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини ташкил қилади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1-хулоса. K тўпламнинг ҳар бир четки нуқтасига $P_1, P_2, \dots, P_n$ векторлар системасига m та ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган векторлар системаси мос келади.

2-хулоса. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ K тўпламнинг четки нуқтаси бўлиши учун мусбат x_i компоненталар

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0$$

ёйилмада ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_i векторларнинг коэффицентларидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

3-хулоса. Чизиқли программалаш масаласи таянч ечимларидан ташкил топган тўплам K қавариқ тўпламнинг четки нуқталар тўпламига мос келади ва аксинча, ҳар бир таянч ечим K тўпламнинг бирор четки нуқтасига мос келади.

4-хулоса. Чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечимини K тўпламнинг четки нуқталари орасидан қидириш керак.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар.

1. Чизиқли программалаш масаласининг вектор формадаги умумий кўриниши қандай ёзилади?
2. Чизиқли программалаш масаласи матрица кўринишидаги ифодаси қандай ёзилади?
3. Чизиқли программалаш масаласини йиғиндилар ёрдамидаги ифодасини ёзинг.
4. «Чизиқли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечими» деганда нимани тушунаси?
5. Чизиқли программалаш масаласининг таянч ечими нима?
6. Айниган ва айнимаган таянч ечимларни таърифланг.
7. Чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечими нима?
8. Чизиқли программалаш масаласида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?
9. «Векторларнинг қавариқ комбинацияси» деганда нимани тушунаси?
10. Қавариқ тўпламни таърифланг.
11. Чизиқли программалаш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қандай тўплам бўлади?
12. Ечимлардан ташкил топган қавариқ тўпламнинг четки нуқтаси билан таянч ечим орасида қандай боғланиш бор?
13. Мақсад функция ўзининг оптимал қийматига қандай нуққада эришади?

Симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади

Базис вект.	$C_{\text{баз}}$	P_0	C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	...	C_k	...	C_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	C_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	C_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	C_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	C_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$y_j = Z_j - C_j$	...	$\sum_{i=0}^m y_0 = ? C_j$ b_j $i=0$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	...	$\Delta_m = 0$	$\sum_{i=0}^m y_{m+1} = ? a_{im+1}$ $C_i - C_{m+1}$ $i=0$ 0	...	$\sum_{i=0}^m y_k = ? a_{ik}$ $C_i - C_k$ $i=0$ 0	...	$\sum_{i=0}^m y_n = ? a_{in}$ $C_i - C_n$ $i=0$ 0

Агар барча устунларда $y_j \leq 0$ бўлса $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ечим оптимал ечим бўлади. Бу ечимдаги чизиқли функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлади.

Агар камида битта j учун $y_j \geq 0$ бўлса, ҳам масаланинг оптимал ечими топилмаган бўлади. Шунинг учун топилган ечимни оптимал ечимга яқин бўлган ечимга алмаштириш мақсадида базисга

$$\max_{y_j > 0} (y_j) = y_k = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи P_k векторни киритиш керак. Агар P_k базисга киритилса, эски базис векторлардан бирортасини базисдан чиқариш керак. Базисдан

$$\min_{a_{ik} > 0} (b'_i / a'_{ij}) = b_e / a_{ek}$$

шарт ўринли бўлган P_e вектор чиқарилади. Бу ҳолда a_{ek} элемент ҳал қилувчи элемент сифатида белгиланди. Шу элемент жойлашган j -қатордаги P_e вектор ўрнига у жойлашган устундаги P_k вектор базисга киритилади. P_e векторнинг ўрнига P_k векторни киритиш учун симплекс жадвал қуйидаги формулалар

$$\begin{cases} b'_i = b_i - (b_e / a_{ek}) \cdot a_{ik} \\ b'_e = b_e / a_{ek} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x'_i = x_i - (x_e / x_{ek}) \cdot x_{ik} \\ x'_e = x_e / x_{ek} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - (a_{ei} / a_{ek}) \cdot a_{ik} \\ a'_{ej} = a_{ej} / a_{ek} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - (x_{ej} / x_{ek}) \cdot x_{ik} \\ x'_{ej} = x_{ej} / x_{ek} \end{cases}$$

асосида алмаштирилади.

Симплекс жадвал алмашгандан сўнг яна қайтадан Δ_j баҳолар аниқланади. Агар барча j лар учун Δ_j бўлса, оптимал ечим топилган бўлади. Акс ҳолда топилган ечим бошқа ечим билан алмаштирилади. Умуман бу жараён оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг чекли оптимал ечими мавжуд эмаслиги

аниқлангунча такрорланади. Агар бирорта j учун $\Delta_j > 0$ бўлиб бу устундаги барча a_{ij} элементлар учун $a_{ij} \leq 0$ ($i=1, \dots, m$) шарт бажарилса, масаланинг мақсад функцияси чекли экстремумга эга бўлмайди.

Фараз қилайлик, симплекс жадвалда оптималлик шarti ($\Delta_j \leq 0$ $i=1, \dots, n$) бажарилсин. Бу ҳолда ечим

$$X = B^{-1}P_0$$

формула орқали топилади. Бу ерда $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ матрица базис векторлардан ташкил топган матрицадир. (1)-(3) масала учун B матрица m ўлчовли бирлик матрица, ва $J_m B^{-1}$ матрица ҳам бирлик матрица бўлганлиги сабабли $X^0 = P^0 = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)$ оптимал ечим бўлади.

1-мисол. Масалани симплекс усул билан ечинг

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Y_{\min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

Ечиш. Белгилашлар киритамиз ва симплекс жадвални тўлдирамиз

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C = (0; 1; -3; 0; 2)$$

i	Базис вект.	C _{баз}	P ₀	0	1	-3	0	2	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₁	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P ₄	0	12	0	-2	14	1	0	0
3	P ₆	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P ₁	0	10	1	5/2	0	1/4	-2	0
2	P ₃	-3	3	0	-1/2	0	1/4	0	0
3	P ₆	10	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P ₂	1	4	2/5	1	0	1/1	-4/5	0
2	P ₃	-3	5	1/5	0	1	3/1	-2/5	0
3	P ₆	10	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-1/2	-8/5	0

$\Delta_j \leq 0$. Оптимал ечим $x = (0; 4; 5; 0; 0; 11)$ $Y_{\min} = -11$.

Сунъий базис усули

Агар масаланинг шартларида ўзаро эркин бўлган m та бирлик векторлар (базис векторлар) қатнашмаса, улар сунъий равишда киритилади. Масалан, масала қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (3)$$

Бу масалага $\mathbf{x}_{n+1} \geq 0, \mathbf{x}_{n+2} \geq 0, \dots, \mathbf{x}_{n+m} \geq 0$ қўшимча ўзгарувчилар киритилса, қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил бўлади

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \dots, \mathbf{x}_{n+m} \geq 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = -\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 - \dots - \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n + 0(\mathbf{x}_{n+1} + \dots + \mathbf{x}_{n+m}) \quad (6)$$

Бу ҳолда $\mathbf{P}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+2}, \dots, \mathbf{P}_{n+m}$ векторлар базис векторлар ва $\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots, \mathbf{x}_{n+m}$ ўзгарувчилар «базис ўзгарувчилар» деб қабул қилинади.

Агар берилган масала қуйидаги кўринишда бўлса:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (9)$$

бу масалага сунъий $\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots, \mathbf{x}_{n+m}$ ўзгарувчилар киритиб қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \mathbf{x}_{n+1} \geq 0, \dots, \mathbf{x}_{n+m} \geq 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = -\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 - \dots - \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{M}(\mathbf{x}_{n+1} + \dots + \mathbf{x}_{n+m}) \quad (12)$$

бу ерда: $\mathbf{M}$ – етарлича катта мусбат сон.

Сунъий базис ўзгарувчиларига мос келувчи $\mathbf{P}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+2}, \dots, \mathbf{P}_{n+m}$ векторлар «сунъий базис векторлар» деб аталади.

Берилган (7)-(9) масаланинг оптимал ечими куйидаги теоремага асосланиб топилади.

Теорема: Агар кенгайтирилган (10)-(12) масаланинг оптимал ечимида сунъий базис ўзгарувчилари нолга тенг бўлса, яъни:

$$\mathbf{x}_{n+i} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу ечим берилган (7)-(9) масаланинг ҳам оптимал ечими бўлади.

Агар кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимида камида битта сунъий базис ўзгарувчи нолдан фарқли бўлса, у ҳолда масала ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. Масалани сунъий базис усули билан ечинг

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 4)$$

$$\mathbf{Z}_{\max} = 5\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4$$

Ечиш. Масалага сунъий $\mathbf{x}_5 \geq 0$ $\mathbf{x}_6 \geq 0$ ўзгарувчилар киритамиз ва уни нормал кўринишга келтирамиз.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_6 = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$\mathbf{Z}_{\min} = -5\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{M}(\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6)$$

Ҳосил бўлган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

i	Базис вект.	$\mathbf{C}_{\text{баз}}$	$\mathbf{P}_0$	-5	-3	-4	1	M	M	A.K
				$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$	$\mathbf{P}_6$	
1	$\mathbf{P}_5$	M	3	1	3	2	2	1	0	1
2	$\mathbf{P}_6$	M	3	2	2	1	1	0	1	1,5
Δ_j			6m	3m+5	5m+3	3m+4	3m-1	0	0	
1	$\mathbf{P}_2$	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
2	$\mathbf{P}_6$	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	s
Δ_j			M-3	M+4	0	M+3	M-2	M-1	0	
1	$\mathbf{P}_2$	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4	1
2	$\mathbf{P}_1$	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4	-
Δ_j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M	
1	$\mathbf{P}_3$	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
2	$\mathbf{P}_1$	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M	

Шундай қилиб симплекс усул бўйича 4-та қадамдан иборат яқинлашишда оптимал ечим топилди. $\Delta_j \leq 0$. Оптимал ечим $\mathbf{x}=(1;0;1;0;0;0)$ $\mathbf{Y}_{\min}=-9$.

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимидаги сунъий ўзгарувчилар 0га тенг ($x_5=0$, $x_6=0$). Шунинг учун (теоремага асосан) берилган масаланинг оптимал ечими:

$$x=(1;0;1;0); \quad Z_{\min}=-9; \quad Z_{\max}=9; \quad \text{бўлади.}$$

Мавзу бўйича назорат саволлар

1. Данциг усули бўйича масаланинг чекли оптимал ечимга эга бўлмаслик шarti нимадан иборат?
2. Данциг усули бўйича ЧП масаласини бошланғич ечимининг оптимал бўлиш шarti нимадан иборат?
3. Сунъий базис усули қачон қўлланилади?
4. Қўшимча ўзгарувчилар билан сунъий ўзгарувчиларнинг фарқи нимадан иборат?
5. Сунъий базис вектор усули билан ечилганда ЧП масаласи қайси ҳолларда ечимга эга бўлмайди?

10.3. Чизикли программлаштиришнинг Транспорт масаласи

Транспорт масаласи – чизикли программлашнинг алоҳида хусусиятли масаласи бўлиб бир жинсли юк ташишнинг энг тежамли режасини тузиш масаласидир. Бу масала хусусийлигига қарамай қўлланиш соҳаси жуда кенгдир.

1. Масаланинг қўйилиши ва унинг математик модели

m -та A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) таъминотчиларда йиғилиб қолган бир жинсли a_i миқдордаги маҳсулотни n -та B_j истеъмолчиларга мос равишда b_j ($j=1, 2, \dots, n$) миқдорда етказиб бериш талаб қилинади.

Ҳар бир i -таъминотчидан ҳар бир j -истеъмолчига бир бирлик юк ташиш йўл ҳаражати маълум ва у c_{ij} – сўмни ташкил қилади.

Юк ташишнинг шундай режасини тузиш керакки, таъминотчилардаги барча юклар олиб чиқиб кетилсин, истеъмолчиларнинг барча талаблари қондирилсин ва шу билан бирга йўл ҳаражатларининг умумий қиймати энг кичик бўлсин.

Масаланинг математик моделини тузиш учун i -таъминотчидан j -истеъмолчига етказиб бериш учун режалаштирилган юк миқдорини x_{ij} орқали белгилаймиз, у ҳолда масаланинг шартларини қуйидаги жадвал кўринишда ёзиш мумкин:

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захиралар
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m

Талаблар	b_1	b_1	...	b_1	$?a_i = ?b_j$
----------	-------	-------	-----	-------	---------------

Жадвалдан кўринадики, i -таъминотчидан j -истеъмолчига режадаги x_{ij} – бирлик юк етказиб бериш йўл ҳаражати c_{ij} x_{ij} – сўмни ташкил қилади. Режанинг умумий қиймати эса,

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

га тенг бўлади.

Масаланинг биринчи шартига кўра, яъни барча юклар олиб чиқиб кетилиши шarti учун

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

тенгликларга эга бўламиз;

иккинчи шартга кўра, яъни барча талаблар тўла қондирилиши учун

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

тенгликларга эга бўламиз;

Шундай қилиб масаланинг математик модели қуйидаги кўринишни олади:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

чизиқли тенгламалар системасининг

$$(3) \quad x_{ij} = 0, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n$$

шартларни қаноатлантирувчи шундай ечимини топиш керакки, бу ечим чизиқли функцияга энг кичик қиймат берсин.

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max$$

Бу моделда

тенглик ўринли деб фараз қилинади. Бундай масалалар «ёпиқ модели транспорт масаласи» дейилади.

Теорема. Талаблар ҳажми захиралар ҳажмига тенг бўлган исталган транспорт масаласининг оптимал ечими мавжуд бўлади.

2. Бошланғич таянч ечимни қуриш.

Маълумки, ихтиёрий чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечимини топиш жараёни бошланғич таянч ечимини қуришдан бошланади.

Масаланинг (1) ва (2) системалари биргаликда mn – та номаълумли $m+n$ – та тенгламаларда иборат. Агар (1) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак, ва алоҳида (2) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак, иккита бир хил тенглама ҳосил бўлади. Бу эса (1) ва (2) дан иборат системада битта

чизиқли боғлиқ тенглама борлигини кўрсатади. Бу тенглама умумий системадан чиқариб ташланса, масала $m+n-1$ та чизиқли боғлиқ бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлиб қолади. Демак, масаланинг бузилмайдиган таянч ечими $m+n-1$ та мусбат компоненталардан иборат бўлади.

Шундай қилиб, транспорт масаласининг бошланғич таянч ечими бирор усул билан топилган бўлса, (x_{ij}) – матрицанинг $m+n-1$ та компоненталари мусбат бўлиб, қолганлари нолга тенг бўлади. Агар транспорт масаласининг шартлари ва унинг таянч ечими юқоридаги жадвал кўринишда берилган бўлса, нолдан фарқли x_{ij} – лар жойлашган катаклар «банд катаклар», қолганлари «бўш катаклар» дейилади.

Агар банд катакларни вертикал ёки горизонтал кесмалар билан туташтирилганда ёпиқ кўпбурчак ҳосил бўлса, бундай ҳол циклланиш дейилади ва ечим таянч ечим бўлмайди. Демак, бирорта ечим таянч ечим бўлиши учун банд катаклар сони $m+n-1$ та бўлиб циклланиш рўй бермаслиги керак.

Шимолий-ғарб усули.

Транспорт масаласи жадвал кўринишида берилган бўлсин. Йўл харажатларини ҳисобга олмай B_1 истеъмолчининг талабини A_1 таъминотчи ҳисобига қондиришга киришамиз. Бунинг учун a_1 ва b_1 юк бирликларида кичигини A_1B_1 катакнинг чап пастки бурчагига ёзамиз. Агар $a_1 < b_1$ бўлса, B_1 нинг эҳтиёжини тўла қондириш учун A_2B_1 катакка етишмайдиган юк бирлигини A_2 дан олиб ёзамиз ва ҳ.к. Бу жараёни A_mB_n катакка етгунча давом этдирамиз. Агар (5) шарт ўринли бўлса, бу усулда тузилган ечим албатта таянч ечим бўлади.

1-мисол. Транспорт масаласининг бошланғич ечимини топинг.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					Захира хажми
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Талаб хажми	200	200	100	100	250	

Минимал қиймат усули.

Бу усулда бошланғич ечим куриш учун аввал йўл ҳаражати энг кичик бўлган катакка a_i ва b_j лардан кичиги ёзилади ва кейинги энг кичик қийматли катакка ўтилади ва ҳ.қ. Бу усулда тузилган бошланғич ечимни бузилмаслик ва цикллинишга текшириш шарт.

2-Мисол. Минимал қиймат усули билан бошланғич ечимни топинг.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар					Захира хажми
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	10	7	4	1 100	4	100
A ₂	2 200	7 50	10	6	11	250
A ₃	8	5	3	2	2 200	200
A ₄	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Талаб хажми	200	200	100	100	250	

3. Оптимал ечим қуришнинг потенциаллар усули

Теорема: Агар транспорт масаласининг $X^*=(x_{ij}^*)$ ечими оптимал бўлса, унга қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $m+n$ -та сонлар системаси мос келади:

$$\begin{aligned} X_{ij}^* > 0 & \text{ лар учун} & U_i^* + V_j^* = C_{ij} \\ X_{ij}^* = 0 & \text{ лар учун} & U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \\ i=1,2,\dots,m; & & j=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

U_i^* ва V_j^* сонлар мос равишда «таъминотчи ва истеъмолчиларнинг потенциаллари» дейилади.

Бу теоремага кўра бошланғич таянч ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши керак:

а) ҳар бир банд катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл ҳаражати қийматига тенг бўлиши керак:

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij} \quad (6)$$

б) ҳар бир бўш катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл ҳаражати қийматидан катта бўлмаслиги керак:

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \quad (7)$$

Агар камида битта бўш катак учун (7) шарт бажарилмаса, кўрилатган ечим оптимал бўлмайди ва бу ечимни базисга (7) шарт бузилган катакдаги номаълумни киритиш билан яхшилаш мумкин.

Шундай қилиб навбатдаги таянч ечимни оптималликка текшириш учун аввал (6) шарт ёрдамида потенциаллар системаси қурилади ва сўнгра (7) шартнинг бажарилиши текширилади.

4. Потенциаллар усулининг алгоритми

1. Бошланғич таянч ечимни қуриш;
2. (6) шарт асосида потенциаллар системасини қуриш; бунда $m+n-1$ та банд катак учун $m+n$ -та чизикли тенглама ҳосил бўлади. Номальумлар сони тенгламалар сонидан битта ортиқ бўлгани учун битта номальум эркин бўлиб унга ихтиёрий қиймат, масалан ноль қиймати берилиб қолганлари мос тенгламалардан топилади;
3. Бўш катаклар учун (7) шарт текширилади;
 - а) бу шарт барча бўш катаклар учун бажарилса, ечим оптимал бўлади ва ечиш жараёни тугайди;
 - б) акс ҳолда ечим оптимал бўлмайди ва кейинги ечимга ўтишга киришилади;
4. Кейинги ечимга ўтиш учун (7) шарт бузилган катакларнинг ўнг паст бўрчагига $z_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ қийматлар ёзиб чиқилади ва бу қийматларнинг энг каттаси мос келган катакка «+» ишора қўйилади. «+» ишора қўйилган катакдан бошлаб банд катаклар орқали цикл қурилади, яъни учлари банд катакларда ётган ёпиқ кўпбурчак ҳосил қилинади. Бу кўпбурчакнинг учларига бўш катакдаги «+» дан ихтиёрий йўналишда «-» ва «+» ишоралари қўйиб чиқилади. «-» ишорали катаклардаги юк бирликларидан энг ками танланади ва шу миқдор барча «-» ишорали катаклардан айирilib, «+» ишорали катакларга қўшилади, натижада янги таянч ечим ҳосил бўлади.

Бу жараён чекли сонда қайтарилгандан сўнг албатта оптимал ечим ҳосил бўлади.

Бу алгоритмни қуйидаги мисолда батафсил кўриб чиқамиз: (охирги жадвалдаги ечим давом этдирилади).

5. Очиқ моделии транспорт масаласи

Юқорида талаб ва таклифларнинг умумий миқдорлари тенг бўлганда масала «ёпиқ моделии транспорт масаласи» дейилади, деган эдик. Акс ҳолда масала очик моделии бўлиб унинг оптимал ечимини топиш учун ёпиқ моделга келтирилади ва потенциаллар усули қўлланилади.

Очиқ моделии масалани ёпиқ моделга келтириш учун қўшимча «сохта» таъминотчи ёки истеъмолчи киритилади, уларнинг захираси ёки талаб ҳажми

$a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ ёки $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ бўлади. Сохта

таъминотчидан реал истеъмолчиларга ёки реал таъминотчилардан сохта истеъмолчиларга амалда юк ташилмагани учун йўл харажатлари нолга тенг қилиб олинади ($C_{i,n+1} = 0$; $C_{m+1,j} = 0$).

Натижада ёпиқ моделии масала ҳосил бўлади.

3-мисол: $\sum a_i > \sum b_j$ – бўлган ҳол, учун масалани ечинг.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар						Захира ҳажми
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_{n+1}	
A_1	10	7	4	1	4	0	100

A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Талаб ҳажми	200	150	100	100	200	100	

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Транспорт масаласининг математик моделини ёзинг.
2. Очiq ва ёпиq модели транспорт масалаларига изоҳ беринг.
3. Ёпиq модели транспорт масаласининг ечими мавжуд бўлишини зарур ва етарлиқ шarti нимада иборат?
4. Потенциаллар нима ва қандай маънога эга?
5. Потенциал тенглама нима ва у қандай ёзилади?
6. ТМ ечимининг оптималлиқ шarti нимадан иборат?
7. Очiq модели ТМ қандай қилиб ёпиq модели масалага айлантирилади?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Гафуров М., Холмуродов М., Хусанов К., Иқтисодий математик усуллар ва моделлар. Тошкент: 2001й
2. Гуломов С.С., Махмудов Н.М. Исмоилов А.А., Бозор иқтисодиёти моделлари. Т: 1995й.
3. Anthony M., Biggs N. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge, 1998.
4. Замков О.О. и др. Математическая методи в экономике. М:, 1999.
5. Банди Б. Основы линейного программирования.-М:Радио и связь.1989
6. Бадалов Ф.Б Оптималлаш назарияси ва математик программалаш.-Т: Ўқитувчи.1989
7. Кузнецов. Ю.М, Кузубов В.И, Волохенко А.Б Математическое программирования.-М: Вўсшая школа 1980
8. Сафаева К.Бекназаров Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари.1-қисм.Т:Ўқитувчи.1984 .2-қисм Т:Ўқитувчи 1990.