АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.957: 536.2

Кабилжанова Фируза Азимовна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

05.13.18 –Теоретические основы математического моделирования

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент-2012

Работа выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Арипов Мирсаид Мирсиддикович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор

кандидат физико-математических наук

Ведущая организация –

Защита состоится «___»________20___г. в «_____» часов на заседании специализированного совета Д.015.17.02 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан по адресу: 100125, г.Ташкент, ул.Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат разослан «___» ________________ 20___г.

Ученый секретарь
специализированного совета Исмаилов М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств и численному исследованию некоторых нелинейных моделей теплопроводности, когда коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры в однородной и неоднородной среде, с учетом поглощения или источника.

Актуальность работы. Нелинейные параболические уравнения второго порядка служат основой для многих математических моделей, используемых в физике, механике, биологии, химии и экологии. Например, нелинейное уравнение теплопроводности при определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатической фильтрации газов и жидкостей в пористых средах, течения крови в мелких кровеносных сосудах, распространения выбросов отрицательной плавучести, диффузии нейтронов и альфа-частиц в реакторных материалах, химической кинетики и биологической популяции.

Использование основных законов сохранения (энергии, массы, числа частиц и т.д.) при математическом моделировании различных физических процессов нередко приводит к одним и тем же нелинейным уравнениям параболического типа. Среди уравнений указанного типа особенно часто встречается нелинейное уравнение теплопроводности. Его универсальный характер дает основание утверждать, что изучение краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности остается до настоящего времени актуальной темой исследования, ибо изучение свойств решений нелинейных уравнений приводит к новым явлениям и эффектам.

Нелинейное уравнение теплопроводности является обобщением хорошо известного линейного уравнения теплопроводности. Главное отличие нелинейного уравнения теплопроводности от линейного заключается в том, что коэффициент теплопроводности в нелинейном уравнении зависит от температуры или её градиента степенным образом. Поэтому для решений нелинейного уравнения не выполняется принцип суперпозиции, и многие методы решения задач математической физики, в частности, метод Фурье и метод функций Грина, становятся неприменимыми.

Исследованию процессов нелинейной теплопроводности, фильтрации газа и жидкости в пористой среде посвящены работы Я.Б.Зельдовича, А.А.Самарского, И.М.Соболя, А.П.Михайлова, В.А.Галактионова, Г.И.Баренблатта, О.А.Олейник, А.С.Калашникова, А.С.Компанейца, С.П.Курдюмова, R.Kersner, B.Knerr, M.Bertsch, J.L.Lions и многих других.

Нелинейные процессы теплопроводности впервые изучались в работе Я.Б.Зельдовича и А.С.Компанейца. Авторами рассмотрен процесс распространения тепла с помощью механизма лучистой теплопроводности из мгновенного точечного источника для плоской задачи, решение которой получено в аналитическом виде.

В той же работе установлено, что скорость распространения тепла для процессов нелинейной теплопроводности конечная, в отличие от задач, описываемых линейным уравнением теплопроводности. Я.Б.Зельдович и А.С.Компанеец показали, что решения ряда нелинейных задач теплопроводности являются обобщенными и допускают существование разрывов производных на фронте тепловой волны. В работах Г.И.Баренблатта показано, что некоторые процессы фильтрации газа и жидкости в пористой среде описываются уравнением, аналогичным нелинейному уравнению теплопроводности.

О.А.Олейник и А.С.Калашников доказали теоремы существования и единственности решения задачи Коши и решений краевых задач для уравнений параболического типа, а также сформулировали теоремы сравнения, на основании которых с помощью автомодельных решений получили условия конечной скорости распространения температурных волн.

А.А.Самарский и И.М.Соболь в 1963 году с помощью численного моделирования задач нелинейной теплопроводности показали существование „остановившейся" температурной волны, не проникающей из горячей среды в холодную. В дальнейшем явление локализации тепла исследовалось в целом ряде работ С.П.Курдюмова и его учеников.

Однако, несмотря на многочисленные исследования процессов нелинейной теплопроводности, аналитические решения ряда задач нелинейной теплопроводности до настоящего времени не найдены и, в частности, до сих пор не получены точные решения целого ряда краевых задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности. Поэтому приближенные методы решения задач математической физики представляют интерес. В работах А.А.Самарского, В.А.Галактионова, А.С.Калашникова, Л.К.Мартинсона, Р.Кершнера, Г.И.Баренблатта, B.F.Knerr, Chen Xinfu, Qi Y.W., Jong-Sheng Guo, Kombe Ismail, Kusano Takasi, Tomoyuki Tanigava, С.Н.Димовой, М.М.Арипова, А.Т.Хайдарова, Ш.А.Садуллаевой и других показана важность и необходимость построения частных решений, соответствующих различным значениям параметров. Поэтому большое значение придается исследованию нелинейных краевых задач параболического типа на основе автомодельного и приближенно-автомодельного подходов.

Одной из особенностей и трудностей изучаемых математических моделей является неединственность решения, что существенно отличает их от классических задач с единственным решением. Поэтому возникают следующие проблемы:

- найти «хорошее» приближение к каждому решению;
- сконструировать итерационный метод, который сходится всегда к искомому решению (соответствующему начальному приближению), сходится быстро и обеспечивает достаточную точность.

Для преодоления указанных проблем здесь использован метод нелинейного расщепления, сконструирован итерационный процесс с соответствующим методом линеаризации (метод Ньютона, Пикара и специальный метод), для визуализации решений использован пакет прикладных программ MathCad.

Сказанное выше позволяет заключить, что тема диссертации является актуальной.

Степень изученности проблемы. В настоящее время изучению различных свойств решений нелинейных задач посвящено большое количество работ и выявляются все новые и новые свойства их решений. Стандартные методы исследования нелинейных задач в зависимости от типа нелинейностей пока отсутствуют. Поэтому в каждом конкретном случае для исследования свойств решений прибегают к различным точным и приближенным методам. Только одни прямые вычисления и расчеты конкретных задач лишь в редких случаях позволяют выявить общие свойства и закономерности исследуемой модели. Отметим, что одними из основных подходов к изучению нелинейных свойств являются получение оценок для различных типов решений, дальнейшее численное моделирование и исследование задачи на основе этих оценок. Значительный прогресс в этом направлении достигнут благодаря работам А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, В.А.Галактионова, А.П.Михайлова, Л.К.Мартинсона, К.Б.Павлова, B.Knerr, M.Bertsch, М.М.Арипова, А.Хайдарова, Ш.Садуллаевой. В работах А.А.Самарского и его учеников показаны важность автомодельного и приближенно-автомодельного подхода для исследования свойств нелинейных задач. Математическую основу исследования нелинейных параболических задач разработали О.А.Олейник, А.С.Калашников, Ж.Л.Лионс, А.А.Самарский, С.П.Курдюмов, А.М.Михайлов, В.А.Галактионов, Р.Кершнер.

Важная задача для численного моделирования – изучение глобальной разрешимости задачи Коши и краевых задач, получение оценок решений, исследование асимптотики решений при больших значениях времени и поведения фронтов (свободной границы) без линеаризации уравнения. При этом получение оценок различных типов решений и свободной границы приближенно или асимптотически дает возможность численно исследовать изучаемые процессы и устанавливать нелинейные эффекты. Кроме того, одним из универсальных методов исследования решения нелинейных задач является аппарат сравнения решений, развитый в работах А.А.Самарского, А.С.Калашникова. Он расширяет возможности исследования свойств решений нелинейных параболических уравнений, так как найти подходящее решение дифференциального неравенства проще, чем какое-либо точное решение параболического уравнения, описывающего нелинейные процессы в биологии, химии, физике, механике, социологии. Следует также отметить, что одними из эффективных методов исследования нелинейных задач являются алгоритм нелинейного расщепления и метод эталонных уравнений, предложенный М.М.Ариповым, который, наряду с указанными выше подходами, используется в данной диссертации для решения поставленной задачи.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Диссертационная работа выполнена в рамках научно-исследовательской темы «Математическое моделирование нелинейных задач» кафедры «Информатика и прикладное программирование» НУУз имени Мирзо Улугбека, а также тем следующих грантов Центра науки и технологий, проводимых на кафедре: 1.Ф.1.1.8. – «Компьютерное моделирование нелинейных диффузионных процессов с учетом внешних воздействий на базе мультимедийных технологий», ОТ-Ф1-125 «Компьютерное моделирование, визуализация нелинейных процессов, описываемые уравнениями и системами типа реакции-диффузии и Клейна-Гордона, некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений».

Цель диссертационной работы состоит в исследовании качественных свойств решений нелинейных математических моделей, описывающих процессы теплопроводности, в однородной и неоднородной среде, когда коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры, с учетом поглощения или источника.

Задачи исследования:

- обоснование алгоритма нелинейного расщепления для решения вырождающихся уравнений теплопроводности с градиентной нелинейностью, с источником или поглощением;
- получение оценок для решений краевой задачи и фронта (свободной границы), в зависимости от значений параметров среды, размерности пространства, начальных и граничных данных;
- построение верхних решений задачи Коши алгоритмом нелинейного расщепления для уравнения нелинейной теплопроводности с сильным поглощением дивергентного и недивергентного видов;
- исследование асимптотического поведения решений краевой задачи для квазилинейного уравнения в критическом значении параметров;
- исследование условия возникновения неограниченных решений для уравнения с источником в неоднородной среде;
- разработка разностных схем, алгоритмов и комплекса программ для указанных задач в среде MathCad.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования диссертационной работы являются задачи теплопроводности в нелинейной среде и их применение для математического моделирования процессов, встречающихся в физике и в природе, а предмет исследования – изучение качественных свойств решений уравнения теплопроводности с градиентной нелинейностью и проведение на их основе численного исследования процессов теплопроводности.

Методы исследования. В работе использованы алгоритм нелинейного расщепления, методика сравнения решений, итерационные численные методы, методы переменных направлений и прогонки.

Гипотеза исследования. Предполагается возможность адекватного изучения нелинейных уравнений теплопроводности с градиентной нелинейностью на основе метода нелинейного расщепления, а численное исследование нелинейных процессов, описываемых уравнениями с градиентной нелинейностью, и проведение анализа результатов на основе полученных оценок решений и фронтов даёт исчерпывающую картину процесса.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертации являются:

- Обоснование алгоритма нелинейного расщепления для вырождающихся уравнений параболического типа с градиентной нелинейностью.
- Получение оценок для решений краевой задачи и фронта (свободная граница), в зависимости от значений параметров нелинейной среды и размерности пространства.
- Получение условия глобальной разрешимости и оценок для фронта нелинейной задачи теплопроводности с поглощением, включая случай сильного поглощения.
- Построение верхних решений задачи Коши алгоритмом нелинейного расщепления для уравнения нелинейной теплопроводности недивергентного вида.
- Определение критического значения параметров для квазилинейного уравнения теплопроводности алгоритмом нелинейного расщепления.
- Разработка разностных схем, алгоритмов и комплекса программ для указанных задач в среде MathCad.

Научная новизна:

- Для нелинейной модели теплопроводности, описываемой вырождающимися уравнениями параболического типа с градиентной нелинейностью, дан способ получения автомодельных и приближенно-автомодельных решений, основанный на алгоритме нелинейного расщепления.
- Получены оценки решений краевой и задачи Коши для уравнения нелинейной теплопроводности с сильным поглощением дивергентного и недивергентного видов.
- Дан способ определения критического значения параметров для квазилинейного уравнения теплопроводности алгоритмом нелинейного расщепления.
- Получены условия возникновения неограниченных решений для уравнения с нелинейным источником в неоднородной среде.
- С учетом полученных оценок решений и фронтов проведено численное исследование процессов с использованием пакета MathCad.

Научная и практическая значимость результатов исследований состоит в развитии теоретических основ математического моделирования для класса квазилинейных уравнений параболического типа, когда коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при изучении математических моделей нелинейных процессов теплопроводности, фильтрации, диффузии, а также в дальнейшем развитии теории нелинейных параболических уравнений. Полученные условия, при которых имеют место нелинейные эффекты распространения температуры за конечное время, локализация решений и т.п. могут быть использованы при решении других нелинейных задач математической физики.

Реализация результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Методы и результаты, примененные в диссертации, могут быть использованы для решения других классов нелинейных задач и использованы при чтении специальных курсов.

Апробация работы. Основные результаты исследований были доложены на: Международной научной конференции, посвященной 1200 летию Ахмада Ал-Фергани (г. Фергана, 1998); Международной научной конференции CAIM99 (Romania, Piteshti, 1999); Республиканской научной конференции «Перспективные информационные технологии: Современные проблемы алгоритмизации и программирования» (Ташкент, 2001); Международном конгрессе математиков «International Congress of Mathematicians» (Пекин, 2002); Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Усть-Каменогорск, 2003); Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Алматы, 2004); Международной научной конференции «Актуальные проблемы современной математической науки» (Ош, 2005); Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Павлодар, 2006); Республиканской научно-практической конференции «Роль женщин-ученых в развитии и научно-техническом прогрессе» (Ташкент, 2006); IX Всероссийской конференции «Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф» (Барнаул, 2007); III конгрессе Всемирного математического общества тюркоязычных стран (Алматы, 2009); Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2009» (Ташкент, 2009); VI ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» посвященной памяти академика С.Х.Сираждинова (Фергана, 2011), а также на семинарах кафедры Информатики и прикладного программирования Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Опубликованность результатов. По теме диссертационной работы опубликовано 19 работ, в том числе 4 журнальные статьи и 14 работ в виде материалов и тезисов международных конференций, а также получен 1 патент Государственного патентного ведомства Республики Узбекистан

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 137 страниц и состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы из 110 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа посвящена исследованию нелинейных математических моделей, описывающих процессы теплопроводности в неоднородной нелинейной среде при наличии источника или поглощения, когда коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры, изучению асимптотики процесса при критическом значении параметра, а также численному исследованию нелинейных процессов, описываемых уравнением с градиентной нелинейностью следующего вида:

$$Lu \equiv -u_t + P(u)\nabla\left(|x|^m K(\nabla u)\nabla u\right) + \varepsilon\gamma(t,x)F(u) = 0, \quad x \in R^N \qquad (1)$$

где $P(u) \ge 0$, $K(\nabla u) \ge 0$, $F(u) \ge 0$ при $u \ge 0$ – неотрицательные функции, $m \ne 0$, $N \ge 1$, $\varepsilon = \pm 1$, $0 < \gamma(t,x) \in C(0,\infty)$, $P(0)=0$, $K(0)=0$, $F(0)=0$ в области $Q = \{(t,x): t > 0, x \in R^N\}$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ge 0, \qquad x \in R^N; \qquad (2)$$

здесь $\nabla(.)$ означает $\underset{x}{grad}(.)$, коэффициент $|x|^m$, где $m>0$ – характеризует неоднородность среды.

Хотя уравнение (1) описывает многие физические явления, для определенности будем считать, что $u(t,x)$ означает температуру в точке x в каждый момент времени $t > 0$. Относительно $u_0(x)$ предполагается, что

$$u_0(x) \ge 0, \qquad |x|^m K(\nabla u_0)\nabla u_0 \in C(R^N), \qquad x \in R^N, \qquad (3)$$

$$\text{mes supp } u_0(x) < +\infty, \quad \sup u_0(x) < +\infty, \quad x \in R^N.$$

В (1) $P(u)$ – коэффициент проницаемости среды, а $F(u)$ – мощность объемных источников $(\varepsilon = +1)$ или поглощения $(\varepsilon = -1)$.

Будем рассматривать случай, когда $K(\nabla u) = |\nabla u|^{n-1}$. Здесь $n > 1$ – параметр нелинейности, значения которого различны для различных физических явлений и который характеризует нелинейность среды. При исследовании конкретного объекта значение n определяется экспериментально.

В основном, если не оговорено особо, будем изучать решения задачи (1),(2) которые трактуются как обобщенные, обладают свойством $u(t,x)$, $|x|^m K(\nabla u)\nabla u \in C(Q)$ и удовлетворяют уравнению (1) в смысле распределения. Именно с точки зрения приложений такие решения имеют смысл.

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и значимость полученных результатов, дано краткое изложение основных результатов диссертации.

В **первой главе** приводятся постановка задачи, краткий обзор исследований, относящихся к теме диссертации, а также некоторые вспомогательные утверждения и определения, необходимые для дальнейшего изложения результатов.

В **параграфе 1.2** дан краткий обзор некоторых результатов по исследованию уравнения теплопроводности с градиентной нелинейностью.

В **параграфе 1.3** приводятся вспомогательные утверждения, определения и теоремы сравнения решений, используемые в работе.

Определение 1. Если для $\forall t > 0$ существует функция $l(t) > 0$ такая, что $u(t,x) \equiv 0$ в $|x| \in (l(t), +\infty)$, то говорят, что имеет место *конечная скорость распространения возмущений*.

Определение 2. Решение задачи (1),(2) называется *локализованным*, если для $0 < t < T < +\infty$ существует $0 < L < +\infty$, что $u(t,x) \equiv 0$ в $|x| \in (L,+\infty)$.

Определение 3. Функция $u_+(t,x)$ $\left(u_-(t,x)\right)$ называется *верхним (нижним) решением* задачи (1), (2), если в Q удовлетворяется условие

$$L\left(u_+\left(t,x\right)\right) \le 0 \qquad \left(L\left(u_-\left(t,x\right)\right) \ge 0\right),$$

$$\text{и } u_0\left(x\right) \le u_+(0,x) \qquad \left(u_0\left(x\right) \ge u_-(0,x)\right).$$

Определение 4. *Свободной границей (фронтом волны)* называется точка с координатой $x_\phi(t)$, $t > 0$ такая, что

$$u(t,|x|) = 0, \quad |x| \ge x_\phi(t); \quad u(t,|x|) > 0, \quad |x| < x_\phi(t).$$

Функция $x_\phi(t)$ определяет глубину проникновения переднего фронта возмущений в нелинейную среду.

Во **второй главе** исследуется процесс нелинейной теплопроводности в одномерном случае. В **параграфе 2.1** с использованием алгоритма нелинейного расщепления доказана глобальная разрешимость первой краевой задачи для уравнения с линейной мощностью поглощения.

В $Q = \{(t,x) : t > 0, x \in R_+\}$ изучаем краевую задачу

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \gamma(t)u = 0 \ , \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \ge 0 \ , \ x \in R, \quad u\big|_{x=0} = \psi(t), \tag{5}$$

где $n>1$, описывающую процесс нелинейной теплопроводности при наличии поглощения, мощность которого равна $\gamma(t)u$.

В предположении, что $u_0(x)$ – финитная функция и $\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \in C(R_+)$, $0 < \gamma(t) \in C(0,\infty),\ 0 < \psi(t) \in C^1(0,\infty)$, доказана следующая

Теорема.2.1.1. Пусть $-\frac{\psi'(t)\cdot\tau(t)}{\psi^n(t)}\exp((n-1)\int_0^t \gamma(\eta)d\eta) \le \frac{1}{n+1}$ и $u_0(x) \le z(0,x), \quad x \in R_+$, где $z(t,x) = \psi(t)\exp(-\int_0^t \gamma(\eta)d\eta)\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \xi^{\frac{n+1}{n}}\right)_+^{\frac{n}{n-1}}$,

$\xi = x/\left[\tau(t)\right]^{\frac{1}{n+1}}$, $\tau(t) = \int_0^t \psi^{n-1}(\eta)\exp(-(n-1)\int_0^\eta \gamma(\omega)d\omega)d\eta$, $(a)_+ = \max(0,a)$.

Тогда задача (4), (5) глобально разрешима и для обобщенного решения справедлива оценка $u(t,x) \le z(t,x)$ в Q, а для фронта (свободной границы) имеет место оценка $l(t) = |x| \le (n+1)\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}[\tau(t)]^{\frac{1}{n+1}}$.

Из полученной оценки для фронта следует, что, так как преобразованная переменная τ зависит от $\gamma(t)$, то, следовательно, характер изменения мощности поглощения тепловой энергии со временем влияет на скорость движения фронта тепловой волны. В данном случае получаем улучшенные оценки для верхнего решения и фронта температурных возмущений. С учетом зависимости $\tau(t)$ заметим, что если зависимость $\gamma(t)$ такова, что $\tau\to\tau_{max}<\infty$ при $t\to\infty$, то будет иметь место эффект остановки фронта тепловой волны и тепловые возмущения проникнут на конечное расстояние l_{max}, т.е.

$$|l(t)|\le l_{\max}=(n+1)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}\tau_{\max}^{\frac{1}{n+1}} \quad .$$

Если для некоторых $\gamma(t)$ $\tau\to\infty$ при $t\to\infty$, то эффекта остановки фронта тепловой волны не будет, и возмущения проникнут неограниченно далеко. Отсюда сделаем вывод, что для растущей со временем мощности поглощения тепловой энергии эффект пространственной локализации тепловых возмущений будет иметь место всегда. При уменьшающейся же со временем мощности поглощения $(\gamma(t)\to 0$ при $t\to\infty)$ эффект остановки фронта тепловой волны может не наблюдаться.

В **параграфе 2.2** на основе алгоритма нелинейного расщепления в $Q=\{(t,x):\ t>0, x\in R_+^1\}$ изучается краевая задача

$$Lu\equiv-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)-\gamma(t)u^{\beta}\ , \tag{6}$$

$$\beta, kn>1,\quad x\in R_+^1,\quad t\in R_+^1,\quad 0<\gamma(t)\in C(R_+^1)\,,$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\ x\in R_+^1,\quad u|_{x=0}=\psi(t),\ \ t>0,\ \ \psi(t)\in C^1(R_+^1)\ , \tag{7}$$

которая является математической моделью процессов переноса, в случае степенной зависимости коэффициентов переноса от переносимой величины и ее градиента $\frac{\partial u}{\partial x}$. В частности, при $n=1$ уравнение (6) можно рассматривать как уравнение нелинейной теплопроводности, а при $k=1$ – как уравнение переноса импульса в неньютоновской дилатантной жидкости. В общем случае $k,n\neq 1$ уравнение (6) известно как уравнение турбулентной фильтрации.

Введем обозначения:

$$\bar{u}(t)=\left[1+(\beta-1)\int_0^t\gamma(t)dt\right]^{-\frac{1}{\beta-1}},$$

$$u_+(t,x)=\tilde{u}(t)\overline{f}(\xi),\qquad \tilde{u}(t)=\bar{u}(t)\cdot\psi(t)\,,$$

$$\overline{f}(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{kn-1}},\qquad \xi=\frac{|x|}{[\tau(t)]^{\frac{1}{n+1}}}\,,$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\int\limits_0^t[\overline{u}(\eta)]^{kn-1}d\eta, \text{ если } kn\neq 1\\ \\ T+t \qquad\qquad ,\text{если } kn=1,\\ \end{cases}$$

где $b=\dfrac{kn-1}{k(n+1)}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad a>0, \quad \psi(0)>0.$

Доказана следующая

Теорема 2.2.1. Пусть *u(t,x)* – обобщённое решение задачи (6), (7). Тогда существует глобальное решение задачи (6),(7), для которого в области *Q* справедлива оценка

$$u(t,x)\le u_+(t,x),$$

если выполнены условия

$$-\tau(t)\tilde{u}_t\tilde{u}^{-kn}\le\frac{1}{n+1}; \quad u_0(x)\le u_+(0,x),$$

где $\tilde{u}(t),\ u_+(t,x),\ \tau(t)$ – определенные выше функции.

В **параграфе 2.3** с использованием метода эталонных уравнений построена асимптотика решения стационарного уравнения.

В **параграфе 2.4** приведены разностные схемы и методы решения. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что при использовании в качестве начального приближения предложенные нами приближенно-автомодельные решения дают быструю сходимость, согласующаяся с теоретической.

В **третьей главе** исследован процесс нелинейной теплопроводности в многомерном случае.

В **параграфе 3.1** изучены математические модели, описывающие процессы теплопроводности в неоднородной среде квазилинейным уравнением с градиентной нелинейностью при наличии сильного поглощения $(0<\beta<1)$. Введем обозначения:

$$u_1(t)=\left(T+\gamma(1-\beta)t\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}, \quad \tau(t)=\int\limits_0^t u_1^{n-1}(\eta)d\eta,$$

$$f_0(\xi)=\left[\left(c-b\xi^{\frac{n+1}{n}}\right)_+\right]^{\frac{n}{n-1}} \quad \xi=\frac{|x|}{\tau(t)^{\frac{1}{n+1}}}, \ c>0 \text{ – постоянная},$$

$$b=\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad z(t,x)=u_1(t)\,f_0(\xi).$$

Доказана следующая

Теорема 3.1.2. Пусть в (1) $0<\beta\le 2-n-\dfrac{n+1-m}{N}$, $n+1>m$, $u_0(x)\le z(0,x),\ x\in R^N$, $P(u)=1$, $\gamma(t)=\gamma=const.$

Тогда для решения задачи (1),(2) в Q имеет место оценка $u(t,x)\le z(t,x)$, где $z(t,x)$ – определенная выше функция.

Получена оценка для фронта $x_\phi(t)$ (свободной границы)

$$\left|x_\phi(t)\right|\le\left[\frac{n+1-m}{n+1}\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}\tau(t)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n+1-m}}.$$

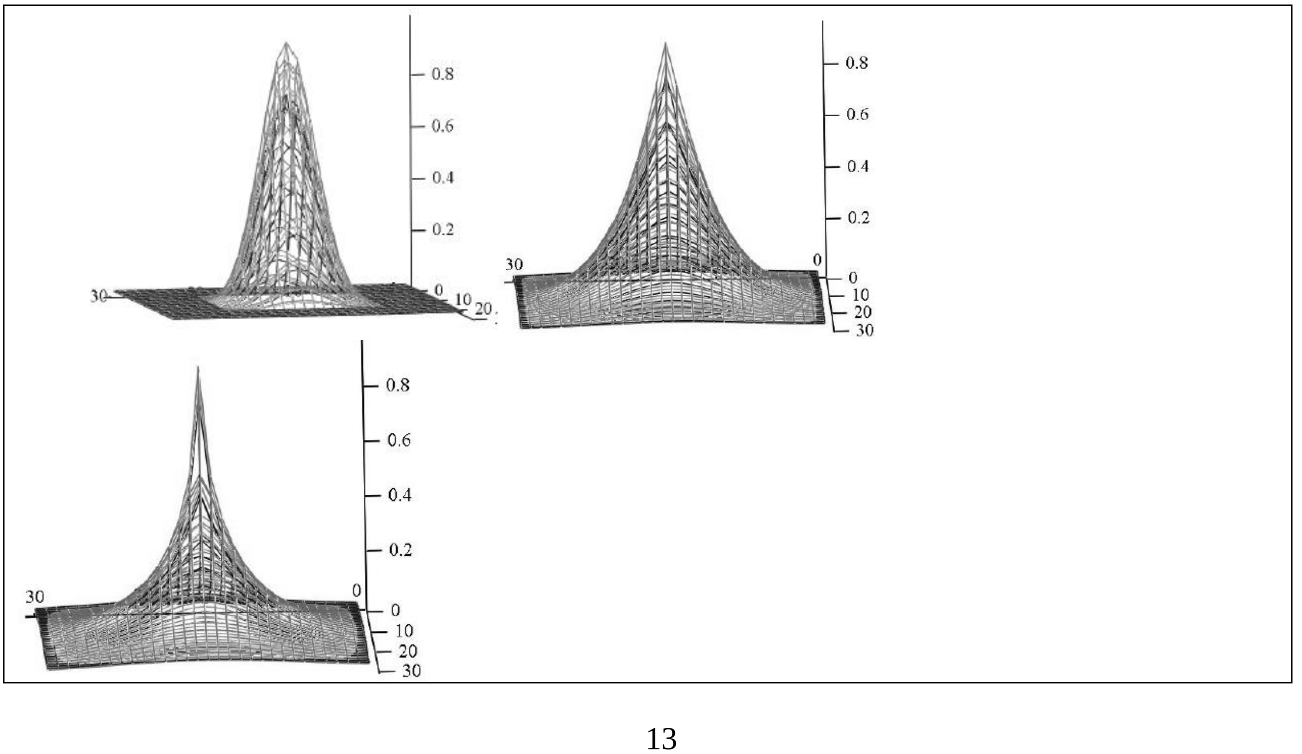
Отметим, что функция $z(t,x)$ при $\beta\to 1$ превращается в решение Л.К.Мартинсона и К.Б.Павлова.

Далее приведены результаты вычислительных расчетов, выполненных для исследуемой задачи. При выполнении вычислительного эксперимента в качестве начального приближения взята функция

$$u(t,x)=\left(1+\gamma(1-\beta)t\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}\left[\left(c-b\left|\xi\right|^{\frac{n+1}{n}}\right)_+\right]^{\frac{n}{n-1}},\quad b=\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

С использованием построенного верхнего решения, получена оценка для решения и свободной границы (фронта). Используя оценку для фронта, вместо задачи Коши решена краевая задача с нулевым значением на границе *x=l(t), t>0*.

На основе полученных данных построены графики (Рис.1-3), из которых видно, что с увеличением значения параметра m, который характеризует неоднородность среды, область возмущений сокращается.



a) m = 0 Рис.1	*b) m = 0.9* Рис.2	*c) m = 1.4* Рис.3

В **параграфе 3.2** получены условия глобальной разрешимости и неразрешимости, а также исследованы некоторые свойства решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения с источником.

В **параграфе 3.3** дается способ получения двусторонней оценки решения задачи (1), (2), когда $P(u)=1$, $m=0$.

В **параграфе 3.4** изучены свойства решений задачи (1), (2) для уравнения недивергентного вида с градиентной нелинейностью, когда $P(u)=u^p$.

Справедлива следующая

Теорема 3.4.1. Пусть $\gamma(t)=const$,

$$0<\alpha<2-kn-\frac{n+1}{s},\quad \alpha=\frac{\beta-p}{1-p},\ v_0(x)\le v_+(0,x),\quad x\in R^N,$$

$$s=\frac{N(n+1)}{n+1-m},\quad k=\frac{1}{1-p}\ .$$

Тогда в Q существует глобальное решение задачи (1), (2), для которого справедлива оценка

$$v(\tau,x)\le v_+(\tau,x),$$

где $v_+(\tau,x)=\bar v(\tau)\cdot f_0(\xi)$,

здесь $v=u^{1-p}$, $\quad \bar v(\tau)=\left[T+(\alpha-1)(1-p)\int_0^\tau \gamma(t)dt\right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}$

и $f_0(\xi)=\left(a-b|\xi|^{\frac{n+1}{n}}\right)_+^{\frac{n}{nk-1}},\ a>0,\ b=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{kn-1}{k(n+1)},\ kn\ne 1$.

Получены условия локализации решения, глобальная разрешимость задачи в зависимости от значения параметров среды и мощности поглощения (источника) $\gamma(t)u^\beta$, оценки решений и фронтов. Показано, что удовлетворительные численные результаты могут быть получены на основе качественного предварительного изучения свойств решений в зависимости от значений входящих в исходное уравнение параметров. При этом в качестве начального значения взято приближенное решение, построенное при помощи алгоритма нелинейного расщепления. На рис.4, 5 показано влияние параметра p на течение процесса.

Случай, когда $p=0,\quad m=0,\quad \gamma=0.5,\quad \beta=0.5,$ $n=1.1,\ \varepsilon=10^{-3}$	Случай, когда $p=0.8,\ m=0,\ \varepsilon=10^{-3}$, $\gamma=0.5,\quad \beta=0.5,\quad n=1.1$

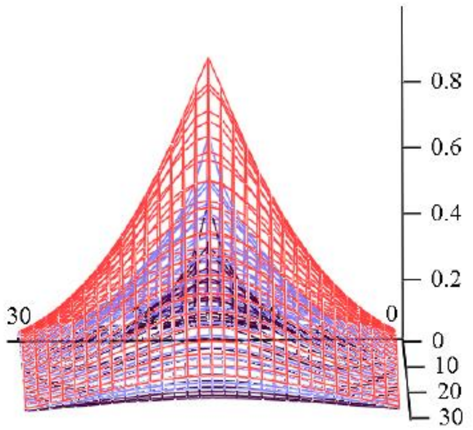


Рис.4

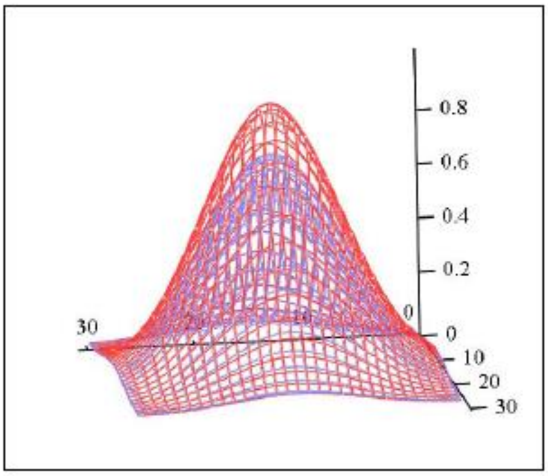


Рис.5

В **параграфе 3.5** приведен способ определения критического значения параметра, при котором меняется поведение решения. С использованием алгоритма нелинейного расщепления получена оценка для фронта.

Доказано, что значение

$$\gamma(t)\tau(t)\bar{v}^{\alpha-kn}=\frac{s}{n+1},$$

где $\bar{v}(\tau)=\left[T+(\alpha-1)(1-p)\int\limits_0^t\gamma(\eta)d\eta\right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}$, T > 0 постоянная, а $\tau(t)=\int\limits_0^t\left[\bar{v}(\eta)\right]^{kn-1}d\eta$, является критическим значением параметров при $0<\gamma(t)\in C(0,\infty)$.

В частном случае, когда $\gamma(t)=\gamma=const, m=p=0$, имеем результат В.А.Галактионова $\beta=n+\frac{n+1}{N}$, при *n=1*, $m=p=0,\gamma(t)=const$ – результат Н.Фужите для полулинейного случая $\beta=1+\frac{2}{N}$.

Нами рассмотрен случай $\gamma(t)=(T+t)^{\mu}$, $m\neq 0, p=0$, для которого критическим значением является $\beta=\beta^{*}=1+(\mu+1)(kn-1)+\frac{n+1-m}{N}$. На рис.6 показано течение процесса теплопроводности в неоднородной среде с поглощением.

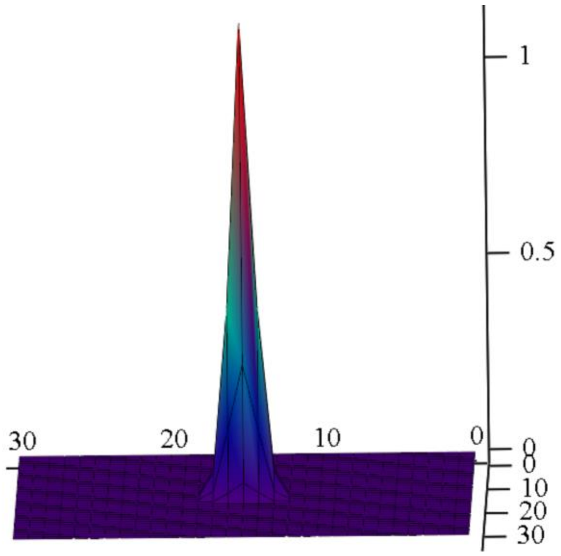


Рис.6

В **параграфе 3.6** приведены разностные схемы и методы решения, а в **параграфе 3.7** – анализ результатов численных экспериментов. Поставленная задача аппроксимирована по неявной схеме переменных направлений (продольно-поперечная схема). Для решения системы разностных уравнений используется метод итераций. Линеаризация строилась по методу Пикара, Ньютона и специальным способом, предложенным М.М.Ариповым. В случаях $\beta < 1, \beta = 1$ берется линеаризация по Пикару. В случае $\beta > 1$ можно использовать линеаризацию по методу Ньютона и специальный способ. При хорошем начальном приближении для достижения одинаковой точности, как и ожидалось, метод Ньютона (с квадратичной сходимостью) требует меньше итераций, чем метод Пикара и специальный способ линеаризации. В отдельных случаях установлено, что специальный способ дает более быструю сходимость, чем метод Пикара.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Арипову Мирсаиду Мирсиддиковичу за постоянное внимание, помощь в работе, обсуждение результатов и ценные замечания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа представляет собой исследование проблем моделирования процессов теплопроводности в условиях градиентной нелинейности методами нелинейного расщепления и эталонных уравнений. Показано, что одним из эффективных методов исследования автомодельных решений для квазилинейных уравнений параболического типа с градиентной нелинейностью является метод нелинейного расщепления.

Полученные результаты сводятся к следующим основным выводам:

- Получены оценки для решений первой краевой задачи и фронта (свободная граница) в зависимости от значений параметров среды и размерности пространства.
- Получены условия глобальной разрешимости и оценки для фронта нелинейной задачи теплопроводности с линейной мощностью поглощения.
- Построено верхнее решение задачи Коши алгоритмом нелинейного расщепления для уравнения нелинейной теплопроводности с сильным поглощением дивергентного и недивергентного видов.
- Дан способ определения критического значения параметра путем применения алгоритма нелинейного расщепления. Получен результат, который показывает эффективность алгоритма нелинейного расщепления для определения фронта.
- Получены условия глобальной разрешимости и неразрешимости, а также исследованы некоторые свойства решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения с источником.
- Для решения уравнения недивергентного вида с градиентной нелинейностью при наличии источника или поглощения в задаче Коши получены условия локализации решения, глобальная разрешимость задачи в зависимости от значения параметров среды и мощности поглощения (источника) $\gamma(t)u^{\beta}$, оценки решений и фронтов. Показано, что удовлетворительные численные результаты могут быть получены на основе качественного предварительного изучения свойств решений в зависимости от значений входящих в исходное уравнение параметров. При этом в качестве начального значения взяты функции, построенные при помощи алгоритма нелинейного расщепления.
- Разработаны разностные схемы, алгоритмы и программы для поставленных задач в среде MathCad, проведен анализ результатов на основе полученных оценок решений и фронтов.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Арипов М., Кабилжанова Ф.А. Об одном способе построения верхних и нижних решений в задаче нелинейной теплопроводности. В сб. «Алгоритмы и численные методы решения задач прикладной механики и управления». – Ташкент, 1986. – С.103-108.
2. Кабилжанова Ф.А. К асимптотике решения задачи нелинейной неньютоновской политропической фильтрации при критическом значении параметра. // Механика и ее применения: Тез. докл. науч. конф., – Ташкент, 1993. – С.76-77.
3. Кабилжанова Ф.А. Об асимптотическом представлении решения для одного квазилинейного уравнения параболического типа // Вестник ТашГУ. – Ташкент, 1998. – С. 30-32.
4. Кабилжанова Ф.А. Асимптотика решений для одной нелинейной задачи теплопроводности. // Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа: Тез. докл. межд. науч. конф. – Фергана, 1998. – С.97-99.
5. Арипов М., Кабилжанова Ф.А. К влиянию испарения в задаче нелинейной фильтрации // Суюкликлар куп фазали аралашмалар ва туташ мухитларда тулкинларни таркалишининг долзарб муаммолари. – Ташкент, 1999. – С.212-215.
6. Kabiljanova F.A. To an Asymptotic of a Solution of the Problem of a Polytropic Filtration under Critical Value of a Parameter // Abstract CAIM 99, Romania, Pitesti, 1999.
7. Кабилжанова Ф.А. К распространению тепла в неоднородной среде с поглощением //Перспектив информацион технологиялар: «Алгоритмлаш ва дастурлашнинг замонавий муаммолари». – Тошкент, 2001. – С.173-174.
8. Kabiljanova F.A. On Behaviour of Free Boundary in a Problem of Diffusion with Gradient Nonlinearity and Absorption // Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. International Congress of Mathematicians. – China, Beijing, 2002. – P. 375.
9. Арипов М., Кабилжанова Ф.А. Об оценке свободной границы в задаче нелинейной фильтрации с градиентной нелинейностью и поглощением //Вестник ВУЗов. – Ташкент, 2003. – № 1-2. – С.3-9.
10. Арипов М., Хайдаров А., Кабилжанова Ф.А. Численное моделирование нелинейных диффузионных процессов с поглощением //Вычислительные технологии. Т.8, Региональный вестник Востока 3(19). (Совместный выпуск. Ч. 4). – Новосибирск-Алматы, 2003. – С.79-83.
11. Кабилжанова Ф.А. Глобальная разрешимость задачи Коши для одного дифференциального уравнения с градиентной нелинейностью с сильным поглощением. //Вычислительные технологии. Т.9. Вестник КазНУ им.Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика, №3(42). (Совместный выпуск. Ч. 2). – Новосибирск-Алматы, 2004. – С. 272-277.
12. Арипов М., Кабилжанова Ф.А. К локализации решений для одного квазилинейного уравнения параболического типа //Известия ВУЗов.

Специальный выпуск. Материалы международной конференции “Актуальные проблемы современной математической науки”. – Ош, 2005. – С.32-35.

13. Арипов М., Кабилжанова Ф.А., Ибрагимов Р.Ш. Численное моделирование и визуализация процесса реакции-диффузии в недивергентном случае // Труды международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». Т.1. – Павлодар, 2006. – С. 126-132.

14. Арипов М., Хайдаров А., Кабилжанова Ф.А., Ибрагимов Р.Ш. Комплекс программ для численного моделирования нелинейных задач теплопроводности в среде MathCad // Государственное патентное ведомство Республики Узбекистан. Свидетельство № DGU 01138. 31.08.2006 г.

15. Кабилжанова Ф.А. Численное моделирование задачи Коши для нелинейного параболического уравнения с источником // Роль женщин-ученых в развитии научно-технического прогресса: Материалы республиканской научно-практической конференции. – Ташкент, 2006.

16. Кабилжанова Ф.А. К асимптотике решений одного класса квазилинейного дифференциального уравнения с сингулярной нелинейностью // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Тез. докл. IX Всероссийской конференции. – Барнаул, 2007. – С.47.

17. Kabiljanova F.A. Localization of the solution for a nonlinear heat conductivity equation of nondivergent kind with absorption //Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Volume 2. – Almaty, 2009. –P.150.

18. Кабилжанова Ф.А. Об автомодельных решениях одной системы реакции-диффузии недивергентного типа // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2009: Тез. докл. международной конференции. –Ташкент, 2009. –С.105-106.

19. Арипов М., Кабилжанова Ф.А. Асимптотика решения стационарного уравнения теплопроводности // Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения: Материалы VI ферганской конференции посвященной памяти академика С.Х.Сираждинова. – Фергана, 2011. –С.201-204.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Кабилжанова Фируза Азимовнанинг 05.13.18 – *Математик моделлаштиришнинг назарий асослари* ихтисослиги бўйича «Градиент чизиқсизликка эга бўлган ҳолда иссиқлик ўтказиш жараёнларини сонли моделлаштириш» мавзусидаги диссертация

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: градиент чизиқсизлик, сонли моделлаштириш, чизиқсиз ажратиш алгоритми, ечимларни солиштириш теоремалари, автомодель ва тақрибий-автомодель ечимлар, ечим асимптотикаси, локализация, итерациялар усули.

Тадқиқот объектлари: иссиқлик тарқалиш жараёнларини ифодаловчи градиент чизиқсизликка эга бўлган квазичизиқли параболик тенгламалар.

Ишнинг мақсади: бир жинсли ва бир жинслимас муҳитда, ютилиш ёки манба қувватини инобатга олган ҳолда, иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температуранинг градиентига боғлиқ бўлган квазичизиқли параболик тенгламалар билан ифодаланувчи чизиқсиз математик моделлар ечимларининг хусусиятларини ўрганиш.

Тадқиқот усуллари: чизиқсиз ажратиш алгоритми, ечимларни солиштириш методикаси, итерацион сонли усуллар, ўзгарувчан йўналишлар ва прогонка усуллари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: градиент чизиқсизликка эга бўлган иккинчи тартибли квазичизиқли параболик тенгламалар учун чизиқсиз ажратиш алгоритми асосида асимптотик назария яратилди. Дивергент ва нодивергент кўринишдаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун, кучли ютилиш мавжуд бўлган ҳолда, чизиқсиз ажратиш алгоритми асосида Коши масласининг ечими баҳоланди. Критик ҳолда ечимларнинг асимптотикаси ўрганилди. Бир жинслимас муҳитда чегараланмаган ечимларнинг ҳосил бўлиш шартлари олинди. Фронт ва ечимлар учун олинган баҳоларга асосланиб, MathCad пакети ёрдамида хисоблаш экспериментлари утказилди.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий характерга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар математик физиканинг чизиқсиз масалаларини моделлаштиришда ва чизиқсиз параболик тенгламалар назариясини ривожлантиришда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: олинган натижалардан чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик, фильтрация, диффузия жараёнларини моделлаштиришда ва махсус курсларни ўқитишда фойдаланиш мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Кабилжановой Фирузы Азимовны на тему: «Численное моделирование процессов теплопроводности с градиентной нелинейностью» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – *Теоретические основы математического моделирования*

Ключевые слова: градиентная нелинейность, численное моделирование, алгоритм нелинейного расщепления, теоремы сравнения решений, автомодельные и приближенно-автомодельные решения, локализация, асимптотика решения, метод итераций.

Объекты исследования: квазилинейные параболические уравнения с градиентной нелинейностью, описывающие нелинейные процессы теплопроводности.

Цель работы: исследование качественных свойств решений нелинейных математических моделей, описывающих процессы теплопроводности, в однородной и неоднородной среде, когда коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры, с учетом поглощения или источника.

Методы исследования: алгоритм нелинейного расщепления, методика сравнения решений, итерационные численные методы, методы переменных направлений и прогонки.

Полученные результаты и их новизна: для квазилинейных уравнений параболического типа с градиентной нелинейностью второго порядка разработана асимптотическая теория, основанная на алгоритме нелинейного расщепления. Получены оценки решений задачи Коши алгоритмом нелинейного расщепления для уравнения нелинейной теплопроводности с сильным поглощением дивергентного и недивергентного вида. Дан способ определения критического значения параметра путем применения алгоритма нелинейного расщепления. Получены условия возникновения неограниченных решений для уравнения с нелинейным источником в неоднородной среде. На основании полученных оценок решений и фронтов проведен вычислительный эксперимент с использованием среды MathCad.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при моделировании нелинейных задач математической физики, а также в дальнейшем развитии теории нелинейных параболических уравнений.

Область применения: полученные результаты можно использовать при моделировании нелинейных процессов теплопроводности, фильтрации, диффузии и при чтении специальных курсов.

RESUME

thesis of Kabiljanova Firuza Azimovna on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in Physics and Mathematics, on specialty 05.13.18 - *Theoretical bases of mathematical modeling*, subject: «Numerical modeling of processes heat conductivity with gradient nonlinearity»

Key words: gradient nonlinearity, numerical modeling, algorithm of nonlinear splitting, theorems of comparison of the solutions, self similar and approximate self similar solutions, localization, asymptotes of the solution, method of iterations.

Subjects of research: quasilinear parabolic equations with the gradient nonlinearity, describing nonlinear processes heat conductivity.

Purpose of work: the research of qualitative properties solutions of nonlinear mathematical models, in homogeneous and heterogeneous environment, when coefficient heat conductivity depends on a gradient of temperature, in view of absorption or source.

Methods of research: algorithm of nonlinear splitting, technique of comparison of the solutions, iterative numerical methods, method of variable directions and prorace method.

The results obtained and their novelty: for the quasilinear parabolic equations with the gradient nonlinearity of the second order develops of asymptotic theory based on a method of nonlinear splitting. The estimations of the decisions problem of Cauchy by algorithm of nonlinear splitting for the nonlinear heat conductivity equation with strong absorption divergent and non divergent types are received. Asymptotic behavior of the solution in a critical case is investigated. The conditions of occurrence of the unlimited solutions for the equation with a nonlinear source in heterogeneous media are received. Basing on the received estimations of the solutions and fronts, the computing experiments with use MathCad is carried out.

Practical value: results of the dissertation have theoretical character.

Degree of embed and economic efficiency: the results of the dissertation can be used in modeling nonlinear problems of mathematical physics and further in developing on the theory of nonlinear parabolic equations.

Field of application: the results of the dissertation can be used in modeling nonlinear processes heat conductivity, filtration, diffusion and on the base of achieved results, the special courses for students can be teached.