

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI**

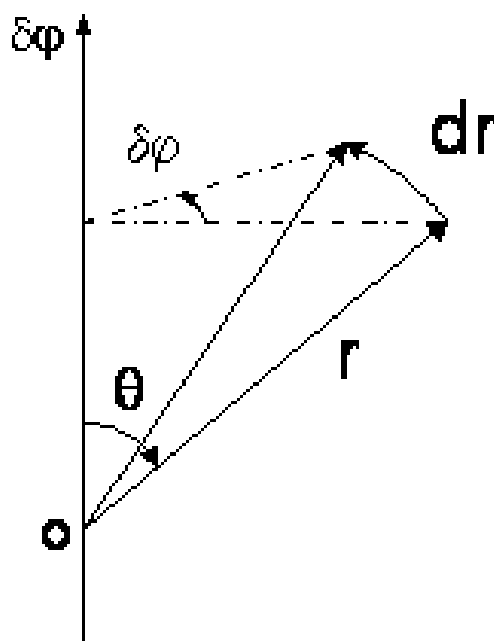
**AJINIYOZ NOMIDAGI NUKUS DAVLAT
PEDAGOGIKA INSTITUTI**

Umumiy fizika kafedrası

B.Ya.Yavidov, U.T.Kurbanov

ANALITIK MEXANIKA ELEMENTLARI

(o'quv-uslubiy qo'llanma)



NUKUS - 2008

B.Ya.Yavidov, U.T.Kurbanov

Uslubiy qo'llanmada analitik mexanika elementlari Gamilton formalizmi va Eyler-Lagranj tenglamalari negizida bayon etilgan. Harakat integrallari (energiya, impuls va impuls momenti) ning saqlanish qonunlari fazo va vaqtning bir jinsligi va izotropligi kabi simmetriyalar bilan bog'liq holda tushuntirilgan. Gamilton tenglamalari va Puasson qavslari berilgan. Sodda misollar qaralgan.

Uslubiy qo'llanmani pedagogika institutlarining fizika-astronomiya mutaxassisligida tahsil olayotgan talabalar klassik mexanika fanidan ma'ruza mashg'ulotlarini o'zlashtirishda foydalanishi mumkin.

MAS'UL REDAKTOR:

K.M.Koshanov – filologiya fanlari kandidati, professor

TAQRIZCHILAR:

- 1. I.Turmanov*** – Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti umumiy fizika kafedراسи texnika fanlari nomzodi, dotsent.
- 2. B.Narymbetov*** – Organik moddalar fizikasi laboratoriyasi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi (O'zR FA QQB Tabiiy fanlar kompleks instituti)

I. UMUMLASHGAN KOORDINATALAR

Mexanikaning asosiy tushunchalaridan biri moddiy nuqta (MN)dir. MN deganda o'lchamlarini e'tiborga olmasa ham bo'ladigan jism tushuniladi. MN ning fazodagi vaziyati uning radius vektori $\vec{r}$ bilan yoki uning dekart koordinatalar sistema (DKS) sidagi uchta x, y, z komponentlari bilan tavsiflanadi. $d\vec{r}$ ning vaqt t bo'yicha birinchi hosilasi $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ tezlik, ikkinchi hosilasi $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ tezlanish deb ataladi. Biz ba'zida $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ deb ham yozamiz. N ta zarralardan tashkil topgan mexanik sistema (MS) ning vaziyatini fazoda ko'rsatish uchun N ta radius vektorlarni bilishimiz darkor yoki $3N$ koordinatalar. Umumlashtirib aytganda sistema vaziyatini fazoda aniq ko'rsatish uchun etarli bo'lgan eng kam mustaqil miqdorlar soni sistemaning **erkinlik darajasi** deyiladi. Yuqoridagi N zarralar sistemasining erkinlik darajasi $3N$ ga teng. Erkinlik darajasini ifodalovchi koordinatalar faqat DKS sida emas, balki ixtiyoriy sanoq sistema (SS) sida berilgan bo'lishi mumkin, masalan, sferik koordinatalar sistemasi (SfKS), silindrik koordinatalar sistemasi (SdKS) va h. Shu bois, sistema vaziyatini to'liq tavsiflovchi ixtiyoriy s miqdorlar $q_1, q_2, \dots, q_s$ ni **umumlashgan koordinatalar** deymiz. Umumlashgan koordinatalar sistema vaziyatini biror aniq vaqtda ko'rsatadi xolos, uning keyingi vaziyatini bilish uchun sistemaning tezligi haqida etarli darajada axborotga ega bo'lishimiz lozim. Tajribaning ko'rsatishicha, sistemaning umumlashgan koordinatalari $q_i (i=1,2,\dots,s)$ va umumlashgan tezliklari $\dot{q}_i (i=1,2,\dots,s)$ ning berilishi sistemaning ixtiyoriy vaqtdagi vaziyatini ko'rsatish uchun yetarli. $q_i (i=1,2,\dots,s)$ va $\dot{q}_i (i=1,2,\dots,s)$ ni bilish sistema tezlanishi $\ddot{q}_i (i=1,2,\dots,s)$ ni ham aniqlashga imkon beradi. Sistema tezlanishining uning koordinatalari va tezliklari bilan bog'lovchi munosabat sistemaning **harakat tenglamasi** (HT) deyiladi. HTsi umumlashgan koordinatalar $q_i (i=1,2,\dots,s)$ ga nisbatan ikkinchi darajali differentsial tenglama bo'lib hisoblanadi. HTsini integrallash natijasida sistema vaziyatining vaqt o'tishi bilan o'zgarishi $q_i(t) (i=1,2,\dots,s)$ yani sistema traektoriyasini topish imkonini beradi.

II. GAMILTON PRINTSIPI

MS harakat qonunining eng umumiy talaffuzi **Gamilton printsipi** yoki **eng kam ta'sir printsipi** ga asoslangan. Gamilton printsipi mohiyati quyidagicha:

MS ga uni to'liq tavsiflovchi va **Lagranj funktsiyasi** (LF) nomi bilan ataluvchi $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ funktsiya mos qo'yiladi. Biz qisqacha $L(q, \dot{q}, t)$ deb yoza qolamiz, ammo L ning $2s+1$ o'zgaruvchi funktsiyasi ekanligini doimo nazarda tutamiz. Sistema t_1 va t_2 vaqtlarda mos ravishda $q^{(1)}$ va $q^{(2)}$ koordinatalar to'plami bilan ifodalanuvchi vaziyatda bo'lsin. Gamilton printsipiga ko'ra MS $q^{(1)}$ vaziyatdan $q^{(2)}$ vaziyatga shunday traektoriya bo'yicha harakatlanadiki, unda **ta'sir**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

deb ataluvchi fizikaviy miqdor eng kichik ekstremal (minimal) qiymatga erishadi. Endi ta'sir (1) minimumga erishishi uchun LF si qanday differentsial tenglamani qanoatlantirishini topamiz. Masalani osonlashtirish uchun erkinlik darajasi birga teng bo'lgan sistemani ko'rib chiqamiz. Ta'sir minimal bo'luvchi qidirilayotgan traektoriya $q=q(t)$ bo'lsin (Fig.1). Agar $q(t)$ traektoriyadan chetlashib $q(t)+\delta q(t)$ traektoriyaga o'tsak S ortadi. 1- va 2-nuqtalarda ikki traektoriya ustma-ust tushadi va shu sababli $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$. S ta'sir $q(t)$ traektoriyada minimal qiymatga erishishi uchun S ning shu traektoriyadagi variatsiyasi nolga teng bo'lishi lozim:

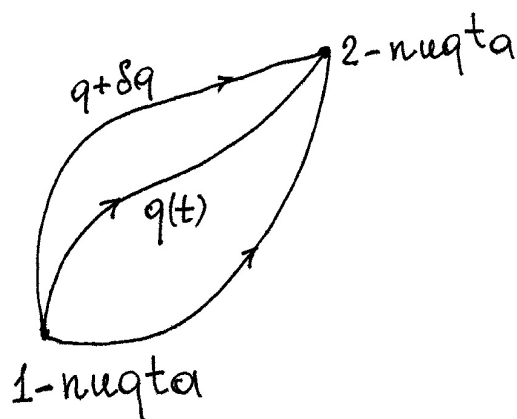
$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (2)$$

Variatsiya olamiz va

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (3)$$

ni topamiz. $\delta \dot{q} = d\delta q/dt$ tenglikni inobatga olib (3) ni integrallaymiz:

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (4)$$



1- rasm. Eng kam ta'sir printsipini keltirib chiqarishga oid.

(4) formuladagi birinchi had chegaraviy shartlar bo'is nolga teng. Ikkinchi integral nolga teng bo'lishi uchun uning ostidagi funktsiya yani qavs ichidagi munosabat nolga teng bo'lishi kerak. Demak, ta'sir $q(t)$ traektoriyada minimal bo'lishi uchun sistema LF si

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (5)$$

differentzial tenglamasini qanoatlantirishi lozim ekan. Ko'p erkinlik darajaga ega sistema bo'lganda har bir $q_i(t)$ uchun variatsiya bajarilishi kerak. U holda s ta tenglamalar sistemasini topamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6)$$

(6) tenglamalar sistemasi **Eyler-Lagranj tenglamasi** (ELT) deb ataladi. Agar MS LF si ma'lum bo'lsa, (6) tenglamalar sistemasi MS ning tezlanishi, tezligi va koordinatasi orasidagi munosabatni ifodalaydi. Yani HT sini aks ettiradi. Matematik nuqtai nazardan (6) s ta $q_i(t)$ funktsiya uchun ikkinchi darajali differentzial tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Uni yechish uchun boshlang'ich shartlar bo'lishi kerak. Boshlang'ich shart MS ning biror vaqtdagi koordinatalari va tezliklari bo'lishi mumkin. Endi ikki A va B qismlardan tashkil topgan MS ni qaraymiz. Har birini yopiq MS deb qaraganimizda, A MS LF si L_A , B MS LF L_B bo'lsin. A va B MS lar bir biridan cheksiz uzoqlashtirilganda, orasida o'zaro ta'sirlashuv bo'lmaydi va $A+B$ MS

LF si $\lim L = L_A + L_B$ ga intiladi. Demak, LF **additivlik** xossasiga amal qilar ekan. LF sining biror doimiyga ko'paytirilishi harakat tenglamalariga ta'sir ko'rsatmaydi. LF ning doimiyga ko'paytirish barcha MS lar uchun bir vaqtda amalga oshirilishi shart. Yana shuni aytib o'tish kerakki, MS ning LF si koordinata va vaqt funktsiyasining vaqt bo'yicha to'liq hosilasi aniqligigacha topiladi. Masalan, L va $L' = L + df/dt$ LF larni ko'rib chiqamiz. Har biriga mos ta'sirlar (1) ga muvofiq o'zaro

$$S' = S + f(q^2, t_2) - f(q^1, t_1) \quad (7)$$

formula bilan bog'liq. Yani variatsiya $\delta S' = 0$ etishda yo'qolib ketadigan hadlar bilan farqlanadi. Shu sababliki, $\delta S = \delta S' = 0$ yani har xil LF lar bilan ifodalanuvchi MS lar HT lari bir xil bo'ladi.

III. MODDIY NUQTA LAGRANJ FUNKTSIYASI

Mexanik hodisalarni o'rganish uchun biror SS sini tanlab olish zarur. Harakat qonunlarining yozilishi SS siga bog'liq va turli SS larda turli ko'rinishga ega. Agar SS sini ixtiyoriy tanlasak, hatto sodda hodisaning ham HT si juda murakkab yozilishi mumkin. Shu sababli, mexanika qonunlari, shu jumladan, HT lari, sodda ko'rinishga ega bo'ladigan SS ni topish masalasi tug'iladi. Ixtiyoriy SS siga nisbatan fazo va vaqt bir jinsli va fazo izotrop bo'lmaydi. Natijada bunday SS sida qaralayotgan va hech qanday ta'sirga uchramagan jism tinch holatda yoki tekis va to'g'ri chiziqli harakatda bo'la olmaydi. Bunday qiyinchiliklardan qutulish uchun biz harakatni inertsial sanoq sistema (ISS) larda o'rganamiz. ISS sida fazo va vaqt bir jinsli va fazo izotrop xossalarga ega. ISS sida harakatsiz turgan jism doimo tinchlikda qoladi. Biz hozirning o'zida fazo va vaqtning xossaligidan foydalanib, erkin MN LF si to'g'risida fikr aytishimiz mumkin. Fazoning va vaqtning bir jinsligidan erkin MN LF sining $\vec{r}$ va t larga bog'liq bo'la olmasligi kelib chiqadi. Fazoning izotropligidan LF $\vec{v}$ ga ham bog'liq bo'la olmaydi. U holda LF faqat tezlikning absolyut qiymatiga bog'liq bo'lishi mumkin: $L = L(v^2)$. Natijada ELT quyidagicha yoziladi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (8)$$

Bu yerdan erkin zarra tezligi $\vec{v} = const$ degan xulosa kelib chiqadi. Yani ISS sida MN ning erkin harakati qiymati va yo'nalishi bo'yicha doimiy tezlik bilan ro'y berar ekan. Oxirgi xulosa **inertsiya qonuni** deyiladi. Erkin zarraning LF sini topish uchun GNP dan foydalanamiz. Bir biriga nisbatan juda kichik $\vec{\epsilon}$ tezlik bilan harakatlanayotgan K va K' ISS larida erkin zarra LF lari L va L' o'zaro qanday bog'langanligini aniqlaymiz. $\vec{\epsilon} \rightarrow 0$ da ikkala LF teng bo'lishi lozim.

Demak,

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\vec{\epsilon} + \epsilon^2) \quad (9)$$

Bu ifodani $\vec{\epsilon}$ bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz va birinchi darajali hadlar bilan cheklanamiz:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{v}\vec{\epsilon} \quad (10)$$

Oldin aytib o'tganimizdek, zarraning HT si ikkala ISS sida ham bir xil ko'rinishga ega, ularning K va K' ISS laridagi LF lari faqat biror funktsiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasiga farq etishi kerak. Unday bo'lsa, (10) formuladagi qatorning ikkinchi hadining vaqt bo'yicha to'liq hosila bo'lishi uchun u $\vec{v}$ ga proporsional yoki oldidagi koeffitsient $\partial L / \partial v^2$ tezlikka bog'liq bo'lmasligi lozim. Yani $L \approx v^2$. Buni

$$L = \frac{m}{2} v^2 \quad (11)$$

deb yozishimiz mumkin. Bu yerda m proporsionallik koeffitsienti bo'lib, MN massasi deyiladi. Massa manfiy bo'lishi mumkin emas, chunki bu holda ta'sir S minimal qiymatga erishmaydi. LF sining additivlik xossasidan o'zaro ta'sirlashmaydigan MN lar sistemasining LF si

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \quad (12)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, LF ni bilish uchun tezlik kvadratini bilish kerak ekan. Lekin, $v^2 = (dl/dt)^2 = dl^2/dt^2$ bo'lganligi bois, qaralayotgan SS sida uzunlik elementini bilish lozim.

- Dekart koordinatalari sistemasi. $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (13)$$

- Sferik koordinatalar sistemasi. $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (14)$$

- Silindrik koordinatalar sistemasi. $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \quad (15)$$

IV. MODDIY NUQTALAR SISTEMASI LAGRANJ FUNKTSIYASI

Faqat o'zaro ta'sirlashuvchi MN lar sistemasini ko'rib chiqaylik. Tashqi jismlar bilan ta'sirlashuv bo'lmaganligi sababli, bunday MS ni **berk sistema** (BS) deb ataymiz. MN larning ta'sirlashuvini erkin zarralar sistemasi LF siga ta'sirlashuv turi va zarralarning vaziyatiga bog'liq funktsiyani qo'shish bilan inobatga olsa bo'lar ekan. Bu funktsiyani $-U$ deb belgilab, o'zaro ta'sirlashuvchi MN sistemasi LF uchun

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \quad (16)$$

formulani qo'lga kiritamiz. Bu BS ning LF bo'lib hisoblanadi. Birinchi had MS ning kinetik energiya (KE) si, ikkinchisi esa uning potentsial energiya (PE) si deyiladi. PEning bir vaqtda aniqlangan koordinatalarga bog'liqligi, ta'sirlashuv tarqalish tezligi cheksiz ekanligini anglatadi. Bu klassik mexanika asoslari - fazo va vaqtning absolyutligi natijasidir. Biror zarra vaziyatining o'zgarishi darhol boshqa zarralarga ta'sirini ko'rsatadi. Agar ta'sirlashuv tarqalishi tezligi cheklangan bo'lsa, HT lar GNP nisbatan invariant bo'lmay qoladi. (16) formuladan vaqt nafaqat bir jinsli, balki izotrop ekanligi ham kelib chiqadi. Rostdan ham t ning $-t$ ga almashtirilishi HT sini o'zgartirmaydi. Yani, MS da biror harakat kuzatilsa, unga teskari harakat ham bo'lishi mumkin. Shu sababli klassik mexanikada harakat qaytuvchan hisoblanadi. (16) ni ELT si (6) ga qo'yib HT ni topamiz:

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \quad (17)$$

HT ning bunday turi Nyuton tenglamasi deb ataladi va ta'sirlashuvchi zarralar mexanikasining asosini tashkil etadi. (17) tenglikning chap tomonida turgan

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \quad (18)$$

a - zarraga ta'sir etuvchi kuch deb ataladi. $\vec{F}_a$ ham U kabi zarralarning koordinatalariga bog'liq, ularning tezliklariga bog'liq emas. MS PEs ixtiyoriy doimiy aniqligigacha hisoblanadi. Odatda bu doimiyni PE cheksizlikda nolga intiladigan etib tanlanadi. Agar MS harakati DKS da emas ixtiyoriy SS da qaralayotgan bo'lsa, umumlashgan koordinata va tezliklardan foydalanamiz. Buning uchun

$$x_a = f(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (19)$$

almashtirishni bajaramiz va

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q) \quad (20)$$

ni topamiz. Bu yerda a_{ik} faqat koordinatalarga bog'liq koeffitsient. Ko'rib turganimizdek, KE umumlashgan koordinatalarda tezliklarning kvadratik funktsiyasi ko'rinishda, ammo, u koordinatalarga ham bog'liq. Shu paytgacha biz faqat BS larni ko'rib kelgan edik. Endi berik bo'lmagan A MS ni ko'rib chiqamiz. A MS B MS bilan ta'sirlashadigan bo'lsin. A MS ni B MS maydonida harakatlanayotgan deb qarasak bo'ladi. A+B MS ni BS deb hisoblasak bo'ladi. MS HT si har bir sistema koordinatasi bo'yicha alohida variatsiya etilishi natijasida (Gamilton printsipli) topilgani sababli A MS LF sini A+B MS LF si $L_A + L_B$ dan topsak bo'ladi. Bunda B MS koordinatasi $q_B(t)$ ni berilgan deb hisoblaymiz. Yani

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B), \quad (21)$$

birinchi ikki hadlar mos ravishda A va B MS larning kinetik energiyalari $T_A(q_A, \dot{q}_A)$ va $T_B(q_B, \dot{q}_B)$ ni ifodalasa, uchinchi had $U(q_A, q_B)$ bu MS larning o'zaro ta'sirlashish PEsidir. Agar, $q_B(t)$ aniq berilgan vaqt funktsiyasi bo'lsa, $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ biror

funktsiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi bo'ladi va shu sabab u A MS HT sig'a ta'sir etmaydi. U holda A MS LF sini

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \quad (22)$$

deb yozsak bo'ladi. Bu yerda endi U vaqt funktsiyasi bo'ladi. Tashqi maydonda harakatlanuvchi zarra LF si va uning HT si

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}, t), \quad m\vec{v} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (23)$$

kabi formulalar bilan beriladi. Barcha nuqtalarida absolyut qiymati va yo'nalishi jihatdan o'zgarmas kuch ta'sir etuvchi kuch maydoni ***bir jinsli*** maydon deyiladi.

V. HAKAKAT INTEGRALLARI

MS harakati davomida uning fazodagi vaziyati $2s$ miqdorlar q_i va $\dot{q}_i (i=1,2,...,s)$ bilan to'liq tavsiflanadi. Ammo, bu miqdorlar funktsiyasi bo'lgan shunday kattaliklar borki, ular harakat davomida o'z qiymatlarini saqlaydilar. Bu funktsiyalarning qiymati faqat boshlang'ich shartlarga bog'liq. Harakat davomida o'z qiymatini o'zgartirmaydigan fizikaviy miqdorlar ***harakat integrallari*** (HI) deb ataladi. Erkinlik darajasi s bo'lgan BS ning mustaqil HI lari soni $2s-1$ ga teng bo'ladi. Buni quyidagicha dalillasa bo'ladi. HT sining yechimi $2s$ doimiyga ega. BS ning HT si vaqtga bevosita bog'liq bo'lmaganligi uchun vaqtning sanoq boshi ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Shu sabab, doimiylardan birini t_0 deb qabul eta olamiz. U holda qolgan $2s-1$ tenglamalar

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, ..., C_{2s-1}) \quad (24)$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, ..., C_{2s-1}) \quad (25)$$

dan $C_1, C_2, C_3, ..., C_{2s-1}$ doimiylarni q va $\dot{q}$ lar funktsiyasi shaklida tasvirlashimiz mumkin. Bu doimiylar HI lari bo'ladi va ularning soni $2s-1$ ga teng. Mexanikada juda katta ahamiyatga ega bir nechta HI lari mavjud bo'lib, ularning saqlanishi fazo va vaqtning fundamental xossalari: bir jinsligi va izotropligidan kelib chiqadi. Bu HI lari additiv miqdorlar bo'lib, murakkab MS ning HI, agar uni tashkil etuvchi qismlar orasida ta'sirlashuv bo'lmasa, qismlar HI lari yig'indisiga teng bo'ladi. Aynan HI

larning additivlik xossasi ularni tahlil etishda qo'l keladi. Masalan, ikki jism biror cheklangan vaqt davomida to'qnashsin. To'qnashuvdan oldin va keyin bu sistemaning HI lari teng bo'lishi lozim. Agar jismlarning to'qnashishdan oldingi HI lari ma'lum bo'lsa, ularning to'qnashishdan keyingi holati aniqlanishi mumkin.

VI. ENERGIYA

Energiya saqlanish qonuni vaqtning bir jinsligi xossasidan kelib chiqadi. Yani bu qonun vaqtning fundamental xossasi, uning bir jinsligi bilan bog'liq. Vaqtning bir jinsligi deganda vaqt intervallarining ekvivalentligi yoki teng huquqligi nazarda tutiladi. MS LF sining vaqt bo'yicha to'liq hosilasi

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (26)$$

shaklda yoziladi. Ammo, vaqt bir jinsligi tufayli MS LF sini vaqt t ga bevosita bog'liq bo'lmasligi kerak. U holda $\partial L / \partial t = 0$ bo'ladi va (26) formulani ELT si (6) yordamida

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (27)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu yerdan

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 \quad (28)$$

ekanligi kelib chiqadi. (28) munosabat o'rinlanishi uchun qavs ichidagi miqdor

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (29)$$

BS harakati davomida saqlanishi (o'zgarmasligi) shart. Yani E HI ekan. Bu HI BS ning **energiyasi** deb ataladi. LF ning additivligidan energiyaning additivligi kelib chiqadi, chunki energiya LF ga chiziqli bog'liq. Energiyaning saqlanish qonuni tashqi maydonda harakatlanuvchi MS uchun ham bajariladi. Energiyasi saqlanuvchi MS **konservativ** MS deb ataladi. BS LF si $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ bo'lsa, Eylerning bir jinsli funktsiya haqidagi teoremasidan [1]

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \quad (30)$$

ni topamiz. (30) ni (29) ga qo'yib energiya

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \quad (31)$$

ifodasini topamiz. Energiya DKS da

$$E = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \quad (32)$$

formula bilan aniqlanadi. Demak, energiya E ikki had, faqat zarralar tezliklariga bog'liq KE T va faqat zarralar vaziyatini ifodalovchi koordinatalarga bog'liq PE U , yig'indisi shaklida tasvirlanishi mumkin ekan.

VII. IMPULS

Impuls saqlanish qonuni fazoning bir jinsligidan kelib chiqadi. Fazoning bir jinsligi deganda fazo nuqtalarining ekvivalentligi yani teng huquqligi tushuniladi. Shu sabab, ixtiyoriy parallel ko'chish natijasida MS xossalari, jumladan, HT si va LF si o'zgarmasligi lozim. Biz juda kichik $\vec{\epsilon}$ parallel ko'chishni ko'rib chiqamiz $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{\epsilon}$. Bu ko'chishda MS LF si variatsiyasi

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \vec{\epsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \quad (33)$$

ko'rinishda yoziladi. (33) da yig'indi barcha zarralarni qamraydi. Oldin takidlaganimizdek, fazo bir jinsligi bois, MS LF o'zgarmasligi lozim, yani $\delta L = 0$. $\vec{\epsilon}$ ixtiyoriy bo'lganligi bois, $\delta L = 0$ shart

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad (34)$$

shartga ekvivalent bo'ladi. ELT si (6) yordamida (34) ni

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \quad (35)$$

deb yozsak bo'ladi. Demak, berk MS harakati davomida

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \quad (36)$$

vektor kattalik saqlanar ekan yani HI bo'ladi. Bu vektor kattalik MS ning **impulsi** deyiladi. (36) ga (16) ni qo'yib MS impulsi

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a \quad (37)$$

ni topamiz. Impulsning additivligi shundoq ko'rinib turibdi. Bundan tashqari murakkab sistema impulsi, uni tashkil etuvchi qismlar orasidagi ta'sirlashuv bo'lish bo'lmasligidan qat'iy nazar, doimo qismlar impulslari yig'indisiga teng. Agar zarra biror tashqi maydon ta'sirida bo'lmasa, impulsning barcha komponentlari alohida saqlanadi. Agar u tashqi maydon ta'sirida bo'lsayu, ammo uning PE si qaysidir koordinataga bog'liq bo'lmasa, o'sha koordinatadagi impuls komponenti saqlanadi. Mazkur o'q bo'yicha ko'chishda MS xossalari o'zgarmaydi. Misol uchun z o'qi bo'yicha yo'nalgan bir jinsli maydonda impulsning x va y komponentlari saqlanadi. (34) munosabatning ma'nosini aniqlaymiz. L ning ta'rifi (16) va (18) ga binoan

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_a \quad (38)$$

U holda (34) $\sum_a \vec{F}_a = 0$ shaklda yoziladi. Yani berk MS da ta'sir etuvchi kuchlar yig'indisi nolga teng. Faqat shundagina berk MS impulsi saqlanadi. Xususan, MS ikki zarradan tashkil topsa, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ bo'ladi. Oxirgi munosabatni quyidagicha talaffuz etamiz: 1- zarraga 2- zarra tomonidan ta'sir etuvchi kuch, 2-zarraga 1- zarra tomonidan ta'sir etuvchi kuchga absolyut jihatdan teng, ammo yo'nalishi qarama-qarshi. Bu xulosa ba'zida ta'sirning aks ta'sirga tengligi deb ham ataladi yoki Nyutonning III qonuni. Agar MS harakati umumlashgan koordinatalarda ifodalanayotgan bo'lsa, LF si L ning umumlashgan tezlik $\dot{q}_i$ bo'yicha olingan xususiy hosilasi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (39)$$

umumlashgan impuls, L dan umumlashgan koordinata q_i bo'yicha xususiy hosila

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (40)$$

umumlashgan kuch deb ataladi. DKS sida umumlashgan impuls $\vec{P}_a$ komponentlari bilan mos tushadi, ammo, umumlashgan koordinatalarda u umumlashgan tezlikning chiziqli bir jinsli funktsiyasi bo'lsa ham, massa va tezlik ko'paytmasi shaklida yozib bo'lmaydi.

VIII. INERTSIYA MARKAZI

BS impulsi SS sining tanlab olinishiga bog'liq va har xil SS larida turli qiymat qabul etadi. Agar K' ISS si K ISS siga nisbatan $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsa, K ga nisbatan $\vec{v}_a$, K' ga nisbatan $\vec{v}'_a$ tezlik bilan harakatlanuvchi zarra tezliklari o'zaro $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ munosabat bilan bog'langan. O'z navbatida uning K va K' SS larga nisbatan impulslari

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \vec{V} \sum_a m_a \quad (41)$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_a m_a \quad (42)$$

munosabat orqali bog'liq. Xususan, shunday K' ISS si borki, unda biz qarayotgan MS tinch holatda bo'ladi. (42) da $\vec{P}' = 0$ deb bunday ISS si tezligi

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a} \quad (43)$$

ga tengligini aniqlaymiz. Agar MS to'liq impulsi nolga teng bo'lsa, shu MS qaralayotgan SS siga nisbatan tinch turibdi deyiladi. Tezlik $\vec{V}$ MS ning bir butun bo'lib, K SS siga nisbatan harakati tezligini anglatadi. Bunda MS impulsini $\vec{P} = \mu \vec{V}$ deb yozish mumkin. Bu yerda $\mu = \sum_a m_a$ va bu formula massaning additivligi deb qaralishi mumkin. (43) formulaning o'ng tomoni

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu} \sum_a m_a \vec{r}_a \quad (44)$$

vektorning to'liq hosilasi sifatida tasvirlanishi mumkin. $\vec{R}$ MS ni K SS siga nisbatan bir butun harakatini ifodalaydi va shu sabab MS ning **inertsiya markazi** deb ataladi. MS ning impulsi saqlanish qonunini shu MS inertsiya markazi doimo to'g'ri chiziq bo'yicha tekis harakatlanadi deb talaffuz etsak bo'ladi. BS ning mexanik xossalari o'rganilganda sistema inertsiya markazi tinch turgan SS sida ish ko'rgan qulay, chunki bunda sistemaning bir butun bo'lib to'g'ri chiziqli tekis harakati qaralmaydi. Bir butun bo'lib tinch turgan MS energiyasi faqat **ichki energiya** E_{ichki} dan iborat bo'ladi. Bu ichki energiya MS tarkibiga kiruvchi zarralarning KE lari va ularning o'zaro ta'sirlashish PE si yig'indisidan tashkil topgan bo'ladi. Agar MS buning ustiga $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsa, uning to'liq energiyasi

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{ichki} \quad (45)$$

ga teng. (45) formulaning to'g'riligini tekshiramiz. K va K' ISS larda MS energiyalari quyidagicha bog'liq

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\vec{v}_a' + \vec{V})^2 + U = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \vec{V} \sum_a m_a \vec{v}_a' + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U \end{aligned} \quad (46)$$

yoki

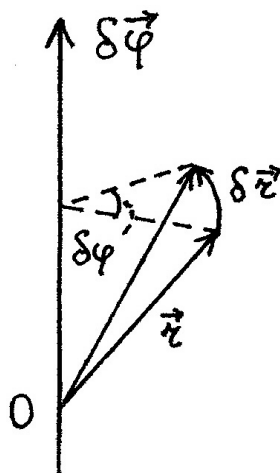
$$E = E' + \vec{V} \vec{P}' + \frac{\mu V^2}{2} \quad (47)$$

(47) formula yordamida biror SS sidan boshqa SS siga o'tganda energiyaning almashishini ifodalaydi. Agar K' ISS sida inertsiya markazi tinch tursa yani $\vec{P}' = 0$ bo'lsa, biz (45) munosabatni qo'lga kiritamiz. (45) formula mexanikada **Kyoning teoremasi** nomi bilan mashhur.

IX. IMPULS MOMENTI

Fazoning izotroplik xossasi bilan **impuls momentining** saqlanish qonuni bog'liq. Fazo izotrop deganda fazodagi barcha yo'nalishlar ekvivalent yoki teng huquqli

deganni tushunamiz. Fazoning izotropligi sabab MS ni butunlayicha biror burchakka bursak, uning xossalari o'zgarmasligi lozim. Xususan, uning LF si ham o'zgarmasligi lozim. Juda kichik elementar burilish burchagi vektori $\delta\vec{\varphi}$ ni kiritamiz. Bu vektor absolyut jihatdan burilish burchakka, yo'nalishi esa burilish o'qi bo'yicha yo'nalgan (2- rasm).



2- rasm. Impulsning saqlanish qonunini keltirib chiqarishga oid.

Burilish yo'nalishi va $\delta\vec{\varphi}$ vektor o'zaro o'ng parma qoidasi bilan bog'liq. Oldiniga bunday burilishda MS zarralaridan birining radius vektori $\vec{r}$ ning orttirmasini topamiz. Sanoq boshi ixtiyoriy ravishda tanlangan va u O nuqtada. Radius vektor $\vec{r}$ uchining ko'chishining moduli $|\delta\vec{r}|$ va burilish burchak $\delta\vec{\varphi}$ o'zaro

$$|\delta\vec{r}| = r \sin \theta \cdot \delta\varphi \quad (48)$$

munosabat bilan bog'liq. $\delta\vec{r}$ vektorning yo'nalishi suratda ko'rsatilgandek, $\vec{r}$ va $\delta\vec{\varphi}$ vektorlar yotuvchi tekislikka perpendikulyar bo'ladi va ular orasidagi bog'lanish

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}] \quad (49)$$

formula bilan beriladi. MS butunlayicha burilganda uning tarkibiga kiruvchi barcha zarralarning radius vektorlari va tezliklari bir xil qonuniyat asosida almashadi. Shu sababli, zarralar tezligining orttirmasi ham (49) kabi

$$\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{v}] \quad (50)$$

formula bilan beriladi. Burilish natijasida MS LF si o'zgarmasligi $\delta\mathcal{L} = 0$ yoki

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) = 0 \quad (51)$$

(49), (50), $\partial L / \partial \vec{v}_a = \vec{p}_a$ va $\partial L / \partial \vec{r}_a = \dot{\vec{p}}_a$ formulalarni inobatga olib (51) ni

$$\sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a [\delta \vec{\varphi} \cdot \vec{r}_a] + \vec{p}_a [\delta \vec{\varphi} \cdot \vec{v}_a] \right) = 0 \quad (52)$$

yoki, vektorlarning aralashma ko'paytmalarida siklik o'rin almashtirish bajarib va $\delta \vec{\varphi}$ ni yig'indi belgisi ostidan chiqarib

$$\delta \vec{\varphi} \sum_a \left([\vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a] + [\vec{v}_a \cdot \vec{p}_a] \right) = \delta \vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] = 0 \quad (53)$$

ni qo'lga kiritamiz. $\delta \vec{\varphi}$ ixtiyoriy bo'lganligi bois

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] = 0 \quad (54)$$

bo'lishi kerak. Bu yerdan MS ni ifodalovchi va **impuls momenti** deb ataluvchi fizikaviy kattalik

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] \quad (55)$$

harakat davomida saqlanishi kelib chiqadi. Impuls momenti ham impuls kabi additiv kattalik va uning additivligiga ta'sirlashuv borligi yo yo'qligi ta'sir qilmaydi.

Shu bilan barcha additiv HI larini ko'rib chiqdik. Bular 7 ta: energiya, impulsning 3 ta komponenti va impuls momentining 3 ta komponenti.

Impuls momenti ta'rifiga zarralarning radius vektori kirgani sababli u SS sining tanlab olinishiga bog'liq. Bitta zarraning K va K' SS laridagi radius-vektorlari $\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{a}$ formula bilan bog'liq. Bu yerda $\vec{a}$ SS lar boshlari orasidagi ko'chirish vektori. Demak,

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] = \sum_a [\vec{r}'_a \cdot \vec{p}_a] + \left[\vec{a} \sum_a \vec{p}_a \right] \quad (56)$$

yoki

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{a} \cdot \vec{P}] \quad (57)$$

(57) dan MS ning impuls momenti SS siga bog'liq bo'lmasligi uchun u qarayotgan SS ga nisbatan tinch turishi kerak yani $\vec{P} = 0$. Xuddi shu kabi MS ning bir biriga nisbatan $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan K va K' ISS lardagi impuls momentlari

$$\vec{M} = \vec{M}' + \mu[\vec{R}\vec{V}] \quad (58)$$

formulalar bilan bog'liq. Bu yerda μ MS ning to'liq massasi. Agar, K' SS sida MS tinch tursa, $\vec{V}$ inertsia markazi tezligi, $\mu\vec{V}$ esa uning to'liq impulsi bo'ladi. U holda yuqoridagi formula

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{R} \cdot \vec{P}] \quad (59)$$

ko'rinishga keladi. Yani MS ning impuls momenti uning "xususiy impulsi momenti" $\vec{M}'$ (bu impuls momenti MS tinch turgan SS ga nisbatan hisoblanadi) va MS ning butunlayigacha harakati bilan bog'liq impuls momenti $[\vec{V} \cdot \vec{P}]$ yig'indisiga teng ekan.

Impuls momentining hamma proektsiyalari faqat BS da saqlanadi. MS tashqi maydondaligida, maydon qaysi o'qqa nisbatan simmetriyaga ega bo'lsa, impuls momentining shu o'qdagi proektsiyasi saqlanadi. Agar tashqi maydon markaziy yani PE faqat sanoq boshi (markaz) dan kuzatilayotgan nuqttagacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'lsa, impuls momentining sanoq boshidan o'tuvchi ixtiyoriy o'qdagi proektsiyasi saqlanadi. z o'qi bo'yicha bir jinsli bo'lgan maydonda impuls momentining z o'qidagi M_z proektsiyasi saqlanadi. Bunda sanoq boshini ixtiyoriy ravishda tanlab olish mumkin. M_z ni

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a} \quad (60)$$

formuladan topsa bo'ladi. Bunda ϕ z o'qi atrofida burilish burchagi. Umuman M_z ni DKS da (55) ko'ra

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) \quad (61)$$

formula orqali hisoblasa, uni SdKS da $x_a = r_a \cos \phi$ va $y_a = r_a \sin \phi$ almashtirish yordamida

$$M_z = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\phi}_a \quad (62)$$

deb yozsak bo'ladi. Oxirgi natijani (15) ni (60) ga qo'yib hisoblab topsa ham bo'ladi.

X. MEXANIK O'XSHASHLIK

Oldin ta'kidlab o'tganimizdek MS LF sini biror doimiyga ko'paytirilishi HT siga ta'sir etmaydi. Natijada HT ni integrallamasdan ham, biz harakat xossalari haqida umumiy xulosalar chiqarishimiz mumkin. Bunday hollarga MS PE si biror darajali bir jinsli funktsiya bo'lgan hol ham kiradi:

$$U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \quad (63)$$

MS koordinatasi va vaqti ustida $\vec{r}_a \rightarrow \alpha\vec{r}_a$ va $t \rightarrow \beta t$ almashtirish bajaramiz. Buning natijasida $\vec{v}_a = d\vec{r}_a/dt$ tezlik α/β marta, KE α^2/β^2 marta o'zgarsa va PE α^k marta o'zgaradi. Agar biz α va β ni

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \quad (64)$$

yoki

$$\beta = \alpha^{1-k/2} \quad (65)$$

munosabatni qanoatlantiradigan qilib tanlab olsak, MS LF si almashtirish natijasida faqat songa ko'paytirilgan bo'lib qoladi va natijada HT si o'zgarmaydi. MS koordinatalarining hammasini biror marta o'zgartirish kongurent (o'xshash) traektoriyaga o'tishni anglatadi. Demak, agar PE k darajali bir jinsli funktsiya bo'lsa, MS har xil chiziqli o'lchamlarga ega o'xshash traektoriyalarda harakatlana olishi mumkin va bu traektoriyalardagi harakatlanish vaqtlar va traektoriya chiziqli o'lchamlari orasida

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} \quad (66)$$

tenglik bajariladi. O'xshash traektoriyalardagi tezliklar, energiyalar va impuls momentlari orasida ham (66) kabi

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2} \quad (67)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Kichik tebranishlar hodisasida PE si koordinataning kvadratik funktsiyasi yani $k=2$ bo'ladi. (66) formuladan tebranishlar davrining amplitudaga bog'liq emasligi kelib chiqadi. Bir jinsli og'irlik maydonida $k=1$ va shu sabab

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}} \quad (68)$$

yani matematik mayatnikning tebranishi davri uning uzunligining ildiz ostiga proporsional. Gravitatsion yoki zaryadlangan zarralar ta'sirlashuvida PE masofaga teskari proporsional $k=-1$ va shu sabab

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2} \quad (69)$$

Oxirgi formuladan planetalarning orbitada aylanish davrlari kvadratlarining nisbati ular orbitasi radiuslari kublarining nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi (Keplerning III qonuni). Agar MS harakati fazoning cheklangan sohasida sodir bo'layotgan bo'lsa, uning harakati **finitli harakat** deb ataladi. PE si koordinataning bir jinsli funktsiyasi bo'lib va finitli harakat etuvchi MS ning o'rtacha KE va o'rtacha PE lari orasida **virial teoramasini** nomi bilan mashhur munosabat mavjud. MS KE si T tezlikning 2- darajali bir jinsli funktsiyasi bo'lgani uchun [1] (30) formulani $\partial T / \partial \vec{v}_a = \vec{p}_a$ yordamida

$$2T = \sum_a \vec{p}_a \vec{v}_a = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \vec{p}_a \vec{r}_a \right) - \sum_a \vec{r}_a \dot{\vec{p}}_a \quad (70)$$

deb yozamiz. (70) tenglikning ikkala tomonidan ham vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatini olamiz. Harakat finitli bo'lgani sabab birinchi hadning o'rtacha qiymati nolga teng bo'ladi. Ikkinchi hadda $\vec{p}_a$ ni $-\partial U / \partial \vec{r}_a$ bilan almashtirib

$$2\bar{T} = \sum_a \vec{r}_a \frac{\partial \bar{U}}{\partial \vec{r}_a} \quad (71)$$

ni qo'lga kiritamiz. PE ning bir jinsli ekanligidan (71) ni $2\bar{T} = k\bar{U}$ deb yozamiz. Lekin $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ bo'lganidan

$$\bar{U} = \frac{2}{k+2} E, \bar{T} = \frac{k}{k+2} E \quad (72)$$

ni topamiz. (71) formulalar **virial teoremasini** ifodalaydi.

- Kichik tebranishlarda $k=2$ va shu sabab $\bar{T} = \bar{U}$.
- Gravitatsion maydonda $k=-1$ va shu sabab $2\bar{T} = \bar{U}$.

XI. GAMILTON TENGLAMALARI

Mexanika qonuniyatlarini LF yordamida talaffuz etish va keltirib chiqarish MS ning fazodagi vaziyatini umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar orqali tavsiflanishini nazarda tutadi. Ammo, bu MS holati faqat q va $\dot{q}$ orqali ifodalanishi shart degani emas. Ba'zida, mexanikaning umumiy qonuniyatlarini aniqlashda MS holatini umumlashgan koordinatalar va umumlashgan impulslar yordamida o'rganish qo'l keladi. Shu sabab ushbu o'zgaruvchilarda ifodalangan HT sini topish masalasi paydo bo'ladi. MS ni tavsiflovchi bir guruh o'zgaruvchilar q va $\dot{q}$ dan boshqa bir guruh o'zgaruvchilar q va p ga o'tish **Lejandr almashtirishi** yordamida amalga oshiriladi. Bizning hol uchun bu almashtirish quyidagicha bo'ladi. LF sining to'liq differentsialini yozamiz:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (73)$$

(73) tenglamaga, ta'rif (39) ga ko'ra p_i ni va ELT ga binoan $\partial L / \partial \dot{q}_i = \dot{p}_i$ ni kiritib

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \quad (74)$$

ni topamiz. (74) ning ikkinchi hadida to'liq differentsial ajratib

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (75)$$

va quyidagi natijaga kelamiz:

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (76)$$

Tenglikning chap tomonidagi differentsial ostida turgan miqdor umumlashgan koordinatalar q_i da va umumlashgan impulslar p_i da ifodalangan energiyani anglatadi. Bu fizikaviy kattalik MS ning **Gamilton funktsiyasi** (GF) deb ataladi:

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (77)$$

Sodda qilib aytganda GF bu koordinatalarda va impulsalarda ifodalangan energiyadir. Masalan, agar energiya $E(\vec{r}, \vec{v}) = mv^2/2 + U(\vec{r})$ bo'lsa, GF sini $H(\vec{r}, \vec{p}) = p^2/2m + U(\vec{r})$ deb yozsak bo'ladi.

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (78)$$

formuladan

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (79)$$

tenglamalar kelib chiqadi. (79) tenglamalar MS ning harakatini q va p o'zgaruvchilarda ifodalovchi HT si bo'lib, **Gamilton tenglamalari** (GT) deb ataladi. GT lari noma'lum $q(t)$ va $p(t)$ larga nisbatan birinchi darajali 2s ta differentsial tenglamalar sistemasini tashkil etadi. GT larining sodda va simmetrik ko'rinishga ega bo'lganligidan, ba'zida **kanonik** tenglamalar ham deb ataladi. Agar H GF si $q, \dot{q}$ yoki q, p o'zgaruvchilardan tashqari MS ning xossalarini aks ettiruvchi boshqa λ parametriga ham bog'liq bo'lishi mumkin. U holda (74) va (78) o'rniga

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda \quad (80)$$

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda \quad (81)$$

ga ega bo'lamiz. (80) va (81) dan

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q,\dot{q}} \quad (82)$$

ni topamiz.

XII. PUASSON QAVSLARI

Koordinata q ga, impuls p ga va vaqt t ga bog'liq bo'lgan $f(q,p,t)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Uning vaqt bo'yicha to'liq hosilasini topamiz:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \quad (83)$$

Bu yerdagi $\dot{q}_k$ va $\dot{p}_k$ o'rinlariga GT si (79) dagi ifodalarini qo'yib

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (84)$$

ni yoki qisqacha etib yozganda

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (85)$$

qo'lga kiritamiz. Bu yerdagi $\{H, f\}$ belgi H va f kattaliklar uchun **Puasson qavslari** (PQ) deb ataladi va u

$$\{H, f\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \quad (86)$$

formuladan topiladi. f miqdor HI bo'lishi $\partial f / \partial t = 0$ uchun (85) ga muvofiq

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \quad (87)$$

tenglik o'rinlanishi lozim. Agar HI vaqtga bevosita bog'liq bo'lmasa $\partial f / \partial t = 0$,

$$\{H, f\} = 0 \quad (88)$$

bo'ladi. Yani biror MS ni ifodalovchi miqdor HI bo'lishi uchun MS GF va shu miqdor PQ nolga teng bo'lishi kerak. Umuman ixtiyoriy ikki juft miqdor f va g lar uchun PQ

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \quad (89)$$

formula bilan aniqlanadi. PQ quyidagi xossalarga ega:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (90)$$

$$\{f, c\} = 0 \quad (91)$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \quad (92)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (93)$$

$\{f, g\}$ dan vaqt bo'yicha xususiy hosila olamiz

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (94)$$

Agar, f yoki g lardan biri q yoki p bo'lsa, PQ

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (95)$$

xususiylar hosilalarga keltiriladi. (95) formulaga navbat bilan $f = q_i$ va $f = p_i$ larni qo'yib

$$\{q_i, q_k\} = 0, \{p_i, p_k\} = 0, \{p_i, q_k\} = \delta_{ik} \quad (96)$$

larni topamiz. Bu yerda δ_{ik} Kronekker belgisi bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k; \\ 0, & \text{agar } i \neq k. \end{cases} \quad (97)$$

Uchta funktsiya f, g va h lardan tashkil topgan PQ lari orasida

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (98)$$

munosabat mavjud bo'lib, u **Yakobi ayniyati** deb ataladi. PQ ning muhim xossasi **Puasson teoremasi** da o'z aksini topgan. Bu teoremaga muvofiq: **ikki HI dan tuzilgan PQ ham HI bo'ladi** yani

$$\{f, g\} = \text{const} \quad (99)$$

Bu teoremani quyidagicha isbotlaymiz. Agar f va g lar vaqtga bevosita bog'liq bo'lmasalar, Yakobi ayniyatida $h=H$ deb qabul etamiz. U holda $\{H, f\} = 0$ va $\{H, g\} = 0$ lardan ayniyatning uchinchi hadi $\{H, \{f, g\}\} = 0$ ekanligi yani $\{f, g\} = \text{const}$ kelib chiqadi. Agar f va g lar vaqtga bevosita bog'liq bo'lsalar (85) ga ko'ra

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H, \{f, g\}\}. \quad (100)$$

Bunda $\{H, \{f, g\}\}$ ni Yakobi ayniyatiga ko'ra boshqa hadlar orqali ifodalab

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

ni topamiz. Demak,

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}. \quad (102)$$

Oxirgi ifodadan $df/dt=0$ va $dg/dt=0$ bo'lganda $d\{f, g\}/dt=0$ bo'lishi va undan $\{f, g\} = \text{const}$ HI ekanligi kelib chiqadi.

BIR O'LCHAMLI HARAKAT

Erkinlik darajasi birga teng bo'lgan MS harakati bir o'lchamli harakat deb ataladi. Tashqi maydonda harakatlanuvchi bunday MS LF si

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \quad (103)$$

yoki DKS sida

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (104)$$

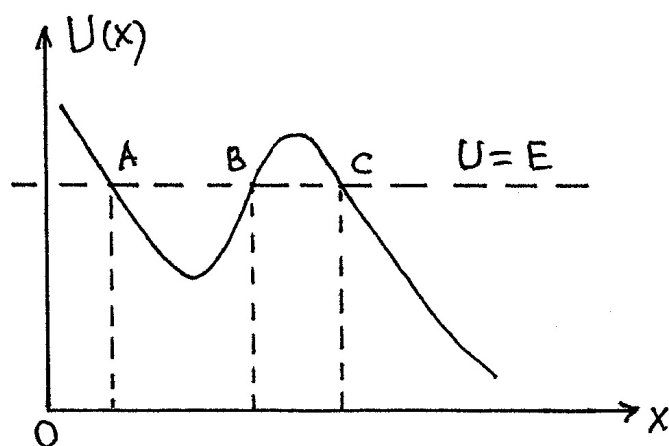
bilan beriladi. ELT siga binoan HT

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad (105)$$

bilan ifodalanadi. HT birinchi tartibli differentsial tenglama bo'lib, u o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechiladi. Yani

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const}. \quad (106)$$

HT si yechimida ikki doimiy E va const qatnashadi. Harakat faqat $U(x) < E$ sohada sodir bo'lishi mumkin. $U(x)$ funktsiya 3- rasmda tasvirlangandek bo'lsin. U holda MS yo $[A, B]$ sohada yo C sohada harakatlanishi mumkin.



3- rasm. Bir o'lchamli harakatga oid.

$E=U(x)$ tenglik bajariladigan nuqtalar harakatlanish chegaralarini anglatadi. Bu nuqtalar **qaytish nuqtalar** bo'lib, ularda tezlik nolga teng bo'ladi. $[A,B]$ sohada harakat finitli, C sohada esa infinit bo'ladi. Bir o'lchamli finitli harakat **tebranma harakat** bo'ladi. Bunda MS x_1 va x_2 nuqtalar orasida tebranadi. MS ning x_1 dan x_2 gacha va qaytishga ketgan vaqti **tebranish davri** bo'lib, u (106) ga muvofiq

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (107)$$

formuladan topiladi. Tebranish davri E ga bog'liq bo'ladi.

MARKAZIY MAYDONDAGI HARAKAT

Agar tashqi kuch maydonidagi MN PE si faqat uning radius vektorining absolyut qiymati bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday kuch maydoni **markaziy kuch maydoni** deb ataladi. MN ga ta'sir etuvchi kuch

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \quad (108)$$

bilan beriladi va u doimo radius vektor bo'yicha yo'nalgan. IX bo'limda ta'kidlangandek, markaziy maydonda maydon markaziga nisbatan aniqlangan impuls momenti saqlanadi. Bitta MN uchun $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. $\vec{M}$ va $\vec{r}$ perpendikulyar va

$\vec{M} = \text{const}$ bo'lganliklari bois, MN $\vec{M}$ ga perpendikulyar tekislikda harakatlanadi. Bu tekislikda qutb koordinatalar sistemasi (QKS) da ish ko'ramiz. QKS da MN LF si

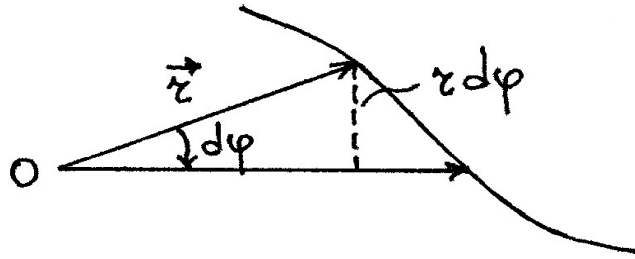
$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (109)$$

formuladan topiladi. Bu LF bevosita φ ga bog'liq emas. Lagranj funksiyasiga bevosita kirmaydigan o'zgaruvchi **siklik o'zgaruvchi** deb ataladi. ELT ga muvofiq siklik koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls HI bo'ladi. Chunki $\partial L / \partial q_i = 0$ dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const} \quad (110)$$

kelib chiqadi. Xususan, markaziy maydon uchun bu impuls $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ impuls momentining z o'qidagi proektsiyasi bilan teng bo'ladi $M_z = M$ ((62) ga qarang!). Yani

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (111)$$



4- rasm. Markaziy maydondagi harakatda impuls saqlanish qonunining geometrik ma'nosini tushuntirishga oid.

Markaziy maydonda impulsning saqlanish qonuni sodda geometrik talqin qilinadi. 4-rasmda tasvirlangandek, $(1/2)r \cdot r d\varphi$ cheksiz yaqin joylashgan ikki radius vektorlar va traektoriya yoyi bilan cheklangan sektor maydoni yuzasiga teng. Bu yuzani df deb belgilab MN impuls momentini

$$M = 2mf \quad (112)$$

deb yozishimiz mumkin. $\dot{f}$ hosila **sektorial tezlik** deyiladi. Shu sabab, impuls momenti saqlanish qonunini markaziy maydondagi harakat uchun sektorial tezlikning doimiyligi yoki saqlanishi deb aytsa bo'ladi. Yani, harakatlanuvchi MN radius-vektori teng vaqtlar ichida teng yuzalar chizadi (Keplerning II qonuni). MN ning

markaziy maydondagi harakatini energiya va impuls momenti saqlanish qonunlari yordamida, HT sini yozmasdan, yechish mumkin. QKS sida markaziy maydonda harakatlanuvchi MN energiyasini (111) yordamida

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (113)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu yerdan $\dot{r}$ ni topamiz

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}} \quad (114)$$

va uni o'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E - U(r)) - (M/mr)^2}} + const. \quad (115)$$

(111) dan $d\varphi = (M/mr^2)dt$ ni topib, unga (114) dan dt ni qo'yib va integrallab

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (M/r)^2}} + const. \quad (116)$$

ni topamiz. (115) va (116) formulalar MN ning markaziy maydondagi harakatini to'laligicha tavsiflaydi. (115) formula r ning bevosita vaqt t ga bog'laydi yani MN ning markazdan masofasi vaqt bo'yicha qanday o'zgarishini ko'rsatadi. (116) formula esa r va φ o'zaro bog'lab, traektoriya tenglamasini ifodalaydi. Shuni aytish kerakki, φ burchak monoton ravishda o'zgaradi, $\dot{\varphi}$ ishorasini o'zgartirmaydi. (113) formuladan MN ning radial harakatini "effektiv" potentsial maydon

$$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (117)$$

da bir o'lchamli harakat deb qarash mumkin ekanligi kelib chiqadi. Bunda $M^2/2mr^2$ had **markazdan qochma energiya** deyiladi. MN ning harakatlanish sohasi chegaralari

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \quad (118)$$

tenglama yechimlari bilan aniqlanadi. (118) tenglik o'rinlanganda MN ning radial tezligi $\dot{r}$ nolga teng bo'ladi. Ammo, bu bilan u to'xtab qolmaydi, chunki uning

burchak tezligi $\dot{\phi}$ nolga teng bo'lmaydi. $\dot{r}=0$ munosabat MN ning harakatlanish sohasi chegarasidan qaytish nuqtasini anglatadi. Agar, r ning o'zgarish sohasi $r \gg r_{\min}$ bo'lsa, harakat infinit bo'ladi. Bu holda MN cheksizlikdan kelib cheksizlikka ketadi. Agar r ning o'zgarish sohasi $r_{\min} < r < r_{\max}$ bo'lsa, harakat finitli bo'ladi. Bu holda MN traektoriyasi $r_{\min}$ va $r_{\max}$ aylanalar bilan chegaralangan doiraviy halqa ichida bo'ladi. MN ning $r_{\min}$ dan $r_{\max}$ ga va teskari harakati vaqtida radius-vektor

$$\delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (M/r)^2}} \quad (119)$$

burchakka buriladi. Shu sabab traektoriya berk egri chiziqni hosil etmaydi. Finitli harakatning traektoriyasi berk emas. Traektoriya berk bo'lish uchun $\delta\phi = 2\pi m/n$ shart bajarilishi kerak. Bu yerda n va m butun sonlar. U holda n ta aylanish vaqtdan keyin radius-vektor ham m marta aylanib, oldingi vaziyatiga qaytadi va traektoriya yopiladi. Traektoriyasi berkiladigan faqat ikki markaziy maydon mavjud. Bulardan biri PE si r^{-1} ga proporsional bo'ladigan maydon bo'lsa, ikkinchisi PE gasi r^2 ga proporsional bo'ladigan maydon. Birinchisi gravitatsiya va Kulon maydoni bo'lsa, ikkinchisi fazoviy ostsillyatorga mos keladi.

[1]. BIR JINSLI FUNKTSIYA HAQIDA EYLER TEOREMASI

Agar ko'p sonli o'zgaruvchili funktsiya argumentlarining hammasi ixtiyoriy son α ga ko'paytirish funktsiyani α^m ga ko'paytirishga ekvivalent bo'lsa, bunday funktsiya barcha o'zgaruvchilariga nisbatan m - darajali bir jinsli funktsiya deb ataladi:

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (120)$$

Oxirgi formuladan α bo'yicha hosila olamiz

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial(\alpha x_i)} x_i = m \alpha^{m-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (121)$$

$\alpha = 1$ da

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (122)$$

(122) munosabat **Eyler teoremasi** deyiladi: bir jinsli funktsiya xususiy hosilasi va mos keluvchi argument ko'paytmalarining yig'indisi – funktsiya bir jinslik darajasi va funktsiya ko'paytmasiga teng.

F O Y D A L A N I L G A N A D A B I Y O T L A R:

1. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 1. Механика. М., Наука, 1988
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. Изд. МГУ, 1974.
3. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Том 1. Механика и электродинамика. М., Наука, 1991.

M U N D A R I J A

1	Umumlashgan koordinatalar -----	3
2	Gamilton printsiplari -----	4
3	Moddiy nuqta Lagranj funktsiyasi -----	6
4	Moddiy nuqtalar sistemasi Lagranj funktsiyasi -----	8
5	Harakat integrallari -----	10
6	Energiya -----	11
7	Impuls -----	12
8	Inertsia markazi -----	14
9	Impuls momenti -----	15
10	Mexanik o'xshashlik -----	19
11	Gamilton tenglamalari -----	21
12	Puasson qavslari -----	22
13	Bir o'lchamli harakat -----	25
14	Markaziy maydondagi harakat -----	26
15	Bir jinsli funktsiya haqida Eyler teoremasi -----	29
16	Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati -----	30

B.Ya.Yavidov, U.T.Kurbanov

ANALITIK MEXANIKA ELEMENTLARI

(o'quv-uslubiy qo'llanma)

O'quv-uslubiy qo'llanma Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti ilmiy – uslubiy kengashining 14- noyabr 2008- yilgi №1 protokoli bilan nashr qilishga tavsiya etilgan.

Tex. Redactor:	U.B.Balimova
Korrektor:	A.Saribaeva
Operator:	N.Nisanbaev

Ajiniyoz nomidagi NDPI tahririyat – nashr bo'limi

**Ajiniyoz nomidagi Nukus Davlat Pedagogika instituti kichik bosmaxonasida chop etildi. Buyurtma № ----. Adadi – 100 nusxa. Nashr --- hisob varaqasi b.t.2.
Formati 60x84. Bahosi shartnoma asosida.**

