

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК: 517.95

Жўраев Воҳиджон Тожимаматович

БИТТА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН
АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАЛАНМАГАН
СОҲАДА НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

5A460102 – Дифференциал тенгламалар мутахассислиги

бўйича магистр академик даражасини олиш учун

МАГИСТРЛИК
ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар:

физика – математика фанлари
номзоди, доцент Ш.Т.Каримов

Фарғона – 2011

Мундарижа

Кириш.....	3
I боб. Сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун чегараланмаган соҳада чегаравий масалалар	8
1.1-§. Асосий тушунча ва маълумотлар	8
1.2-§. Масалаларнинг қўйилиши ва уларнинг ечимининг ягоналиги.....	15
1.3-§. Дирихле-Нейман масаласи ечимининг мавжудлиги ва эллиптик соҳада олинган асосий муносабатлар.....	19
II боб. Сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенграмалар учун чегараланмаган соҳада Коши масаласи.....	29
2.1-§. Асосий тушунча ва маълумотлар.....	29
2.2-§. Биринчи чегараланмаган характеристик бурчакда Коши масаласи.....	34
2.3-§. Иккинчи чегараланмаган характеристик бурчакда Коши масаласи.....	37
2.4-§. Гиперболик соҳада олинган асосий муносабатлар.....	40
III боб. Битта сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун чегараланмаган соҳада нолокал масала.....	45
3.1-§. Масаланинг қўйилиши. Масала ечимининг ягоналиги.....	46
3.2-§. Масала ечимининг мавжудлиги.....	50
Хулоса.....	54
Фойдаланилган адабиётлар.....	55

КИРИШ.

Ўзбекистон Республикаси Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изох бериб шундай деган эди [1]:

«Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб кадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз калажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачароқ қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ.

...Мамлакатимиз келажаги учун Олий Мажлиснинг IX сессиясида қабул қилинган «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури»нинг амалга оширилиши жуда ҳам муҳим аҳамиятга эга.

...Юқори малакали педагог кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашга алоҳида эътибор бериш лозим. Кадрлар тайёрлашнинг сифати, эркин фикрловчи шахс - фуқарони камол топтиришга эртага синф хоналар ва аудиторияларда кимлар дарс ва сабоқ беришига боғлиқ».

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришиш, жумладан юқори малакали кадрлар тайёрлашда миллий дастурнинг ўрни ва аҳамияти беқиёсдир.

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида мустақил ишлашга қодир, рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Бу мақсадга эришиш учун, шунингдек Республикамиз Президенти айтгани каби «мамлакатимизнинг бой илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш» учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши,

каерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Мавзунинг долзарблиги.

Аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий ва аралаш масалалар қўйиш ва ўрганиш мумкин Буларнинг энг соддалари соҳанинг эллиптик қисмида Дирихле, Нейман ва Дирихле-Найман масалалари, соҳанинг гиперболик қисмида Коши, Коши – Гурса ва Дарбу масласи, аралаш соҳада – эса Трикоми ва Геллерстед масалалари бўлиб, кейинги йилларда нолокал масалалар ҳам ўрганила бошланди. Нолокал масалаларда берилган шарт номаълум функция ёки ҳосилаларининг қаралаётган соҳа чегарасидаги қийматини соҳа ички нуқталаридаги қийматлари билан боғлайди. Ҳозирги кунда бошқа типдаги тенгламалар учун ҳам бундай масалалар жадал ўрганилмоқда.

Мавзунинг ўрганилганлик даражаси.

Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегараланмаган соҳада Трикоми, Геллерстед ва нолокал силжишли ҳамда Бицадзе-Самарский типдаги нолокал масалалар яхши ўрганилган. Бу йўналиш бўйича чегараланмаган соҳада сингуляр коэффициентга эга бўлган тенгламалар учун нолокал масалаларни ечимини топиш кам ўрганилган.

Тадқиқотнинг мақсади.

Диссертацияда кўзда тутилган асосий мақсад чегараланмаган соҳада аралаш типдаги битта сингуляр коэффициентли тенглама учун нолокал шартли масалаларни ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифаси.

Аралаш типдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун чегараланмаган соҳада баъзи нолокал масалаларнинг регуляр ечимга эга эканлигини исботлаш.

Илмий янгилиги.

Диссертацияда олинган илмий натижаларнинг асосий қисми янги. Унда аралаш типдаги сингуляр коэффицентли тенгламалар учун чегараланмаган соҳада нолокал шартли масалаларни ечимини ягоналиги ва мавжудлиги баён қилинган.

Тадқиқот усуллари.

Қўйилган масалалар ечимини ягоналиги экстремум принципи усули ёрдамида, мавжудлигини кўрсатишда эса-Грин функцияси усули ва интеграл тенгламалар усулидан фойдаланилган.

Илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосан назарий аҳамиятга эга. Лекин улар аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал масалалар назариясининг янада ривожлантиришда ва бакалавриятнинг «математика» йўналиши талабалари учун махсус курслар ўқишда фойдаланилиши мумкин.

Тадқиқотнинг апробацияси.

Олинган илмий натижалар ФарДУ қошидаги «Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик йўналишлар» илмий семинарида маъруза қилинган. Диссертация мавзуси бўйича 2 та илмий мақола эълон қилинган (рўйхат илова қилинади).

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.

Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, боблар параграфларга бўлинган. Диссертация 56 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ МАЗМУНИ:

Диссертациянинг кириш қисмида тадқиқот мавзусининг долзарблиги ва унинг ўрганилганлик даражаси батафсил баён қилиниб, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари кўрсатиб ўтилган. Бундан ташқари олинган натижаларнинг илмий янгилиги ҳамда тадқиқот усуллари ҳақида ҳам маълумот берилиб, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти,

уларнинг апробацияси ҳамда диссертациянинг тузилиши ва ҳажми баён қилинган.

Биринчи бобда эллиптик типдаги ушбу

$$L_{\beta}(u) = U_{xx} + U_{yy} + \frac{2\beta}{y}U_y = 0 \quad 0 < 2\beta < 1 \quad (1.1)$$

тенглама учун қўйилган чегаравий масалаларнинг ечими топилган.

1.1-§ да асосий тушунчалар ҳақида маълумот берилган. 1.2-§ да (1.1) тенглама учун эллиптик соҳада Дирихле, Дирихле –Нейман, Нейман-Дирихле ва умумлашган Нейман масалалари қўйилган ва унинг ечими ягоналиги исботланган. 1.3-§ да (1.1) тенглама учун $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ соҳада Дирихле, Дирихле –Нейман, Нейман- Дирихле масалалари ечимининг мавжудлиги асосланган ва, Нейман-Дирихле масаласи мисолида эллиптик соҳадан асосий муносабат олинган.

Иккинчи бобда

$$L_{\beta}(u) = u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad 0 < 2\beta < 1 \quad (2.1)$$

тенгламалар учун чегараланмаган характеристик бурчакларда Коши масаласи ўрганилган.

2.1-§ да асосий тушунчалар ҳақида маълумот берилган. 2.2-§ да (2.1) тенглама учун биринчи чегараланмаган характеристик бурчакда Коши масаласи ечими топилган. 2.3-§ да (2.1) тенглама учун иккинчи чегараланмаган характеристик бурчакда Коши масаласи ечими топилган.

2.4 -§ да юқорида кўрсатилган биринчи ва иккинчи чегараланмаган характеристик бурчакда Коши масаласи ечимидан фойдаланиб, гиперболик соҳадан асосий муносабат олинган.

Учинчи бобда битта сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун чегараланмаган $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$ соҳада нолокал масала қуйилган ва ўрганилган.

3.1-§ да

$$\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{|y|} u_y = 0 \quad 0 < 2\beta < 1$$

тенглама учун масала қўйилиши ва масала ечимининг ягоналиги исботланган.

3.2- § да масала ечимининг мавжудлиги асосланган. Бунда эллиптик соҳадан олинган асосий муносабат билан гиперболик соҳадан олинган асосий муносабат орқали

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y)$$

улаш шартига таянган ҳолда масала ечимининг мавжудлиги кўрсатилган.

Диссертация сўнгида умумий хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхати кўрсатилган.

Сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенгламалар учун чегараланмаган соҳада чегаравий масалалар

Ушбу бобда икки эркин ўзгарувчили иккинчи тартибли эллиптик типдаги сингуляр коэффициентли чизиқли тенгламаларнинг типик вакиллари учун қўйиладиган асосий чегаравий масалалар ўрганилган ва масалалар ечимини аниқловчи формулалар келтириб чиқарилган.

1.1-§. Асосий тушунча ва маълумотлар

1. Бу бобда қуйидаги тушунча ва белгилашлардан фойдаланамиз:

$S(M_0, \rho_0)$ – маркази M_0 нуқтада ва радиуси $\rho_0 (> 0)$ га тенг бўлган айлана;

$\Gamma(M_0, \rho_0)$ – маркази M_0 нуқтада ва радиуси $\rho_0 (> 0)$ га тенг бўлган доира.

Агар алоҳида изоҳлар берилмаган бўлса, Ω билан текисликдаги бир боғламли чекли соҳани, S билан эса унинг чегарасини белгилаймиз;

n - Ω соҳа чегарасига ўтказилган ташқи нормал;

$C^{(k,h)}(I)$ - I да k -нчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга ва k -нчи тартибли ҳосиласи h ($0 < h \leq 1$) кўрсаткич билан Гельдер шартини қаноатлантирувчи функциялар тўплами. Баъзида $C^{(k,h)}(I)$ ўрнига $H(I)$ белги ишлатилади. Бу ерда I - очиқ ёки ёпиқ ёки ярим очиқ интервал.

2. Эллиптик типдаги тенгламалар ечимларининг хоссаларини ўрганишда тенглама қаралаётган соҳа чегарасига қўйиладиган Ляпунов шартлари муҳим аҳамиятга эга.

Таъриф: Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи S чизиқ Ляпунов чизиғи дейилади:

1) S чизикнинг ҳар бир нуқтасида уринма мавжуд, демак, аниқ нормал мавжуд;

2) шундай ўзгармас $d > 0$ сон мавжудки, S чизикнинг ихтиёрий M нуқтасини олиб $S_0(M, \rho_0)$ ($0 < \rho_0 \leq d$) айлана чизсак, M нуқтадан ўтказилган нормалга параллел тўғри чизиклар S чизикнинг S_0 айлана ичидаги қисмини биттадан ортиқ нуқтада кесмайди;

3) шундай α ва a мусбат сонлар мавжудки, S чизикнинг ихтиёрий M ва M_0 нуқталаридан ўтган нормаллар орасидаги бурчак θ ва $r = r(M, M_0)$ масофа

$$\theta \leq a \cdot r^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Одатда 1) - 3) шартлар Ляпунов шартлари дейилади.

Агар S - Ляпунов чизиги бўлса, унинг ихтиёрий нуқтасининг қисқа атрофидаги $\sigma_0(\subset S)$ ёй тенгламасини $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметрик кўринишда ёзиш мумкин ва бунда $x(t), y(t) \in C^{(1,h)}(J)$ бўлади, бу ерда J - $x(t), y(t)$ функциялар аниқланиш соҳасининг σ_0 ёйга мос қисми, $0 < h \leq 1$.

Одатда бундай хоссага эга бўлган чизиклар тўплами $A^{(1,h)}$ билан белгиланади.

Агар бу ерда $x(t), y(t) \in C^{(k,h)}(J)$ бўлса, у ҳолда S чизикни $A^{(k,h)}$ тўпламга тегишли дейилади.

3. Маълумки, коэффициентлари Ω соҳада аниқланган

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (0.1)$$

квази чизикли дифференциал тенглама шу соҳада эллиптик типга тегишли бўлса, у ҳолда Ω соҳанинг барча нуқталарида

$$\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0 \quad (0.2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(0.1) ва (0.2) дан келиб чиқадики, (0.2) тенгсизлик ўринли бўлган нуқталарда, умумийликни чегараламай, $a_{11} > 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Акс ҳолда, (0.1) тенгламанинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, бу тенгсизликни таъминлашимиз мумкин.

Агар бирор M нуқтада (0.2) тенгсизлик бажарилган бўлса, яъни (0.1) тенглама эллиптик типга тегишли бўлса, шу нуқтада

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11} \lambda_1^2 + 2a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + a_{22} \lambda_2^2 \quad (0.3)$$

квадратик форма мусбат аниқланган бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, M_0 нуқтада $a_{11} > 0$ эканлигини инобатга олиб, бу нуқтада (0.3) ни

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\sqrt{a_{11}} \lambda_1 \right)^2 + 2 \left(\sqrt{a_{11}} \lambda_1 \right) \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \lambda_2 \right) + a_{22} \lambda_2^2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгликнинг ўнг томонига $\left(a_{12} \lambda_2 / \sqrt{a_{11}} \right)^2$ ни қўшиб ва айириб, баози ҳисоблашлардан сўнг,

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\sqrt{a_{11}} \lambda_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \lambda_2 \right)^2 + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \lambda_2^2 \quad (0.4)$$

тенгликка эга бўламиз. M_0 нуқтада (2) тенгсизлик ўринли эканлигини инобатга олсак, (0.4) дан $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форманинг мусбат аниқланганлиги келиб чиқади.

Фараз қилайлик, (0.1) тенглама Ω соҳада эллиптик типга тегишли бўлсин. У ҳолда, (0.2) тенгсизлик Ω соҳанинг барча нуқталарида бажарилади. Шунинг учун D соҳада $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форма мусбат

аниқланган бўлади. Агар шундай k_0 ва k_1 мусбат сонлар мавжуд бўлиб, D соҳанинг барча нуқталарида

$$k_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \leq Q(\lambda_1, \lambda_2) \leq k_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) тенгламани Ω соҳада **текис эллиптик тенглама** дейилади.

Бу таърифга асосан $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Лаплас тенгламаси ихтиёрий Ω соҳада текис эллиптик,

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (m > 0), \quad (0.5)$$

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + \alpha y^{m-1} u_y = 0 \quad (m > 0) \quad (0.6)$$

тенгламалар $y > 0$ ярим текислиكنинг ҳар бир нуқтасида эллиптик бўлса ҳам, бу соҳада текис эллиптик эмас.

Агар Ω соҳада $\Delta(x, y) < 0$, унинг чегарасида ёки чегаранинг бирор γ қисмида $\Delta(x, y) = 0$ бўлса, (0.1) тенгламани Ω соҳа чегарасида бузиладиган эллиптик типдаги тенглама дейилади. Агар бундан ташқари γ чизиқда

$$Q(dx, -dy) = a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2$$

мусбат (нолр) бўлса, (0.1) тенгламани Ω соҳа чегарасида бузиладиган биринчи (иккинчи) тур тенглама дейилади. Таърифга асосан (0.5) тенглама юқори ярим текислик чегарасида бузиладиган биринчи тур тенглама бўлса, (0.6) - чегарада бузиладиган иккинчи тур тенгламадир.

4. Агар Ω соҳада аниқланган $u(x, y)$ функция шу соҳада татқиқ қилинаётган дифференциал тенгламада иштирок этаётган ҳосилаларга эга бўлиб, Ω да уни қаноатлантирса, $u(x, y)$ ни мазкур тенгламанинг

Ω соҳадаги регуляр ечими дейилади. Эллиптик типдаги дифференциал тенгламаларнинг регуляр ечимидан ташқари умумлашган ечими деган тушунча ҳам мавжу.

5. Фараз қилайлик, Ω соҳада эллиптик типга тегишли (0.1) дифференциал тенглама берилган бўлсин. Ω соҳа диаметрини R , ихтиёрий (x, y) ва (ξ, η) нуқталари орасидаги масофани r билан белгилайлик.

Агар $g(x, y; \xi, \eta)$ функция (x, y) ва (ξ, η) нуқталарнинг функцияси сифатида $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ да аниқланган ва иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб,

а) x, y ўзгарувчиларга нисбатан Ω соҳанинг (ξ, η) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида (0.1) тенгламанинг регуляр ечими;

б) (ξ, η) нуқтанинг кичик атрофида

$$g = O\left(\ln \frac{2R}{r}\right), \quad g_x = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad g_y = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

муносабатларни қаноатлантирса, y ҳолда уни (0.1) дифференциал тенгламанинг фундаментал ёки сингуляр ечими дейилади.

Эллиптик типга тегишли чизиқли

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

тенгламанинг коэффициентлари $C^1(\Omega \cup S)$ синфга тегишли бўлса, унинг фундаментал ечими ҳеч бўлмаганда кичик Ω соҳалар учун мавжуд бўлади.

Хусусий ҳолда, Лаплас тенгламаси учун фундаментал ечим мавжуд бўлиб, y

$$q_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

кўринишга эга.

Лаплас тенгламаси ва унга қўйилган масалаларни ўрганишда $q_0(\xi, \eta; x, y)$ функция қандай рол ўйнаган бўлса, эллиптик типга тегишли дифференциал тенглама учун унинг фундаментал ечими ҳам шундай вазифани бажаради.

6. Ω соҳада эллиптик типга тегишли бўлган ушбу

$$L(u) \equiv a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_{13}u_x + a_{23}u_y + a_{33}u = f \quad (0.9)$$

кўринишдаги чизикли тенгламалар учун (бу ерда a_{ij} ва f - x, y ўзгарувчиларнинг Ω соҳада аниқланган функция-лари) қуйидаги принциплар ўринли.

Экстремум принципи. Агар Ω соҳанинг барча нуқталарида

$$a_{33} < 0, \quad f \leq 0 \quad (f \geq 0)$$

ёки

$$a_{33} \leq 0, \quad f < 0 \quad (f > 0)$$

бўлса, (0.9) тенгламанинг ихтиёрий регуляр ечими D соҳанинг ҳеч бир нуқтасида манфий нисбий минимум ва мусбат нисбий максимумга эришмайди.

Хопф принципи. Ω соҳада (9) тенгламанинг коэффицентлари чегараланган, $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форманинг дискриминанти мусбат қуйи чегарага эга ва

$$a_{33} \leq 0, \quad f \leq 0 \quad (f \geq 0)$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин.

У ҳолда, агар ихтиёрий $M_0 \in \Omega$ нуқтанинг

$$u(M) \geq u(M_0) \quad [u(M) \leq u(M_0)]$$

тенгсизлик бажарилувчи ихтиёрий D_0 атрофида $u \neq const$ бўлса, (0.9) тенгламанинг $u(x, y)$ регуляр ечими Ω соҳанинг ҳеч бир M_0 нуктасида манфий нисбий минимумга (мусбат нисбий максимумга) эришмайди.

Хопф принциpidан қуйидаги натижа келиб чиқади: $u(x, y)$ функция D соҳада $L(u) = 0$ тенгламанинг ўзгармас сондан фарқли ва $C(D \cup S)$ синфга тегишли регуляр ечими бўлиб, $a_{33} \leq 0$ шарт бажарилса, D соҳада

$$|u| < \max_S |u|$$

тенгсизлик, агар $a_{33} = 0$ шарт бажарилса, D соҳада

$$\min_S u < u < \max_S u$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Зарембо-Жиро принципи. D соҳада (0.9) тенглама коэффициентлари ва озод ҳади учун Хопф принципи шартлари бажарилган, $u(x, y) \neq const$ функция (0.9) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими бўлиб, $C(D \cup S)$ синфга тегишли ва S чизиқ эса $A^{(2,0)}$ тўпламга тегишли бўлсин.

Агар $\min_S u \leq 0$ $\left(\max_S u \geq 0 \right)$ бўлиб, $M_0 \in S$ нуктада $u(x, y)$ функция ўзининг минимуми (максимуми)га эришса, у ҳолда M_0 нуктадан чиқувчи ва $\cos(l, n) < 0$ шартни қаноатлантирувчи ҳар бир l йўналиш учун

$$\frac{du}{dl} > 0 \left(\frac{du}{dl} < 0 \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу принцип Лаплас тенгламаси учун Заремба ва (0.9) кўринишдаги тенгламалар учун Жиро томонидан исботланган бўлиб, унинг тасдиғи S - Ляпунов чизиғи бўлганда ҳам ўз кучида қолади.

1.2-§. Масаланинг қўйилиши ва улар ечимларининг ягоналиги.

$$\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty; 0 < y < +\infty\}$$

соҳада ушбу

$$L_\beta(u) = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y = 0 \quad 0 < 2\beta < 1 \quad (1.1)$$

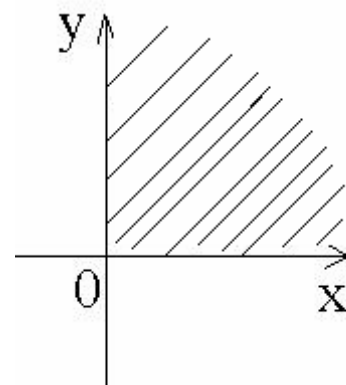
тенгламани қараймиз. Бу ерда $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < 2\beta < 1$.

Ω^+ соҳада (1.1) тенглама эллиптик типга тегишли бўлиб, $y = 0$ чизиқда тенгламанинг коэффиценти сингуляр махсусликка эга.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$J_1 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\},$$

$$J_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < +\infty\}.$$



Агар бирор Ω соҳада аниқланган $u(x, y)$ функция шу соҳада тадқиқ қилинаётган дифференциал тенгламада иштирок этаётган ҳосилаларга эга бўлиб, Ω да уни қаноатлантирса, $u(x, y)$ га мазкур тенгламанинг Ω соҳадаги регуляр ечими дейилади.

Ω^+ соҳада (1.1) тенглама учун қуйидаги чегаравий масалаларни қўйиш ва тадқиқ этиш мумкин.

1. Дрихле масаласи (D масала).

(1.1) тенгламанинг Ω^+ соҳада регуляр, $\Omega^+ \cup J_1 \cup J_2$ соҳада узлуксиз ва

$$\lim_{R \rightarrow \infty} U(x, y) = 0 \quad R^2 = x^2 + y^2 \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{J_1}, \quad (1.3)$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad y \in \overline{J_2} \quad (1.4)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $\tau_1(x)$, $\tau_2(y)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\tau_1(0) = \tau_2(0)$.

1-теорема. (1.1) тенглама учун Дирихле масаласининг ечими биттадан ортиқ эмас.

Исбот. Теоремани исботлаш учун бу масала ечимини иккита яъни u_1 ва u_2 бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, $u = u_1 - u_2$ функцияга нисбатан бир жинсли Дирихле масаласига эга бўламиз.

$$C_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2, x > 0, y < 0\}$$

чорак айлана билан Ω^+ соҳанинг чегараланган қисмини Ω_R^+ билан белгилаймиз. Чегараланган Ω_R^+ соҳада (1.1) тенглама эллиптик типга тегишли бўлгани учун, эллиптик типдаги тенгламалар учун экстремум принцинга [8] асосан $u(x, y) \neq \text{const}$ функция ўзининг экстримал қийматларига соҳанинг чегарасида эришади. (1.3), (1.4) – бир жинсли чегаравий шартлар ва Хопф принцинга [8] асосан $|u| \leq \max_{C_R} |u|$ тенгсизлик

ўринли бўлади. Бунда $R \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак Ω_R^+ соҳа Ω^+ соҳага, (1.2) шартга асосан эса $u \equiv 0$, яъни $u_1 \equiv u_2$ эканлиги келиб чиқади. Демак Дирихле масаласи ечими мавжуд бўлса у ягонадир.

2. Нейман-Дирихле масаласи. (1.1) тенгламанинг Ω^+ соҳада регуляр, $C^1(\Omega^+ \cup J_1)$ синфга тегишли ва (1.2), (1.4) шартларни ҳамда,

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y) = v_1(x), \quad x \in J_1, \quad (1.5)$$

шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $v_1(x)$ ва $\tau_2(y)$ - берилган функциялар.

2-теорема. Агар (1.1) тенглама учун Нейман-Дирихле масаласининг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Теоремани исботлаш учун бир жинсли Нейман – Дирихле масаласи ечими $\Omega^+ \cup J_1 \cup J_2$ да айнан нолга тенглигини исботлаш етарли.

$u(x, y)$ функция бир жинсли Нейман-Дирихле масаласининг ечими бўлсин. Унинг маркази координаталар бошида радиуси R га тенг бўлган чорак айлана C_R билан чегараланган Ω_R^+ чекли соҳада қараймиз.

Маълумки, [22] агар $u(x, y)$ функция ўзининг энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматига $x_0 \in (0, R)$ нуқтада эришса ва u нинг C_R даги қиймати $u(x_0, 0)$ дан кичик (катта) бўлса, у ҳолда

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x_0, y) < 0 \quad (> 0) \quad (1.6)$$

бўлади.

Бир жинсли $(\tau_2(y) \equiv 0, \nu_1(x) \equiv 0)$, (1.4) ва (1.5) шартлар ҳамда (1.6) тенгсизликдан $u(x, y)$ функция ўзининг энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматини $OB = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < R\}$ ва $OA = \{(x, y) : 0 < x < R, y = 0\}$ кесмаларда эриша олмайди.

У ҳолда, Хопф принципига асосан, $\Omega_R^+ \cup OA \cup OB$ соҳада $|u| \leq \max_{C_R} |u|$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу тенгсизликдан ва (1.2) шартга асосан $u \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади.

3. Дирихле-Нейман масаласи. (1.1) тенгламанинг Ω^+ соҳада регуляр, $C^1(\Omega^+ \cup J_2)$ синфга тегишли ва (1.2), (1.3) шартларни ҳамда,

$$u_y(0, y) = \nu_2(y), \quad y \in J_2, \quad (1.7)$$

шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $\tau_1(x)$, $v_2(y)$ - берилган функциялар.

3-теорема. Агар (1.1) тенглама учун Дирихле-Нейман масаласининг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Бу теорема 2-теорема исботига ўхшаш исботланади.

4. Умумлашган Нейман масаласи (N-масала). (1.1)

тенгламанинг Ω^+ соҳада регуляр, $C^1(\Omega^+ \cup J_1 \cup J_2)$ синфга тегишли ва (1.2), (1.5) ва (1.7) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $v_1(x)$ ва $v_2(x)$ - берилган функциялар.

Бу теорема исботи юқоридаги каби Хопф ва Заремба-Жиро [8] принциpidан келиб чиқади.

Изоҳ. Юқоридаги қўйилган масалалар ечимлари ягоналигини энергия интеграллари усули билан ҳам исботлаш мумкин. Бунда номаълум функциянинг чексизликда нолга интилиш тартиби муҳим рол ўйнайди.

1.3-§. Масала ечимларининг мавжудлиги ва эллиптик соҳада олинган асосий муносабатлар.

(1.1) тенглама учун қўйилган Нейман-Дирихле масаласи ечимини мавжудлигини исботлаш учун Грин функцияси усулидан фойдаланамиз.

Таъриф: Нейман-Дирихле масаласининг Грин функцияси деб, куйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1(\xi, \eta; x, y)$ функцияга айтилади:

1) $G_1(\xi, \eta; x, y)$ функция (ξ, η) ўзгарувчилар бўйича Ω^+ соҳанинг (x, y) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида $L_\beta(u) = 0$ тенгламанинг регуляр ечимидан иборат;

2) ушбу

$$G(0, \eta; x, y) = 0, \quad 0 \leq \eta < +\infty, \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (1.8)$$

$$\left[\eta^{2\beta} \frac{\partial G_1(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (1.9)$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) Грин функцияси

$$G_1(\xi, \eta; x, y) = q_1(\xi, \eta; x, y) + g_1(\xi, \eta; x, y), \quad (1.10)$$

кўринишга эга, бунда

$$q_1(\xi, \eta; x, y) = k_1 \left(r_1^2 \right)^{-\beta} F(\beta, \beta, 2\beta; 1 - \sigma), \quad (1.11)$$

(1.1) тенгламанинг фундаментал ечими [8]

$$\sigma = \frac{r^2}{\eta^2}, \quad \frac{r^2}{\eta^2} \Bigg\} = (\xi - x)^2 + (\eta \pm y)^2,$$

$F(a, b, c; x)$ -Гауссинг гипергеометрик функцияси,

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} 2^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)};$$

$g_1(\xi, \eta; x, y)$ -эса Ω^+ соҳада (1.1) тенгламанинг x, y ўзгарувчилар бўйича ҳам, ξ, η ўзгарувчилар бўйича ҳам регуляр ечимидир.

Бундай хоссаларга эга бўлган Грин функциясини тузиш, (1.8), (1.9) ва (1.10) тенгликлар ҳамда $q_1(\xi, \eta; x, y)$ фундаментал ечимнинг

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \eta^{2\beta} \frac{\partial q_1(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (1.12)$$

хоссасига асосан, (1.1) тенгламанинг

$$g_1(\xi, \eta; x, y) \Big|_{\xi=0} = -q_1(\xi, \eta; x, y) \Big|_{\xi=0},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \eta^{2\beta} \frac{\partial g_1(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} = 0, \quad (x, y) \in \Omega^+,$$

шартларни қаноатлантирувчи $g_1(\xi, \eta; x, y)$ регуляр ечимни топишга тенг кучлидир.

Чегараланмаган Ω^+ соҳада $g_1(\xi, \eta; x, y) = -q_1(\xi, \eta; -x, y)$ олишимиз мумкин. Бунда Грин функцияси ушбу

$$G_1(\xi, \eta; x, y) = q_1(\xi, \eta; -x, y) - q_1(\xi, \eta; x, y), \quad (1.13)$$

кўринишга эга бўлади.

Бу функцияни Грин функцияси таърифидаги барча шартларни қаноатлантиришини осон текшириш мумкин.

1. $G(\xi, \eta; x, y)$ функция ξ, η ўзгарувчилар бўйича D^+ соҳанинг (x, y) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида (1.1) тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

$$(\xi, \eta) \neq (x, y) \rightarrow L_\beta(G) = 0$$

2.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{2\beta} G_\eta(\xi, \eta; x, y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{2\beta} \frac{\partial q_1(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} - \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{2\beta} \frac{\partial q_1(\xi, \eta; -x, y)}{\partial \eta} = 0$$

фундаментал ечими хоссасидан келиб чақади.

3. $q_1(0, \eta; x, y) = q_1(0, \eta; -x, y)$ бўлганлигидан,

$$G(0, \eta; x, y) = q_1(0, \eta; x, y) - q_1(0, \eta; -x, y) = 0 \text{ лиги келиб чақади.}$$

Демак. $G(\xi, \eta; x, y) = q_1(\xi, \eta; x, y) - q_1(\xi, \eta; -x, y)$ функция масаласининг Ω^+ соҳадаги Грин функцияси бўлади.

Энди масала ечимини топамиз. Фараз қиламиз $u(x, y)$ функция $L_\beta(u) = 0$ тенгламанинг (1.2), (1.4) ва (1.5) шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими бўлсин.

$\Omega_{R, \delta}^+$ билан Ω^+ соҳанинг

$$C_R = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2, x > 0, y > 0\}$$

чорак айлана билан, ҳамда $y = \delta$ (δ - етарлича кичик мусбат сон) тўғри чизиқ билан чегараланган қисмини белгилаймиз.

$\Omega_{R, \delta}^+$ соҳанинг (x, y) нуқтасини марказ қилиб, етарлича кичик $\varepsilon > 0$ радиусли ва $\Omega_{R, \delta}^+$ соҳада ётувчи C_ε айлана чизайлик ва бу чизиқлар билан чегараланган соҳани $\Omega_{R, \delta}^{+, \varepsilon}$ орқали белгилаймиз. Бу соҳада $G_1(\xi, \eta; x, y)$ Грин функцияси $L_\beta(u) = 0$ тенгламанинг регуляр ечимидан иборат бўлади. У ҳолда $\Omega_{R, \delta}^{+, \varepsilon}$ соҳада

$$\eta^{2\beta} [G_1 L_\beta(u) - u L_\beta(G_1)] = \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta^{2\beta} (G_1 u_\xi - u G_{1\xi})] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta^{2\beta} (G_1 u_\eta - u G_{1\eta})]$$

айният ўринли.

Бу айнtimerни $\Omega_{R,\delta}^{+,\varepsilon}$ соҳа бўйича интеграллаб, сўнгра Гаусс-Остроградский [4] формуласини қўллаймиз:

$$\int_{\partial\Omega_{R,\delta}^{+,\varepsilon}} \eta^{2\beta} \left(G_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (1.14)$$

бу ерда $\partial\Omega_{R,\delta}^{+,\varepsilon} = (0, R_1) \cup C_R \cup (\delta, R) \cup C_\varepsilon$ $\Omega_{R,\delta}^{+,\varepsilon}$ соҳанинг чегараси,

$R_1 = \sqrt{R^2 - \delta^2}$, $n - \Omega_{R,\delta}^{+,\varepsilon}$ соҳанинг чегарасига ўтказилган ташқи нормал.

(1.14) тенгликда G_1 функциянинг хоссаларини ва (1.4), (1.5) шартларни эътиборга олиб, $\delta \rightarrow 0$ да қуйидаги тенгликка эга бўламиз.

$$-\int_0^R v_1(\xi) G_1(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_{C_R} \eta^{2\beta} \left(G_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds - \\ - \int_0^R \eta^{2\beta} \tau_2(\eta) \frac{\partial G(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} d\eta + \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} \left(G_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (1.15)$$

Ушбу

$$J_\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} \left(G_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds$$

ва

$$J_R = \int_{C_R} \eta^{2\beta} \left(G_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds$$

белгилашларни киритиб, (1.15) тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз.

$$J_\varepsilon + J_R = \int_0^R v_1(\xi) G_1(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_0^R \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \frac{\partial G_1(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} d\eta, \quad (1.16)$$

ва J_ε, J_R интегралларни алоҳида кўриб чиқамиз.

J_ε интегрални қуйидагича ёзиб оламиз.

$J_\varepsilon = J_{1\varepsilon} - J_{2\varepsilon}$, бу ерда

$$J_{1\varepsilon} = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} G_1 \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

ва

$$J_{2\varepsilon} = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} u \frac{\partial G_1}{\partial n} ds.$$

Фундаментал ечим $q_1(\xi, \eta; x, y)$ ни (x, y) нукта атрофида қуйидагича ёзиш мумкин.

$$q_1(\xi, \eta; x, y) = f_1(\xi, \eta; x, y) \ln r + f_2(\xi, \eta; x, y), \quad (1.17)$$

бу ерда f_1, f_2 - узлуксиз функциялар.

$J_{1\varepsilon}$ ва $J_{2\varepsilon}$ интегралларда $\xi = x + \varepsilon \cos \theta$, $\eta = y + \varepsilon \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ қутб координаталарига ўтиб, (1.17) тенгликдан ҳамда $\frac{\partial u}{\partial n} \in C(C_\varepsilon)$ эканлигидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз.

$$J_{1\varepsilon} = \varepsilon \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f_3 d\theta + \int_0^{2\pi} f_4 d\theta,$$

бу ерда f_3, f_4 - узлуксиз функциялар. Бундан $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{1\varepsilon} = 0$ эканлиги келиб чиқади.

(1.10) формуладан фойдаланиб $J_{2\varepsilon}$ ни қуйидагича ёзиб оламиз.

$$J_{2\varepsilon} = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} u \frac{\partial q_1}{\partial n} ds + \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} u \frac{\partial g_1}{\partial n} ds = J_{21}^\varepsilon + J_{22}^\varepsilon, \quad (1.18)$$

u ва $\frac{\partial g_1}{\partial n}$ функцияларнинг C_ε да узлуксизлигидан $\varepsilon \rightarrow 0$ да

$$J_{21}^\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} u \frac{\partial g_1}{\partial n} ds \rightarrow 0$$

бўлади.

$$J_{21}^\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} \eta^{2\beta} u \frac{\partial q_1}{\partial n} ds \text{ интегралда кутб координаталарига ўтамиз.}$$

Бунда

$$r^2 = \varepsilon^2, \quad r_1^2 = \varepsilon^2 + 4y\varepsilon \sin \theta + 4y^2, \quad \frac{\partial r^2}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \varepsilon} = 2\varepsilon.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ да нолга интиладиган ҳадлардан кейин ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{21}^\varepsilon &= -\frac{\beta}{2} k_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} (y + \varepsilon \cos \theta)^{2\beta} \left[\varepsilon^2 + 4y\varepsilon \sin \theta + 4y^2 \right]^{-\beta} * \\ &* u(x + \varepsilon \cos \theta, y + \varepsilon \sin \theta) F \left(\beta, \beta, 1 + 2\beta; 1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 4y\varepsilon \sin \theta + 4y^2} \right) d\theta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{21}^\varepsilon = -\frac{\beta}{2} 2^{-2\beta} 2\pi F(\beta, \beta, 1 + 2\beta; 1 - 0) u(x, y) = -u(x, y) \end{aligned}$$

Демак,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{2\varepsilon} = -u(x, y)$$

бўлади.

Бундан ва $J_\varepsilon = J_{1\varepsilon} - J_{2\varepsilon}$ тенгликдан $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = u(x, y)$ келиб чиқади.

Энди J_R интегрални кўриб чиқамиз.

$$J_R = J_R^1 - J_R^2$$

бу ерда

$$J_R^1 = \int_{C_R} \eta^{2\beta} G_1(\xi, \eta; x, y) \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

$$J_R^2 = \int_{C_R} \eta^{2\beta} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds$$

$$C_R = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 = R^2, \xi > 0, \eta > 0\}$$

бўлгани учун J_R^1 ва J_R^2 интегралларда $\xi = R \cos \theta$, $\eta = R \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

алмаштириш бажарамиз, у ҳолда $r^2 = O(R^2)$, $r_1^2 = O(R^2)$ ва $\omega = \frac{r^2}{r_1^2} = O(1)$

эканлигидан ва Гауссинг гипергеометрик функциясининг хоссасидан

$$|q_1(\xi, \eta; x, y)| \leq \frac{A_1}{R^{2\beta}}$$

тенгсиз ўринли бўлади, у ҳолда Грин функцияси учун

$$|G_1(\xi, \eta; x, y)| \leq \frac{A_2}{R^{2\beta}}$$

бўлади.

Фараз қиламиз

$$|u| \leq \frac{B_2}{R^\delta}, \delta > 0, \left| \eta^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \leq \frac{B_2}{R^{1-2\beta+\delta}}, \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \leq \frac{B_3}{R^{1+\delta}}, \delta > 0$$

бўлсин, у ҳолда қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади.

$$\left| J_R^1 \right| \leq \frac{C_1}{R^\delta} \text{ ва } \left| J_R^2 \right| \leq \frac{C_2}{R^\delta}, \delta > 0.$$

Бу тенгсизликлардан

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_R = \lim_{R \rightarrow \infty} J_R^1 - \lim_{R \rightarrow \infty} J_R^2 = 0$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб (1.16) тенгликдан $\varepsilon \rightarrow 0$ ва $R \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак

$$u(x, y) = \int_0^\infty v_1(\xi) G_1(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_0^\infty \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \frac{\partial G_1(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} d\eta, \quad (1.19)$$

формулага эга бўламиз. (1.19) формула билан аниқланган $u(x, y)$ функциянинг ҳақиқатдан Нейман-Дирихле масаласининг ечими эканлиги [8], [22] ишдаги усул ёрдамида исботлаш мумкин. Бунда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

5-теорема. Агар $\tau_2(\eta) \in C[0, \infty)$, $v(\xi) \in C(0, +\infty)$ ҳамда етарлича катта ξ ва η лар учун

$$|\tau_2(\eta)| \leq \frac{A}{\eta^{2\beta+\varepsilon}}, \quad |v(\xi)| \leq \frac{B}{\xi^{1-2\beta+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.20)$$

тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда (1.19) формула билан аниқланган $u(x, y)$ функция Нейман-Дирихле масаласи ечими бўлади.

Худди юқоридагилардек мулоҳазаларни юритиб Дирихле ва Дирихле-Нейман масалалари ечимларини топиш мумкин.

Жумладан, Дирихле масаласи ечими қуйидаги кўринишга эга

$$u(x, y) = \int_0^\infty \tau_1(\xi) Q_1(\xi, x, y) d\xi - \int_0^\infty \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \frac{\partial G_2(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} d\eta, \quad (1.21)$$

бу ерда

$$Q_1(\xi, x, y) = \left[\eta^{2\beta} \frac{\partial G_2(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} \right]_{\eta=0},$$

$$G_2(\xi, \eta; x, y) = q_2(\xi, \eta; x, y) - q_2(\xi, \eta; -x, y)$$

Дирихле масаласининг Грин функцияси, $q_2(\xi, \eta; x, y)$ -эса (1.1) тенгламанинг фундаментал ечими бўлиб қуйидаги кўринишга эга;

$$q_2(\xi, \eta; x, y) = k_1 \left(r_1^2 \right)^{-\beta} (1 - \sigma)^{1-2\beta} F(1 - \beta, 1 - \beta, 2 - \beta; 1 - \sigma),$$

$$\left. \sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad r_1^2 \right\} = (\xi - x)^2 + (\eta \pm y)^2, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi} 2^{2\beta} \frac{\Gamma^2(1 - \beta)}{\Gamma(2 - 2\beta)}.$$

Бунда $q_2(\xi, \eta; x, y)$ функция $q_2(\xi, 0; x, y) = 0$ хоссага эга.

Худди шундай Дирихле-Нейман масаласи ечимини топиш мумкин ва у куйидаги кўринишга эга.

$$u(x, y) = \int_0^\infty \tau_1(\xi) Q_2(\xi, x, y) d\xi + \int_0^\infty \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \frac{\partial G_3(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} d\eta, \quad (1.22)$$

бу ерда

$$Q_2(\xi, x, y) = \left[\eta^{2\beta} \frac{\partial G_3(\xi, \eta; x, y)}{\partial \eta} \right]_{\eta=0},$$

$$G_3(\xi, \eta; x, y) = q_2(\xi, \eta; x, y) + q_2(\xi, \eta; -x, y)$$

Нейман-Дирихле масаласининг Грин функцияси.

Умумлашган Нейман масаласи ечими куйидаги кўришга эга:

$$u(x, y) = \int_0^\infty v_1(\xi) G_3(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_0^\infty v_2(\eta) \eta^{2\beta} G_3(0, \eta; x, y) d\eta,$$

бу ерда

$$G_3(\xi, \eta; x, y) = q_1(\xi, \eta; x, y) + q_1(\xi, \eta; -x, y)$$

умумлашган Нейман масаласининг Грин функцияси.

Диссертациянинг III – бобида бизга эллиптик соҳадан олинган асосий муносабат керак бўлади. Шу сабабли фундаментал ечимнинг ва Грин

функциясининг куйидаги хоссасидан фойдаланиб, (1.19) ечимни соддарок кўринишда ёзишга ҳаракат қиламиз.

$$G_1(\xi, 0; x, y) = k_1 \left\{ \left[(\xi - x)^2 + y^2 \right]^{-\beta} - \left[(\xi + x)^2 + y^2 \right]^{-\beta} \right\}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial G_1(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} = 4\beta k_1 x \left(\tilde{r}_1^2 \right)^{-\beta-1} F(1 + \beta, \beta, 2\beta; \tilde{\omega}_0), \quad (1.25)$$

бу ерда $\tilde{r}_1^2 = x^2 + (\eta - y)^2$, $\tilde{r}^2 = x^2 + (\eta + y)^2$, $\tilde{\omega}_0 = 1 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}_1^2}$.

(1.24) ва (1.25) тенгликларни ҳисобга олиб (1.19) формулани куйидагича ёзамиз.

$$\begin{aligned} u(x, y) = & k_1 \int_0^\infty v_1(\xi) \left\{ \left[(\xi - x)^2 + y^2 \right]^{-\beta} - \left[(\xi + x)^2 + y^2 \right]^{-\beta} \right\} d\xi + \\ & + 4k_1 \beta x \int_0^\infty \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \left(\tilde{r}_1^2 \right)^{-\beta-1} F(1 + \beta, \beta, 2\beta; \tilde{\omega}_0) d\eta \end{aligned} \quad (1.26)$$

$y = 0$ чизикда $\tau_1(x)$ ва $v_1(x)$ функциялар орасидаги муносабатни олиш учун (1.26) тенгликда $y \rightarrow 0$ лимитга ўтиб, куйидаги Нейман – Дирихле масаласининг ечимидан олинган асосий муносабатларни ҳосил қиламиз.

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = u(x, 0) = & k_1 \int_0^\infty v_1(\xi) \left[(\xi - x)^{-2\beta} - (\xi + x)^{-2\beta} \right] d\xi + \\ & + 4k_1 \beta x \int_0^\infty \tau_2(\eta) \eta^{2\beta} \left(x^2 + \eta^2 \right)^{-\beta-1} d\eta. \end{aligned} \quad (1.27)$$

II- БОБ

Сингуляр коэффициентга эга бўлган гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи.

Ушбу бобда икки эркин ўзгарувчилик иккинчи тартибли гиперболик типдаги сингуляр коэффициентли тенгламаларнинг типик вакиллари учун Коши масаласи қўрилган ва бу масала ечими учун формулалар топилган.

2.1-§. Асосий тушунча ва маълумотлар

1. Юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли бўлган икки ўзгарувчилик иккинчи тартибли

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.01)$$

дифференциал тенгламани Ω соҳада қарайлик.

Бу ерда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x ва y ўзгарувчиларнинг $\bar{\Omega}$ да аниқланган етарли силлиқ функциялари бўлиб, Ω соҳанинг ҳеч бир нуқтасида бир вақтда нолга тенг бўлмайди, F эса ўз аргументларининг берилган функцияси.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22},$$

$$Q(dx, -dy) = a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2.$$

Маълумки, агар Ω соҳанинг барча нуқталарида $\Delta(x, y) > 0$ бўлса, (2.01) тенглама Ω соҳада гиперболик типга тегишли дейилади.

2. $Q(dx, -dy) = 0$ - (2.01) тенгламанинг характеристик тенгламаси, унинг ечимлари эса (2.01) тенгламанинг характеристикалари дейилади. Агар Ω соҳада $\Delta(x, y) > 0$, яъни (2.01) - Ω соҳада гиперболик типдаги тенглама бўлса, бу тенглама шу соҳада иккита ҳақиқий характеристикалар оиласига эга бўлади.

$Q(dx, -dy) = 0$ тенглама билан аниқланувчи $\{dx, dy\}$ вектор йўналиши, (2.01) тенгламанинг характеристик йўналиши дейилади. Берилган тенглама ўзининг гиперболиклик соҳасида иккита ҳақиқий характеристик йўналишга эга бўлади.

3. Агар Ω соҳада $\Delta(x, y) > 0$ бўлиб, соҳа чегарасининг барча нуқталарида ёки унинг бирор қисмида $\Delta(x, y) = 0$ бўлса, у ҳолда (2.01) ни **чегарада бузиладиган** гиперболик типдаги тенглама дейилади. Соҳа чегарасининг $\Delta(x, y) = 0$ тенглик бажариладиган қисми эса параболик бузилиш чизиғи дейилади.

Фараз қилайлик, (2.01) - чегарада бузиладиган гиперболик типдаги тенглама, γ эса унинг параболик бузилиш чизиғи бўлсин.

Агар γ чизикда $Q(dx, -dy) \neq 0$ ($= 0$) бўлса, (1) ни чегарада бузиладиган биринчи (иккинчи) турдаги тенглама дейилади.

Таърифдан кўринадики, чегарада бузиладиган иккинчи тур тенгламанинг характеристик йўналиши γ чизикда бу чизикнинг уринмаси билан устма-уст тушади, биринчи тур бузиладиган тенглама учун эса улар устма уст тушмайди (чунки γ чизикда $Q(dx, -dy) \neq 0$).

Масалан, $D_1 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y < 0\}$ соҳада

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (2.02)$$

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m > 0, \quad (2.03)$$

$$u_{xx} - (y)^m u_{yy} + \alpha (-y)^{m-1} = 0, \quad 0 < m < 2 \quad (2.04)$$

тенгламаларни қарайлик.

(2.02) тенглама учун $\Delta(x, y) = 1 > 0$. (2.03) ва (2.04) тенгламалар учун эса $\Delta(x, y) = (-y)^m$ бўлиб, D_1 соҳада $\Delta(x, y) > 0$ тенгсизлик ва соҳа чегараси $\gamma_1 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y = 0\}$ да $\Delta(x, y) = 0$ тенглик ўринлидир.

Иккинчи томондан, γ_1 чизикда (3) тенглама учун

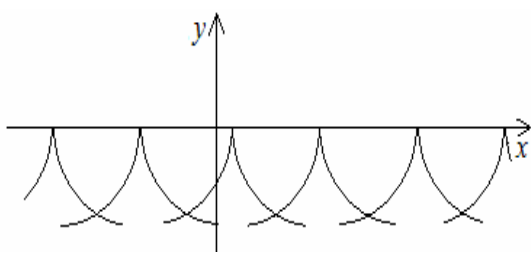
$$Q(dx, -dy) = (-y)^m (dy)^2 - (dx)^2 \neq 0,$$

(4) тенглама учун эса

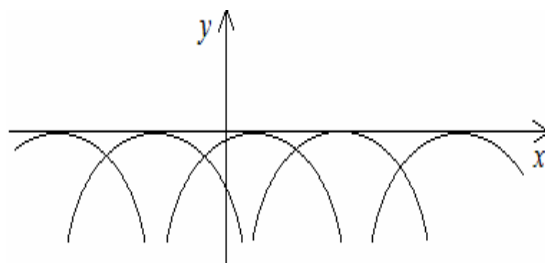
$$Q(dx, -dy) = (dy)^2 - (-y)^m (dx)^2 = 0$$

Демак, юқоридаги Таърифларга асосан, $\overline{D_1}$ да (2.02) - гиперболик, (2.03) ва (2.04) - мос равишда чегарада бузиладиган биринчи ва иккинчи тур гиперболик типдаги тенгламалардир, γ тўғри чизик (2.03) ва (2.04) тенгламалар учун параболик бузилиш чизигидир.

Маълумки, гиперболик типдаги тенгламалар иккита ҳақиқий характеристикалар оиласига эга. (2.03) ва (2.04) тенгламалар мисолидан фойдаланиб хулоса қилиш мумкинки, чегарада бузиладиган биринчи тур гиперболик тенгламалар учун γ бузилиш чизиги характеристика-ларнинг қайтиш нуқталари тўплами, иккинчи тур тенгламалар учун эса γ бузилиш чизиги характеристика-ларнинг уриниш нуқталари тўплами бўлиб, унинг ўзи ҳам характеристика бўлади (1- ва 2-чизмалар).



1-чизма



2-чизма

4. Агар (2.01) тенглама Ω соҳада гиперболик типга тегишли бўлса, бу соҳада иккита $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ характеристикалар оиласига эга бўлиб, $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ - ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган функциялар бўлади. Бунда ўзгарувчиларни $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ тенгликлар орқали алмаштирсак, (2.01) тенглама

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \quad (2.05)$$

кўринишга келади. Агар бу ерда ҳам $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ алмаштириш бажарсак, (2.05) тенглама

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + F_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0 \quad (2.06)$$

кўринишга келади. (2.05) ва (2.06) – гиперболик типдаги тенгламаларнинг каноник кўриниши дейилади.

5. Агар (2.01) - чегарада бузиладиган биричи ва иккинчи тур тенглама бўлса, ўзгарувчиларни алмаштириш билан мос равишда

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + F_3(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad m > 0, \quad (2.07)$$

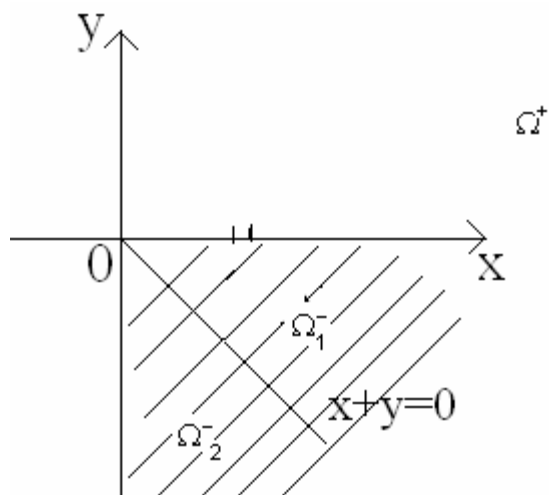
$$u_{xx} - |y|^m u_{yy} + F_4(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad m > 0 \quad (2.08)$$

кўринишга келтириш мумкин. Одатда, (2.07) ва (2.08) мос равишда гиперболик типдаги бузиладиган биринчи ва иккинчи тур тенгламаларнинг каноник кўриниши дейилади.

6. Агар $u(x, y)$ функция Ω соҳада (2.01) тенгламада иштирок этаётган узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, уни шу соҳада қаноатлантирса, $u(x, y)$ ни (2.01) тенгламанинг Ω соҳада регулярь ечими дейилади. Агар $u(x, y)$ - (2.01) тенгламанинг ечими бўлиб, (2.01) нинг қолган ихтиёрий ечими ундан хусусий ҳолда келиб чиқса, $u(x, y)$ ни (2.01) тенгламанинг умумий ечими дейилади. (2.01) кўринишдаги тенгламаларнинг умумий ечими иккита ўзаро боғлиқ бўлмаган функциялар орқали ифодаланади.

7. Гиперболик типдаги тенглама учун қўйилган масала ечимини топишда асосан икки усулдан фойдаланамиз. Улардан биринчиси Риман усули бўлиб, масаланинг ечими тенгламага мос Риман функцияси ёрдамида топилади, иккинчисиди эса тенгламанинг умумий ечимидан масала шартини қаноатлантирувчиси ажратиб олинади.

2.2-§. Биринчи характеристик учбурчакда Коши масаласи.



$$\Omega^- = \{(x, y) : 0 < x < +\infty; -\infty < y < 0\} \setminus \{x + y = 0\}$$

соҳада ушбу

$$L_{\beta}^-(u) = U_{xx} - U_{yy} - \frac{2\beta}{y} U_y = 0, \quad (2.1)$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < 2\beta < 1$.

Ω^- соҳада (2.1) тенглама гиперболик типга тегишли бўлиб, унинг коэффиценти соҳанинг чегараси бўлган $y = 0$ чизикда сингуляр махсусликка эга.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\Omega_1^- = \{(x, y) : 0 < x < +\infty; -\infty < y < 0, x + y > 0\},$$

$$\Omega_2^- = \{(x, y) : 0 < x < +\infty; -\infty < y < 0, x + y < 0\},$$

$$J_1 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}, \quad J_2 = \{(x, y) : x = 0, -\infty < y < 0\}.$$

(2.1) тенгламада $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ характеристик ўзгарувчиларга ўтганимизда у ушбу

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi - \eta} (u_{\xi} - u_{\eta}) = 0, \quad (2.2)$$

тенгламага ўтади. Бу Эйлер-Пуассон-Дарбу тенгламаси бўлиб, унинг $0 < \beta < \frac{1}{2}$ бўлганда умумий ечим топилган [5,21]. У қуйидаги кўринишга эга:

$$u(\xi, \eta) = (\eta - \xi)^{1-2\beta} \int_0^1 \Phi(z) [t(1-t)]^{-\beta} dt + \int_0^1 \psi(z) [t(1-t)]^{\beta-1} dt, \quad (2.3)$$

бу ерда $\Phi(z), \psi(z)$ - икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ихтиёрий функциялар, $z = \xi + (\eta - \xi)t$.

(2.3) формулада эски x, y ўзгарувчиларга қайтиб, (2.1) тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$u(x, y) = (-2y)^{1-2\beta} \int_0^1 \Phi(z) [t(1-t)]^{-\beta} dt + \int_0^1 \psi(z) [t(1-t)]^{\beta-1} dt, \quad (2.4)$$

бу ерда $z = \xi + (\eta - \xi)t = x - y + 2yt = x - y(1 - 2t)$.

Ω_1^- соҳада (2.1) тенглама учун кўриниши ўзгартирилган Коши масаласини қараймиз.

K_1 масала (Коши масаласи). (2.1) тенгламанинг Ω_1^- соҳада қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин.

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{J_1}, \quad (2.5)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = \nu_1(x), \quad x \in J_1 \quad (2.6)$$

бу ерда $\tau_1(x), \nu_1(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

(2.4) умумий ечимдан фойдаланиб, ушбу масала ечимини топамиз.

(2.4) ни (2.5) шартга бўйсундириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \tau_1(x).$$

Худди шундай, (2.4) ни (2.6) шартга қўйиб, $\Phi(x)$ функцияни топамиз.

$$\Phi(x) = 2^{2\beta-1} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} v_1(x).$$

Топилган $\Phi(z)$ ва $\psi(z)$ функцияларни (2.4) га қўйиб, K_1 масала ечимини қуйидаги кўринишини топамиз.

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} (-y)^{1-2\beta} \int_0^1 v_1(z) [t(1-t)]^{-\beta} dt + \\ & + \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau_1(z) [t(1-t)]^{\beta-1} dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Бу ерда $z = x + y(2t-1)$.

(2.7) тенгликда $s = x + y(2t-1)$ алмаштириш бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x, y) = \gamma_1 (-y)^{1-2\beta} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\tau_1(s) ds}{[y^2 - (s-x)^2]^{1-\beta}} + \gamma_2 \int_{x-y}^{x+y} \frac{v_1(s) ds}{[y^2 - (s-x)^2]^{\beta}}, \quad (2.8)$$

$$\text{бу ерда } \gamma_1 = 2^{1-2\beta} \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = 2^{2\beta-1} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

[8], [22] ишдаги усулдан фойдаланиб, қуйидаги теоремани тўғрилигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

2.1-теорема. Агар $\tau_1(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ ва $v_1(x) \in C^2(0, +\infty)$ шартлар бажарилса, у ҳолда (2.8) формула билан аниқланган $u(x, y)$ функция K_1 масаланинг регуляр ечими бўлади.

2.3-§. Иккинчи характеристик учбурчакда Коши масаласи.

Ω_2^- соҳада (2.1) тенглама учун қуйидаги бошланғич шартли Коши масаласини қараймиз.

K_2 масала (Коши масаласи). (2.1) тенгламанинг Ω_2^- соҳада қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин.

$$u(0, y) = \tau_2^*(y), \quad y \in \bar{J}_2^-, \quad (2.9)$$

$$u_x(0, y) = \nu_2^*(y), \quad y \in \bar{J}_2^- \quad (2.10)$$

бу ерда $\tau_2^*(y)$ ва $\nu_2^*(y)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Ушбу масала (2.1) тенгламанинг (2.4) умумий ечимдан фойдаланиб ечадиган бўлсак, номуайид функцияларни топиш учун мураккаб интеграл тенгламалар ҳосил бўлади. Шу сабабли бу ерда бошқа усулни қўлаймиз.

Ушбу $\xi = -y$, $\eta = -x$ алмаштириш ёрдамида Ω_2^- соҳани Ω_1^- соҳага акслантирамиз. Бунда K_2 масала қуйидаги масалага ўтади.

K_2 масала. Ушбу

$$W_{\xi\xi} - W_{\eta\eta} + \frac{2\beta}{\xi} W_{\xi} = 0, \quad (2.11)$$

тенгламани

$$\Omega_1^- = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < +\infty, -\infty < \eta < 0, \xi + \eta > 0\}$$

соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин.

$$w(\xi, 0) = \tau_2^*(-\xi), \quad 0 \leq \xi < +\infty, \quad (2.12)$$

$$w_{\eta}(\xi, 0) = -\nu_2^*(-\xi), \quad 0 < \xi < +\infty, \quad (2.13)$$

бу ерда

$$W(\xi, \eta) = u(-\eta, -\xi) = u(x, y).$$

(2.11) тенгламада $\xi_1 = \eta + \xi$, $\eta_1 = \eta - \xi$ характеристик ўзгарувчиларга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} - \frac{\beta}{\xi_1 - \eta_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} - \frac{\partial W}{\partial \eta_1} \right) = 0, \quad (2.14)$$

Бунда бошланғич (2.12) ва (2.13) шартлар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$W(\xi_1, -\xi_1) = \tau_2^*(-\xi_1), \quad (2.15)$$

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow -\xi_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W}{\partial \eta_1} \right) = -v_2^*(-\xi_1), \quad (2.16)$$

(2.14)-(2.16) масала С.П.Пулькин томонидан Риман функцияси усулида ечилган [13] ва у қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} W(\xi_1, \eta_1) = & \frac{1}{2} \left[H(\xi_1, \xi_1, \eta_1) \tau_2^*(-\xi_1) + H(-\eta_1, \xi_1, \eta_1) \tau_2^*(\eta_1) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{-\eta_1} R(t, \xi_1, \eta_1) \tau_2^*(-t) dt - \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{-\eta_1} H(t, \xi_1, \eta_1) \left[-v_2^*(-t) \right] dt, \end{aligned} \quad (2.17)$$

бу ерда

$$H(t, \xi_1, \eta_1) = \frac{(2t)^{2\beta}}{(t + \xi_1)^\beta (t - \eta_1)^\beta} F(\beta, \beta, 1; \sigma),$$

$$R(t, \xi_1, \eta_1) = \beta \frac{(\xi_1 + \eta_1)(2t)^{2\beta}}{(t + \xi_1)^\beta (t - \eta_1)^{1+\beta}} \left[\frac{2\beta(\xi_1 - \eta_1)t}{(t + \xi_1)(t - \eta_1)} F(1 + \beta, 1 + \beta, 2; \sigma) - \right. \\ \left. - F(a, b, c; \sigma) \right], \quad \sigma = \frac{(t - \xi_1)(t + \eta_1)}{(t + \xi_1)(t - \eta_1)},$$

$F(a, b, c; \sigma)$ -Гауссинг гипергеометрик функцияси [8], [22].

Эски x, y ўзгарувчиларга қайтиб, баъзи алмаштиришлардан сўнг K_2 масала ечими қуйидаги кўринишда бўлади.

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}(-y)^{-\beta} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x-y}^{-x-y} \tau_2^*(-t) t^\beta F(\beta, 1 - \beta, 1; \sigma_0) dt - \\ - \frac{1}{2}(-y)^{-\beta} \int_{x-y}^{-x-y} v_2^*(-t) t^\beta F(\beta, 1 - \beta, 1; \sigma_0) dt, \quad (2.18)$$

$$\text{бу ерда } \sigma_0 = \frac{(t + y)^2 - x^2}{4ty}.$$

(2.18) формула билан берилган $u(x, y)$ функция K_2 масаланинг регуляр ечими бўлиши учун

$$\tau_2^*(y) \in C(-\infty, 0] \cap C^2(-\infty, 0), \quad v_2^*(y) \in C^2(-\infty, 0)$$

бўлиши лозим [8], [22].

2.4-§. Гиперболик соҳадан олинган асосий муносабатлар.

Кейинги бобда бизга $\tau_1(x)$ ва $v_1(x)$ функциялар орасидаги асосий муносабатлар зарур бўлади. Шу сабабли ушбу параграфда уларни келтириб чиқарамиз.

$x + y = 0$ характеристик чизик устида номаълум $u(x, y)$ функция узлуксиз бўлгани учун Ω_1^- ва Ω_2^- соҳаларда олинган K_1 ва K_2 масалалар ечимларини тенглаштирамиз. Бунинг учун мос ҳолда (2.8) ва (2.18) формулалар билан аниқланган K_1 ва K_2 масалалар ечимларида $y = -x$ ни қўямиз.

$$u(x, -x) = \gamma_1 x^{1-2\beta} \int_0^{2x} \frac{\tau_1(t) dt}{[t(2x-t)]^{1-\beta}} - \gamma_2 \int_0^{2x} \frac{v_1(t) dt}{[t(2x-t)]^{\beta}}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2} x^{-\beta} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2x} \tau_2^*(-t) t^{\beta} F(\beta, 1-\beta, 1; \tilde{\sigma}_0) dt + \\ & + \frac{1}{2} x^{-\beta} \int_0^{2x} v_2^*(-t) t^{\beta} F(\beta, 1-\beta, 1; \tilde{\sigma}_0) dt, \end{aligned} \quad (2.20)$$

бу ерда $\tilde{\sigma}_0 = \frac{2x-t}{4x}$.

(2.19) ва (2.20) тенгликларда x ни $\frac{x}{2}$ га алмаштириб иккаласини тенглаштирамиз.

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 2^{2\beta-1} x^{1-2\beta} \int_0^x \tau_1(t) t^{\beta-1} (x-t)^{\beta-1} dt - \gamma_2 \int_0^x v_1(t) t^{-\beta} (x-t)^{-\beta} dt = \\
& = 2^\beta x^{-\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau_2^*(-t) t^\beta F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt + \\
& + 2^{\beta-1} x^{-\beta} \int_0^x v_2^*(-t) t^\beta F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ушбу охирги тенгликни каср тартибли интеграл ёрдамида ёзиб оламиз. Бунда каср тартибли Риман –Лиувил интегралининг куйидаги таърифидан фойдаланамиз [8]

$$I_{0x}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0 \tag{2.22}$$

У ҳолда (2.21) ни куйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 2^{2\beta-1} \Gamma(\beta) x^{1-2\beta} I_{0x}^\beta x^{\beta-1} \tau_1(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) I_{0x}^{1-\beta} x^{-\beta} v_1(x) = \\
& = 2^\beta x^{-\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau_2^*(-t) t^\beta F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt + \\
& + 2^{\beta-1} x^{-\beta} \int_0^x v_2^*(-t) t^\beta F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Бу тенгликдан $\tau_1(x)$ ни топиш учун уни биринчи ҳадни коэффицентига бўлиб, унга куйидаги каср тартибли ҳосилани қўллаймиз.

$$D_{0x}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.24}$$

ва куйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
D_{0x}^{\beta} I_{0x}^{\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) &= \frac{\gamma_2 \Gamma(1-\alpha)}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} 2^{1-2\beta} D_{0x}^{\beta} x^{2\beta-1} I_{0x}^{1-\beta} x^{-\beta} v_1(x) + \\
&+ \frac{2^{1-\beta}}{\gamma_1} D_{0x}^{\beta} \left\{ x^{\beta-1} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau_2^*(-t) t^{\beta} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt \right\} + \\
&+ \frac{2^{-\beta}}{\gamma_1} D_{0x}^{\beta} \left\{ x^{\beta-1} \int_0^x v_2(-t) t^{\beta} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt \right\}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Каср тартибли ҳосила ва интегралларнинг қуйидаги композициялари маълум [8]:

$$D_{0x}^{\beta} I_{0x}^{\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) = x^{\beta-1} \tau_1(x), \tag{2.26}$$

$$D_{0x}^{\beta} x^{2\beta-1} I_{0x}^{1-\beta} x^{\beta} v_1(x) = x^{\beta-1} I_{0x}^{1-2\beta} v_1(x) = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta} v_1(t) dt. \tag{2.27}$$

(2.25) тенгликда қолган иккала

$$\Phi_1(x) = D_{0x}^{\beta} \left\{ x^{\beta-1} \int_0^x v_2^*(-t) t^{\beta} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt \right\}$$

ва

$$\Phi_2(x) = D_{0x}^{\beta} \left\{ x^{\beta-1} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau_2^*(-t) t^{\beta} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{x-t}{2x}\right) dt \right\}$$

композицияларни ҳисоблаймиз.

(2.24) тенгликдан фойдаланиб, $\Phi_1(x)$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-s)^{-\beta} s^{\beta-1} ds \int_0^s v_2^*(-t) t^{\beta} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{s-t}{2s}\right) dt.$$

Дирихле формуласидан [8], [22] фойдаланиб интегрални тартибини ўзгартирамиз.

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x v_2^*(-t) t^{\beta} dt \int_t^x (x-s)^{-\beta} s^{\beta-1} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{s-t}{2s}\right) ds, \tag{2.28}$$

Ички интеграл

$$f(x, t) = \int_t^x (x-s)^{-\beta} s^{\beta-1} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{s-t}{2s}\right) ds,$$

ни хисоблаймиз. Бунинг учун $s = x - (x-t)\xi$ алмаштириш бажариб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$f(x, t) = z^{1-\beta} \int_0^1 \xi^{-\beta} (1-z\xi)^{\beta-1} F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{z(1-\xi)}{2(1-z\xi)}\right) d\xi,$$

бу ерда $z = \frac{x-t}{x}$.

Гипергеометрик функциянинг ушбу катор кўринишидаги таърифидан

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

ва

$$\int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{c-a-1} (1-z\xi)^{-b} d\xi = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z)$$

интеграл кўринишидан [6] фойдаланиб қуйидаги тенгликка эга бўламиз.

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{z^{1-\beta}}{1-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)_n (\beta)_n}{(2-\beta)_n n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n F(1-\beta+n, 1-\beta, 1-\beta+n+1; z) = \\ &= \frac{z^{1-\beta}}{1-\beta} F_1\left(1-\beta, 1-\beta, \beta; 2-\beta; z, \frac{z}{2}\right), \end{aligned}$$

бу ерда $F_1(a, b, b', c; x, y)$ -Абельнинг икки ўзгарувчили гипергеометрик функцияси [8].

Топилган ички интегрални қийматини (2.28) тенгликка қўямиз.

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x v_2^*(-t) t^\beta \left(\frac{x-t}{x}\right)^{1-\beta} F_1\left(1-\beta, 1-\beta, \beta, 2-\beta; \frac{x-t}{x}, \frac{x-t}{2x}\right) dt$$

Бу охирги тенгликда ҳосилани ҳисоблашда ушбу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^a F_1\left(a, b, b', c; x, yx\right) \right] = ax^{a-1} F_1\left(a+1, b, b', c; x, yx\right)$$

ва

$$F_1\left(a, b, b', a; x, yx\right) = (1-x)^{-b} (1-y)^{-b}$$

формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Phi_1(x) = \frac{2^\beta}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-1} \int_0^x v_2^*(-t) t^{2\beta} (x^2 - t^2)^{-\beta} dt. \quad (2.29)$$

Топилган (2.26), (2.27) ва (2.29) тенгликларни (2.25) га қўйиб қуйидаги муносабатни оламиз.

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = & \gamma_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta} v_1(t) dt + \\ & + \gamma_4 \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\beta} t^{2\beta} v_2^*(-t) dt + \Phi_2(x), \quad x \in J_1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{бу ерда } \gamma_3 = \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \gamma_4 = \frac{2^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)},$$

(2.30) тенглик гиперболик соҳадан олинган асосий муносабатни ифодалайди.

III БОБ

Битта сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун чегараланмаган соҳада нолокал масала

Дастлабки тушунчалар. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама текширилаётган соҳанинг бир қисмида эллиптик типга, иккинчи қисмида эса гиперболик типга тегишли бўлса, уни аралаш типга тегишли дейилади; бу қисмлар ўтиш чизиғи билан ажралади, бу чизикда тенглама ёки параболик бузилади, ёки аниқланмаган бўлади.

Аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалани XX асрнинг 20-йилларида биринчи марта италиялик математик Франческо Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

тенглама учун қўйган ва текширган.

Кейинги татқиқотлар Геллерстедт томонидан

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0 \quad (\Gamma)$$

тенгламага қаратилган. Бу тенглама $y = 0$ ўқнинг ихтиёрий қисмини ўз ичига олган соҳада аралаш типга тегишли бўлади, яъни $y > 0$ ярим текисликда эллиптик, $y < 0$ да гиперболик бўлиб, $y = 0$ да эса параболик бузилади.

$m = 0$ бўлганда (Γ) тенглама

$$\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{LB})$$

кўринишга эга бўлади.

Бу тенгламани аралаш типдаги тенгламаларнинг энг содда вакили сифатида ўрганишни академик М.А.Лаврентрев тавсия қилган ва унинг учун турли масалаларни академик А.В.Бицадзе текширган. Шунинг учун ҳам бу тенглама *Лаврентрев-Бицадзе тенгламаси* дейилади.

Юқоридаги биз таъриф берган, шу жумладан, (LB) ва (Г) тенгламалар аралаш типдаги эллиптико-гиперболик тенгламалар деб ҳам аталади. Ҳозирги вақтда бундай аралаш типдаги тенгламалардан ташқари эллиптико-параболик ва параболо-гиперболик тенгламалар ҳам ўрганилади. Бу бобда биз фақат сингуляр коэффицентли эллиптико-гиперболик тенгламалар билан шуғулланамиз.

Ушбу

$$\operatorname{sign} u u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad (3.1)$$

тенгламани $\Omega = \Omega^+ \cup J^+ \cup \Omega^-$ чегараланмаган соҳада қараймиз. Бу $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$, Ω^- эса $y < 0$ ярим текисликнинг $J^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$ ярим тўғри чизик ва (3.1) тенгламанинг $\Gamma = \{(x, y) : x + y = 0, x > 0\}$ характеристикаси билан чегараланган қисми.

Ω соҳада (3.1) аралаш типдаги тенглама бўлиб, Ω^+ соҳада эллиптик, Ω^- соҳада эса гиперболик типга тегишли ва J^+ чизикда тенгламанинг коэффиценти сингуляр махсусликка эга.

3.1-§. Масаланинг қўйилиши. Масала ечимининг ягоналиги.

Ω соҳада (3.1) тенглама учун қуйидаги нолокал масалани қараймиз.

BS-масала. (3.1) тенгламанинг $\Omega \setminus J^+$ соҳада регуляр, $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup J^+)$ синфга тегишли ва тип i ўзгариш чизигида

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y), \quad (3.2)$$

улаш шартига бўйсунувчи, ҳамда ушбу

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad (3.3)$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y < +\infty, \quad (3.4)$$

$$D_{0x}^\beta x^{2\beta-1} u[\theta_0(x)] = au(x, 0) + b, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3.5)$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда $\varphi(y)$ - берилган узлуксиз функция бўлиб, $\varphi(y) \in C[0, +\infty]$, $a, b \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2} \right) - \quad (3.1) \quad \text{тенгламанинг} \quad (x, 0) \in J^+ \quad \text{нуқтадан} \quad \text{чиқувчи}$$

характеристикасининг Γ характеристика билан кесишиш нуқтаси.

$\theta_0(x) \in \Gamma$ ва $(x, 0) \in J^+$ бўлгани учун (3.5) шарт масала ечимининг чегаравий ва ички нуқталаридаги қийматларини боғловчи муносабат, яъни Бицадзе-Самарский типдаги шартдир.

Бу шартдан $a \equiv 0$ бўлганда (3.1) тенглама учун Трикоми масаласи келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $u(x, y)$ - BS масаласи ечими бўлиб,

$$u(x, 0) = \tau_1(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty),$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = \nu_1(x) \in C^2(0, +\infty)$$

ва $\nu_1(x)$ функция $x \rightarrow 0$ да $1 - 2\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилсин,

ҳамда етарлича катта x лар учун $|\nu_1(x)| < Ax^{2\beta-1-\varepsilon}$ тенгсизликни

қаноатлантирсин. У ҳолда Ω^- соҳада $u(x, y)$ функцияни (3.1) тенглама учун

Коши масаласининг ечимини сифатида (2.8) кўринишида ёзиш мумкин. (2.8) формула ёрдамида $u[\theta_0(x)]$ ни ҳисоблаймиз ва (3.5) шартга қўямиз. Натижада

$$\gamma_2 \Gamma(1-\beta) I_{0x}^{1-2\beta} v_1(x) = a_1 \tau_1(x) - x^{1-\beta} b, \quad 0 < x < +\infty$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $I_{0x}^{1-2\beta}$ (2.22) тенглик билан аниқланган каср тартибли интеграл $a_1 = \gamma_1 \Gamma(\beta) - a x^{1-\beta}$.

Бу охирги тенгликнинг иккала томонига $D_{0x}^{1-2\beta}$ каср тартибли ҳосилани тадбиқ қилиб, $\tau_1(x)$ ва $v_1(x)$ орасидаги биринчи асосий функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\gamma_2 \Gamma(1-\beta) v_1(x) = D_{0x}^{1-2\beta} a_1 \tau_1(x) - b \frac{(1+\beta) \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(2+\beta)} x^\beta, \quad (3.6)$$

3.1-теорема. BS-масала биттадан ортиқ ечимга эга эмас.

Исбот. Фараз қилайлик, бир жинсли BS масаланинг $u(x, y)$ ечими мавжуд, $u(x, 0) = \tau_1(x)$, $\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y = v_1(x)$ белгилашларни киритайлик. У ҳолда (3.2) ва (3.6) $u(x, 0) = 0$, $0 \leq y < +\infty$ ва $b = 0$ тенгликлар ўринли. Булар асосида $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$ эканлигини исботлаймиз.

Тескаридан фараз қилайлик, яъни $u(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$. У ҳолда $R > 0$ сон топиладики, $C_R: x^2 + y^2 = R^2$, $x > 0$, $y > 0$ чорак айлана, ҳамда Γ ва $x - y = R$ характеристикалар билан чегараланган Ω_R соҳада $\max |u(x, y)| > 0$ бўлади. $b = 0$ бўлгани учун каср тартибли ҳосила учун экстермум принципага [8] асосан $u(x, y)$ функция $\Omega_R^- = \Omega_R \cap \{y < 0\}$ да мусбат максимум ва манфий минимумга $\bar{J}_R^+ = \{(x, y): 0 \leq x \leq R, y = 0\}$ кесмада

эришади. Эллиптик типдаги тенглама учун экстремум принципага [8] асосан $u(x, y)$ функция $\Omega_R^+ = \Omega_R \cap \{y > 0\}$ соҳада мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди. Бу қийматлар J_R^+ кесмада ҳам эришмайди. Акс ҳолда $u(x, y)$ мусбат максимуми (манфий минимуми) эришилган $(x_0, 0) \in J_R^+$ нуқтада, каср тартибли дифференциал операторлар учун экстермум принципага асосан асосан, (3.6) тенгликдан $v_1(x_0) > 0$ (< 0) келиб чиқади. Бу эса Заремба – Жиро принципага [8] асосан Ω_R^+ соҳадан келиб чиқади. $v_1(x_0) < 0$ (> 0) тенгсизликка зиддир.

Демак, $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_R)$ функция $\bar{\Omega}_R$ да мусбат максимумга ва манфий минимумга C_R да эришади. У ҳолда $\bar{\Omega}_R$ да $0 \leq |u(x, y)| \leq \max_{C_R} |u(x, y)|$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Худди шундай $d (> R)$ сон олиб, юқоридаги мулохазаларни такрорласак $\bar{\Omega}_R$ да $0 \leq |u(x, y)| \leq \max_{C_d} |u(x, y)|$ тенгсизликка эга бўламиз.

$\bar{\Omega}_R \subset \bar{\Omega}_d$ ва $u(x, y) \neq \text{const}$ бўлганлиги учун юқоридагилардан

$$0 < \max_{C_R} |u(x, y)| \leq \max_{C_d} |u(x, y)|$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса масаланинг (3.2) шартига зиддир.

Демак, фаразимиз нотўғри, яъни $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

3.2-§. Масала ечимининг мавжудлиги.

BS-масаланинг $u(x, y)$ ечими мавжуд деб,

$$\tau_1(x) = u(x, 0), \quad v_1(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y), \quad x \in (0, +\infty)$$

белгилашларни киритиб, $\tau_1(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $v_1(x) \in C^2(0, +\infty)$ ва $v_1(x)$ $x \rightarrow 0$ да $1 - 2\beta$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин деб фараз қилалик. У ҳолда $u(x, y)$ функция Ω_1^- соҳада (2.8) формула билан, Ω^+ соҳада эса (3.1) тенгламанинг (3.3), (3.4) ва $\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y) = v_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$ шартларни қаноатлантирувчи Нейман-Дирихле масаласининг регуляр ечими сифатида (1.19) формула билан аниқланади. Бунда $\tau_2(y) = \varphi(y)$ бўлади.

(1.19) да $y \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб,

$$\tau_1(x) = k_1 \int_0^\infty v_1(\xi) \left[(\xi - x)^{-2\beta} - (\xi + x)^{-2\beta} \right] d\xi + \varphi_1(x), \quad (3.7)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$\varphi_1(x) = 4k_1\beta x \int_0^\infty \varphi(\eta) \eta^{2\beta} (x^2 + \eta^2)^{-\beta-1} d\eta, \quad 0 < x < +\infty.$$

(3.7) ифода BS масаланинг $u(x, y)$ ечим (3.3) ва (3.4) шартларни қаноатлантиришига асосланиб олинган асосий функционал муносабатдир.

(3.6) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \Gamma(2\beta) v_1(x) - a_1 \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau_1(t) dt - \\
& - a_1 \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau_1(t) dt + \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{a_1(x) - a_1(t)}{(x-t)^{1-2\beta}} \tau_1(t) dt = \\
& = b \frac{(1+\beta) \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(2+\beta)} x^\beta, \quad 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8) тенгликда $\tau_1(x)$ ўрнига (3.7) ни ўнг томонини қўямиз.

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \Gamma(2\beta) v_1(x) - k_1 a_1 \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \left\{ \int_0^\infty v_1(\xi) \left[|\xi-t|^{-2\beta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (\xi+t)^{-2\beta} \right] d\xi \right\} dt + \int_0^\infty v_1(\xi) k_1(\xi, x) d\xi = f(x), \quad 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
& k_1(\xi, x) = -k_1 a_1(x) \int_0^x (x-\xi)^{2\beta-1} \left[|t-\xi|^{-2\beta} - (t+\xi)^{-2\beta} \right] d\xi + \\
& + k_1 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{a_1(x) - a_1(t)}{(x-t)^{1-2\beta}} \left[|t-\xi|^{-2\beta} - (t+\xi)^{-2\beta} \right] d\xi,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& f(x) = a_1(x) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi_1(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} + a_1(x) \int_0^x \frac{\varphi_1(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} - \\
& - \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{a_1(x) - a_1(t)}{(x-t)^{1-2\beta}} \varphi_1(t) dt - b \frac{(1+\beta) \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(2+\beta)} x^\beta, \quad 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

[8, 22] ишдаги мулоҳазаларни такрорлаб,

$$\Gamma(2\beta)D_{0x}^{1-2\beta}\int_0^\infty v_1(\xi)|\xi-x|^{-2\beta}d\xi=\pi tg\beta\pi v_1(x)+\int_0^\infty\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{v_1(\xi)d\xi}{\xi-x}, \quad (3.12)$$

$$\Gamma(2\beta)D_{0x}^{1-2\beta}\int_0^\infty v_1(\xi)(\xi+x)^{-2\beta}d\xi=\int_0^\infty\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{v_1(\xi)d\xi}{\xi+x}, \quad (3.13)$$

тенгликларни тенглигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(3.12) ва (3.13) тенгликларни эътиборга олиб, (3.9) тенгликдан $v_1(x)$ га нисбатан ушбу

$$A(x)v_1(x)+\frac{B(x)}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)v_1(t)dt+ \\ +\int_0^\infty v_1(t)k_1(t,x)dt=f(x), \quad 0<x<+\infty, \quad (3.14)$$

сингуляр интеграл тенгламани оламиз. Бу ерда

$$A(x)=\gamma_2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)+k_1\pi tg(\beta\pi)a_1(x), \quad B(x)=\pi k_1a_1(x),$$

$k_1(t,x)$ ва $f(x)$ функциялар мос ҳолда (3.10) ва (3.11) тенгликлар орқали аниқланади.

Берилган функцияларга қўйилган шартлардан фойдаланиб, $f(x)\in C^{(0,\delta)}(0,+\infty)$, $\delta>\beta$ ва $x\rightarrow 0$ да чегараланганлигини, ҳамда $x\rightarrow\infty$ да $1-2\beta$ дан катта тартибда нолга интилиши келиб чиқади, $k_1(t,x)$ функция эса $[0,+\infty)\cap[0,+\infty)$ соҳанинг $x=t$ чизигида логарифмик махсусликка эга, қолган нуқталарда эса узлуксизлигини кўрсатиш қийинчилик туғдирмайди. (3.14) тенгликдан

$$\xi=\frac{1}{1+t^2}, \quad \eta=\frac{1}{1+x^2}, \quad (3.15)$$

алмаштириш бажариб ва сўнгра

$$\rho(\eta)=x^{1-2\beta}\eta^{-1}v_1(x), \quad F(\eta)=x^{1-2\beta}\eta^{-1}f(x), \quad (3.16)$$

Белгилашни киритсак, ушбу

$$\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) dt = \frac{2tdt}{t^2 - x^2} = \frac{\eta}{\xi} \frac{d\xi}{\xi - \eta}$$

тенгликка асосан

$$A(\eta)\rho(\eta) - \frac{B(\eta)}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi - \eta} + \int_0^1 K(\xi, \eta)\rho(\xi)d\xi = F(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \quad (3.17)$$

сингуляр интеграл тенгламага эга бўламиз.

$$A^2(\eta) + B^2(\eta) = [\gamma_2 \Gamma(1-\beta) \Gamma(2\beta) + k_1 \pi t g(\pi\beta) a_1(\eta)]^2 + \\ + \pi^2 k_1^2 a_1^2(\eta) \neq 0, \quad 0 < \eta < 1$$

бўлгани учун (3.14) нормал типдаги сингуляр интеграл тенгламадир. Унинг индекси $\rho(\eta) \in C^{(0,\delta)}(0,1)$, $(\delta > \beta)$ функцияларнинг $h(0)$ синфида, яъни $\eta \rightarrow 0$ да чегараланган ва $\eta \rightarrow 1$ да чегаралмаган функциялар синфида нолга тенг.

(3.17) тенгламани ечимига $h(0)$ синфда Карлеман-Векоа усулини қўллаб, унга (ечимга эга бўлиш маъносида) эквивалент бўлган Фредгольм типдаги иккинчи тур интеграл тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг ягона ечимга эга эканлиги BS масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади. Шу билан BS масала ечимининг мавжудлиги исботланди.

Хулоса

Мазкур магистрлик диссертацияси битта сингуляр коэффицентга эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегараланмаган соҳада нолокал масала ечимини ягоналиги ва мавжудлигини топишга бағишланган.

Маълумки, математик физика тенгламалари, яъни эллиптик, гиперболик ва параболик типдаги тенгламаларга қўйиладиган масалаларнинг ҳар бирига мос ечиш усуллари мавжуд. Баъзида бир масалани ечишнинг турли усуллари мавжуд бўлса, баъзида турли масалаларни бир усул билан ечиш мумкин. Мазкур диссертация ишида қўйилган масалаларни тадқиқ қилиш жараёнидан келиб чиқадики, аралаш типдаги эллиптико-гиперболик тенгламалар учун қўйилган масалалар эллиптик типдаги тенглама учун нолокал шартли масалаларга келтирилар экан. Лекин ҳосил бўлган янги масалаларни ҳар доим ҳам анъанавий, яъни классик усуллар билан ечиб бўлмайди. Бундай вақтда ҳосил бўлган янги масалага мос янги усул ёки бирор бир анъанавий усулни қўллашга тўғри келади.

Мазкур диссертация ишининг I бобида эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйилган масалани ечиш усуллари баён қилинган. II бобда эса гиперболик типдаги тенглама учун биринчи ва иккинчи чегараланмаган характеристик бурчакларда Коши масаласининг ечимлари топилган. II боб сўнгида гиперболик соҳадан асосий муносабат олинган. III бобда аралаш типдаги тенглама учун масала ечими ягоналиги исботланган ва ечими мавжудлиги кўрсатиб ўтилган.

Диссертацияда аралаш типдаги тенгламалар учун кўрилган масалалар янги бўлиб, улар аралаш типдаги тенгламалар назариясини кейинги ривожда фойдаланиши мумкин.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Каримов И.А. Юсак маънавият-енгилмас куч. Тошкент., Ўзбекистон. 2008.
2. Каримов И.А. “Ўзбекистон XXI аср бўсағасида” Тошкент., Ўзбекистон. 1992.
3. Каримов И.А. 2009-йилнинг якунлари 2010-йилнинг биринчи чорагида Ўзбекистон ижтимоий, иқтисодий ривожланишининг энг муҳим устивор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг мажлисидаги маъруза. Фарғона ҳақиқати газетаси, 2010-йил 3-феврал.
4. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. Тошкент, 2002.
5. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона, 2005.
6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Москва. «Наука», Том II, 1965.
7. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Фарғона, 2005.
8. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар. Тошкент “Университет” 2007.
9. Салоҳиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Тошкент. “Университет”. 2006.
10. Уринов А.Қ. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом// Узбекский математический журнал. 2005 г. №1, 70-78 бетлар.
11. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа: Дис.... доктора физ. -мат.наук. -М.: Матем ин-т РАН, 1952.
12. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. -М: Изд-во АН СССР, 1959. -164 б.
13. Пулькин С.П. некоторые краевые задачи для уравнений 1958.

14. Флейшер Н.М. Об одной задаче Франкля для уравнения. Лаврентева в случае неограниченности области. Известия Вузов. Математика 1966
15. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448 б.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1965. Том I. - 296 б.
17. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент, Фан. 1979. - 240 б.
18. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа. // Докл. АН СССР. - 1953. 88. 2. - Б. 197-200.
19. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа. // Докл. АН СССР. - 1953. 88. 3. - Б. 397-400.
20. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. - М.: Издательство иностранной литературы, 1957. - 256 б.
21. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. - М.: Наука, 1966. - 292 б.
22. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. - М.: Наука, 1970. - 296 б.
23. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. - М.: Высшая школа, 1985. - 304 б.
24. Жўраев В.Т. Битта сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун чегараланмаган соҳада газ динамикасининг бир чегаравий масаласи ҳақида. Инновацион ғояларни таълим – тарбия жараёрига татбиқ этишининг илмий услбий муаммолари . ФарДУ 2011
25. Жўраев В.Т. Хар хил турдаги касрт тартибли интегро-дифференциал операторлар композицияси ва уларнинг тадбиқлари. Проблемы современной математики. Қарши 2011
26. www.ziyonet.uz.
27. www.ref.uz.
28. www.info.uz.