Узбекское агентство связи и информатизации

Ташкентский университет информационных технологий

Факультет «Информационные технологии»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К лабораторным работам по курсу «Математическое моделирование для бакалавров по направлению 5521900 - Информатика и информационные технологии».

Ташкент – 2008

Методические указания предназначены для студентов по направлению 5521900 - «Информатика и информационные технологии» и предназначен как методическое пособие для проведения лабораторных работ по курсу «Математическое моделирование». Его целью является приобретение студентами необходимых знаний по математическим методам, подходы, изучение и принципы моделирования сложно формализуемых объектов различной природы, таких как технических, технологических экономических и т.д.

В методическом указании приведен порядок выполнения лабораторных работ и основные требования при их сдаче.

Составили: доц. Камилов М.М.
Ст.пр. Эргашев А.К.

Кафедра «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ».

Одобрение к открытой печати кафедрой «ПОИТ».
(протокол № ... от…………2008 г.)
Печатается по решению научно-методического совета факультета «Информационные технологии»,
(протокол № ... от…………2008г.)

Содержание

Цель проведения лабораторных работ и требования к их выполнению

Для пользователей ПЭВМ, особенно для разработчиков специальных, линейных и прикладных программных обеспечении вычислительной техники и автоматизированных систем с целью совершенствования логического рассуждения природы различных объектов с сложной формализацией, рассматриваются принципы моделирования, подходы их изучения и основные математически методы.

Целью выполнения лабораторных работ является не только обучение проблем моделирования и основных математических методов, а выбрать соответствующий математический модель изучаемого объекта, и разработать специальные и прикладные программные обеспечения для определения неизвестных и параметров.

Для проведения лабораторных работ от каждого студента требуется выполнять следующее:

- формализация постановки задачи;
- выбор подходящего метода для задачи;
- разработать на основе требование государственного стандарта (ГОСТ) алгоритмы методов;
- написание на алгоритмическом языке (Паскаль, Delphi и.т.д) программы и реализация на ПЭВМ;
- оценка полученных результатов;
- написать отчет по выполненной работе.

Общие правила по выполнению лабораторных работ

<u>Порядок выполнения лабораторных работ.</u>

-После получения лабораторной работы, для её выполнения требуется самостоятельная домашняя подготовка, т.е. подготовка по литературе соответствующей лабораторной работе;

-своевременное выполнение заданий по прикладным индивидуальным работам;

-написание программы по выбранному алгоритму.

Студент в компьютерном классе реализует программу, корректирует ошибку.

По каждой лабораторной работе требуется отчитываться не переходя на следующее.

Требуется после сдачи каждой лабораторной работе уничтожение файлов по лабораторной работе и вычислительной центр не несёт ответственность по их сохранности. Для хранения индивидуальных файлов студентам целесообразно иметь индивидуальных дискет (флешка).

<u>Общие правила по проведению лабораторных работ.</u>

Описание лабораторных работ должно быть написано и закреплено на скоросшивателе или на отдельной тетради. На титульном листе должен быть указан название ВУЗа, название кафедры, тема лабораторной работы, фамилия, имя, отчество студента, номер группы и должность Ф.И.О. руководителя.

Содержание отчета по лабораторной работе.

Лабораторная работа должен состоять из ниже перечисленных разделов (пунктов):

- титульный лист: оглавление;
- введение:
- теоретическая часть (постановка задачи):
- алгоритм решения задачи и её блок схема;
- программная часть;
- пояснительная записка для пользователя;
- текст рабочей программы(программный код);
- результаты;
- список литератур;
- приложение.

Титульный лист приведен на приложении.

В оглавлении должен быть указан название темы по лабораторной работе, номера страниц расположенных разделов.

В введении (во вводной части) указывается содержание лабораторной работы, и её цель и в каждом разделе указываете перечень выполненных работ. Кроме того, дается содержание алгоритма решения задачи и его конструктивное описание для разработки программ.

В разделе алгоритма решения задачи и его блок схемы должно нарисован шаговое решение алгоритма и блок схемы по стандарту (ГОСТу).

В программной части:

-обозначение всех переменных и модулей, их функций;

-описание функции каждой модули;

-приводится схема;

-в ходе решения задачи приводиться схема взаимосвязи модулей.

В разделе пояснения пользователю дается указание для решения задач данного класса или других задач.

В разделе описание рабочей программы приводиться полный текст реализованной программы.

В разделе полученных результатов дается результаты лабораторной работы, программные решение и заключение.

В разделе списка литератур необходимо указать список использованных литератур.

Необходимые технические средства дли выполнения лабораторных работ

Для проведения лабораторной работы требуется класс снабженной сетью компьютеров или компьютер для каждого студента.

Компьютеры должны иметь в своем составе среду Delphi, операционную систему Windows Microsoft XP.

Лабораторная работа №1.

Ранжирование (упорядочивание) входных и выходных параметров объектов

Цель: Изучение входных и выходных параметров изучаемого объекта экспертным методом (метод непосредственного упорядочивания).

1.1 Ранжирование входов и выходов объекта (Метод экспертных оценок)

Для определения структуры модели объекта, представленного в виде много полюсника, прежде всего необходимо выяснить, какие именно входы и выходы объекта будут включены в его модель. Для этого, прежде всего выявляет всех возможных реальных «претендентов» на роль входов и выходов и из них выделяют наиболее существенные, которые и образуют много полюсник модели $n \times m$. Но здесь сразу возникает вопрос о том, какие входы называть существенными. Ответь здесь однозначный. Так как модель создается для целей управления, то существенным является тот фактор, который наибольшим образом оказывает влияние на осуществление цели управление в объекте, а значит, и в его модели. Это связано с тем, что при формировании структуры системы управления прежде всего необходимо знать, какие воздействия может и будет испытывать объект управления и как результаты этого воздействия связаны с достижением цели управление в объекте. Поэтому при выборе структуры приходится варьировать числом учитываемых входов и оценивать эффективность выбранной комбинации. Для этого следует проранжировать выбираемые факторы. В этом случае выбор наиболее существенных факторов очевиден – они должны быть расположены в начале ранжированного ряда.

Поэтому первым этапом в задаче идентификации объекта следует считать задачу ранжирования его входов . Так как модели объекта еще нет, то ранжирование его можно сделать, например, методом экспертных оценок.

Для этого, прежде всего определяются все входы и выходы, состояния которых в какой-то степени можно влиять на выполнение цели в объекте

Как и выше будем различать два вида входных переменных – воздействие среды X и управления U и выход Y. Рассмотрим их подробнее.

Входы $X=(x_1, \ . \ . \ . \ , x_n)$ подразумеваются прежде всего контролируемыми. В противном случае их не имеет смысла вводить в модель. Отбор «претендентов» на входы X должен подчиняться следующим требованиям:

1) отбираются те и только те входы $x_1, \dots, x_n$, состояние которых влияет на реализацию цели в объекте;
2) состояния каждого входов x_i должно эффективно, т. е. легко и надежно, контролироваться (измеряться);

Исходя из этих соображений, составляется ряд «претендентов». Однако это совсем не означает, что все они войдут в модель. Действительно некоторые из них почти не влияют на цель и ими можно пренебречь. А другие хотя и влияют на цель, но трудно измеряемы и поэтому также могут быть отброшены. Однако прежде, чем производить селекцию входов необходимо их проранжировать по степени их влияние на реализацию цели управления в объекте. Это означает что каждому входу $x_i(i=1, \dots, n)$ следует постановить в соответствие некоторое целое число k_i – его ранг:

$$x_i \to k_i \, (i = 1,\dots,n), \qquad (1)$$

где единичный ранг (k=1) имеет вход, влияющие наибольшим образом на реализацию цели в объекте. Второй ранг (k_i=2) и т. д. имеют входы, влияющие не столь существенно, как единичный. Здесь как видно, индексы при рангах определяют номер ранжированного входа от первого до n-го.

Расположим теперь входы в порядке возрастания их рангов

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, \qquad (2)$$

где индекс i_j равен номеру фактора с рангом j. Этот ряд будем называть ранжированным рядом. Здесь на первом месте стоит самый существенный вход, а далее следуют остальные в порядке уменьшение их влияния на цели управления. Теперь, если в модели следует по каким-то соображениям оставить лишь q входов, ими будет факторы с номерами от i_1 до i_q т. е. имеющие первые q рангов. Составить ранжированную последовательность при отсутствии модели объекта можно, например, с помощью специалистов – экспертов, хорошо осведомленных об особенностях среды объекта F_0 а также цели и способах ее достижения, т. е. имеющих представление о будущем алгоритме управления этим объектом.

Таким образом, с помощью экспертов составляется последовательность:

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \qquad (3)$$

где k_i— ранг i-го входа x_i . Построить из нее ранжированный ряд (2) не представляет труда. Например, при n=5 последовательность рангов (3) может иметь вид:

3, 1, 5, 4, 2.

Это означает, что для данной задачи наибольшее влияния на цели управления с учетом возможности измерения имеет второй вход x_2 . Ему приписывается единичный ранг (k_2=1). Второй ранг имеет пятый вход (k_5=2)и т. д. , т. е. k_1=3, k_4=4, k_3=5.

Теперь рассмотрим входы управления U=(u_1, . . . , u_q). Эти входы также нужно проранжировать, учитывая степени их влияния на достижения целей управления и простоту организации изменения этих входов, т. е. простоту реализация управления. Этот последний фактор управляемости очень важен, так как далеко не всегда желание управлять каким-то определенным входом согласуется с возможностями. Поэтому ранжирования входов управления должно производиться экспертами, не только осведомленными об особенностях объекта управления, но знакомыми со способами организации управляющих воздействий.

Аналогично каждому входу управления u_j(j=1, . . . , q) экспертно ставиться в соответствие ранг k_j целое число в интервале [1, q]):

$$u_j \to k_j\,(j = 1,...,q),$$

причем единичный ранг соответствует самому существенному и легко изменяемого входу управления, а самому не существенному и самому трудноизменяемо приписываться ранг q.

Выходы объекта также должны быть проранжированы. Здесь критерием может служит количество информации который несет данный выход о близости к реализации целей управления в объекте. Не имя модели объекта, это может сделать экспертно, получить соотношения

$$y_z \to k_z\,(z = 1,...,m),$$

где k_z – ранг выхода y_z.

Как видно, все три случае, по сути дело одинаковы. Нужно путем опроса экспертов-специалистов присвоить определенным параметрам (входа и выхода будущего объекта управления) различные ранги по степени их влияния на один или несколько различных критериев. Это процедура получила названия метода экспертных оценок. Рассмотрим только две модификации этого метода :

1) метод непосредственного ранжирования;
2) метод парных сравнений.

В первом случае эксперта сразу присваивают ранги фактором, которые представлены для ранжирования. Второй метод использует парное ранжирование факторов, что упрощает задачу эксперта, но требует дальнейшей обработки доля получения ранжированного ряда.

1.2 Метод непосредственного ранжирования

Пусть N экспертов ранжируют n факторов. Каждому фактору каждый эксперт присваивает ранг – целое число от 1 до n. Так, i-му фактору j-й эксперт присваивает ранг k_{ij}. В результате получается матрица N X n мнений экспертов

$$K' = \left\| \begin{matrix} k_{11}\ k_{21}\ \ldots\ k_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{1N}\ k_{2N}\ \ldots\ k_{nN} \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

где номера строк соответствуют номерам экспертом, а номера столбец – номером ранжируемых факторов. Это означает, что j-я строка представляет собой имени j-го эксперта, а i-й столбец – мнений всех экспертов по поводу i-го фактора.

При назначении рангов экспертами нужно соблюдать следующие условия:

1. Сумма рангов, назначенных всем факторам, должна быть одинакова для каждого эксперта и равна:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Это означает, что сумма элементов любой строки матрицы (4)

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \frac{n(n+1)}{2} \quad j = (1,..., N).$$

2. Если эксперт какие-то q факторов считает одинаковыми, то он присваивает им один ранг. Этот ранг равен .среднему из q целых рангов, которые получены при условии, что эксперту удалось их проранжировать. Например, равноценность четырех факторов *($q=4$):*
x_1,x_2,x_3,x_4, стоящих на пятом месте в ранжированном ряду, приводит к тому, что их ранги равны:

$$k_1 = k_2 = k_5 = k_6 = \frac{5+6+7+8}{4} = 6{,}5$$

Как видно, в этом случае ранги могут быть дробными. Как легко убедиться, дробные ранги кратны 1/2.

Для определения результирующих рангов следует вычислить средние ранги каждого фактора

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij} \, (i = 1,..., n).$$

Эти ранги и дают возможность проранжировать факторы. На первом месте ставится фактор, имеющий минимальный средний ранг

$$\overline{k_l} = \min_{i=1,...,n}\{\overline{k_i}\},$$

т. е. фактор x_l , на втором — фактор, имеющий следующий по малости средний ранг, и т. д. Полученные ранги позволяют построить ранжированный ряд факторов, который и будет осредненным мнением коллектива из N экспертов.

Очевидно, что далеко не всякий результат экспертного опроса следует считать удовлетворительным. Действительно, если эксперты сильно противоречат друг другу (например, половина экспертов фактору x_i присвоила первый ранг, а другая половина—последний), то такое ранжирование не может быть положено в основу решающих процедур. Поэтому для оценки всякого экспертного опроса вводится критерий, характеризующий согласованность экспертов. Чем выше эта согласованность, тем более можно “верить” результатам экспертного опроса, и наоборот.

Согласованность экспертов удобно определять как степень рассеяния средних рангов $\overline{k_i}(i=1,...,n)$. Действительно, если эксперты полностью согласованы, то средние ранги представляют собой целые, не равные друг другу числа (случай одинаковых рангов пока не рассматриваем).

Если же эксперты полностью не согласованы, то средние ранги примерно равны (п+1)/2. В промежуточном случае (при частично согласованных экспертах) ранги сгруппируются вокруг среднего значения (п+1)/2.

Вычислим дисперсию средних рангов. Она, по определению, равна:

$$D(\overline{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{k_i} - \overline{\overline{k}}\right)^2,$$

где

$$\overline{\overline{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{k_i} = \frac{n+1}{2}$$

– математическое ожидание среднего ранга. Определим максимальную дисперсию (она бывает при полностью согласованных экспертах)

$$D_{макс}(\overline{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12},$$

Критерий согласованности экспертов удобно представить в виде отношения

$$W = \frac{D(\overline{k})}{D_{макс}(\overline{k})} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{k} - \frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Легко заметить, 0≤W≤1. При *W=0* эксперты полностью несогласны, а при W=l они высказываются как один, т. е. единогласно. Таким образом, значение *W* характеризует степень согласованности экспертов.

Чем ближе *W* к единице, тем более единодушны эксперты и тем более достоверен результат ранжирования. Следует отметить, что эксперты должны высказывать свое мнение независимо друг от друга, т. е. до ранжирования они -не должны знать мнение других экспертов. В противном случае возможно появление корреляции мнений, что повышает критерий согласованности *W,* хотя в действительности эксперты не столь единодушны.

Для того чтобы знать, велико или мало конкретное значение критерия согласованности, который никогда не бывает равным ни нулю, ни единице, можно 'предложить следующий подход. Предположим, что *т из N* экспертов абсолютно компетентны, а остальные *N—т* совершенно некомпетентны, т. е. принимают свое решение чисто случайно (хотя такого, как правило, не бывает). Тогда дисперсия средних рангов

$$D(\overline{k}) = \frac{mD_{макс} + (N-m)\cdot 0}{N} = \frac{m}{N}D_{макс}.$$

Разделив все на $D_{макс}$, получим:

W=m/N.

Это значит, что *W* выражает долю абсолютно компетентных экспертов. Так, при *W=0,3* можно считать, что 30% экспертов были вполне компетентны, а остальные 70% принимали свое решение случайно, что, естественно, могло оказать роковое влияние на окончательную ранжировку (а могло и не оказать!).

Отсутствие согласованности мнений экспертов может иметь двоякое объяснение. Во-первых, это возможно из-за некомпетентности экспертов, связанной с новизной или слабой изученностью объекта идентификации. Во-вторых сложность объекта затрудняют эксперта в ответах о рангах факторов. Эксперту в этом случае проще сопоставить важность некоторых факторов попарно, т. е. указать, чей ранг одного из двух факторов будет больше.

<u>Индивидуальное задание</u>: Число параметров подлежащих к упорядочиванию равно номеру студента в журнале +7. Число экспертов равно значению 7-го числа вырабатываемый генератором случайных чисел с равномерно распределенным целочисленным значением в интервале [3.8]. Соответствующее значение ранга выбираемый экспертом для каждого параметра состоит из последовательности случайных чисел целочисленным значением с равномерно распределенным в интервале [l.n], (Здесь n-число параметров подлежащих упорядочиванию). Получение последовательности случайных чисел на интервале [l,n] соответствует заключению первого эксперта, потом второго и т.д. т.е. требуется непрерывное получение чисел для ранжирования до последнего эксперта.

Контрольные вопросы

1. С какой целью упорядочиваются входные и выходные параметры объекта?
2. По какому правилу выбирается «кандидатуры» на список параметров подлежащих к упорядочиванию?
3. Какие методы упорядочивания знаете?
4. Решение экспертов согласованно или нет?

ЛИТЕРАТУРА

1.Растригин А.А. Современные принципы управления сложными объектами. М.: Сов. радио, 1987.-232с.
2.Растригин А.А., Маджаров И.К. Введение в идентификации объектов управления. М.: Энергия, 1987.-216с.
3.Советов Б.Я. Яковлев С.А.Моделирование систем. Практикум М. Высшая школа.1988г.

Лабораторная работа №2

Идентификация статистически регулярных линейных моделей

Цель: «Освоить решение задач определения неизвестных коэффициентов статически регулярных линейных моделей».

Статические модели.

Для реальных производственных процессов и объектов управления построение моделей производится обычно путем рассмотрения данного объекта во взаимной связи с другими объектами. Однако во многих случаях для управления конкретным объектом необходимо знать закономерности, присущие только этому объекту и не зависящие от других объектов. Поэтому рассмотрение методов построения моделей начнем с относительно простых случаев -отдельных одномерных объектов. Кроме того, в этом главе ограничимся только статическими моделями; динамика будет рассмотрена во второй главе.

1.Общая модель одномерного линейного объекта

На входе объекта действует случайная величина X, а на выходе имеем случайную величину У, которую можно рассматривать как реакцию объекта на входную переменную X.В качестве примера входных и выходных переменных можно указать размеры заготовок при обработке на токарных автоматах, размеры полуфабрикатов перед шлифовальными операциями, размеры прутков перед операций прошивки на трубопрокатных станах, размеры гильз перед операцией раскатки на тех же станах, твердость заготовки, размеры нити при изготовлении пряжи и т.п.

Для получения математического описания объекта природа его имеет принципиального значения, должна бить установлена лишь та совокупность математических операций, которые преобразуют входную переменную X в выходную переменную У.Для рассматриваемого случая законы преобразования случайной величины X в случайную величину У и будет являться полной характеристикой объекта.

Рассмотрим определение характеристик для одномерного объекта, в случае, когда плотности вероятности случайных величин X и У и их совместной распределение нормальны:

$$\varphi_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{X\}}} e^{-\frac{(x-M\{X\})^2}{2D\{Y\}}}, \qquad (1.1)$$

$$\varphi_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{Y\}}} e^{-\frac{(y-M\{Y\})^2}{2D\{Y\}}}, \qquad (1.2)$$

$$\varphi_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-p_{yx}^2)D\{X\}D\{Y\}}} \times$$

$$\times\, exp\{\frac{1}{2(1-p_{yx}^2)}[\frac{(y-M\{Y\})^2}{D\{Y\}} + \frac{(x-M\{Y\})^2}{D\{X\}} - 2p_{yx}\frac{((y-M\{Y\})(x-M\{Y\})}{\sigma_y\sigma_x}]\}, \quad (1.3)$$

где M{X} и M{У}-математических ожидания величин X и У соответственно;

$\sigma_x^2 = D\{X\}$ и $\sigma_y^2 = D\{Y\}$-дисперсии величин X и У соответственно;

ρ_{yx}-коэффициент корреляции между ними:

$$\rho_{yx} = \frac{k_{yx}}{\sigma_y \sigma_x} = \frac{cov(Y,X)}{\sigma_y \sigma_x} \qquad (1.4)$$

В (4.1) является смешанным центральным моментом второго порядка случайных величин X и У, иначе он назевается ковариацией, или корреляционным моментом этих же величин:

$$K_{yx}=cov(Y,X)=M\{Y-M\{Y\})(X-M\{X\})\}. \qquad (1.5)$$

Плотность вероятности является полной вероятностной характеристикой входной случайной величины X, а -полной вероятностной характеристикой выходной случайной величины У.Полной характеристикой объекта является оператор, представляющий собой совокупность математических операций, устанавливающих соответствие между входной и выходной функциями. В качестве характеристики объекта удобно также рассматривать оператор А, который устанавливает соответствие между функциями $\varphi_x(x)\varphi_y(y)$:

$$\varphi_y(y) = A\varphi_x(x), \qquad (1.6)$$

В результате воздействия оператора А на функцию φ_x (x), являющуюся полной характеристикой входной переменной X, мы получаем функцию $\varphi_y(y)$,являющуюся полной характеристикой выходной переменной. Иногда также в качестве полной характеристик объекта рассматривают $\varphi(y\text{I}x)$-условную плотность вероятности выходной переменной Y относительно входной переменной X.

Если принять, что конструкция и технологический процесс объекта совсем не изменяются или изменяются в незначительных пределах, то естественно считать, что условный закон распределения относительно также является неизменным, условная плотность $\varphi(y\text{I}x)$ равна

$$\varphi(y\text{I}x) = \frac{\varphi_{yx}(y,x)}{\varphi_x(x)}. \qquad (1.7)$$

По известной характеристике объекта и входной переменной $\varphi_y(y)$ определяется из следующего уравнения:

$$\varphi_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\,(y\text{I}x)\varphi(x)dx. \qquad (1.8)$$

При выводе (1.8) не накладывается никаких ограничений на законы распределения входных $\varphi_x(x)$ и выходных $\varphi_y(y)$ переменных; поэтому независимо от действительных законов распределения уравнение (1.8) дает общий метод определения оператора объекта $\varphi(y\text{I}x)$.По известной условной плотности вероятности $\varphi(y\text{I}x)$ и фактической плотности $\varphi_x(x)$ входной переменной X может быть определена (или априори рассчитана) полная характеристика выходной переменной Y _ее плотность вероятности $\varphi_y(y)$.

Рассмотрим определение плотности вероятности выходной случайной величины Y согласно (1.8) в случае, когда плотность вероятности $\varphi_x(x)$ имеет нормальное распределение и задана выражением (1.1) а, условная плотность $\varphi(y\text{I}x)$ также распределена нормально и согласно (1.7) и (1.3) равна

$$\varphi(y\text{I}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{Y\}\sqrt{(1-\rho_{yx}^2)}}}\exp\{\frac{-1}{2\sqrt{D\{Y\}(1-\rho_{yx}^2)}}\times \tag{1.9}$$

$$\times[y - M\{Y\} - \rho_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M\{X\})]^2\}.$$

Таким образом, из (1.8) получим

$$\varphi_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_x\sqrt{1-\rho_{yx}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\{\frac{-1}{2\sqrt{D\{Y\}(1-\rho_{yx}^2)}}\times$$

$$\times\left[(y - M\{Y\}) - \rho_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M\{X\})\right]^2 - \frac{x - M\{X\}}{2\sigma_x}\right\}dx.$$

Обозначим

$$\frac{y-M\{Y\}}{\sigma_y} = a \text{ и } \frac{y-M\{X\}}{\sigma_x} = b;$$

Тогда $dx = \sigma_x db$ и плотность вероятности $\varphi_y(y)$ перепишем следующим образом:

$$\varphi_y(y) = \frac{1}{\sqrt{1-p_{yx}^2}}\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-\rho_{yx}b}{\sqrt{1-\rho_{yx}^2}}\right)^2 + b^2\right]\right\}db.$$

К значении, стоящему в фигурных скобках, прибавим и вычтем

$\frac{a^2\rho_{yx}^2}{2(1-\rho_{yx}^2)}$, тогда

$$\varphi_y(y) = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2\pi\sigma_y\sqrt{1-p_{yx}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{(b-\alpha\rho_{yx})^2}{2(1-p_{yx}^2)}\right\}db.$$

Заменяя $\frac{b-\alpha\rho_{yx}}{\sqrt{1-p_{yx}^2}} = c$ и учитывая, что $= \sqrt{1-p_{yx}^2}dc,$

Получаем $$\varphi_y(Y) = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2\pi\sigma\sqrt{1-p_{yx}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{c^2}{2}}dc.$$

Так как $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{c^2}{2}}dc = \sqrt{2\pi},$$

Плотность вероятности $\varphi_y(y)$ после замены а через у будет равна

$$\varphi_y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-M[Y])^2}{2\sigma^2{}_y}} \quad .$$

Таким образом, плотность вероятности на выходе объекта для заданных условий, как и ожидать, соответствует выражению (1.2).

Как же экспериментально определяется общая характеристика рассматриваемого объекта?

Естественно, что по экспериментальным данным мы можем определить только оценку условной плотности вероятности ,которая и будет служить характеристикой неизвестной истинной условной плотности вероятности. Очевидно, что оценка условной плотности вероятности должна быть близка к ее истинному значению в смысле некоторого критерия.

Построение модели производится по результатам одновременного измерения случайных величин Х и У, по которым составляется таблица оценок условных плотностей вероятности. Рассмотрим схематический пример такой таблицы. Пусть произведено 300 измерений входной и выходной переменных. По результатам этих измерений, которые представляют собой ряд парных значений у и х:$y_1x_1, y_2x_2, \ldots, y_{300}x_{300}$,построение таблицы условных плотностей производят следующим образом. Определяют число интервалов таблицы, которое зависит от числа произведенных измерений *n*.Приближенно

Частоты совместного появления *x* и *y*

Таблица 2.1

	Интервалы у								
Интервалы х	63,00-63,08	63,08-63,16	63,16-63,24	63,24-63,32	63,32-63,40	63,40-63,48	63,48-63,56	63,56-63,64	m_x
63,30-63,50	3	6							9
63,50-63,70		9	3	15					27
63,70-63,90			6	24	18				48
63,90-64,20		15	30	9	12				66
64,20-64,30			24	30	30	3			87
64,30-64,50				6	6	27			39
64,50-64,70						6	12		18
64,70-64,90							3	3	6
m_x	3	30	63	84	66	36	15	3	300

число интервалов может быть рассчитано по формуле

$$p \approx 1 + 3.32 \lg n.$$

Для каждого интервала путем распределения всех результатов экспериментов в соответствующие интервалы определяют число значений каждой клетки таблицы (X_i $У_j$). Таким образом может быть получена таблицы в которой будут стоять абсолютные значения частот совместного появления x_i и y_j .Для нашего случая, когда $n=300$,получим $p \approx 8{,}3$,т.е.число интервалов примем равным восьми. Тогда по экспериментальным данным получим распределение, которое иллюстрируется табл. 1.1. В таблицы приводятся частоты совместного появления соответствующих интервалов значений x и y.

Оценки вероятности P получаются путем определения относительных частот, представленных в таб. 2.2.

Таблица 2.2

Оценки вероятностей совместного появления x и y

Середина интервала x	Середина интервала y								P*(x)
	63,04	**63,12**	**63,20**	**63,28**	**63,36**	**63,44**	**63,52**	**63,60**	
63,40	0,01	0,02							0,03
63,60		0,03	0,01	0,05					0,09
63,80			0,02	0,08	0,06				0,16
64,00		0,05	0,10	0,03	0,04				0,22
64,20			0,08	0,10	0,10	0,01			0,29
64,40				0,02	0,20	0,09			0,13
64,60						0,02	0,04		0,06
64,80							0,01	0,01	0,02
P*(y)	0,01	0,10	0,21	0,28	0,22	0,12	0,05	0,01	1,00

Теперь нетрудно определить условные вероятности P*(yIx).Для этого согласно соотношению (1.7) необходимо значения P*(y,x) разделить на соответствующие значения P*(x).Таким образом получены оценки условных плотностей вероятности, приведенные в табл.1.3;

$$\varphi(xIy) = \frac{\varphi_{yx}(y,x)}{\varphi_y(y)}, \qquad (1.11)$$

получаем условные плотности вероятности X относительно У.

Для нашего случая оценки условных плотностей относительно У приведены в табл. 1.4 В обучающихся

Таблица 1.3

Оценки условных вероятностей Y относительно X

x	y								$\sum_y P*(yIx)$
	63,04	**63,12**	**63,20**	**63,28**	**63,36**	**63,44**	**63,52**	**63,60**	
63,40	0,333	0,667							1,0
63,60		0,333	0,111	0,556					1,0
63,80			0,125	0,500	0,375				1,0

64,00		0,227	0,454	0,137	0,182				1,0
64,20			0,276	0,345	0,345	0,034			1,0
64,40				0,154	0,154	0,692			1,0
64,60						0,333	0,667		1,0
64,80							0,500	0,500	1,0

системах определение общих характеристик объектов по результатам измерения входной и выходной переменных производится по указанной схеме. В качестве критерия принимают значения, зависящие от оценок, законов распределения по n наблюдениям и от плотности вероятности выходной переменной согласно (1.8).В качестве критериев оценки соответствия между фактическими и предсказанными законами распределения применяют критерии согласия Пирсона,А.Н., Колмогорова В.И. и Романовского и др.

Оценки условных вероятностей X относительно Y

Таблица 1.4

x	y							
	63,04	**63,12**	**63,20**	**63,28**	**63,36**	**63,44**	**63,52**	**63,60**
63,40	1,0	0,2						
63,60		0,3	0,048	0,178				
63,80			0,096	0,285	0,372			
64,00		0,5	0,476	0,107	0,182			
64,20			0,380	0,358	0,454	0,084		
64,40				0,	0,092	0,750		
64,60						0,166	0,8	
64,80							0,2	1,0
$\sum_{y} P*(y\|x)$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Для сложных объектов, характеристики которых изменяются во времени в системе управления, предусматривается специализированное устройство, уточняющее оценки условных плотностей вероятности. Специализированная часть устройства управления (или же отдельная его составляющая часть) реализует рассмотренные выше алгоритмы получения оценок условных вероятностей.

Индивидуальное задание: На основе результатов лабораторной работы приведенной следующей таблице студентам предлагается провести лабораторную работу в следующем порядке:

Таблица№1.

№	**Х1**	**Х2**	**Х3**	**Х4**	**Х5**	**Х6**	**Х7**	**Х8**	**Х9**	**Х10**	**У1**	**У2**	**У3**	**У4**	**У5**	**У6**	**У7**
1.	0,67	15,2	25	5,2	3,3	0,9	10	44	0,97	65	100	5,6	2,1	45	8	0,11	99
2.	0,62	13	24	4,9	3,2	0,81	13	57	0,95	77	109	6,6	2,4	47	12	0,11	97
3.	0,39	16	22	5,3	3,9	0,85	14	55	0,83	66	117	7,1	2,6	54	15	0,19	107
4.	0,69	15,5	27	4,4	4,2	0,87	15	48	0,90	63	111	5,7	2,8	61	9	0,14	96
5.	0,70	16,1	21	5,5	4,4	0,71	14	49	0,93	73	104	9,1	2,2	49	17	0,15	105
6.	0,65	15	23	5,1	4,7	0,76	15	53	0,83	70	111	7,1	2,7	55	7	0,13	99
7.	0,64	17	29	4,6	4,0	0,79	12	46	0,86	66	117	6,6	2,3	63	15	0,18	96
8.	0,71	18,2	25,1	5,8	3,7	0,75	18	56	0,94	77	105	5,9	2,5	67	13	0,16	102
9.	0,76	16,7	23,9	4,7	4,6	0,72	13	45	0,87	69	102	6,8	2,4	46	9	0,13	101
10.	0,69	15	30	4,9	3,7	0,8	21	54	0,95	80	128	7,2	2,9	65	16	0,22	108

Таблица №2.

Талабанинг Журнал номери	Моделда ишлатиладиган кирувчи параметрлар	Моделда ишлатиладиган чикувчи параметрлар
1.	x1,x3,x5,x7,x9	y1,y3,y5,y7
2.	x2,x4,x6,x8,x10	y2,y4,y6

3.	x1,x2,x5,x6,x9,x10	y1,y2,y5,y6
4.	x1,x3,x4,x6,x9	y1,y3,y4,y7
5.	x5,x6,x7,x8,x9,x10	y4,y5,y6,y7
6.	x1,x2,x3,x4,x5	y1,y2,y3,y4
7.	x1,x5,x7,x9,x10	y2,y5,y6,y7
8.	x2,x4,x6,x7,x8,x9	y1,y2,y4,y5,y7
9.	x3,x4,x6,x7,x8	y3,y4,y5,y6
10.	x4,x5,x7,x8,x9	y1,y2,y3,y4
11.	x2,x3,x4,x8	y3,y4,y5,y6
12.	x6,x7,x8,x9,x10	y1,y2,y3,y7
13.	x3,x1,x7,x10,x5	y5,y6,y7,y1
14.	x8,x9,x4,x3,x2	y1,y5,y7
15.	x6,x8,x10,x3	y3,y7,y5
16.	x4,x6,x8,x9,x10	y3,y4,y5,y6
17.	x1,x6,x7,x9,x10	y1,y5,y6,y7
18.	x2,x3,x4,x7,x9	y3,y5,y6,y7
19.	x6,x8,x9,x10	y7,y6,y1,y2
20.	x3,x6,x9,x2,x5	y1,y4,y7

Контрольные вопросы

1. Какой объект называется статистически регулярно линейна дискретным?
2. Как линейная модель определяется с помощью априорной информации?
3. Как определяется условие однозначного режима линейной модели?
4. Как решается задача идентификации при следующих условиях?
   а) $n>1$; $m=1$ и б) $n>1$; $m>1$.
5. Нужно ли для определения неизвестных коэффициентов линейной модели использовать результатов всех предыдущих лабораторных работ?
6. В каких случаях можно определить коэффициенты линейной модели?

Укажите возможные пути решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Растригин А.А. Современные принципы управления сложными объектами. М.: Сов.радио. 1987.-232с.
Растригин А.А., Маджаров И.К. Введение в идентификации объектов управления, М.: Энергия. 1987-21 6с.

Лабораторная работа №3

Методы оптимизации в процессе математического моделирования

Цель: Ознакомление и осуществление используемый при решении задач моделирования методов оптимизации функций многих переменных.

Метод наискорейшего спуска

В этом методе движение осуществляется в направлении наискорейшего убывания минимизуруемой функции

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}$$

т.е. по антиградиенту , а длина шага в выбранном направлении определяется в результате решения одномерной задачи минимизации функции y($x^{(k)} - \lambda^{(k)}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}$) относительно параметра $\lambda^{(k)}$. Иными словами , в случае наискорейшего спуска направляющий вектор $\Delta x^{(k)}$ в выражении $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)}\Delta x^{(k)}$ равен антиградиенту , а $\lambda^{(k)}$ выбирается обычным способом при решении одномерной задачи минимизации.

Рассмотрим метод наискорейшего спуска на примере решения двумерной задачи безусловной минимизации следующей функции y= $\frac{2}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 5x_1$. В качестве начального приближения и требуемой точности возьмем $\bar{x}^{(0)} = [3\ \ 2]$; ε=0,01. В начальной точке $y^{(0)}$ =- 0.3333 , а $(y^{|})^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Следовательно ,

$$y\ (\lambda^{(0)}) = \frac{2}{3}(3-5\lambda)^3 + \frac{1}{3}(2-7\lambda)^3 - (3-5\lambda)^2(2-7\lambda) + (3-5\lambda)(2-7\lambda)^2 - 5(3-5\lambda) =$$

$$-\frac{803}{3}\lambda^3 + 275\lambda^2 - 74\lambda - \frac{1}{3} \qquad (3.1)$$

Найдем минимум этой функции , используя классический метод Эйлера,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -803\lambda^2 + 550\lambda - 74 = 0. \quad (3.2)$$

Определим корни уравнения (3.2)

$$\lambda^{(0)}=\frac{-275\pm\sqrt{75625-59422}}{-803}=\frac{-275\pm 127.91}{-803}=\begin{cases}0.1839=\lambda_1^{(0)}\\ 0.5009=\lambda_2^{(0)}\end{cases}$$

Как видим , функция (3.1) имеет две стационарные точки. Распознаем их, для чего найдем численные значения второй производной в этих точках:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}\right)^{(0)}=-1606\lambda^{(0)}+550=\begin{cases}254{,}6566/\ \lambda_1^{(0)}=0{,}1839;\\ -254{,}4454/\ \lambda_2^{(0)}=0{,}5009;\end{cases}$$

Первая из них соответствует минимуму функции (3.1) , а вторая –максимуму. Следовательно , параметр λ на начальном шаге $\lambda^{(0)}=0{,}1839$ а новое значение вектора переменных примера

$$\bar{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}-0.1839\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.0805\\0.7127\end{bmatrix}.$$

При этом $y^{(1)}=-6.3063$; $\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{x}}\right)^{(1)}=\begin{bmatrix}1.1994\\-0.8551\end{bmatrix}$;

$$y(\lambda^{(1)})=\frac{2}{3}(2.0805-1.1994\lambda)^3+\frac{1}{3}(0.8124+0.8551\lambda)^3-(2.0805-1.1994\lambda)^2(0.8124+0.8551\lambda)+$$
$$+(2.0805-1.1994\lambda)(0.8124+0.8551\lambda)^2-5(2.0805-1.1994\lambda)=3.049\lambda^3+9.8085\lambda^2-2.1697\lambda-6.3035 \qquad (3.3)$$

Взяв производную этой функции по параметру λ и приравняв ее к нулю , получим

$$-9{,}1473\ \lambda^2+19{,}6168\ \lambda-2{,}1697=0;$$

$$\lambda^{(1)}=\frac{-19.6168\pm\sqrt{384.8188-79.4023}}{-18.294}=\frac{-19.6168\pm 17.7762}{-18.294}=\begin{cases}0.117=\lambda_1^{(1)}\\ 2.0276=\lambda_2^{(1)}\end{cases}$$

Определим характер стационарных точек $\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)}$:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}\right)^{(1)}=-18{,}294\lambda\ +19{,}6168=\begin{cases}17{,}4764/\ \lambda_1^{(1)}=0{,}117;\\ -17{,}4761/\ \lambda_2^{(0)}=2{,}0276;\end{cases}$$

Первая из них соответствует минимуму функции (3.3), а вторая максимуму этой функции. Следовательно, параметр $\lambda^{(1)}=0{,}117$, откуда новая точка

$$\bar{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}2.0805\\0.7127\end{bmatrix}-0.117\begin{bmatrix}1.1994\\-0.8551\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9402\\0.8127\end{bmatrix}.$$

В этой точке $y^{(2)}=-6.4308$, $\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{x}}\right)^{(2)}=\begin{bmatrix}0{,}0357\\0{,}0497\end{bmatrix}$.

Заданная точность решения ε =0,001 еще не достигнута . Переходим к третьей итерации:

$$y(\lambda^2)=\frac{2}{3}(1.9402-0.0357\lambda)^3+\frac{1}{3}(0.8127-0.0497\lambda)^3-(1.9402-0.0357\lambda)^2(0.8127-0.0497\lambda)+$$
$$+(1.9402-0.0357\lambda)(0.8127-0.0497\lambda)^2-5(1.9402-0.0357\lambda)=-0.0038\lambda+0.00673\lambda^2-0.00007\lambda^3$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^{(2)}=-0.00021\lambda^2+0.013\lambda-0.0038=0;\quad \lambda=0{,}2989;$$

$$\bar{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}1.9402\\0.8127\end{bmatrix}-0.2989\begin{bmatrix}0.0357\\0.0497\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9295\\0.7978\end{bmatrix}.$$

$\bar{x}^{(3)}\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{x}}\right)^{(3)}=$ [0.0037; -0077] заданная точность ε=0,01 достигнута , т.е. необходимые условия для минимума выполняются . Как мы знаем из других примеров , выполняются и достаточные условия.

Поэтому $\bar{x}^{*}=\bar{x}^{(3)}$ =[1.9295   0.7978] , а y * = -6.4315.

Метод покоординатного спуска (Гаусса-Зайделя)

Этот метод сводит задачу минимизации функции многих переменных

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\min_{x\in Д}$$

к последовательному многократному решению задачи поиска экстремума функции одной переменной $x_i, i=1\ldots n$. Для этого в функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ фиксируются на некотором произвольном уровне $(n-1)$ переменные, например, $\{x_2,x_3,\ldots,x_n\}=Z_1$ и для получаемой функции $f(x_1,Z_1)$ одной переменной x_1 отыскивается точка условного минимума x_1^1. Далее формируется новая функция $f(x_2,Z_2)$ одной переменной x_2, в которую входят фиксированные значения

$$\{x_1^1,x_3,x_4,\ldots,x_n\}=Z_2$$

Вновь решается задача нахождения точки x_1^2 условного минимума функции $f(x_2,Z_2)$, строится функция $f(x_3,Z_3)$ с $Z_3=\{x_1^1,x_2^1,x_4,\ldots,x_n\}$ и так далее — до тех пор, пока не будут найдены все условно оптимальные значения $x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1$. Для найденной точки $x^1=\{x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1\}$ проверяется следующее условие окончания итерационной процедуры в случае дифференцируемой функции:

$$\left\|\mathrm{grad}f\left(x^{k+1}\right)\right\|_{E^n}=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^k+1\right)}{\partial x_i}\right)^2\right]^{0,5}\le\varepsilon_1 .$$

Для произвольной $f(x)$ условие имеет вид:

$$\frac{\left|f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^{k}\right)\right|}{\left|f\left(x^{k}\right)\right|}\le\varepsilon_2 .$$

Если выбранное условие останова выполнено, то задача решена и x^1 есть точка приближенного минимума функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, в противном случае выполняются вторая и последующие итерации.

Алгоритм покоординатного поиска минимума функции многих переменных $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ включает в себя следующие этапы:

1. Пусть задана некоторая точка $x^k=\left\{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_i^k, \ldots, x_n^k\right\}$ и известно значение функции $f\left(x^k\right)$.
2. Построим вектор Z_1 размерности $(n-1)$ $Z_1=\left\{x_2^k, x_3^k, \ldots, x_n^k\right\}$ в котором «пропущена» компонента x_1^k и функцию одной переменной $f\left(x_1, Z_1\right)$.
3. Найдем каким-либо известным методом точку минимума x_1^{k+1} функции $f\left(x_1, Z_1\right)$ одной переменной x_1
$$f\left(x_1, Z_1\right)\to\min_{x_1\in Д} .$$
4. Построим вектор Z_2 размерности $(n-1)$
$$Z_2=\left\{x_1^{k+1}, x_3^k, x_4^k, \ldots, x_n^k\right\},$$
в состав которого вместо «пропущенного» x_2 включена найденная координата минимума x_1^{k+1}, и функцию одной переменной x_2 — $f\left(x_2, Z_2\right)$.
5. Решим задачу нахождения точки минимума x_1^{k+1} функции одной переменной $f\left(x_2, Z_2\right)$
$$f\left(x_2, Z_2\right)\to\min_{x_2\in Д} .$$
6. Построим новый вектор $Z_3=\left\{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_4^k, \ldots, x_n^k\right\}$ с «пропущенным» x_3, и т. д., пока после *n*-й внутренней итерации не будет получен вектор $x^{k+1}=\left\{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}\right\}$, компонентами которого являются точки минимума x_i^{k+1} функции одной переменной. Вычислим значение функции $f\left(x_1^{k+1}\right)$.
7. Проверим условие окончания итерационной процедуры
$$\frac{\left|f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^{k}\right)\right|}{\left|f\left(x^{k}\right)\right|}\le\varepsilon_2 .$$
Если это неравенство выполнено, то задача решена и $x^*\approx x^{k+1}$, $f\left(x^*\right)\approx f\left(x^{k+1}\right)$. В противном случае — переход к этапу 1 для выполнения следующей «внешней» итерации с номером $k+1$.

Метод Гаусса - Зейделя относится к итерационным процедурам нулевого порядка, если поиск минимума функции одной переменной $f(x_{1,}Z_1)$ осуществляется методами дихотомии, золотого сечения, чисел Фибоначчи.

Количество «внутренних» итераций всегда равно размерности функции $f(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)$; число внешних итераций зависит от степени выпуклости $f(x)$, в частном случае, когда функция $f(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)$ сепарабельна

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

поиск точки минимума x^* может быть осуществлен за одну «внешнюю» итерацию.

Алгоритм с парными пробами

Этот алгоритм отличается тем, что перед реализацией рабочего шага делаются пробные измерения показателя качества в двух соседних точках $x \pm g$, отстоящих друг от друга на расстоянии 2g, не меньшем, чем интервал нечувствительности $\varepsilon \le 2\text{g}$. Два измерения показателя качества дают возможность определить, с какой стороны расположен экстремум и организовать движение к экстремуму. Для этого достаточно считать функцию качества унимодальной.

В случае минимизации алгоритм поиска с парными пробами может быть записан в следующей форме:

$$x_{i+1} = x_i - a\,\text{sign}\left[Q(x_i + g) + Q(x_i - g)\right],$$

где x_i — положение объекта на i-м этапе поиска, a — величина рабочего шага по управляемому параметру, g — величина пробного шага, sign — функция знака:

$$\text{sign}\,y = \begin{cases} +1, y > 0 \\ 0., \text{y} = 0 \\ -1, y < 0 \end{cases}.$$

Однако такую функцию практически реализовать аппаратно нельзя (для этого, как легко заметить, понадобится создать усилитель с бесконечным коэффициентом усиления).

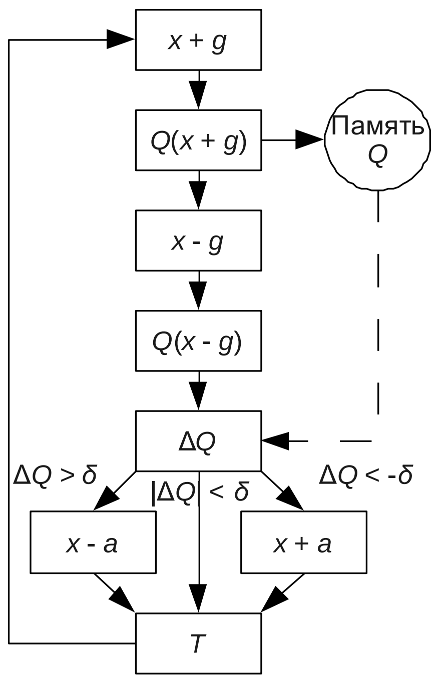
Действительно аппаратно реализуется релейная функция вида

$$F(y) = \begin{cases} +1, y > \delta \\ 0, |y| < \delta \\ -1, y < -\delta \end{cases}.$$

Эта функция описывает работу поляризованного реле с зоной нечувствительности. Как видно, в пределе при $\delta \to 0$, выражение преобразуется к виду, т. е.

$$\lim_{\delta \to 0} F(y) = \text{sign}\,y.$$

Рисунок 1. Блок-схема алгоритма поиска с парными пробами.пробами.



Работа рассматриваемого алгоритма происходит по схеме (программе), представленной на рисунке 1. Здесь каждый прямоугольник обозначает определенный оператор, т. е. такую инструкцию, выполнение которой необходимо для функционирования алгоритма поиска. Так, операторами «$x \pm g$» обозначается изменение значения управляемого параметра с x на $x \pm g$. Операторы «$Q(x \pm g)$» выражают определение показателя качества в точках $x \pm g$. «ΔQ» — оператор вычисления приращения показателя качества

$$\Delta Q = Q(x+g) - Q(x-g).$$

Операторами «$x \pm a$» определяется изменение управляемого параметра на величину a в ту или иную сторону. Переход к этим операторам условный и зависит от величины ΔQ. Условия соответствующих переходов обозначены рядом со стрелками в виде неравенств. Оператором «T» обозначена выдержка системы в течение времени T в зафиксированном состоянии.

Кружком на схеме обозначен блок запоминания «память Q», необходимый для функционирования алгоритма. В блок запоминания заносится значение $Q(x+g)$, которое после запоминания сразу поступает на выход этого блока. Направление движения запоминаемой и воспроизводимой информации показано на схеме пунктирной стрелкой.

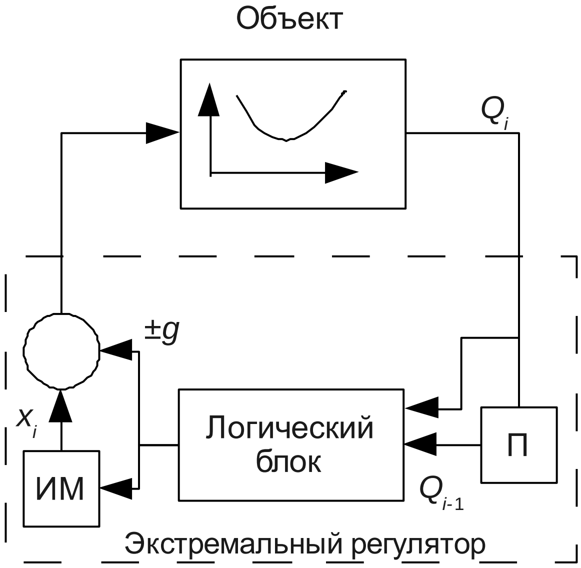


Рисунок 2. Блок-схема системы экстремального управления

а рисунке 2 показана блок-схема устройства, реализующего процесс экстремального управления объектом по описанному методу. Здесь пунктиром обозначен экстремальный регулятор. Логический блок, координирующий работу регулятора, реализует алгоритм поиска, показанный на рисунке 1. Блок памяти *П* необходим для запоминания предыдущего значения показателя качества устройства, а исполнительный механизм *ИМ* изменяет значение управляемого параметра *x* объекта. Логический блок образует пробные шаги ±*g* и, наблюдая по каналу обратной связи за двумя значениями показателя качества Q_i и Q_{i-1}, организует в соответствии с алгоритмом поиска управление исполнительным механизмом, который в свою очередь изменяет управляемый параметр *x* в сторону оптимального значения x^*.

Поиск с непарными пробами

Рассмотренный выше алгоритм поиска можно упростить за счет совмещения одной пробы с исходным состоянием *x* на каждом цикле поиска. Действительно, для организации движения экстремума к цели достаточно замерять состояние системы в точках x и $x+g$. В этом случае алгоритм поиска упрощается и записывается в виде

$$x_{i+1} = x_i - aF[Q(x_i + g) - Q(x_i)],$$

где F — как обычно, релейная функция. Если $F = 0$, то система возвращается в состояние x_i , т. е. из состояния $x_i + g$ делается обратный шаг $\Delta x = -g$.

В аппаратном исполнении этот алгоритм удобно реализовать без специальной подпрограммы пробных шагов, т. е. без возврата в исходное состояние после пробного шага. Однако при этом величина рабочего шага будет зависеть от его направления. Алгоритм поиска в этом случае записывается в следующем виде:

$$\Delta x_i = \begin{cases} a-g, Q(x_i+g)-Q(x_i) < -\delta \\ -g, |Q(x_i+g)-Q(x_i)| \le \delta \\ -a-g, Q(x_i+g)-Q(x_i) > \delta \end{cases}.$$

Здесь рабочий шаг Δx_i производится не из исходного состояния x_i, а из пробного $x_i + g$. На рисунке 3 показано движение системы при отрицательном (а) и положительном (б) наклоне характеристики объекта. Такой выбор величины рабочих шагов позволяет сделать среднюю скорость изменения управляемого параметра одинаковой в обоих направлениях. (Если бы величина рабочего шага не зависела от направления, т. е. $a_i = a$, то, как легко заметить, за один цикл при движении вправо система смещалась бы на $a + g$, а влево — на $a - g$, в результате чего оба направления были бы неравноправны.)

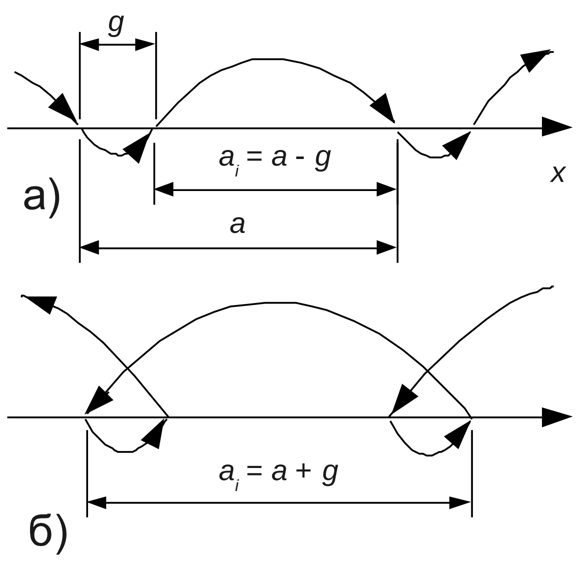


Рисунок 3. Движение системы в процессе поиска при а) $x < x^*$ и б) $x > x^*$

На рисунке 4 показана блок-схема программы этого алгоритма. Примененные здесь новые операторы имеют следующий смысл: оператор «$T,Q(\cdot)$» является оператором выдержки в течение промежутка времени T с одновременным определением показателя качества в одном из состояний, указанных предыдущими на схеме операторами: «$x+a-g$», «$x-g$» и «$x-a-g$». Результат определения показателя качества $Q(x)$ закладывается в «память», которая обозначена здесь кружком. Направление циркуляции запоминаемой и запрашиваемой информации показано пунктирными стрелками.

Временные затраты для этого алгоритма поиска складываются следующим образом:

1. Пробный шаг (он один)
   $t_{\text{п}} = t_{\text{п}1} + t_{\text{п}2} + t_{\text{п}3}$.
   Как видно, этот промежуток времени меньше, чем в предыдущем алгоритме.
2. Процесс принятия решения, так же как в предыдущем алгоритме, практически не связан с временными затратами, т. е. $t_{\text{реш}} \approx 0$.
3. Аналогично можно вычислить затраты на выполнение рабочего шага. При наличии естественных ограничений на ускорение управляемого параметра $|\ddot{x}| \le r > 0$ минимальное время выполнения рабочего шага:
   $t_{\text{раб}}^{\min} = 2\sqrt{\dfrac{a_i}{r}}$,
   где a_i, зависит от направления движения.
4. Время выдержки T в данном алгоритме не может быть меньше временных затрат на определение показателя качества, т. е. $T \ge t_{\text{п}2}$.

Рассмотрим работу этого алгоритма при оптимизации квадратичного объекта:

$$Q(x) = k(x - x^*)^2 + Q^* .$$

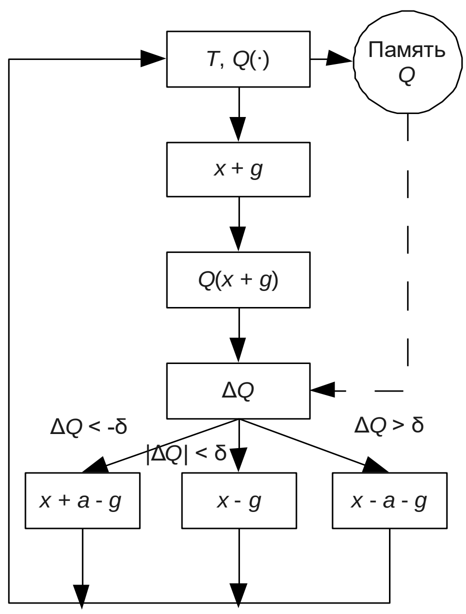


Рисунок 4. Блок-схема алгоритма поиска с непарными пробами

В данном случае изменение показателя качества в результата проб равно

$$\Delta Q = 2kg\left(x - x^* - \frac{g}{2} \right).$$

Зона нечувствительности в районе экстремума, где принимается решение о том, чтобы не делать рабочего шага, определяется следующими неравенствами:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{kg} + g \right) < x - x^* < \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{kg} - g \right).$$

Как видно, зона нечувствительности несимметрична относительно экстремума $x = x^*$.

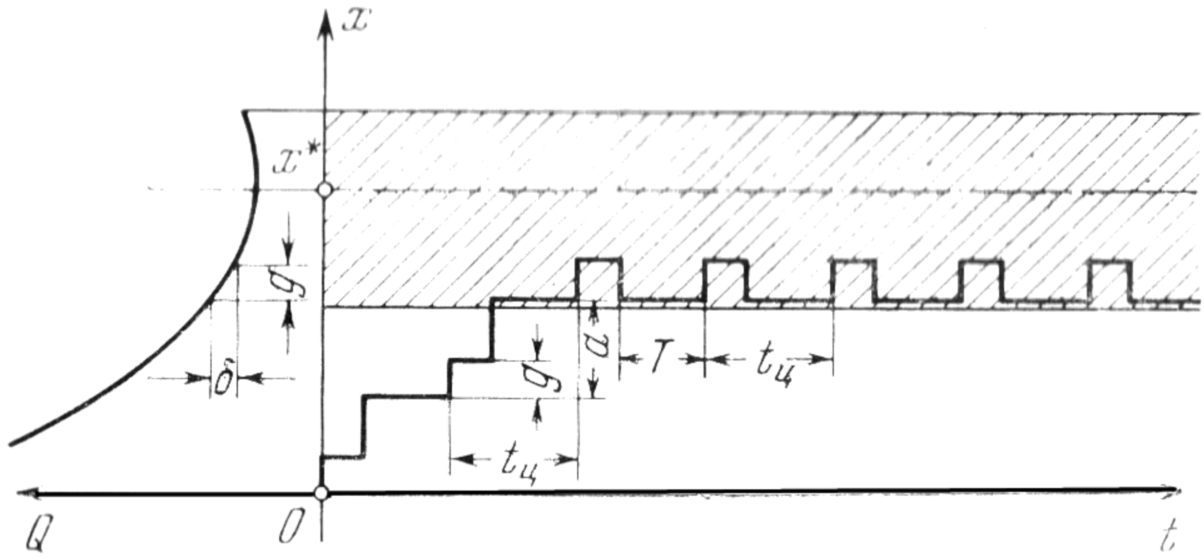


Рисунок 5. Пример процесса поиска по алгоритму с непарными пробами

Для того, чтобы система поиска всегда останавливалась в районе экстремума, т. е. всегда в процессе движения к экстремум находилось бы такое состояние x, для которого $|\Delta Q| < \delta$, необходимо, чтобы зона нечувствительности была не меньше величины рабочего шага, т. е.

$$a \le \frac{\delta}{kg} \qquad (3.1)$$

На рисунке 5 показан пример работы алгоритма поиска.

Если бы неравенство (1) не выполнялось, то могло случиться, что система никогда не попала бы внутрь зоны нечувствительности (это зависит от выбора начальных условий) и совершала бы колебательные движения вокруг экстремума, что, естественно, приводит к излишним потерям.

Индивидуальное задание: Студенты с четным порядковым номером в журнале должны выбирать один из методов регулярной оптимизации (спуск по координатам (Гаусса-Зайделя) , наискорейший спуск, метод сопряженных градиентов и т.д.): студенты с нечетным порядковым номером в журнале выбирают один из методов случайного поиска (метод случайного поиска с парными пробами и с непарными пробами, с линейной тактикой и нелинейной тактикой и т.д.) в реализуют его на тестовой задаче.

Тестовая задача примера студента выбирается из литературы но соответствующему ему номеру в журнале.

Контрольные вопросы

1. Суть и постановка задачи оптимизации.
2. Как классифицируется задачи оптимизации и их методы?
3. Как записывается общая модель задачи линейного программирования?
4. Как ставится задача булева программирования?
5. Из чего состоит требования для методов оптимизации?
6. Из чего состоит условие окончания алгоритма оптимизации?
7. Какой метод оптимизации можно назвать Эффективным" методом?
8. Методы оптимизации с порядками 0-ой, 1-ой, 2-ой и т.д. и какие их основные признаки?

ЛИТЕРАТУРА

Растригин А.А. Современные принципы управления сложными объектами. М.: Сов.радио, 1987.-232с.
Растригин А.А., Маджаров И.К. Введение в идентификации объектов управления. М.: Энергия, 1988.-216с.
Разработка САПР [Текст] : в 10 кн. Практ. пособие / Под ред. А. В. Петрова. - М. : Высш. шк., 1990.

Лабораторная работа №4

Модели булева программирования и типовые задачи линейного программирования.

Цель: Представление задач с помощью моделей булева программирования и ознакомление возможными путями их решения.

4.1 МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Задача оптимизации линейной целевой функции с булевыми переменными и линейными ограничениями является одной из самых распространенных моделей дискретного программирования. Комбинаторные задачи с булевыми переменными, принимающими значения 0 или 1, встречаются при решении многих практических проблем из экономики, проектирования, управления и других областей.

Задача оптимизации (минимизации или максимизации) линейной целевой функции с булевыми переменными и линейными ограничениями в общем виде описывается с помощью одной из следующих моделей линейного булева программирования:

I. Модель А - для задачи минимизации

$$q(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \xrightarrow[x_j \in \{0;1\}]{} \min \qquad (4.1)$$

$$h_i(x) = (a_i, x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (4.2)$$

II. Модель В - для задачи максимизации

$$q(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \xrightarrow[x_j \in \{0;1\}]{} \max \qquad (4.3)$$

$$h_i(x) = (a_i, x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (4.4)$$

т.е. требуется минимизировать или максимизировать линейную целевую функцию $q(x)$ по булевым переменным $x_j \in \{0,1\}$ при выполнении условия, задаваемого системой линейных неравенств вида (4.2) или (4.4).

Проблема отыскания решения задачи (4.1), (4.2) или (4.3), (4.4) может в принципе решаться с применением метода полного перебора, суть которого заключается в переборе всех булевых векторов заданной длины, проверке для каждого вектора выполнения линейных ограничений, вычислении значений целевой функции для допустимых векторов и выборе из них минимального или максимального значения целевой функции. Однако решение, полученное методом полного перебора, связано с большим объемом вычислений, который неосуществим при больших размерностях задачи даже на сверхпроизводительных ЭВМ. Так как каждая из n компонент независимо от других может принимать два значения 0 или 1, поэтому общее число булевых векторов длины n равно 2^n.

Это величина и характеризует сложность алгоритма полного перебора. В связи с тем, что для большинства задач дискретной оптимизации полный перебор неосуществим, были разработаны различные методы неявного перебора, которые обеспечивают нахождение точного решения без пересмотра всех булевых векторов. Такими являются различные варианты метода отсечений, метода ветвей и границ, метода динамического программирования. Но опыт применения этих методов при решении реальных задач с достаточно большим числом переменных показал, что многие задачи линейного программирования с булевыми переменными еще являются нерешаемыми на ЭВМ из-за нехватки машинного времени. Следовательно, с ростом размера задачи n она становится "труднорешаемой", т.е. практически неразрешимой.

Задача (4.1), (4.2) или (4.3), (4.4) в числе многих задач комбинаторной оптимизации отнесена к классу "труднорешаемых" или, NP (no polynomial) -

полных задач. Причина заключается в том, что алгоритма, решающего поставленную задачу за время, ограниченное полиномам от "размера задачи", в настоящее время нет.

В связи с этим исследования, направленные на разработку новых эффективных или полиномиальных методов решения задач линейного программирования с булевыми переменными, являются, несомненно, актуальными.

Сначала рассмотрим широко распространенные практические задачи, описываемые моделями линейного программирования с булевыми переменными.

4.2 Преобразование задачи с дискретными переменными к задаче с булевыми переменными

Пусть x дискретная переменная, принимающая только целые значения $0,1,2,...,k$. Тогда эту переменную можно представить как линейную комбинацию $(p+1)$ булевых переменных $y_0, y_1,...,y_p$, т.е.:

$$x = y_0 + 2y_1 + 2^2 y_2 + ... + 2^p y_p \ , \qquad (4.4)$$

где $y_i \in \{0;1\}, \ (i = 0,1,2,...,p);$ p-наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$k \le 2^{p+1} - 1. \qquad (4.5)$$

Пример. Рассмотрим следующую задачу целочисленного программирования

$$q(x_1, x_2,) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\{x_1,\ x_2\}}$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 15$$

$$0 \le x_1 \le 5$$

$$0 \le x_2 \le 3$$

$x_1, x_2 -$ целые.

Переменная x_1 принимает шесть целых значений: $0,1,2,3,4,5$. Для этой переменной $k_1=5$. Возьмем для переменной x_1 наименьшее целое число p_1, оно определяется из условия (4.2)

$5 \le 2^{p_1+1} - 1,$ откуда $p_1 = 2$

Исходя из (1), можно произвести замену переменных:

$$x_1 = y_0 + 2y_1 + 4y_2, \qquad y_0, y_1, y_2 \in \{0;1\}.$$

Переменная x_2 принимает четыре целых значения $0,1,2,3$.

Следовательно, для x_2 : $k_2 = 3$, $p_2 = 1$;

$$x_2 = y_3 + 2y_4, \qquad y_3, y_4 \in \{0;1\}.$$

Исходная задача дискретного программирования преобразована к следующей задаче булева программирования :

$$q(y) = 2y_0 + 4y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \to \max_{y_i \in \{0;1\}}$$

$$\begin{aligned}
&3y_0 + 6y_1 + 12y_2 + 2y_3 + 4y_4 \le 15 \\
&y_0 + 2y_1 + 4y_2 \le 5 \\
&y_3 + 2y_4 \le 3 \\
&y_i \in \{0;1\}, \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).
\end{aligned}$$

Если дискретная переменная x принимает произвольные целые дискретные значения c_1 , c_2 , c_3 ,..., c_k , то в этом случае соотношения (4.3) и (4.4) соответственно преобразуются в следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&x = c_0 + y_0 + 2y_1 + 2^2 y_2 + \ldots 2^p y_p , \\
&c_k \le 2^{p+1} - 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, всегда можно ограничиться рассмотрением задачи булева программирования вместо задачи дискретного программирования.

4.3 Преобразование задачи линейного булева программирования к задаче нелинейного булева программирования

Задача вида

$$q(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x_j \in [0;1]} \qquad (4.6)$$

$$h(x) = (a,x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \qquad (4.7)$$

в числе многих задач комбинаторной оптимизации отнесена к классу “трудноrешаемых”. Следовательно, для эффективного решения на вычислительных машинах задач большого размера нужно искать алгоритмические принципы, позволяющие определять оптимальное решение без необходимости явно перечислять элементы множества булева вектора $x=(x_1,x_2, . . . , x_n)$ 2^n.

Именно эта идея неявного (в противоположность явному) перечисления решений и лежит в основе методов, предлагаемых и исследуемых в данной книге. Идейная основа последних заключается в преобразовании исходной задачи (4.4), (4.52) к следующей задаче булева программирования:

$$\varPhi(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}a_jx_j}\to\max_{x_j\in[0;1]}. \qquad (4.8)$$

При переходе от задачи (4.4), (4.5) к задаче (3) возникает вопрос: не теряется ли смысловое содержание исходной задачи при переходе к новой форме. Оказывается, не теряется, это объясняется следующим образом: Максимизируя функцию *Ф(x)* по булевым переменным $x=(x_1,x_2,\ldots,\ x_n\ )$, практически мы , во-первых, максимизируем числитель выражения (4.8), т.е. линейную функцию булевых переменных

$$q(x)=(c,x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\ ,$$

что соответствует задаче (4.4). Во-вторых, при максимизации выражения (4.8), минимизируется знаменатель этого выражения, т.е.

$$(a,x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\ ,$$

Следовательно, минимизация выражения $(a,x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$, хотя это процедура не обеспечивает точного выполнения условия (4.5), а способствует выполнению этого же условия.

В дальнейшем исследовании задачи о рюкзаке (см. п.п. 4.1)будет изложена вычислительная схема получения решения задачи (4.8) в виде упорядоченного ряда булевых переменных

$$x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_n}, \qquad (4.9)$$

но этот ряд булевых переменных может не удовлетворять выполнению ограничения вида (4.5). После получения упорядоченного ряда (4.9) каждый очередной элемент этого ряда поочередно слева направо будет вставлен в выражения (2) и таким образом проверено выполнение условия

$$(a,x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\le b$$

до максимального числа первых n' переменных упорядоченного ряда (4.9).

Таким образом, переход от исходной задачи линейного булева программирования вида (4.1), (4.2) к новой задаче – максимизации фишерского типа функционала вида (4.3) логичен.

Индивидуальная работа: Студентам с четным порядковым номером в журнале требуется выбрать и реализовать типичную задачу в виде следующей модели:

$$q(x)=(c,x)=\sum_{j=1}^{n} c_i\, x_j \text{ ---> } \min\ x_j □□ \{0;1\}$$

$$h(x)=(a_i,x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i > b_i,\ (i=1,2\ldots\ldots.n);\ a_{ij}>0,\ b_i>0,$$

$$c_j>0,\ \{i=1,2\ldots,m;\ j=1,2\ldots,n;\}$$

Студентам с нечетным порядковым номером в журнале требуется выбрать и реализовать типичную задачу в виде следующей модели:

$$q(x)=(c,x)=\sum_{j=1}^{n} c_i\, x_j \text{ ---> } \max\ x_j □□ \{0;1\}$$

$$h(x)=(a_i,x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i > b_i,\ (i=1,2\ldots\ldots.n);\ a_{ij}>0,\ b_i>0,$$

$$c_j>0,\ \{i=1,2\ldots,m;\ j=1,2\ldots,n;\}$$

Контрольные вопросы

1. Как формулируется общая задача булева программирования?
2. Как формулируется задача линейного булевого программирования?
3. Какие методы используются для решения задач булева программирования?
4. Как определяется число шагов в методе полного перебора?
5. Какие знания могут принимать неизвестные переменные в задаче булева программирования?

ЛИТЕРАТУРА

Компьютер и задача выбора // Под редакцией д.ф-м.н., проф. Журавлева Ю.И. М: НауукаД989 -208 с.
Гэрри М.Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: Мир, 1982 -416с.
Пападикитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.:Мир,1985. -512 с.

Лабораторная работа №5.

Структурная и параметрическая идентификация динамических объектов

Цель: На основе изучение априорных (качественных) и апостериорных данных изучаемого объекта, требуется определить вид динамической модели и неизвестных параметров.

Динамические модели

Для большинства производственных процессов полное описание возможно получить только при изучении их динамических характеристик, т.е.при изучении временных закономерностей, присущих этим процессам; лишь в некоторых частных случаях можно ограничиться статическими характеристиками. Особенно это относится к комплексам, состоящим из ряда взаимосвязанных объектов.

Большинство современных производственных объектов, существующих и проектируемых автоматических линий, выпускающих штучную продукцию, оснащено сложным автоматическим оборудованием ,выполняющим одновременно или с некоторым сдвигом во времени несколько переходов. Большое число внутренних взаимосвязей часто не подается точному описанию. Поэтому определение динамических характеристик таких процессов представляет собой чрезвычайно сложную задачу.

Динамические характеристики подобных объектов и линий могут быть определены статическими методами. Это объясняется не только тем, что входные и выходные переменные процессов имеют статическую природу, но и тем, что природа переменных, характеризующих внутреннее состояние объектов, внешних возмущений и других характеристик процессов, также имеют статическую природу. Для получения математического описания таких процессов должны быть применены вероятностные методы.

В качестве примеров автоматических линий, для которых статические характеристики не являются полными, можно указать следующие.В последнее время на автоматических линиях широко применяются процессы бесцентрового шлифования широкими кругами с одновременной обработкой нескольких изделий. Ясно, что управление этими процессами может быть осуществлено только при правильном учете динамических характеристик. Агрегаты станов листовой и трудной прокатки также представляют собой инерционные объекты, и регулирование в процессе прокатки может осуществляется только в том случая, если известны динамические характеристики этих агрегатов.

Для определения статических характеристик ранее использовалась теория случайных величин. Входные и выходные переменные объекта, а также переменные, характеризующие внутреннее состояние объекта, считались случайными величинами. Многие практические вопросы изучения характеристик процессов, статические методы контроля и расчета надежности и др.до недавнего времени решались в пределах теории случайных величин.

Для определения динамических характеристик процессов и линий применение теории случайных величин недостаточно; для построения динамических моделей применяется теория случайных функций, которая, как и теория случайных величин, является одним из разделов теории вероятностей. Применение теории случайных функций дает возможность значительно увеличить сведения о непрерывных производственных процессах и автоматических линиях, а динамические характеристики, полученные на базе этой теории, могут использоваться для оптимального управления, повышения качества продукции и ее надежности.

Корреляционные методы построения моделей одномерных линейных объектов

Практическое определение общих динамических характеристик объектов связано со значительными трудностями, вызванными необходимостью определить многомерные плотности вероятности входных случайных функций. Даже в случая определения статических характеристик, когда на входе и выходе объекта рассматриваются случайные величины, объем экспериментов и вычислений настолько велик, что часто вместо получения эмпирических законов распределения приходится ограничиваться лишь отдельными числовыми характеристиками этих величин. Объем вычислительных работ значительно возрастает в случае, когда для определения общих динамических характеристик приходится находить многомерные эмпирические законы распределения. По-видимому, в ближайшие годы определение общих динамических характеристик будет проводиться только для не переналаживаемых автоматических линий массового производства. При этом и для таких линий придется в первый период исследований ограничиваться более просимы приближенными характеристиками, базирующимися на числовых характеристиках случайных функций.

Применение числовых характеристик случайных функций даёт возможность во многих случаях с достаточной для практических целей точностью получить математическое описание объектов (определить его динамические характеристики).В связи с тем, что определение динамических характеристик, основанное на корреляционной теории случайных функций, значительно проще и требует меньшего объема экспериментальных работ и вычислений, они нашли широкое применение для определения динамических характеристик автоматических систем. Использование корреляционных методов для определения динамических характеристик объектов автоматизации и автоматических линий в целом дает возможность во многих случаях получить достаточно хорошие для практических целей математические модели исследуемых объектов. Поэтому в последнее время корреляционные методы нашли широкое применение. В настоящем параграфе рассматриваются корреляционные методы определения динамических характеристик одномерных линейных объектов по моментным числовым характеристикам случайных функций. Как и в случае определения статических характеристик, под линейным объектом мы будем понимать объект, для которого регрессия выходной переменной относительно входной линейна, а корреляция гомоскедастична.

Рассмотрим одномерный объект, на вход которого подается случайная X(t),а на выходе получается случайная функция Y(t).Предположим, что нам заданы (или что нами определены по экспериментальным данным) основные числовые характеристики входной X (t) и выходной Y(t)случайных функций:

-математические ожидания

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi_x(x,t)dx, \qquad (5.1)$$

$$m_y(t) = M\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, \varphi_x(y,t)dy, \qquad (5.2)$$

-автокорреляционные функции

$$K_{xx}(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - m_x(t)][x' - m_x(t')] \times$$
$$\times \varphi_{xx}(x,x';t,t')dxdx', \qquad (5.3)$$

$$K_{yy}(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[y - m_x(t)]\left[y' - m_y(t')\right] \times$$
$$\times \varphi_{yy}(y,y';t,t')dydy', \qquad (5.4)$$

-взаимная корреляционная функция

$$K_{yx}(s,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[y - m_x(s)][x' - m_x(t')] \times$$
$$\times \varphi_{yx}(y,x';s,t')dydx', \qquad (5.5)$$

Определение характеристик объекта рассмотрим сначала для частного, но важного для практики случая, когда плотности вероятности случайных функции X(t) и Y(t) и их совместная плотность вероятности нормальны. Тогда для каждого момента времени выходная случайная функция Y(t) будет связана линейной зависимостью с входной случайной функцией X(t) для любого значения аргумента t (аргумент t принимает дискретные значения).

В качестве примера определения характеристик реальных объектов можно указать определение размеров деталей данного номера (момент времени t)для токарных, фрезерных, шлифовальных и других автоматических станков по геометрическим размерам или другим характеристикам заготовок для того же номера детали и всех деталей, обработка которых будет производиться в последующие моменты времени. Аналогично для трубопрокатного стана рассматривается, например, значение наружного диаметра в данном поперечном сечении трубы как функция наружного диаметра заготовки в данном сечении и всех последующих сечений. В каждом из рассмотренных примеров информация об объекте будет больше, если учесть, что на размер той или иной детали, на выходе объекта оказывают влияние не только размер этой детали, но и размеры других деталей на входе, которые вместе с рассматриваемой деталью подвергаются одновременной обработке.

В каждый момент времени t,выходная случайная функция Y(t)определяется значениями входной случайной функции X(s) в моменты $s_1, s_2 \ldots, s_n$, предшествующие моменту t.

Условное математическое ожидание выходной переменной Y(t) при фиксированных значениях $X(s_1) \ldots X(s_i), \ldots X(s_n)$ равно

$$M\{Y(t)\mathrm{I}X(s)\} = a(t,s_1,\ldots,s_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(t,s_1,\ldots,s_n)\,x(s_i) =$$
$$= a(t,\bar{s}) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,s_1)x(s_i). \qquad (5.6)$$

Где $A_i(t,\bar{s})$ – коэффициенты множественной регрессии;

$A(t, \bar{s})$- свободный параметр.

Методы определения (5.6) представляет собой уравнение взаимосвязи выходной переменной Y от динамических характеристик входной переменной X. При расчете для данного случая гиперплоскости регрессии M{Y(t)|X(s)} учитывается взаимосвязь Y(t) в момент t с входной переменной X(s) во все моменты времени $s_1, s_2, \ldots s_n$. Ссуммирование в правой части (5.6) производится от момента времени s_1 до наступления взаимосвязи между выходной и входной величинами; для моментов времени s_{n+1}, s_{n+2} корреляция между Y(t) X(t) отсутствует.

Усредняя по X(s) обе части уравнения (5.6),для математического ожидания выходной переменной Y(t) получаем следующее выражение:

$$M\{Y(t)\} = a(t, \bar{s}) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t, \bar{s}) M\{X(s_i)\} \qquad (5.7)$$

Для всех значений t,при которых Y(t) корреляционно связано с X(s).

Составляющие общей дисперсии выходной переменной определяются из следующих соотношений:

$$D\big\{M\{Y(t)\mathrm{I}X(s)\}\big\} = D\{Y(t)\}R_{yx}^2(t, \bar{s}), \qquad (5.8)$$

$$M\big\{D\{(t)\mathrm{I}X(s)\}\big\} = D\{Y(t)\}\big(1 - R_{yx}^2(t, \bar{s})\big). \qquad (5.9)$$

Для некоторых производственных процессов X(t)и Y(t) является стационарными и стационарно связанными нормальными (гауссовыми) случайными функциями. В этом случая математические ожидания и дисперсии входной и выходной случайных функций являются постоянными:

$$m_x(t) = const, m_y = const, \qquad (5.10)$$

$$D_x(t) = const,\ D_y = const, \qquad (5.11)$$

а автокорреляционные и взаимно корреляционные функции являются функциями одной переменной, так как зависят лишь от разности $t - t' = \tau$:

$$K_{xx}(t, t') = K_{xx}(\tau) = cov_{xx}(\tau), \qquad (5.12)$$

$$K_{yy}(t, t') = K_{yy}(\tau) = cov_{yy}(\tau),$$

$$K_{yx}(t, t') = K_{yx}(\tau) = cov_{yx}(\tau),$$

В рассматриваемой случая условное математическое ожидание выходной случайной функции Y(t) относительно X(s) определяется уравнением (5.6), а безусловное математическое ожидание Y(t) для заданного значения t-формулой

$$M\{Y(t)\} = a(t - s_1, \ldots, t - s_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(t - s_1, \ldots, t - s_n)\, M\{X(s_i)\} =$$

$$= a\overline{(\tau) + m_x(s)} + \sum_{i=1}^{n} A_i(\bar{\tau}). \qquad (5.13)$$

Дисперсия условного математического ожидания, как легко получить из (5.6), равна

$$D\{M\{Y(t)\mathrm{I}X(t)\}\} = D_x(t)\sum_{i=1}^{n-1} A_i^2(\bar{\tau}) +$$

$$+2\sum_{i-1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} A_i(\bar{\tau})\, A_j(\bar{\tau}) cov(x_{\tau_i}, x_{\tau_j}). \qquad (5.14)$$

Учитывая, что

$$cov\left(x(\tau_i), x(\tau_j)\right) = D_x(t) p_{xx}(\tau_{ij}), \qquad (5.15)$$

Перепишем уравнение (5.14) следующим образом:

$$D\{M\{Y(t)\mathrm{I}X(s)\}\} = D_x(t)\sum_{i=1}^{n-1} A_i^2(\bar{\tau}) +$$

$$+2D_x(t)\sum_{i-1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} A_i(\bar{\tau})\, A_j(\bar{\tau}) p_{xx}(\tau_{ij}), \qquad (5.16)$$

Где $p_{xx}(\tau_{ij})$ -коэффициент корреляции значений случайной функции X(t) в моменты времени τ_i и τ_j.

Значение а ($\bar{\tau}$) для рассматриваемого случая равно

$$a(\tau) = m_y(t) - m_x(s)\sum_{i=1}^{n-1} A_i(\bar{\tau}), \qquad (5.17)$$

система уравнений для определения коэффициентов регрессии запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\bar{\tau}) p_{xx}(\tau_{1i})\sigma_x(\tau_i) = p_{yx}(\tau_1)\sigma_y(t), \quad (5.18)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\bar{\tau}) p_{xx}(\tau_{ni})\sigma_x(\tau_i) = p_{yx}(\tau_n)\sigma_y(t),$$

откуда

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{xx}(\tau_{ij}) = \frac{\sigma_y(t)}{\sigma_x(t)} p_{y(t)x(i-\tau_j)}. \qquad (5.19)$$

Для принятых условий коэффициент множественной корреляции равен

$$R_{y(t)\mathrm{I}x(s)}\sqrt{\frac{D_x(s)}{D_y(t)}\left[\sum_{i=0}^{n} A_i^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} A_i A_j p_{xx}(\tau_{ij})\right]}. \quad (5.20)$$

Из приведенных основных уравнений одновременного объекта для случая, когда X(t) и Y(t)-стационарные и стационарно связанные случайные функции, видно, что основные характеристики объекта полностью определяются математическими ожиданиями, корреляционными и взаимно корреляционными функциями процессов X(t) и Y(t). И для этого случая, когда значения малы, а n велико, полученные основные уравнения объекта могут быть использованы и для случаев, когда X(t) и Y(t) –непрерывные случайные функции.

Изучаемый объект представляется в виде многополюсника (или черный ящик»). Он представляет собой как динамически не стохастичный дискретный объект, т.е. имеет структуру

A=<1,0, γ,1>

Номер задачи соответствует последней цифре порядкового номера студента в журнале	Численные значения параметра характеризующей изучаемый объект						Примечание
	n	r	l	k	□	m	Определите значение параметра - k
1.	2	2	2		1	20	k-□ k>10
2.	2	1	2		1	20	k-□ k>10
3.	2	0	3	15	0	25	
4.	1	2	3	18	0	25	
5.	2	2	3	21	0	25	
6.	3	1	2		1	20	k-□ k>10
7.	3	2	2		1	20	k-□ k>10
8.	1	1	2		1	20	k-□ k>10
9.	3	0	3	18	0	25	
10.	0	3	3	18	0	25	

Апостериорные данные изучаемого объекта представлен в виде

$$Ktt< 0 \quad), U(t_i)>, (j=1,2,..n)$$

Функционально динамическая модель объекта можно представить в виде

$$X=E(Y, C. t)$$

Здесь C параметры C=C1,C2,...Ck требуемые к определению неизвестные параметры объекта.

Индивидуальная задача

Апостериорные данные для задач 1-10.

Таблица №5.1

Объект номера	X1	X2	X3	U1	U2	U3	y1	Y2	Y3
	9.0	2.3	1.1	17.0	3.0	1.2	0.7	1.3	0.7
	6.2	4.9	3.1	15.0	3.0	2.6	1.6	3.0	1.2
	5.0	6.9	4.8	15.0	3.0	4.0	2.3	4.9	1.4
	3.9	8.3	6.1	13.0	3.0	5.9	3.2	6.4	1.9
	3.1	9.4	7.5	13.0	3.0	7.1	4.5	7.8	2.2
	2.8	10.2	8.7	13.0	3.0	9.7	5.9	8.6	2.9
	2.2	11.0	8.5	11.0	6.0	9.9	7.0	9.0	3.4
	2.0	11.5	7.5	11.0	6.0	10.9	8.0	8.8	4.2
	1.8	12.0	6.0	11.0	6.0	11.0	9.0	8.1	5.1
	1.5	12.4	4.2	9.0	6.0	9.0	9.8	7.2	6.0
	1.2	12.8	2.9	9.0	6.0	4.5	10.3	6.5	7.0
	1.1	13.1	2.0	9.0	6.0	3.1	10.6	5.7	7.8
	1.1	13.5	1.6	7.0	6.0	2.2	10.5	5.0	8.7
	1.0	13.7	1.3	7.0	6.0	1.8	10.1	4.5	9.4
	0.9	13.9	1.2	7.0	3.0	1.4	9.3	4.0	10.0
	0.8	14.1	1.0	5.0	3.0	1.3	8.6	3.2	10.5
	0.7	14.3	0.9	5.0	3.0	1.2	7.2	2.9	10.9
	0.6	14.5	0.8	5.0	3.0	1.1	6.1	2.6	11.0
	0.5	14.6	0.7	3.0	3.0	1.0	4.8	2.1	10.1
	0.4	14.8	0.7	3.0	3.0	0.9	3.7	1.9	8.0
	0.3	14.9	0.5	3.0	3.0	0.8	2.9	1.7	5.0
	0.2	15.0	0.5	1.0	3.0	0.7	1.9	1.4	3.1
	0.1	15.2	0.4	1.0	3.0	0.6	1.2	1.1	2.2

	0.1 0.0	15.4 15.6	0.2 0.1	1.0 0.0	3.0 3.0	0.5 0.4	0.6 0.2	0.9 0.6	1.5 0.9

Примечание: Выбрать данных соответствующих значению параметров в журнале.

Контрольные вопросы

1. Какой объект называется динамическим?
2. С помощью, каких моделей можно описать динамических объектов?
3. Как можно определить неизвестных параметров динамических объектов?
4. Какие численные методы используются в идентификации динамических объектов?

Основная литература

1. Эксперемент. Модель.Теория.Москва-Берлин. Наука .1982-332 б.
2. Под редакцией Дж. Эндрюса и Р. Маклоуна. Математическое моделирование, М.Мир, 1983
3. Растригин Л.А. Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. М. Энергия, 1987-216 б.
4. Математическое моделирование. Проблемы и результаты [Текст] : монография / Отв. ред. изд.: О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин. - М. : Наука, 2003. - 478 с. - (Росс. АН; Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения). - Лит. с.: 475-476.
5. Разработка САПР [Текст] : в 10 кн. Практ. пособие / Под ред. А. В. Петрова. - М. : Высш. шк., 1990.
6. А.Д. Цвиркун, В.К. Акинфиев, В.А. Филиппов. Имитационное моделирование в задачах структуры сложных систем [Текст] : оптимизационно-имитационный подход /; Отв. ред. В.Н. Бурков. - М. : Наука, 1985. - 173 с. - (Ин-т проблем управления).
7. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики [Текст] : сб. трудов / Под ред. А. Н. Тихонова, А. А. Самарского. - М. : МГУ, 1990. - 290 с.

Дополнительная литература

1. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперемент. М. Наука, 1979-224 б.
2. Проблемы вычеслительной математики (под редакцией А.Н.Тиханова), Издательство МГУ, 1980.
3. Советов Б.Я. Яковлев С.А. Моделирование систем М . 1985.
4. Левин А.Е., Герменко Г.Л. Моделирование иерархия основы автоматизированного проектирования. М. 1989.
5. Советов Б.Я. Яковлев С.А.Моделирование систем. Практикум М. Высшая школа.1988г.
6. Камилов М.М. Эргашев А.К. Математик моделлаштириш. ТАТУ, Тошкент 2007-176 б.

Приложение 1

Образец титульного листа

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Факультет: Информационные технологии

Кафедра: Программное обеспечение информационных технологий.

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №_____

____

(название работы)

по курсу «Математическое моделирование»

студент группы________________

____

(ф.и.о)

Преподаватель _______________

____

(ф.и.о)

____

(подпись)

Ташкент 2008 г

Методическое пособие для практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование».
Разработка рассмотрена на заседании кафедры
ПОИТ рекомендована к печати.
(протокол №____ от ____________2008 года)

Авторы	доц.каф. Камилов М.М. доц. каф. Салахутдинов В.Х.
Ответственный редактор	Проректор по учебной работе ТУИТ, д.т.н., проф. Каримов М.М.
Корректор	Павлова С.И.